

# Többszörös függvények differenciálszámítása

-75-

## Parciális deriváltak

Két dimenzióban:

Def: Legyen  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Legyen  $(a, b)$  belső pontja  $D$ -nek (azaz  $\exists U \subseteq \mathbb{R}^2$  környerek  $(a, b)$ -nek, hogy  $U \subseteq D$ ).

$f$  függvény  $x$  szerinti parciális deriváltja  $(a, b)$  pontban:

$$f'_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Megjegyzés: ha  $y = b$  rögzített,  $x \mapsto f(x, b)$  egyváltozós függvény (skalár - skalár függvény), tehát a fenti definícióban egy egyváltozós függvény differenciálhányadosát keressük.

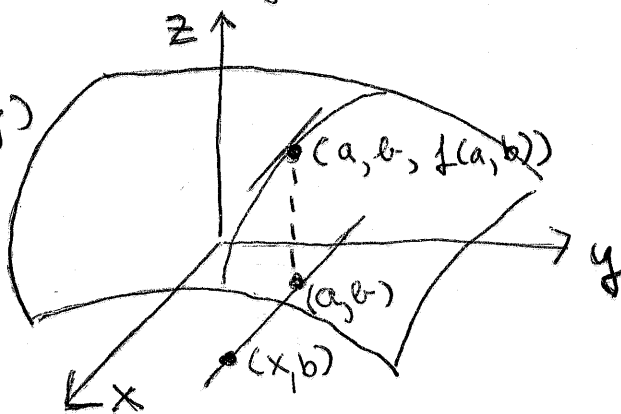
$f$  függvény  $y$  szerinti parciális deriváltja  $(a, b)$ -ben:

$$f'_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

Megjegyzés: most  $x = a$  rögzített,  $y \mapsto f(a, y)$  egyváltozós függvény deriváltját keressük.

Geometria  
jelentés:

$z = f(x, y)$   
felület



$f'_x(a, b)$  a  $z = f(x, y)$  felület azon,  $(a, b, f(a, b))$  pontba húzott érintőjének

a meredeksége, amely benne van az  $y=b$  síkban.  
Hasonló geometriai jelentése van  $f'_y(a,b)$ -nek.

### Példa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Láttuk a 64-65. oldalon, hogy  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

határérték nem létezik, tehát  $f$  nem is folytonos  $(0,0)$ -ban.

A parciális deriváltak aronban léteznek  $(0,0)$ -ban:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x \cdot 0}{\sqrt{x^2+0^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

itt  $y=0$  göröket!

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot 0 \cdot y}{\sqrt{0^2+y^2}}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

2. Példa: Parciális derivált meghatározása  
formálisan, a differenciálási szabályok alkalmazásával

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 \sin x \quad (a,b) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

$$f'_x(x,y) \stackrel{\uparrow}{=} 6xy + y^3 \cos x$$

$y$ -t konstansnak tekintem,  $x$  szerint deriválok

$$f'_x\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 6 \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 1^3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 3\pi$$

$$f'_y(x,y) \stackrel{\uparrow}{=} 3x^2 + 3y^2 \sin x$$

$x$ -et tekintem konstansnak

$$f'_y\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi^2 + 3$$

## Parciális derivált definíciója $n$ dimenziós értelmezési tartomány esetén:

Def: Legyen  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vektor - skalár függvény  
 $\mathbb{R}^n \ni \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

Legyen  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  belső pontja  $D$ -nek.

Legyen  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Ekkor

$f$   $x_i$  szerinti parciális deriváltja  $\underline{a}$ -ban:

$$f'_{x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

## Totális derivált

A többváltozós függvények totális deriváltjának bevezetése előtt térjünk vissza az egyváltozós függvényekhez.

Ismétlés:

1. Def:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , ahol  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

Tegyük fel, hogy  $a \in \mathbb{R}$  belső pontja  $D$ -nek (azaz

$\exists \delta > 0: (a - \delta, a + \delta) \subseteq D$ ). Azt mondjuk, hogy

$f$  differenciálható  $a$ -ban, ha a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges.

A differenciálhatóság máshogy is definiálható:

2. Def:  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  belső pontja  $D$ -nek.

$f$  differenciálható  $a$ -ban, ha  $\exists q \in \mathbb{R}$  és  $w: D \rightarrow \mathbb{R}$

függvény, hogy  $\lim_{x \rightarrow a} w(x) = 0$  és

$$f(x) - f(a) = q(x - a) + w(x)(x - a) \quad \forall x \in D \text{-re.}$$

Art mondhatjuk, hogy  $f$   $a \in \mathbb{R}$  pontban közelíthető egy lineáris függénnyel.

Allítás : A két definíció ekvivalens.

Bizonyítás : T.f.h  $f$  differenciálható a 2. def. szerint  $a \in \mathbb{R}$  pontban.

$$\text{Ekkor } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x-a) + \sqrt{w(x)(x-a)}}{x-a} = q + \lim_{x \rightarrow a} w(x) = q$$

$\Rightarrow f$  differenciálható az 1. def. szerint is.

Fordítva : tegyük fel, hogy  $f$  differenciálható az 1. def. szerint:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ létezik.}$$

Legyen  $q = f'(a)$ .

$$\text{Legyen } w(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), & \text{ha } x \neq a, \\ 0, & \text{ha } x = a. \end{cases}$$

$$\text{Ekkor } \lim_{x \rightarrow a} w(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy erre a  $q$ -ra és  $w$ -ra teljesül az

$$f(x) - f(a) = q(x-a) + w(x)(x-a)$$



egyenlet.

A második definíciót tudjuk több-változós függvényekre kiterjeszteni!

$n=2$  esetén:

Def :  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a,b)$  belső pontja  $D$ -nek.

Art mondjuk, hogy  $f$  differenciálható  $(a,b)$ -ben,

ha  $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\exists w_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  úgy,

$$\text{hogy } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} w_1(x,y) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} w_2(x,y) = 0$$

és  $f(x,y) - f(a,b) = q_1(x-a) + q_2(y-b) + w_1(x,y)(x-a) + w_2(x,y)(y-b)$   
 $\forall (x,y) \in D$  esetén.

Geometria jelentés:

A  $z = f(x,y)$  felülethez az  $(a,b)$  pontban  $\exists$  érintősík.

Az érintősík egyenlete:

$$z = f(a,b) + q_1(x-a) + q_2(y-b)$$

$q_1(x-a) + q_2(y-b)$  : lineáris főrész

$w_1(x,y)(x-a) + w_2(x,y)(y-b)$  : hibatag (kicsi, ha  $(x,y)$  közel van  $(a,b)$ -hez).

$n \geq 2$  dimenzióban:

Def :  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  belső pontja  $D$ -nek

Azt mondjuk, hogy  $f$  differenciálható  $\underline{a}$ -ban, ha

$\exists q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}$  és  $w_1, w_2, \dots, w_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  függvény

úgy, hogy  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} w_i(\underline{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re, és

$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = \underbrace{q_1(x_1 - a_1) + q_2(x_2 - a_2) + \dots + q_n(x_n - a_n)}_{\text{lineáris főrész}}$$

$$+ w_1(\underline{x})(x_1 - a_1) + w_2(\underline{x})(x_2 - a_2) + \dots + w_n(\underline{x})(x_n - a_n)$$

hibatag  
 (kicsi a főrészhöz képest, ha  $\underline{x}$  közel van  $\underline{a}$ -hoz).

Vektorjelöléssel:

$$\text{grad } f(\underline{a}) := \nabla f(\underline{a}) := (q_1, q_2, \dots, q_n) \leftarrow \text{GRADIENS-vektor}$$

$$\underline{w}(\underline{x}) = (w_1(\underline{x}), w_2(\underline{x}), \dots, w_n(\underline{x}))$$

$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = \nabla f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a}) + \underline{w}(\underline{x}) \cdot (\underline{x} - \underline{a}),$$

belső szorzat

ahol  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \underline{w}(\underline{x}) = 0$

28. Tétel: Ha  $f$  differenciálható  $\underline{a}$ -ban, akkor folytonos is  $\underline{a}$ -ban.

Bizonyítás: Igarolnunk kell, hogy  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$ .

A differenciálhatóság miatt

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \left( \underbrace{f(\underline{a})}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\nabla f(\underline{a})}_{\substack{\downarrow \\ 0}} (\underbrace{\underline{x} - \underline{a}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}) + \underbrace{w(\underline{x})}_{\substack{\downarrow \\ 0}} (\underline{x} - \underline{a}) \right) = f(\underline{a}).$$

A folytonosságból nem követhetik a differenciálhatóság (ert már egyváltozós függvényeknél láttuk).

Most vizsgáljuk meg a parciális deriváltak, meg a totális derivált kapcsolatát.

29. Tétel T.f.h.  $f$  differenciálható  $\underline{a}$ -ban. Ekkor létezik minden változója szerinti parciális differenciálhányadosa  $\underline{a}$ -ban, és

$$q_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \quad q_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}), \quad \dots, \quad q_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a})$$

Bizonyítás  $n=2$ -re:

T.f.h.  $f$  differenciálható  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  pontban

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{q_1(x-a) + w_1(x,b)(x-a)}{x-a} =$$

használjuk:  $f(x,y) - f(a,b) = q_1(x-a) + q_2(y-b) + w_1(x,y)(x-a) + w_2(x,y)(y-b)$   
egyenletet  $y=b$ -vel

$$= \lim_{x \rightarrow a} (q_1 + w_1(x,b)) = q_1$$

$$\text{Hasonlóan: } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = q_2.$$

Feladat: írjuk fel a bizonyítást ketszöleges  $n$ -re!

A 29. Tétel megfordítása nem igaz. Parciális deriválhatóságból nem feltétlenül követhetik a totális differenciálhatóság.

30. Tétel (A differenciálhatóság elegendő feltétele):

T.f.h.  $f$ -nek léteznek a parciális deriváltjai az  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$  pont egy környezetében és ezek folytonosak az  $\underline{a}$  pontban. Ekkor  $f$  differenciálható  $\underline{a}$ -ban.

Bizonyítás  $n=2$ -re: Igazoljuk, hogy létezik a megfelelő  $w_1$  és  $w_2$ , ha  $f$  parciális deriváltjai léteznek  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  egy környezetében és folytonosak  $(a,b)$ -ben.

$$f(x,y) - f(a,b) = (f(x,y) - f(a,y)) + (f(a,y) - f(a,b)) = (*)$$

Ha  $y$  rögzített:

$\varphi(x) := f(x,y)$  egyváltozós függvény

ez differenciálható  $a \in \mathbb{R}$  egy környezetében a tétel feltételei szerint és  $\varphi'(\xi) = f'_x(\xi, y)$

Lagrange - középérték-tétel  $\Rightarrow \exists \xi_1$   $a$  és  $x$  között,

$$\text{hogy } \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi_1)(x-a)$$

$$\text{azaz } f(x,y) - f(a,y) = f'_x(\xi_1, y)(x-a)$$

Hasonlóan  $\exists \xi_2$   $b$  és  $y$  között, hogy

$$f(a,y) - f(a,b) = f'_y(a, \xi_2)(y-b).$$

Tehát

$$(*) = f'_x(\xi_1, y)(x-a) + f'_y(a, \xi_2)(y-b)$$

$$= f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

$$+ \underbrace{(f'_x(\xi_1, y) - f'_x(a, b))}_{=: w_1(x,y)}(x-a) + \underbrace{(f'_y(a, \xi_2) - f'_y(a, b))}_{=: w_2(x,y)}(y-b)$$

$$=: w_1(x,y)$$

$$=: w_2(x,y)$$

A parciális deriváltak folytonosak  $(a,b)$ -ben

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} w_1(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} w_2(x,y) = 0.$$

Tehát  $f$  teljesíti a totális derivált def.-ban szereplő feltételeket. 

Megjegyzés: az előző két csak elegendő feltételt ad a totális derivált létezésére. Van olyan  $f$ , hogy  $f$  parciális deriváltjai "rosszul" viselkednek  $(a,b)$  egy környezetében, a totális derivált mégis létezik. Ene példát olvashatunk a Bagota - Németh - Németh: Analízis II. feladatgyűjteményben (192. feladat).

Feladat: Igazoljuk, hogy  $f(x,y) = \sqrt{x-y^2}$  (totálisan) differenciálható  $(5,1)$ -ben.

Megoldás:  $f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}}$ ,  $f'_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x-y^2}}$

Ebből látható:  $f'_x$  és  $f'_y$  létezik  $(5,1)$  egy környezetében és folytonos  $(5,1)$ -ben.

30. Tétel  $\Rightarrow f$  (totálisan) diff. ható  $(5,1)$ -ben, és  $\nabla f(5,1) = (f'_x(5,1), f'_y(5,1)) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

### Hagyasabbnévi deriváltak

Def: Legyen  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy  $f$   $D$ -n (totálisan) differenciálható. Ha  $f$  parciális deriváltjai ugyaneset (totálisan) differenciálhatóak amely  $a \in D$  belső pontban, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  kétszer differenciálható  $a$ -ban.

Az  $f$  függvény parciális deriváltjainak parciális deriváltjait másodrendű parciális deriváltaknak nevezzük.

Felölés:  $f''_{x_i x_j}$  vagy  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Példa:  $f(x, y) = 3x^2 y + y^3 \sin x$

(Ahogy korábban is, most is  $x, y$ -t inenk

$x_1, x_2$  helyett kétváltozós függvények esetén.)

$$f'_x(x, y) = 6xy + y^3 \cos x$$

$$f'_y(x, y) = 3x^2 + 3y^2 \sin x$$

Másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = (6xy + y^3 \cos x)'_x = 6y - y^3 \sin x$$

$$f''_{yy}(x, y) = (3x^2 + 3y^2 \sin x)'_y = 6y \sin x$$

$$f''_{xy}(x, y) = (6xy + y^3 \cos x)'_y = 6x + 3y^2 \cos x$$

$$f''_{yx}(x, y) = (3x^2 + 3y^2 \sin x)'_x = 6x + 3y^2 \sin x$$

Észrevetel: a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek.

Kérdés: Mindig így van ez? NEM. Elégséges feltételt ad a következő tétel.

31. Tétel: Legyen  $D \subset \mathbb{R}^n$  és  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy  $\underline{a} \in D$  belső pont. Ha  $f$   $x_i$  és  $x_j$  szerinti második vegyes parciális deriváltjai léteznek  $\underline{a}$  egy környezetében és folytonosak  $\underline{a}$ -ban ( $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  és  $i \neq j$ ), akkor

$$f''_{x_i x_j}(\underline{a}) = f''_{x_j x_i}(\underline{a}).$$

## Láncszabály (összetett függvények differenciálása)

32. Tétel: Tegyük fel, hogy az  $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  skalar - skalar függvények differenciálhatóak  $a \in \mathbb{R}$  pontban. Tegyük fel, hogy  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  vektor - skalar függvény differenciálható a  $\underline{a} = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_k(a))$  pontban. Legyen  $F(t) := g(\underbrace{f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)}_{\text{belső függvények}})$   $\forall t \in \mathbb{R}$ -re.

Ekkor az  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  <sup>hülső függvény</sup> skalar - skalar függvény differenciálható  $a$ -ban, és

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} F(t) \right|_{t=a} &= \left. \frac{d}{dt} g(f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)) \right|_{t=a} = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} g(f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)) \cdot \left. \frac{d}{dt} f_i(t) \right|_{t=a}. \end{aligned}$$

Háts jelöléssel:

$$\frac{d}{dt} F(a) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} g(\underbrace{f_1(a), f_2(a), \dots, f_k(a)}_{\underline{a}}) \cdot \frac{d}{dt} f_i(a).$$

Nem bizonyítjuk.

Példa:  $f_1(t) = t^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} f_1(t) = 2t$

Itt:  $k=2$ .

$$f_2(t) = 2t \Rightarrow \frac{d}{dt} f_2(t) = 2$$

$$g(x_1, x_2) = x_1^3 + \cos x_2 \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 3x_1^2 \\ \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= -\sin x_2 \end{aligned}$$

$$F(t) := g(f_1(t), f_2(t))$$

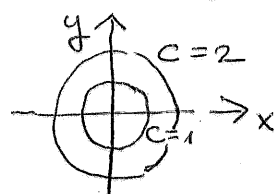
$$\frac{d}{dt} F(t) = 3(t^2)^2 \cdot 2t - \sin(2t) \cdot 2$$

Síntvonalak, a síntvonal és a gradiens kapcsolata ↙ Olvasmány

Def: Adott  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kétváltozós függvény. Legyen  $c \in \mathbb{R}$ . Az  $\{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}$  halmart  $f$  síntvonalának nevezzük.

Példa:  $f(x, y) = x^2 + y^2$  szintvonalai:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\} \leftarrow (0, 0) \text{ köréppontú,}$$



$\sqrt{c}$  sugarú körvonal

Csak  $c \geq 0$ -ra élethet!

Görbe:

Def: Azt mondjuk, hogy  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  görbe, ha

$\exists \varphi: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \gamma$  folytonos függvény.

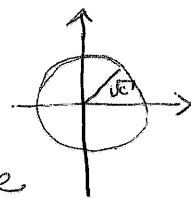
(Tehát a görbe egy folytonos egyváltozós függvény képhalmara).

Példa:  $(0, 0)$  köréppontú  $\sqrt{c}$  sugarú körvonal  $\mathbb{R}^2$ -ben:

$$x = \sqrt{c} \cos t$$

$$y = \sqrt{c} \sin t$$

ahol  $t \in [0, 2\pi]$



síkgörbe

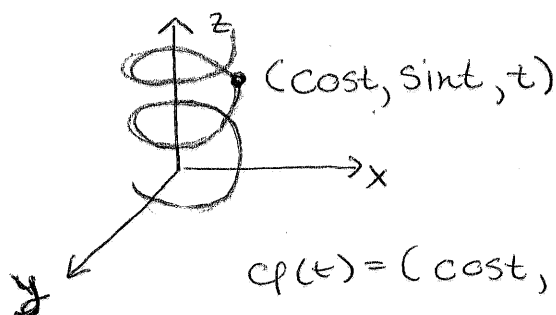
Most  $\varphi(t) = (\sqrt{c} \cos t, \sqrt{c} \sin t)$

Másik példa: Csavarvonal  $\mathbb{R}^3$ -ben

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$z = t$$



$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

A függvények szintvonalai gyakran görbék (lehet felírhatók egy egyváltozós, folytonos függvény képhalmaraaként).

Görbe érintővektora (csak síkgörbén):

Legyen adott egy görbe a síkon:  $x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t)$

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

Feltesszük, hogy  $\varphi$  (azaz  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$ ) differenciálható.

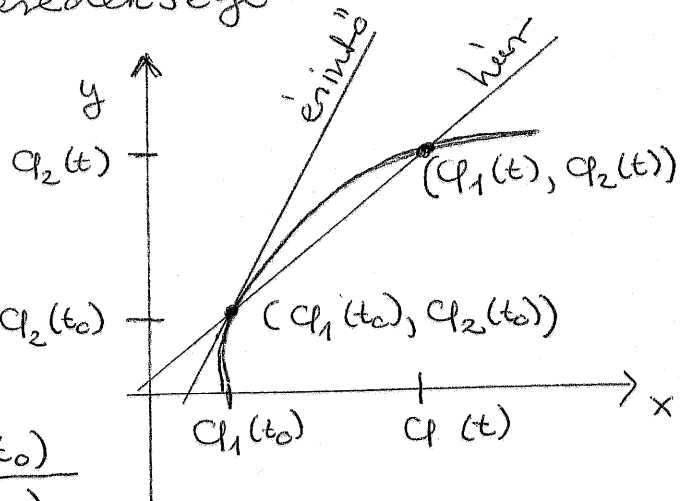
legyen to rögzített. A  $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$  és a  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  pontokon átmenő húr meredeksége:

$$\frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}$$

Most  $t \rightarrow t_0$ :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{t - t_0}}{\frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)}{t - t_0}} = \frac{\varphi_2'(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}$$



Az érintő meredeksége  $\varphi_2'(t_0)/\varphi_1'(t_0)$ , feltéve, hogy  $\varphi_1'(t_0) \neq 0$ . Ez azt jelenti, hogy a  $(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$  vektor párhuzamos a  $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$  pontba húzott érintővel (érintővektor).

Ha  $\varphi_1'(t_0) = 0$  de  $\varphi_2'(t_0) \neq 0$ , akkor az érintővektor:  $(0, \varphi_2'(t_0))$

Ha  $\varphi_1'(t_0) = \varphi_2'(t_0) = 0 \Rightarrow$  a görkének nincs érintője a  $t_0$  paraméterhez tartozó pontban.

33. Tétel: Tegyük fel, hogy az  $f(x, y) = c$  szintvonal valamely  $(x_0, y_0)$  pontjában  $\text{grad } f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$  nem a nullvektor. Ekkor  $\text{grad } f(x_0, y_0)$  merőleges a szintvonallra (ami azt jelenti, hogy merőleges a szintvonal érintőjére).

Bizonyítás: legyen az  $f(x, y) = c$  paraméteres

előállítás:  $x = \varphi_1(t)$ ,  $y = \varphi_2(t)$

Ekkor  $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = c \quad \forall t$ -re.

Deriváljuk ezt az azonosságot, bal oldalt a

Láncszabályt alkalmazva:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c_1(t), c_2(t)) c_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(c_1(t), c_2(t)) \cdot c_2'(t) = 0$$

Válasszuk meg  $t_0 = t$  úgy, hogy  $(x_0, y_0) = (c_1(t_0), c_2(t_0))$ .

$t = t_0$ -ra kapjuk:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) c_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) c_2'(t_0) = 0$$

$$\text{grad } f(x_0, y_0) \cdot (c_1'(t_0), c_2'(t_0)) = 0$$

↑  
belső szorzat

↑  
ez az érintővektor

a  $t_0$  paraméterértékű

Ha két vektor skaláris szorzata nulla, és egyik sem nullvektor  $\Rightarrow$  a két vektor merőleges.

$$\text{grad } f(x_0, y_0) \perp (c_1'(t_0), c_2'(t_0))$$



További tételek - az alábbi 34 és 35. tétel bizonyítása nem kell

34. Tétel (Lagrange-féle körépendéktétele többváltozós formája):

Legyen  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  összefüggő nyílt halmaz,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható  $D$ -n. Legyen  $\underline{a} \in D$  és  $\underline{b} \in D$  olyan, hogy az őket összekötő  $\underline{a}$   $\underline{b}$  szakasz  $D$ -ben fekszik. Ekkor létezik  $\underline{c} \in \underline{a}\underline{b}$  szakasz, hogy

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \nabla f(\underline{c}) \cdot (\underline{b} - \underline{a}).$$

(csak olvasmány!)

↑  
skalár szorzat

Bizonyítás: Vezessük be a  $\varphi(t) = f(\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}))$

segédfüggvényt, ahol  $0 \leq t \leq 1$ .

$\varphi$  egyváltozós (skalár - skalár) függvény és differenciálható



### 3.5. Tétel (Taylor - formula) $- n = 2 - re$

Tegyük fel, hogy  $f$  kétváltozós függvény  $(n+1)$ -szer differenciálható az  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  egy  $U$  környékében.

Ekkor  $\forall (x, y) \in U$  esetén  $\exists (\xi_1, \xi_2)$  pont az  $(a, b)$  és  $(x, y)$  pontokat összekötő szakaszon, hogy

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2!} (f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)(y-b)^2) \\ & + \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a, b) (x-a)^i (y-b)^{n-i} \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(\xi_1, \xi_2) (x-a)^i (y-b)^{n+1-i}. \end{aligned}$$

↑

Lagrange -féle hibataag

Heggyegyzés a jelöléssel kapcsolatban:

$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a, b)$  - ez  $f$   $n$ -dik parciális deriváltja  $i$ -szer  $x$  szerint és  $(n-i)$ -szer  $y$  szerint.

"Bizonyítás": Bevezetünk egy segédfüggvényt.

$$F(t) := f(a + t(x-a), b + t(y-b)) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$F(0) = f(a, b) \quad \text{illetve} \quad F(1) = f(x, y).$$

$F$   $(n+1)$ -szer differenciálható  $\rightarrow$  érvényes rá az egyváltozós Taylor formula.

$$\begin{aligned} t=1-re: \quad F(1) = & F(a) + F'(a) \cdot 1 + \frac{F''(a)}{2!} 1^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!} 1^n \\ & + \frac{F^{(n+1)}(\nu)}{(n+1)!} 1^{n+1}, \quad \text{ahol } 0 < \nu < 1 \end{aligned}$$

Bizonyítás vége: a láncszabály ismételt alkalmazásával kiszámoljuk  $F$  deriváltjait. Így adódik a tételben szereplő képlet. 

## Szélsőértékszámítás

Def. Legyen  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Azt mondjuk, hogy  $f$ -nek  $\underline{a} \in D$ -ben lokális minimuma van, ha  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall \underline{x} \in D$ ,  $d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$  esetén  $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})$ .

$f$ -nek  $\underline{a} \in D$ -ben szigorú lokális minimuma van, ha  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $\forall \underline{x} \in D$ ,  $0 < d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$  esetén  $f(\underline{x}) > f(\underline{a})$ .

Hasonlóan definiáljuk a (szigorú) lokális maximumot.

lokális maximum  
lok. minimum } ezeket körösen szélsőértéknek hívjuk

36. Tétel (Szélsőérték létezésének szükséges feltétele):

Legyen  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{a} \in D$  belső pont.

Ha  $f$ -nek szélsőértéke van  $\underline{a}$ -ban és  $f$   $\underline{a}$ -ban differenciálható, akkor

$$\text{grad } f(\underline{a}) = (f'_{x_1}(\underline{a}), f'_{x_2}(\underline{a}), \dots, f'_{x_n}(\underline{a})) = \underline{0} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{nullvektor} \end{matrix}$$

Bizonyítás:

Tehintsük a  $g(\underline{x}_1) := f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  egyváltozós (skalár - skalár) függvényt. Ekkor  $g$ -nek nyilvánvalóan szélsőértéke van  $a_1$ -ben.

Kalkulus I kurzuson tanultak alapján  $g'(\underline{a}_1) = 0$ .

$$\text{De } g'(\underline{a}_1) = f'_{x_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = f'_{x_1}(\underline{a})$$

$$\text{Tehát } f'_{x_1}(\underline{a}) = 0.$$

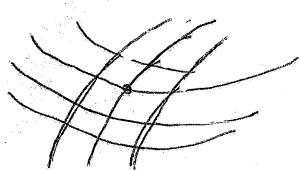
Hasonlóan igazolható, hogy a többi parciális derivált is nulla  $\underline{a}$ -ban.



A 36. Tétel szerint  $f$ -nek ott LEHET szélsőértéke, ahol az összes parciális derivált eltűnik (azaz nulla).  
 NEM BIZTOS, hogy ott van is szélsőérték.

Def:  $a \in D$  nyeregpont, ha  $\text{grad } f(a) = \underline{0}$ , de  $f$ -nek nincs  $a$ -ban szélsőértéke.

Példa:  $f(x, y) = x^2 - y^2$  esetében  $(0, 0)$  nyeregpont.



$$f'_x(0, 0) = 0$$

$$f'_y(0, 0) = 0$$

de  $(0, 0)$  nem  
 szélsőérték

37. Tétel (Szélsőérték elegendő feltétele  $n=2$  esetén)

Tegyük fel, hogy  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  másodrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az  $(a, b) \in D$  belső pont egy környezetében, és  $\text{grad } f(a, b) = \underline{0}$  (nullvektor).  
 Tekintsük a

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{vmatrix} \quad \text{Hesse - determináns.}$$

Ha  $D(a, b) > 0$ , akkor  $(a, b)$ -ben szélsőérték van. Ha emellett  $f''_{xx}(a, b) > 0$ , akkor  $(a, b)$ -ben szigorú helyi minimum van. Ha  $D(a, b) > 0$  és  $f''_{xx}(a, b) < 0$ , akkor  $(a, b)$ -ben szigorú lokális maximum van.

Ha  $D(a, b) < 0$ , akkor  $f$ -nek  $(a, b)$ -ben nincs szélsőértéke, azaz  $(a, b)$  nyeregpont.

Ha  $D(a, b) = 0$ , akkor  $(a, b)$  lehet szélsőérték hely, illetve nyeregpont is.

Bizonyítás: Nehéz, így elmarad.

Az előző tétel így általánosítható:

-92-

38. Tétel (Szálsőérték elegendő feltételei tetszőleges  $n \geq 2$  esetén):

Tegyük fel, hogy  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  másodrendű, parciális deriváltakjai léteznek és folytonosak az  $\underline{a} \in D$  belső pont egy környezetében, <sup>és</sup>  $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$ . Tekintsük a

$$D_k(\underline{a}) = \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1}(\underline{a}) & f''_{x_1 x_2}(\underline{a}) & \dots & f''_{x_1 x_k}(\underline{a}) \\ f''_{x_2 x_1}(\underline{a}) & f''_{x_2 x_2}(\underline{a}) & \dots & f''_{x_2 x_k}(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_k x_1}(\underline{a}) & f''_{x_k x_2}(\underline{a}) & \dots & f''_{x_k x_k}(\underline{a}) \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

determinánsokat minden  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re.

1. Ha  $D_k(\underline{a}) > 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén, akkor  $f$ -nek  $\underline{a}$ -ban szigorú helyi minimuma van.

2. Ha  $(-1)^k D_k(\underline{a}) > 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén, akkor  $f$ -nek  $\underline{a}$ -ban szigorú helyi maximuma van.

3. Ha  $D_k(\underline{a}) \neq 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$  és sem az 1.-ben, sem a 2.-ben szereplő egyenlőtlenségek nem teljesülnek maradéktalanul, akkor  $\underline{a}$  nyeregpont.

Mintapélda szálsőértékszámításra

Feladat: Határozzuk meg  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$  szálsőértékeit, nyeregpontjait!

Megoldás:

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$f'_y(x, y) = 4y^3 + 4x - 4y$$

Először meghatározzuk,

hogy az elsőrendű deriváltak hol kennek el.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ \text{II. } 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Megoldjuk. Az egyenletrendszer megoldásai:}$$

$$(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (x_3, y_3) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

ezek a kritikus pontok

Tehintsük most a 2. deriváltakat.

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 4$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}$$

$$f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4$$

Speciálisan a  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  pontban:

$$D(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 400 - 16 = 384 > 0 \Rightarrow \text{létezik szélsőérték}$$

$$f''_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 \Rightarrow (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\text{-ben } f\text{-nek lokális szigorú minimuma van}$$

A  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  pontban:

$$D(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0 \text{ és } f''_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$$

$\Rightarrow (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ -ben is szig. lokális minimum van.

Tehintsük végül a  $(0, 0)$  pontot.

$$D(0, 0) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

A kétféle alapján nem tudjuk eldönteni, hogy van-e szélsőérték  $(0, 0)$ -ban. Két módszerrel vizsgáljuk.

Ésnevékel:  $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ , ha  $0 < |x| < \sqrt{2}$ .

$$f(x, x) = 2x^4 > 0 \text{ ha } x \neq 0$$

$\Rightarrow f$  az origó közeli környezetében vesz fel pozitív illetve negatív értéket. Azt is látjuk, hogy  $f(0, 0) = 0$ .

$\Rightarrow$  a  $(0, 0)$ -ban  $f$ -nek nyeregpontja van.

## Globális / abszolút maximum és minimum kompakt halmazon

Itt:  $n=2$ 

Említhető:  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  kompakt  $\Leftrightarrow H$  korlátos és zárt

Def: Legyen  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in D$ . Azt mondjuk, hogy  $f$ -nek globális / abszolút maximuma (minimuma) van  $(a, b)$ -ben, ha  $\forall (x, y) \in D$  esetén

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad (f(x, y) \geq f(a, b))$$

27. Tétel  $\Rightarrow$  Ha  $f$  folytonos a kompakt  $D$  halmazon, akkor létezik a globális maximum és minimum.

### Recept a globális szélsőértékek meghatározására

① Megkeressük azokat a pontokat  $D$  BELSEJÉBEN, ahol  $f$ -nek lokális szélsőértéke lehet, azaz meg-

keressük 
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{összes megoldását.}$$

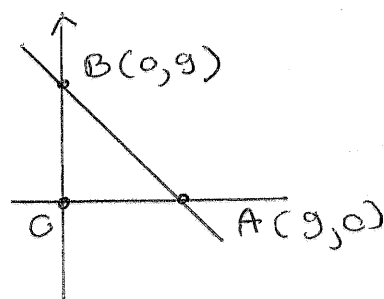
(Nem használjuk a 37. Tételben tanult második derivált tesztet, azaz nem vizsgáljuk, hogy valóban van-e szélsőérték.)

② Felsoroljuk azokat a pontokat  $D$  KATA'RA'N, ahol  $f$ -nek szélsőértéke lehet.

③ A fenti pontokban kiszámoljuk a helyettesítési értékeket, kiválasztjuk a legnagyobbat és a legkisebbet.

Az abszolút szélsőértékhelyek egyben lokálisak is, így biztosan a fent felsorolt pontok közt vannak.

Mintapélda: Keressük  $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$   
globális szélsőértékeit az  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=9-x$   
egyenesek által  
határolt zárt háromszögön!



1. Belső pontok:

$$f'_x = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'_y = 2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$f(1,1) = 4$$

2. Határpontok:

(a) OA szakaszon  $y=0$ ,  $0 \leq x \leq 9$  és

$$f(x,y) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2$$

Szélsőérték lehet a végpontokban:  $f(0,0) = 2$

$$f(9,0) = -61$$

Szélsőérték lehet ott, ahol

$$f'_x(x,0) = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1,0) = 3$$

(b) Az OB szakaszon  $x=0$ ,  $0 \leq y \leq 9$  és

$$f(x,y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2$$

Szimmetriából a lehetséges szélsőértékek:

$$f(0,0) = 2, f(0,9) = -61, f(0,1) = 3$$

(c) Mivel az AB szakasz végpontjait már vizsgáltuk, csak AB belső pontjaival kell törődni. Most  $0 \leq x \leq 9$  és  $y = 9 - x$ , továbbá

$$f(x,y) = f(x, 9-x) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2 = -61 + 18x - 2x^2$$

$$\Rightarrow f'_x = 18 - 4x = 0, \text{ ha } x = \frac{9}{2} \text{ és } y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$$

3. Látnuk: globális maximum van  $(1,1)$ -ben,  $f(1,1) = 4$ .  
 $f$  a globális minimumát  $(0,9)$ -ben és  $(9,0)$ -ban veszi  
először a pontokban  $-61$  a függvényérték.