

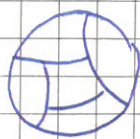
2018.04.13.

6. Feladat

Díjazat

Relációval megadjuk tovább.

Osztályozás:



diszjunkt részhalmazok
A

összegezzük azokat A-ban.

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{osztályozás: } C_1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$$

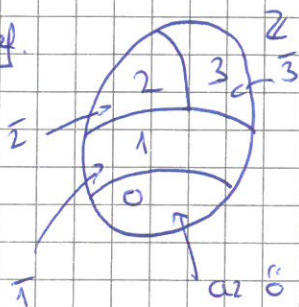
$$C_2 = \{ \{a, b\}, \{c\} \}$$

Hány db: $1+1+1$ 1 db
 $2+1$ 3 db
 3 1 db

$$C_3 = \{ \{a, b, c\} \} \text{ is lehet.}$$

5 db osztályozás lehetséges ebben az esetben

3 db



mod 4 maradékosztályozás

ez is egy osztályozás.

az 0 neve: $\bar{0}$ (egy szóval)

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ és $\bar{3}$ halmazokból állnak.

$$Z_4 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \} \text{ lehetséges fel.}$$

Van egy C osztályozásunk.

$$C_2 = \{ \{a, b\}, \{c\} \}$$

$\bar{a}$

$\bar{c}$

$$\text{és: } C_2 = \{ \bar{a}, \bar{c} \}$$

jellel használható!

Reláció

$$2 \leq 3$$

$$\leq \Rightarrow \subset (2, 3)$$

$$8 \Rightarrow (2, 3)$$

283 jelölés lehet fel.

Tehát: $S \subseteq A \times A$

8. def

(1) $S \subseteq A \times A$, S reflexív, ha $\forall a \in A, (a, a) \in S$.

(pl:) = $\mathbb{Z} - n$

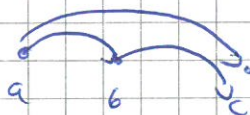
☺ ☺ ☺ ☺ gráfosan ez látható.

(2) $S \subseteq A \times A$, S ~~reflexív~~ szimmetrikus, $\forall a, b \in A, (a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S$.



(pl:) a ismeri b -t, akkor b ismeri a -t.

(3) S tranzitív, ha $(\forall a, b, c \in A) ((a, b) \in S \wedge (b, c) \in S \rightarrow (a, c) \in S)$



pl: testvéri viszony
az emberek halmában.

EKVIVALENCIA RELÁCIÓ: Ha (1), (2) és (3) egyszerre teljesül.

Példa

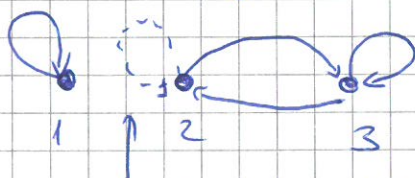
Ekvivalenciareláció-e?

$$(1) A = \{1, 2, 3\}$$

$$S = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

NEM. NEM REFLEXÍV, $(2, 2)$ hiányzik

amíg szimmetrikus

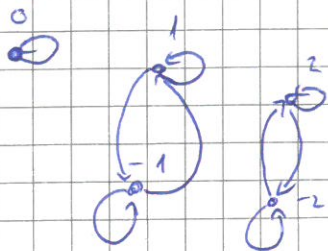


2) hiányzik, ezért nem tranzitív!

(2)

$$(2) A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$$

$$S = \{(a, b) : |a| = |b|\}$$



ez már ekvivalenciareláció.
könnyen belátható.

ez három osztályt hoz létre.

11. tétel: $C \subseteq \mathcal{P}\{A\}$ osztályozás

$$S = \{(a, b) \in A \times A : \bar{a} = \bar{b}\}$$

ugyanabban az osztályban vannak

S ekvivalenciareláció.

Biz: reflexív: $(a, a) \in S$ mert $\bar{a} = \bar{a}$ triviális ✓

szimmetrikus: $(a, b) \in S \Rightarrow (b, a) \in S$, mert $\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \bar{b} = \bar{a}$ ✓

transzitiv: $((a, b) \in S \wedge (b, c) \in S) \Rightarrow (a, c) \in S$ mert $\bar{a} = \bar{b} \wedge \bar{b} = \bar{c} \Rightarrow \bar{a} = \bar{c}$. ✓

példa: $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$

$$C = \{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}\}$$

$$S = \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1), (2, 2), (-2, -2), (1, -1), (-1, 1), (2, -2), (-2, 2)\}$$

9 elemű.

1 + 2 + 2 = 5 elemű.

Ez ugyanaz az abszolútreláció volt.

13. def: $S \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció.

$$\bar{a} = \{b \in A : (a, b) \in S\}$$

A/S jelöléssel látjuk el

elemei $\bar{a}$ osztályok

(pl.) $A = \{a, b, c\}$

$$S = \{(a, a), (b, c), (c, b), (c, c), (b, b)\}$$



$$\bar{a} = \{a\}$$

$$\bar{b} = \{b, c\} = \bar{c}$$

$$A/S = \{\bar{a}, \bar{b}\} \quad \text{ennyi}$$

$$A/S = \{\{a\}, \{b, c\}\} \quad \text{osztályozást kapunk}$$

Ezt lássuk be. 15. tétel

Biz: $S \subseteq A \times A$ ekv. rel $\Rightarrow A/S$ osztályozás

- egyértelmű osztályok (elemek)
- A/S nem üres. $\forall \bar{a} \in A/S, \bar{a} \neq \emptyset$

$a \in \bar{a}$ mert $(a, a) \in S$
reflexív.

- egyértelmű A (A/S elemei).

Ha $\exists a \in A$ hogy $a \notin \bar{b}$ $\exists B \in A/S$ $\hookrightarrow (a, a) \in S$

(4)

$a \in \bar{a}$
reflexív, tehát mindig tuti!

- A/S elemei diszjunktok.

indirect a modon:

$$\begin{aligned} \exists c \in A \text{ hogy } c \in \bar{a}, c \in \bar{b} \text{ de } \bar{a} \neq \bar{b} \\ (c, a) \in S \quad (c, b) \in S \\ \downarrow \text{szimmetria:} \quad \searrow \text{TRANS.} \\ (a, c) \in S \quad \rightarrow \quad (a, b) \in S \rightarrow \bar{a} = \bar{b}, \end{aligned}$$

ell!

□

A TESZTBEL:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ alaphalmaz

$C = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e, f, g\}\}$ osztályozás

↓
S osztályok van hozzá.

Ígaz-e: - $(c, c) \in S$ ✓ reflexív.

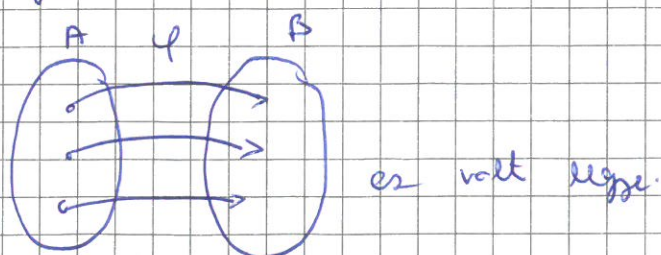
- $(d, g) \in S$ ✓ egy osztályban vannak.

- $(c, b) \notin S$ ✓ igaz.

- $|S| \leq 20$ X Hamis.

$$1 + 1 + 5 \cdot 5 = 24$$

Lekepezés



• A-n lehet osztályozni úgy, hogy a leképezés megmaradjon.

(5)

Leír $\varphi = \{ (a_1, a_2) : a_1 \varphi = a_2 \varphi \}$ ekvivalenciareláció és
 φ magja. Répár meg egyezik.

Résben rendezés:

$$S \subseteq A \times A$$

- antiszimmetrikus: $(\forall a, b \in A) ((a, b) \in S \wedge (b, a) \in S \Rightarrow a = b)$



Szimmetria és antiszimmetria egyszerre teljesül: $\equiv$

antiszimmetrikus reláció: $\leq$ például $\mathbb{Z}$ -n.
 vagy oszthatóság $\mathbb{N}$ -en.

- dichotom reláció: $\forall a, b \in A, (a, b) \in S$ vagy $(b, a) \in S$
 ↑
 nincs ilyen páros: $a \neq b$ tehát.

Ha dichotom $\rightarrow$ reflexív is

(példá) $\mathbb{Z}$ -n $\leq$.

Résbenrendezés:

Reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció.

⊕ Dichotom is: az már rendezés

Ⓟ $A = \{2, 3, 6, 12\}$ $(A, |)$ oszthatóság
 részben rendezett halmaz



tranzitív és reflexív, nem hiányzik be minden elt.
 az a fedési reláció

Ⓠ

$a < b$ $\exists c$ hogy $a < c < b$
 $(a \text{ fedeli } b\text{-t})$ $a \neq c, c \neq b.$

32. def példa

12 maximális elem: nem fedeli senkit

2, 3 minimális elemek: $\nexists k$ nem fedeli senkit

legnagyobb: 12.

legkisebb elem: Ila m/a Nincs ILYEN.

mindentí másként osztály. $\forall a$ m/a ebben is esik be.

34. Tétel: $a_1 \in A$ max. ✓

nem max: $\exists a_2$ $a_2 > a_1$

↓

a_2 max-e?

VEGES HALMAZ

⋮

□

35. Tétel: Tfh a és b is legnagyobb elem

a legnagyobb: $b \leq a$ \ $a = b$ □

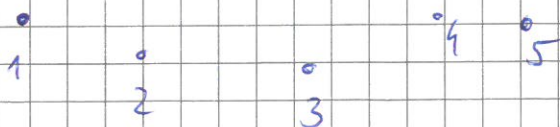
b legnagyobb: $a \leq b$ /

PÉLDÁK:

(h.1.)

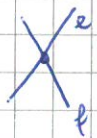
(1) reflexív, szimmetrikus, tranzitív. nem antiszimmetrikus
 nem dichotóm

(2) nem reflexív. nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus.



(6) reflexív, $\neq$ trivi. szimmetrikus, nem antiszimmetrikus

(7)



es egy ellengrállo, nem achirimetris a cuce

4.2.

$$\bar{a} = \{a\}, \quad \bar{b} = \{b, c\}, \quad \bar{d} = \{d\}$$

$$A/B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}\}$$

(1) Hamis

(4) Igar

(2) Hamis

(5) Hamis

(3) Igar

4.3.

(5) $C_1 = \{\emptyset\}$ 0 elemes

$$C_2 = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$
 1 elemes

$$C_3 = \{\{1, 2\}, \{a, b\}\}$$
 2 elemes

$$C_4 = \{\{1, 2, 3\}\}$$
 3 elemes

h osztály van

$$A/B = \{\{\emptyset\}, \{\{1, 2\}, \{a, b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}.$$

(7) $A/B = \{\{\{71, 602\}\}, \{\{301, 4\}\}, \{216, 54, 315\}\}$

4.5.

(1) $\varphi = (1, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 3)$

$$A/\sim_{\varphi} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$$
 osztályok, osztályok

(8)

4.6.

(1) Igaz (2) Hamis (3) Igaz (4) Hamis

(5) $1 + 4 + 4 + 1 = 18 \checkmark$ Igaz

4.8.

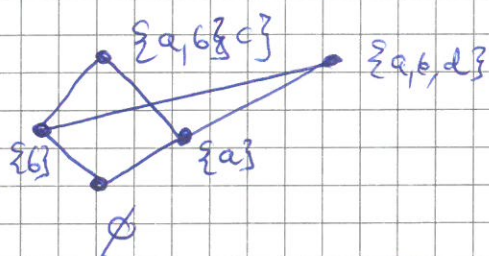
(1) $(A, \subseteq)$

$B \subseteq B \checkmark$ Reflexív.

$B \subseteq C \wedge C \subseteq B \rightarrow B = C \checkmark$ antiszimmetrikus

$B \subseteq C \wedge C \subseteq D \rightarrow B \subseteq D \checkmark$ Transitív

Hasse-diagramm



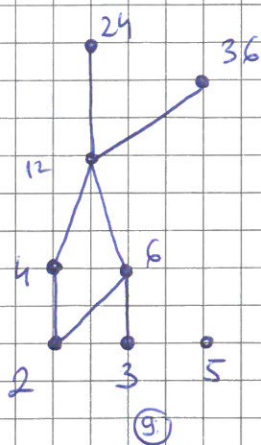
minimális elem: $\emptyset$

maximális elem: $\{a, b, c\}$ és $\{a, b, d\}$

legfrissebb elem: $\emptyset$

legnagyobb elem: nincs ($\{a, b, c, d\}$ hiányzik)

(3)



min. elem: 2, 3 és 5

max. elem: 24 és 36 és 5

legfrissebb elem: nincs

legnagyobb elem: nincs

$\oplus$ 4.9-esen elgondolkodni (HF)

