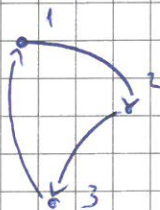


32. def.példa: S_4 -en:

$$\pi = \{(1,4), (2,3), (3,1), (4,4)\}$$

$$A \text{ sz } = \{1, 2, 3, 4\} \quad \checkmark \quad \text{OK.}$$

sürgető is, injektív is $\Rightarrow$ bijektív.kereszt,
NEHÉZSÉGEK
ELEM.

$$M_\pi = \{1, 2, 3\}$$

irányított gráf.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|S_4| = 4! \text{ lesz.}$$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

elméleti.

$$M_s = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\pi s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

lesz a képzések alapján

$$s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ önmaga}$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

inverzek.

Idégen permutációk minden közös megadott elemük.39 Tétel

$$\pi \beta \in S_n \text{ idegenek} \equiv M_\pi \cap M_\beta = \emptyset.$$

$$(1) \quad \pi \beta = \beta \pi$$

Biz:

$$x \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$x(\pi \beta) = z$$

(1.)

$$(a) \text{ Legyen } x \in M_\pi \Rightarrow x \notin M_\beta$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$x\pi \in M_\pi \qquad x\beta = x$$

$$x\pi \notin M_\beta$$

$$\text{Teljesen } (x\pi)\beta = x\pi$$

$$x(\pi\beta) = (x\pi)\beta = x\pi.$$

)

$$x(\beta\pi) = (x\beta)\pi = x\pi. \quad \square$$

$$(b) \quad x \in M_\beta, \quad x \notin M_\pi.$$

$$x\beta \in M_\beta \qquad \Downarrow \quad x\pi = x.$$

$$x(\pi\beta) = (x\pi)\beta = x\beta$$

)

$$x(\beta\pi) = \underbrace{(x\beta)}_{x\beta \notin M_\pi} \pi = x\beta. \quad \square$$

$$(c) \quad x \notin M_\beta \wedge x \notin M_\pi.$$

$$x(\pi\beta) = (x\pi)\beta = x\beta = x$$

$$x(\beta\pi) = (x\beta)\pi = x\pi = x \quad \square$$

Megj.: Ha $\pi\beta = \beta\pi \not\Rightarrow \pi$ és β idegenek

(pl.) $s\bar{s}^{-1} = \bar{s}^{-1}s$ de

$$M_\beta = M_{\pi\bar{s}^{-1}} \neq \emptyset.$$

$$(2) \quad (\pi\beta)^2 = \pi^2\beta^2.$$

(biz.:

(2)

$l \in \mathbb{N}$ esete:

$$(\pi\beta)^l = \underbrace{(\pi\beta) \cdot (\pi\beta) \cdot (\pi\beta) \cdot \dots \cdot (\pi\beta)}_{l \text{ db}} = \pi\beta\pi\beta\pi\beta \dots \pi\beta = \quad (1)$$

a l db
szoros
asszociatív

$$= \underbrace{\pi\pi\pi \dots \pi}_{l \text{ db}} \underbrace{\beta\beta \dots \beta}_{l \text{ db}} = \pi^l \beta^l$$

Ha $l < 0$: $l = -l$, $l \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (\pi\beta)^l &= (\pi\beta)^{-l} = \left((\pi\beta)^{-1} \right)^l = \left(\beta^{-1} \pi^{-1} \right)^l = \\ &= \underbrace{\left(\beta^{-1} \right)^l \left(\pi^{-1} \right)^l}_{\beta^{-1}, \pi^{-1} \text{ idegenek}} = \beta^{-l} \pi^{-l} = \\ &= \beta^l \pi^l = \pi^l \beta^l. \end{aligned}$$

π ciklus. β nem ciklus.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{így írható fel.}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3) (2 \ 4) \text{ nem ciklus,}$$

de felírható ciklusok
szorzataként.

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3 \ 2) \text{ ciklus}$$

44. tétel.

$\pi \in S_n$ felírható idegen ciklusok szorzataként, ami a
tekerőssorrendtől eltekintve egyértelmű.

Biz.:

A felbontás létezik.

$|M_\pi|$ indukcióval bizonyítjuk.

(i) $|M_\pi| = 0 \Rightarrow \pi = \text{id}$ az övé megállapodás szerint
az üres szorzat. ✓

(ii) Tfh $|M_\pi| = 2 < n$ teljesül

(iii) Bizonyítjuk $|M_\pi| = n - nc$.

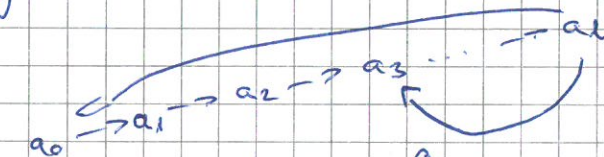
~~$a \in M_\pi$~~

$a \in M_\pi$.

$a = a_0$

$a_0\pi = a_1 \quad a_1\pi = a_2 \quad \dots \quad a_{l-1}\pi = a_l$

egy idő után ismétlődés lesz.



↑
Csak idő mutatott
vissza, így nem sérül
az injektivitás.

↑
 a_3 -nak két őse lenne így
SÉRÜLNE AZ INJECTIVITÁS

$\Rightarrow \gamma = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_l)$ ciklust kapunk

példa

$$\beta = (1 \ 2 \ 3)(4 \ 5 \ 6)$$

$$\beta = (1 \ 2 \ 3)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

lex.

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

④

Def: $\pi' = \gamma' \pi =: \gamma$ által mozgatható elemek így fixen maradnak π' -ben

$|M_{\pi}| > |M_{\pi'}|$, így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, $\pi' = \alpha_1 \dots \alpha_r$ idegen ciklusok

$$\pi = (\underbrace{\gamma \gamma^{-1}}_{id}) \pi = \gamma (\gamma^{-1} \pi) = \gamma \pi' = \gamma \cdot \alpha_1 \dots \alpha_r$$

Az egyértelműség még nincs bizonyítva.

$\pi = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$ létezik úgy, hogy β_i -k idegenek.

$$M_{\pi} = M_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} = M_{\beta_1} \cup M_{\beta_2} \cup M_{\beta_3} \dots \cup M_{\beta_s}$$

$$\text{és } M_{\beta_i} \cap M_{\beta_j} = \emptyset.$$

Vesszük egy $a \in M_{\pi} \Rightarrow \exists! i$ hogy $a \in M_{\beta_i}$.

$$a\pi = a\beta_i \text{ is fix}$$



Példa:

$$\alpha = (1 \ 3 \ 4)(5 \ 4 \ 2 \ 1)(6 \ 7) = (1 \ 3 \ 2)(4 \ 5)(7 \ 6)$$

TESZT:

$$\beta = (1 \ 5 \ 2 \ 6)(3 \ 4 \ 2)(5 \ 6) = \cancel{(1 \ 5 \ 6)} \cancel{(2 \ 3 \ 4)} \\ (1 \ 6)(2 \ 5 \ 3 \ 4)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

EGY ciklusok

BELE CSAK EGYET

LEHET

így nem a felbontás

46. tétel

$$(3) \quad 2 \mid i - j$$

$$i - j = 2 \cdot c$$

$$i = 2c + j$$

$$\pi^i = \pi^{2c+j} = (\underbrace{\pi^2}_{id})^c \cdot \pi^j = \pi^j$$

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) = (1 \ 2)(1 \ 3)(1 \ 4) \quad \text{paratlan.}$$

transpozícióra bontás.

Halmazok elemszáma:

$$(1) \quad |A| = |B| \Leftrightarrow \exists \varphi \text{ bijektív l.k. } A \mapsto B.$$

$$53. \quad (1) \quad \varphi = id_A.$$

$$(4) \quad |A| = |B| \Rightarrow |A \times C| = |B \times C|.$$

$$\uparrow \\ \exists \varphi: A \mapsto B \text{ bij. l.k.}$$

$$\Downarrow \quad \psi: A \times C \mapsto B \times C$$

$$(a, c) \mapsto (a\varphi, c) \\ \text{bij} \quad id \quad \checkmark$$

$$(5) \quad |A| \stackrel{\exists \varphi: A \mapsto B \text{ bij.}}{=} |B|$$

$$C \xrightarrow{\alpha_i} A$$

A^C : összes $C \mapsto A$ leképezés.

$$\beta_i \downarrow \swarrow \varphi \\ B$$

$$|A^C| = |B^C|$$

$$\text{Kell: } \varphi: A^C \mapsto B^C \text{ bij.} \\ \alpha \mapsto \beta = \alpha\varphi.$$

$$(6) \quad \text{házi.}$$

54. tétel:

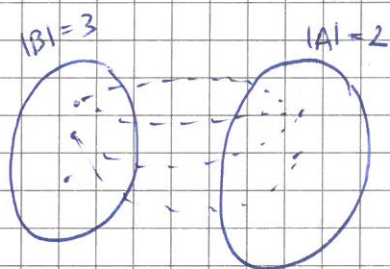
$$\varphi: A \mapsto \{1, \dots, n\}$$

BIJEKTÍVEK

$$\psi: B \mapsto \{1, \dots, m\}$$

$\delta: A \cup B \mapsto \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, m+n\}$ legyen ide is bijektív leképezés

$$x \in A \cup B: x \mapsto \begin{cases} x\varphi & x \in A \\ x\psi+n & x \in B \end{cases}$$



$$|A^B| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \quad \text{innen a jelölés}$$

$\aleph_0$: megszámlálhatóan sok halmaz elemszáma

$\uparrow$
elemek sorba
rendezhetők

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

Kontinuum számosság: végtelen, de nem rendezhető sorba.

$$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > \aleph_0$$

Innentől csak példák

$$2x \equiv 18 \pmod{10} \Rightarrow x \equiv 9 \equiv 4 \pmod{\frac{10}{\gcd(2,10)}} \pmod{5}$$

$$10x \equiv 40 \pmod{12} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{\frac{12}{\gcd(10,12)}} \pmod{6}$$

$$15x \equiv 9 \equiv 30 \pmod{21} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{\frac{21}{\gcd(15,21)}} \pmod{3}$$

Tellin

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \gcd(6,7) \mid 4-2 \checkmark \end{array}$$

$$x = 5l + 4$$

↓

$$5l + 4 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$5l \equiv 0 \pmod{6}$$

$$l \equiv 0 \pmod{\frac{6}{\gcd(5,6)}} \quad l \equiv 0 \pmod{6}$$

$$l = 6p \Rightarrow \boxed{x = 5l + 4 = 30p + 4}$$

$$30p + 4 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$(2p \equiv) \quad 30p \equiv -2 \pmod{7}$$

$$30p \equiv -30 \pmod{7}$$

$$p \equiv -1 \pmod{\frac{7}{\gcd(30,7)}}$$

$$p \equiv -1 \pmod{7} \quad (p = 7k - 1)$$

(8)

$$x = 210k - 30 + 4$$

$$x = 210k - 26$$

$$x \equiv -26 \pmod{210}$$

3.12

$$(1) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 7)(2\ 4\ 3)(5\ 6)$$

$$(2) \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \cancel{(1)}(2\ 6\ 3\ 5\ 4)\cancel{(7)}$$

3.19

$$(1) \quad \alpha\beta = (1\ 7)(2\ 4\ 3)(5\ 6)(2\ 6\ 3\ 5\ 4) =$$

$$= (1\ 7)\cancel{(2)}(3\ 6\ 4\ 5) \quad \text{ennyi}$$

$$(2) \quad \beta\alpha = (2\ 6\ 3\ 5\ 4)(1\ 7)(2\ 3\ 4)(5\ 6) = (1\ 7)(2\ 5)(3\ 6\ 4)$$

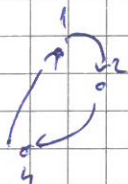
elvitam.

$$\beta\alpha = (2\ 5\ 3\ 6)(1\ 7) \quad \text{a teljes}$$

$$(\beta\alpha)^{-1} = (7\ 1)(6\ 3\ 5\ 2) \quad \text{ennyi csak}$$

3.20

$$(1) \quad \left((1\ 2\ 4)^5 (1\ 3\ 4) \right)^{-4} = ? \quad \text{NEM IDEGENEK.}$$



$$(1\ 2\ 4)^5 = \underbrace{(1\ 2\ 3)^3}_{\text{id}} (1\ 2\ 4)^2 \quad \text{Itt 2-hosszú ideg.}$$

$$\pi^2 = \text{id.}$$

$$= (1\ 2\ 4)(1\ 2\ 4) = (1\ 4\ 2) = (4\ 2\ 1)$$

$$\text{mert } 2 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$\left((1\ 4\ 2)(1\ 3\ 4) \right)^{-4} = ?$$

$$(1\ 4\ 2)(1\ 3\ 4) = \cancel{(1)}(2\ 3\ 4)$$

$$(2\ 3\ 4)^{-4} = (2\ 3\ 4)^{-1} \quad -4 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$(4\ 3\ 2) \quad \text{KES.}$$

3.19.

(5) β^{2013}

$$(2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4)^{2013} = (2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4)^3 =$$

$$\boxed{2013 \equiv 3 \pmod{5}}$$

$$= (2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4)(2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4)(2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4) =$$

$$(2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 5) \cdot (2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4) = \underline{(2 \ 5 \ 6 \ 4 \ 3)}.$$

(6) α^8 ~~$\alpha = (1 \ 7 \ 2 \ 4 \ 3)$~~

$$\alpha \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\alpha^8 = \alpha^3 =$$

$$= \cancel{(1 \ 7 \ 2 \ 4 \ 3)} \cancel{(1 \ 7 \ 2 \ 4 \ 3)} (1 \ 7 \ 2 \ 4 \ 3) =$$

$$(1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 4)$$

$$\alpha = (1 \ 7)(2 \ 4 \ 3)(5 \ 6)$$

$$\alpha^8 = ? \quad ((1 \ 7)(2 \ 4 \ 3)(5 \ 6))^8 =$$

$\uparrow$ IDEGENEK!

$$(1 \ 7)^8 (2 \ 4 \ 3)^8 (5 \ 6)^8 \text{ értéke fel eszdt.}$$

$$(1 \ 7)^2 \quad \uparrow \text{id} \quad \uparrow \text{id}$$

$$(1 \ 7)(1 \ 7) = \text{id.} \quad 8 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$(3 \ 4 \ 2) \text{ lesz!}$$

$$\gamma = (3 \ 4 \ 2)$$

"

$(3 \ 4)(3 \ 2)$ páros permutáció.

$$(1 \ 7)(2 \ 4 \ 3)(5 \ 6) = (1 \ 7)(2 \ 4)(2 \ 3)(5 \ 6) \text{ páros.}$$

3.23

$$\delta \in S_6$$

① $|M_\delta| = 0$ senkinek sem mozgott, ez az id. Egy ilyen van.

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

② $|M_\delta| = 1$ nincs ilyen.

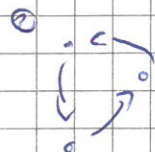
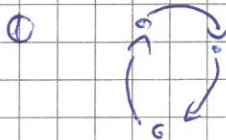
③ $|M_\delta| = 2$ $\binom{6}{2}$ ilyen van.
↑ TRANSPOZÍCIÓ.

④ $|M_\delta| = 3$

$$\binom{6}{3} \cdot 2$$

$$(1 \ 2 \ 3)$$

↑ két irányba lehet



hgy.

↑ rögzít

⑤ $|M_\delta| = 4$

$$\binom{6}{4} \cdot 3!$$

↑ 1 db 4-es ciklus



↑ kezd a 3-at.

$$+ \cancel{\binom{6}{2} \binom{4}{2}}$$

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

↑ mert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

↑ egy alak.

3.27

Szobaszám-hozzárendelés

$$(1) \quad x \mapsto \begin{cases} x+1 & x \text{ látszó} \\ 1 & x \text{ új látszó} \end{cases}$$

$$(3) \quad x \mapsto \begin{cases} 2x & x \text{ régi látszó} \\ 2x+1 & x \text{ új, megrendelt látszó} \end{cases}$$

□

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

Számság

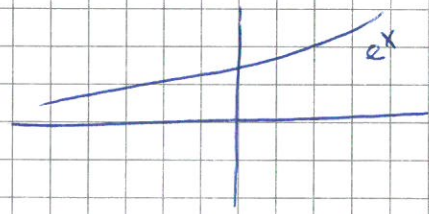
$$\text{Ha } |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$

$$|\mathbb{R}| = c > \aleph_0$$

↑ folytonos számság

$$|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = c \text{ még mindig}$$

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^+| = c \quad \text{Kell: } \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \text{ bij. leképezés}$$



ez jó bij. leképezés