

Halmazok.

$$(\forall x)(x \in A \mapsto x \in B) \Rightarrow A \subseteq B.$$

részhalmaz.

4. tétel:

$$(1) \quad A \subseteq A, \quad \emptyset \subseteq A. \quad \downarrow \quad (\forall x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \text{ tautológia}$$

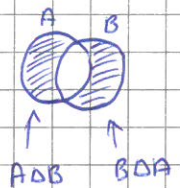
$$\uparrow \quad (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in A) \text{ tautológia.}$$

ennyi a bizonyítás.

(2) logikai bizonyítást ehhez is lehet használni.

$$A \setminus B = A \cap \bar{B} \quad \text{átlóság a különbség.}$$

$$A \Delta B = \{x: x \in A \leftrightarrow x \in B\}$$



$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus B \cup B \setminus A.$$

TESZT PÉLDA:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$H = \{3, 4\}, \quad B = \{2, 3, 4, 7\}, \quad C = \{4, 5, 6\}$$

$$H \setminus (B \cap C) = \{4\}$$

$$\uparrow \quad \{2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$4 \in i \quad \checkmark$$

$$\{4\} \in H \quad \times$$

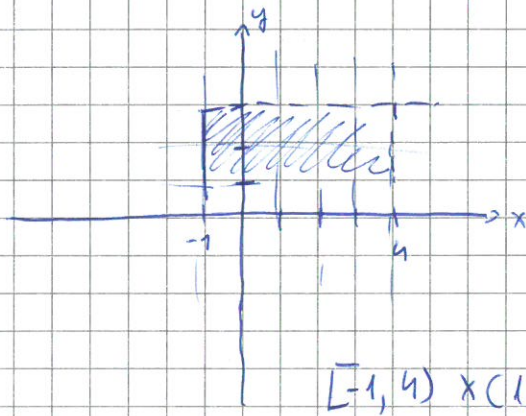
$$\{4\} \subseteq i \quad \checkmark$$

$A \times B$ Descartes-szorzat

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

Példa:

$$\{ (x, y) : -1 \leq x < 4, 1 < y < 3 \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



$$H = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(1, 0) \in H$$

$$(0, 1) \in H$$

↑ nem lehet Descartes-szorzattá
megadni

$$(0, 0) \in H$$

$\mathcal{P}(A)$ hatványhalmaz

$$A = \{a, b\} \quad \mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$$

$$B = \{ \emptyset, a, b \} \quad \mathcal{P}(B) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{a\}, \{b\}, \{ \emptyset, a \}, \{ \emptyset, b \}, \{a, b\}, \{ \emptyset, a, b \} \}$$

ennyi.

$$\emptyset \in B \quad \checkmark$$

$$\emptyset \notin A \quad \checkmark$$

$$\{4\} \notin \mathcal{P}(H \setminus B \Delta C) = \{ \emptyset, \{4\} \}$$

↑
HAMIS.

Leképezés.

$$S \subseteq A \times B.$$

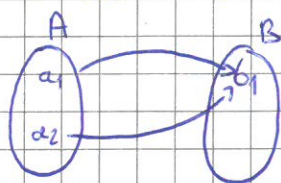
$$\forall a \in A \quad (\exists!) \overset{\text{pontosan}}{b \in B} \quad (a, b) \in S. \quad \text{Inható fel.}$$

A függvény is létezik, de csak Df-en!

$$a S = b$$

a képe b;

b-nek őse a.



a_2 és nem egyértelmű.

példa.

Léképezés-e?

$$A = \{1, 2, 3, 4\} = \mathbb{N}$$

$$B = \{1, 2, 3\} = \mathbb{Z}$$

$$L = \{(1, 2), (3, 3), (4, 2), (1, 1)\}$$

nem léképezés.

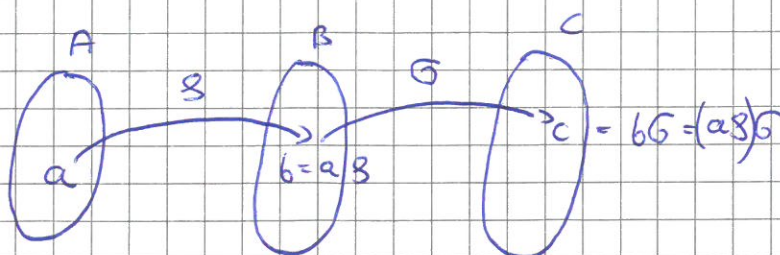
– $(1, 2)$ és $(1, 1) \in L$

– $(2, \dots)$ hiányzik.

egyszerűsít meg:

$$\beta = \{(1, 2), (3, 3), (4, 2), (2, 1)\} \quad \text{léképezés}$$

Léképezés sorozata:



$$S^G : A \rightarrow C, \quad a(SG) = (aS)G$$

(3)

23. tétel

$$g: A \rightarrow B$$

$$(1) \quad id_A g = g$$

$$(biz.:) \quad \forall a \in A \quad a(id_A g) = a g$$

$$a(id_A g) = (a id_A) g = a g. \text{ ennyi.}$$

24. tétel:

(Biz.)

$$g: A \rightarrow B$$

$$G: B \rightarrow C$$

$$J: C \rightarrow D$$

$$(gG)J = g(GJ)$$

$$\begin{aligned} \forall a \in A \quad a(gG)J &= (a(gG))J = (a g)GJ \\ &\Rightarrow (a g(GJ)) = (a g)(GJ) = (a g)GJ \end{aligned}$$

összetételstetű, hiszen van

asszociatív a össze.

De nem kommutatív.

(Példa)

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$a g = a^2.$$

↑ nem negatív valósok

$$G: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a G = 3a - 5$$

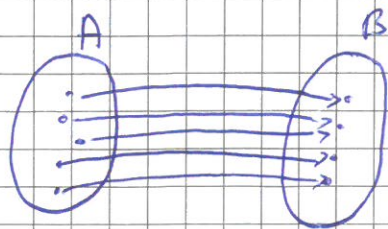
$$gG: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a(gG) = (a g)G = (a^2)G = 3a^2 - 5$$

$$Gg: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$a(Gg) = (a G)g = (3a - 5)g = (3a - 5)a^2.$$

(4)

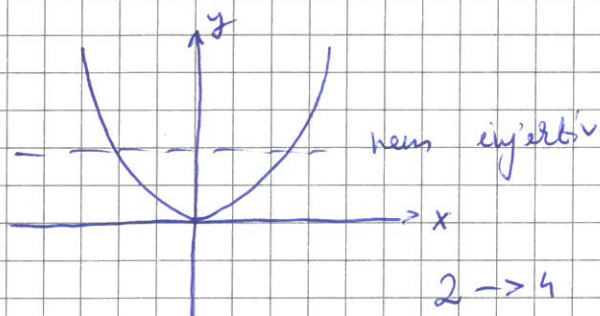


sújjetív (ndfepetés)

injektív, bijektív. adott.

példa

(1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ag = a^2$



$2 \rightarrow 4$
 $-2 \rightarrow 4$ ezért

nem sújjetív, pl. (-1) -nek nincsen őse.

(2) $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad a\varphi = a^2$

továbbra sem injektív. $2 \rightarrow 4$
 $-2 \rightarrow 4$

sújjetív: $\forall b \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad a\varphi = b$
 $\sqrt{b}$

(3) $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad a\varphi = a^2$

injektív is, sújjetív is

Tfh hogy nem injektív

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$

$a_1 \neq a_2$

$a_1^2 = a_2^2 \quad (a_1\varphi = a_2\varphi)$

$|a_1| = |a_2| \rightarrow a_1 = a_2$
 ellenmondás!

(5)

$$S \subseteq A \times B$$

$$S^{-1} = \{ (b, a) : (a, b) \in S \} \subseteq B \times A$$

29. tétel

S^{-1} létezés $\Leftrightarrow S$ bijektív

Biz:

$\Rightarrow S^{-1}$ létezés.

$S^{-1}: B \rightarrow A$ létezés.

$$\forall b \in B \exists a \in A \quad b S^{-1} = a \quad (a S = b)$$



$$\exists! a \in A \Rightarrow \neg a_1, a_2$$

$$a_1 \neq a_2$$

$$a_1 S = b$$

$$a_2 S = b$$

ez több
érték rá injektív.

S érték
surjektív

S bijektív.

$\Leftarrow S$ bijektív.

S surjektív: $\forall b \in B$ van képe S^{-1} -nek.

S injektív: $\forall b \in B$ nem lehet több képe

S^{-1} injektív.

$$\forall b \in B \exists! a \in A \quad b S^{-1} = a.$$

□

30

(1) S, G surjektív $\Rightarrow SG$ is az

$$SG: A \rightarrow C.$$

$\forall c \in C$ G surjektív $\Rightarrow \exists b \in B$ $bG = c$.

$\forall b \in B$ S surjektív $\Rightarrow \exists a \in A$ $aS = b$.

$$a(SG) = \underbrace{(aS)}_b G = c$$

(2) S, G injektív $\Rightarrow SG$ is az

Tfh nem injektív SG , $\exists a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$

$$a_1(SG) = a_2(SG).$$

$$(a_1 S)G = (a_2 S)G \Rightarrow G \text{ injektív}$$

$$a_1 S = a_2 S \Rightarrow S \text{ injektív}$$

nem volt helyes a feltevés.

$$a_1 = a_2$$

ellentmondás.

□

(4) SG surjektív $\Rightarrow G$ surjektív.

$$SG: A \rightarrow C, \forall c \in C \exists a \in A \quad a(SG) = c$$

$$(aS)G = c$$

$$\exists b \in B$$

$$bG = c$$

$$(\exists) \left(\overset{-1}{S} \right)^{-1} = S$$

↑ ez helyes.

ezért.

□

31.

$$(3) \quad (sg)^{-1} = \bar{s}^{-1} \bar{g}^{-1}.$$

mit dem Kommutativ a success.

$$(sg)^{-1}: C \rightarrow A$$

$$c(sg)^{-1} = a$$



$$a(sg) = c$$

$$\bar{g}^{-1} \cdot \bar{s}^{-1}: C \rightarrow A$$

$$c(\bar{g}^{-1} \cdot \bar{s}^{-1}) =$$

$$= \underbrace{(c\bar{g}^{-1})}_{b} \bar{s}^{-1} = a$$



$$a\bar{s} = b$$



$$b\bar{g} = c$$



$$a(sg) = \underbrace{(a\bar{s})}_{b} \bar{g} = \underbrace{bc}_c.$$

erregt.

$$(31.) \quad A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\} \quad C = \{1, 4, 5\}$$

$$\mu = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(A \setminus \bar{C}) \cup (C \setminus \bar{B}) = \{1, 4, 5\}$$

$$\bar{C} = \{2, 3, 6\}, \quad \bar{B} = \{1, 2, 3\}$$

$$A \setminus \bar{C} = \{1, 4\}$$

$$C \setminus \bar{B} = \{4, 5\}$$

3.2.

(1) $a = 1, 2, 3, 4$

$\{1, 2, 3, 4\}$ olvasható le.

nyílt.

(2) $\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$

(6) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \cup \{(2, 1)\}$

3.3

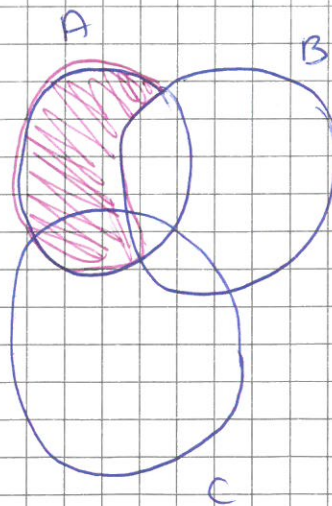
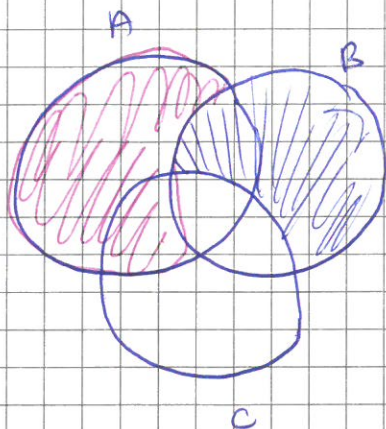
(1) $a = 2$ vagy 3 lehet

$$A = \{ \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\} \}$$

2

3.4

(2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$



3.10

(2) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|+3$ l.s.z.

$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (2x+3)$ l.s.z.

3.12

$\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto |x|+1$

nem injektiv.

$x=2 \Rightarrow x \rightarrow 3$

$x=-2 \Rightarrow x \rightarrow 3$

nem surjektív.

$\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{Z}$

$x \mapsto y$

"

$|x|+1=y$

egy tehát nem bijektív.

$|x|=y-1$

$x=y-1$

(5) $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x-1, x+1)$

injektivitás: t. h. nem injektív

$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \neq x_2$ hgy

$(x_1-1, x_1+1) = (x_2-1, x_2+1)$

DE nem surjektív.

(6) injektív (prímek)

surjektivitás:

$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}$ m-nek n osztója van

10

$$m = 2^{n-1}$$

gibend: $0, 1, \dots, n-1$

