

2018.03.02.

3. konverzáció

Diszkrét mat.

Logika.

Stélethallatulus

Kétváltozós logikai műveletek.

A	B	konjunkció ($A \wedge B$) "ÉS", "DE"	diszjunkció ($A \vee B$) "VAGY"
i	i	i	i
i	h	h	i
h	i	h	i
h	h	h	h

A	B	implikáció $A \rightarrow B$	ekvivalencia $A \leftrightarrow B$
i	i	i	i
i	h	h	h
h	i	i	h
h	h	i	i

ha A, akkor B

akkor és csak akkor A, ha B

Ha A teljesül, akkor B-nek is teljesülnie kell.

Amíg nem szél mérték

csak akkor A, ha B.

A elegendő feltétel B-nek.

B szükséges feltétel A-nak.

Egváltozós művelet: negáció

A	$\neg A$
h	i
i	h

egyszerű.

(pl) Ha azt az eszt és nincs rossz helyem, akkor pontosan akkor negatív

dimenzió elvárására ha dolgozatot írok.

• PRIMITÍVEK

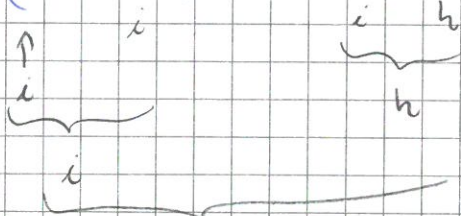
FORMALIZÁLNI.

$$(A \wedge \neg B) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$$

(1)

Tehát:

$$(A \wedge (\neg B)) \mapsto (C \leftrightarrow D)$$



h.

Ha: $A: i, B: h, C: i, D: h.$

Az ítéletváltozók primitéleteket jelölhet. (A, B, C, ... stb.).

Részformula.

$$(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$$

Részformulák: A, B, C, D, $\neg B$, $(A \wedge \neg B)$, $(A \wedge \neg B) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$,
 $(C \leftrightarrow D)$ 8 darab. Ilyen van a beszűben.

Két formula logikailag ekvivalens: meggyeznek az igazság táblájuk.

pl.

$$(A \wedge B) \mapsto C$$

és

$$A \mapsto (B \mapsto C)$$

A	B	C	$(A \wedge B) \rightarrow C$			$A \mapsto (B \mapsto C)$		
i	i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i	i	i	i
i	h	h	h	h	i	i	i	i
h	i	i	h	i	i	h	i	i
h	i	h	h	h	i	h	h	h
h	h	i	h	i	i	h	h	i
h	h	h	h	h	i	h	h	h

ekvivalens

A két kifejezés logikailag ekvivalens.

Egy formula tautológia, ha mindig igaz.

De-Morgan azonosságok befejezők itt is

~~AA~~ $A \wedge B = (\neg A) \vee (\neg B)$ és

$$A \vee B = (\neg A) \wedge (\neg B).$$
 Digitális...

Másik hasznos dolog: $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$.

Tipikus feladat: ekvivalenciát bizonyítani.

17. Következmény:

$$A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B \text{ átírható.}$$

$$\begin{aligned} A \leftrightarrow B &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = \\ &= (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A). \end{aligned}$$
 elnyeri:

Mindkettő átírható.

18. tétel:

Az F formula csak diszjunktív, konjunktív és negatív tartalmaz.

F^* formulában (1) minden ~~konjunktív~~ ^{$\vee$} -t $\wedge$ -re cserél;

(2) minden $\wedge$ -t $\vee$ -re cserél;

(3) minden A -t $\neg A$ -ra és

(4) minden $\neg A$ -t A -ra cserél.

Ekkor $F^* = \neg F$ lesz. Ezt kell belátni.

Biz.: Legyen G és H csak diszjunktív és konjunktív, negatív tartalmazó formula.

$$(G \wedge H)^* = G^* \vee H^* \text{ ugyanis: } (G \vee H)^* = G^* \wedge H^*.$$

Ha G nem ítéletváltozó, hanem formula: $(\neg G)^* = \neg G^*$.

Ha F ítéletváltozó: $F^* = \neg F$. ✓ Változóra pipa.

Legyen F egy formula, nem ítéletváltozó. Ebben az esetben a részformulák száma szerinti indukcióval bizonyíthatjuk.

- 1 részformula esete: az változó, előbb feladtunk.
- Tfh minden olyan esetben, amikor n -nél kevesebb részformula van, akkor igaz.
- Bizonyítjuk, ha F -nek n részformulája van.

F lehet $G \wedge H$, $G \vee H$, $\neg G$.

Így G -nek és H -nak n -nél kevesebb részformulája van.

$$\bullet \neg(G \vee H) \equiv \neg G \wedge \neg H \equiv \overset{\uparrow}{G^*} \wedge H^* \equiv (G \vee H)^*$$

indukciós feltevés

$$\bullet \neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H \equiv G^* \vee H^* \equiv (G \wedge H)^*$$

indukciós feltevés

$$\neg(G \wedge H) \equiv \neg G \vee \neg H \equiv \overset{\uparrow}{G^*} \vee H^* \equiv (G \wedge H)^*$$

indukciós feltevés

$$\bullet \neg(\neg G) \equiv \neg(G^*) \equiv (\neg G)^*$$

példa $F = (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge C)$.

$$F^* = ((\neg A) \vee B) \wedge (A \vee \neg C).$$

$$G = A \wedge (\neg(B \vee C)) \quad \text{De-Morgan}$$

$$G^* = (\neg A) \vee (B \vee C) \text{ lesz.}$$

Másik út: $G^* = (\neg A) \vee (\neg(\neg B \wedge \neg C))$ lesz,
ami ugyanaz.

Diszjunktív normálformula:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \text{ például.}$$

Ez még nem egyszerű.

Egyszerű: Teljes diszjunktív normál forma.

$$(A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Ezt nem bizonyítjuk, csak szemléltetjük.

A	B	C	$B \wedge (\neg(A \rightarrow C) \wedge (A \vee C))$
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	h
h	h	h	h

↑ ez nem jó

$$(A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee$$

$$\vee ((\neg A) \wedge B \wedge (\neg C))$$

ennyi.

ilyen is lesz a
táblában.

ennyi.

gyakorlati kell.

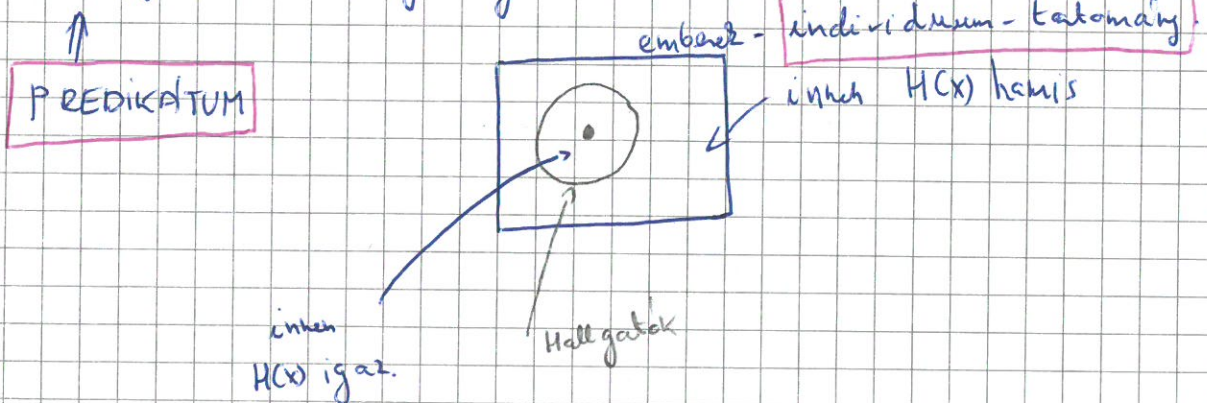
PREDIKÁTKALKULUS

Példa: Néhány hallgatónak nincs barátja.

predikátum: függvény értéke

$H(x)$: x hallgató függvény;

$B(x,y)$: x barátja y -nak.



KVANTOROK: $\exists$ (létezik; existenciális kvantor), $\forall$ (mind; univerzális kvantor)

$$(\exists x) (H(x) \wedge \neg (\exists y) B(y, x))$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\text{van olyan ember} \quad (\forall y) (\neg B(y, x))$$

ekvivalens jelölés

Példák: $O(x,y) = x$ osztója y -nak.

$M(x,y,z) := x$ és y számok szorzata z .

függvények: x és y összege $(x+y)$ $(+x,y)$
EZ NEM PREDIKÁTUM.

formalizáljuk.

(1) Tetszőleges egész száma $a \mid a$.

Individuum - tartomány: $\mathbb{Z}$.

$$(\forall x) O(x, x).$$

(2) Tetszőleges a egész száma $1 \mid a$.

1 : konstans

$$(\forall x) O(1, x)$$

B) Osztathóság definícióját!

$$O(x, y) \leftrightarrow (\exists z) \underbrace{M(x, z, y)}_{x \cdot z = y}$$

(4) Ha $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$

~~$$(\forall a, b, c)$$~~

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c) \left((O(a, b) \wedge O(a, c)) \rightarrow O(a, b+c) \right)$$

így épül fel ez.

Interpretáció:

$$(\forall x) (P(x, a) \mapsto (\exists y) (f(y) = x))$$

↑
konstans!
↑
ez egy predikátum

↑
 $f(y)$ ↑
predikátum és
is

interpretáció:

$$P(x, y) : x > y$$

= : egyenlő

f : négyzetre emelés

a : 0

indivíduum-tart. : $\mathbb{R}$

Minden pozitív valós szám előáll egy valós szám négyzeteként.

Másik interpretáció:

indivíduum-tart : emberek halmaza

$$P(x, y) : x \text{ lánya } y\text{-nak}$$

= : ugyanaz (egyenlőség)

f(x) : x anyja

a : Kovácsné

Kovácsné minden lányának van gyereke.

PÉLDÁK:

$$F = ((\exists z)(x \cdot z = y)) \wedge ((\exists z)(y \cdot z = x))$$

x, y

szabad

z

kötött

$F(x, y)$ predikátum ez.

interpretáció:

indivíduum: $\mathbb{Z}$, • számok

~~$x \neq z$~~

~~$\neq$~~

$x | y$

és

$y | x$

akkor

$x = \pm y$.

ezért

(b) $\mathbb{Z}$ az individuum - tartomány

- legyen az összeadás
függvény, nem predikátum!

$$\left((\exists z) (x + z = y) \right) \wedge \left((\exists z) (y + z = x) \right)$$

$\uparrow$ $z = y - x$ $\uparrow$ $z = x - y$

AZONOSAN IGAZ.

Egy szigorú feltételből egy másik interpretáció mellett

$$(\exists z) \left((x + z = y) \wedge (y + z = x) \right) \text{ lenne...}$$

$\uparrow$ $z = x - y$

$$x + (x - y) = y$$

$$\boxed{x = y}$$

Tagadás: Néhány hallgatónak nincs barátja.

tagadva: Minden hallgatónak van barátja.

$$\neg (\exists x) (H(x) \wedge (\forall y) (\neg B(y, x))) \equiv$$

$$\equiv (\forall x) \neg (H(x) \wedge (\forall y) (\neg B(y, x))) \equiv \quad \neg A \vee B \equiv A \rightarrow B$$

$$\equiv (\forall x) (\neg H(x) \vee \neg (\forall y) (\neg B(y, x))) \equiv$$

$$\equiv (\forall x) (\neg H(x) \vee (\exists y) B(y, x)) \equiv (\forall x) (H(x) \rightarrow (\exists y) B(y, x))$$

Következtetés fogalma:

$$\underbrace{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n}_{\text{premissák}} \models \underbrace{G}_{\text{konklúzió}}$$

A következtetés helyes, ha $\forall$ olyan esetben, ha a premissák igazak, akkor igaz a konklúzió is.

példa. Helyes-e a következtetés?

$$\underbrace{A \rightarrow (B \wedge C), (\neg B) \vee (\neg C)}_{\text{premissák}} \models \underbrace{\neg A}_{\text{konklúzió}}$$

Indirekten bizonyítható. Tfh nem helyes a következtetés.

Tehát a premissák igazak és a konklúzió hamis.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow (B \wedge C) : i \Rightarrow B \wedge C : i \text{ tehát } B \text{ és } C \text{ is igaz.} \\ (\neg B) \vee (\neg C) : i \\ \neg A : h \Rightarrow A : i \\ h \vee h : h \text{ ellentmondás, tehát a következtetés helyes. } \square \end{array}$$

igazságtábla nélkül beláttuk...

2.14. első és második x kötet.

A többi szabad

y mindenhol kötet

a az konstans

2.17.

- (1) oszthatóság definíciója, ezért igaz.
- (2) hamis, $\neq$ előjel hiánya.
- (3) hamis, egész számok körében vizsgálunk.

2.20

$$(1) (\exists x) (H(x) \wedge (\neg V(x)))$$

$$(2) H(p)$$

$$(3) (\forall x)(\forall y) ((H(x) \wedge C(x, y)) \rightarrow H(y))$$

$$(4) (\forall x) (C(x, p) \rightarrow V(x))$$

↑
ezt tagadni:

$$(\exists x) \neg (C(x, p) \rightarrow V(x)) \equiv (\exists x) (\neg C(x, p) \vee V(x)) =$$

$$A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$$

$$\equiv (\exists x) (\neg \neg C(x, p) \wedge \neg V(x)) \equiv (\exists x) (C(x, p) \wedge \neg V(x))$$

ezért:

2.1.

- (2) A: legyőzi a rangot
- B: egyik fél elvonás
- C: üggetlenül vizsgálunk.

$$(B \vee (\neg B \wedge C)) \leftrightarrow A$$

11.

2.2

(1) $A, B, C, A \vee C, C \Leftrightarrow A, \neg B, (\neg B) \wedge (C \Leftrightarrow A)$
önmaga.

8 db.

2.5

(1) $\neg(A \wedge (\neg A))$

(2) $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

↑ de-Morgan
Teljes diszjunktív normál formula a vizsgán.

2.9

(1) A: Sári és Béla azonos kaul

B: Sári idősebb Bélánál

C: Nelli és Béla azonos kaul

D: Béla idősebb Tibornál

$A \vee B, A \rightarrow (\neg C), B \rightarrow D \not\models$
premissák

(2) $\not\models \neg C \vee D$

teljes a következtetés

indirekt módon:

$A \vee B : i \in \boxed{A : i}$

itt állít-módszer.

• $A \rightarrow (\neg C) : i$

$B \rightarrow D : i$

emiatl

$\boxed{B : h}$

$(\neg C) \vee D : h \Rightarrow \neg C : h$ és

$\boxed{C : i}$

$\boxed{D : h}$

(12)