

Előadó: Zita Diana

Coospace - en a megoldandó feladatok!

1 db szathelyi lesz + lesz 1 lehetőség azt pótolni.

Halmazok

Halmaz + elemei

↑
nem def.↑
vminely tulajdonságai alapján oda tartozik.

153. f.

felhívás
↓
kérlek allokálni.a) $P = \{ \text{prim számok halmaza} \}$ (önmagával és 1-el, de nem 1.) $\mathbb{Q}$: racionális Iga $a \in \mathbb{Z}^+$ és $b \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}^+$ Iga. $\mathbb{Z}$: egész Iga $a \in \mathbb{Z}^-$ és $b \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}^-$ Iga. $\mathbb{Q}$: irracionális Iga $a \in \mathbb{Q}$ és $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$ Iga.↑
nem lehet
felkérni
allokálni.Iga $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$ Hamis. (De lehetséges.)↑
 $a=2, b \in P$
például.e) $a, b \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}^+$ Hamis(csak akkor, ha $a > b$!) $a, b \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}^-$ Hamis. $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Q}$ Iga. $a, b \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow a - b \in \mathbb{Q}^*$ Iga., kivéve ha $a = b$.

156. f.

a) $A = \{ a \mid a = z^2, a < 1000, z \in \mathbb{N} \}$

Hány eleme van a halmaznak?

$$|A| = \text{card}(A) = \underline{\underline{31}}$$

Intuitív út: $30^2 = 900$, $31^2 = 961$

b) $C = \{2^n \text{ lehetőséges végződése, ahol } n \in \mathbb{N}\}$

$$C = \{2, 4, 8, 6\}$$

$$|C| = \underline{\underline{4}}$$

c) $D = \{ \text{az } "x^3 - 9x = 0" \text{ egyenlet gyözei} \}$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x_1 = \underline{\underline{0}}$$

$$x(x-3)(x+3) = 0$$

$$x_2 = \underline{\underline{3}}$$

$$x_3 = \underline{\underline{-3}}$$

$$|D| = \underline{\underline{3}}$$

164. f.

A

$$B = \{ \dots, A \}$$

↓
a halmaz is eleme lehet
a halmaznak.

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, A\}$$

De nem részhalmaza!

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Halmazműveletek.

181. f.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \{6 \in \mathbb{N} \mid 6 = 2k, 4 \leq k \leq 9, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{20\text{-nél kisebb } 3\text{-al osztható poz. egész számok}\}$$

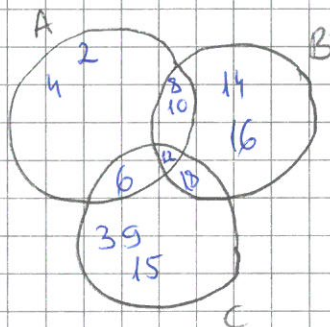
a) $(A \cup B) \cup C = ?$

$$B = \{8, 10, 12, \dots, 18\}$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

b) az unió
metszet.

$$(A \cap B) \cup C = ?$$



$$(A \cup B) \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}.$$

$$(A \cap B) \cup C = \{8, 10, 12\} \cup C = \{3, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18\}.$$

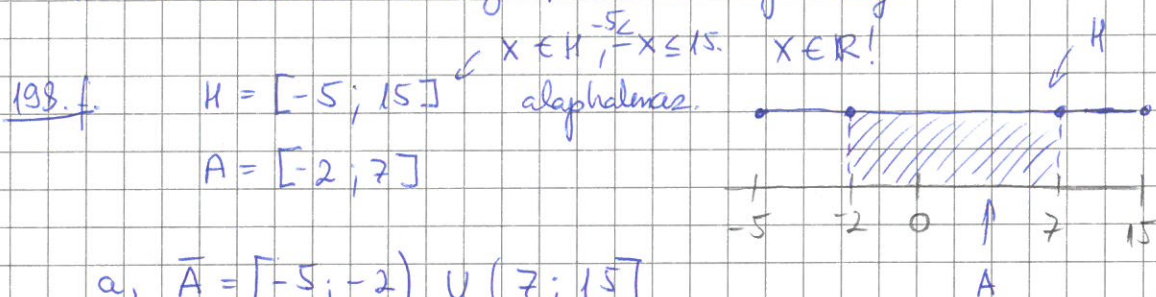
$$c) (A \setminus B) \setminus C = \{2, 4\}.$$

Abra alapján.

↑
különbség, A elemei,

kelept a B-ben
nincs enélz benne.

$A \Delta B$: szimmetrikus különbség. A két különbség összege.



$$b, B = (1; 10]$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{[-2; 10]} = [-5; -2) \cup (10; 15]$$

↑ számszerűsítés segítségével vizuálisabb.

Descartes-sorzat.

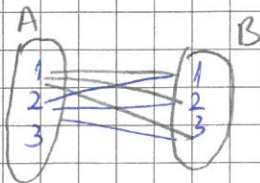
205. f.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{2, 3, 4\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$



Σ9 elem

$A \times B$ nem kommutatív

$$A \times B \neq B \times A, \text{ csak}$$

ha $A = B$.

$$A \times A = A^2 \quad \checkmark$$

Elemssám: $|A \times B| = \uparrow$ a két elem - szám szorzata.

$$|A| \cdot |B|$$

249. f.

$$|A \cup B \cup C| = ? \quad \text{Ha} \quad |A| = 7, |B| = 8, |C| = 9.$$

$$\begin{aligned} \text{és: } & A \cap B \neq \emptyset \\ & A \cap C \neq \emptyset \\ & B \cap C \neq \emptyset. \end{aligned}$$

$$|A \cup B \cup C|_{\min} = 9 \rightarrow \text{Ha } A \text{ és } B \subset C.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

ún. Szitaformula.

$$|A \cup B \cup C|_{\max} = 7 + 8 + 9 - 3 = \underline{\underline{21}}$$

Számelméleti alapok:

308. f. Mi a maradék 3-mal oszva?

$$\downarrow l = a + 4$$

$$0 \text{ a maradék. } 3a + 12 = 3(a + 4) = 3l \text{ -altri. (} m=0 \text{)} \quad 6r + 3q - 1 \Rightarrow m=2.$$

$$6a + 20 \Rightarrow m=2.$$

$$\uparrow 9a + 38 + 2 \Rightarrow m=2.$$

$$(3p + q)^2 - q(q + 12) =$$

$$6a + 18 + 2 = 3(2a + 6) + 2.$$

$$(3p + q)^2 - q(q + 12) = 9p^2 + 6pq + q^2 - q^2 - 12q = 3(3p^2 + 2pq - 4q)$$

$\uparrow m=0!$
emialt.

311. f.

$$\text{Ha } 7 \mid 2a + 3b \Rightarrow 7 \mid 20a + 9b.$$

Bizonyítási feladat.

$$\begin{aligned} & \uparrow \text{Hét osztója} \\ & \uparrow 2a + 3b \text{ -hez.} \cdot 3 \\ & \uparrow \text{ide pótoljuk.} \\ & 20a + 9b = 3 \cdot (2a + 3b) + 14a \quad \checkmark \\ & \quad \uparrow \text{osztója} \quad \uparrow \text{osztója.} \end{aligned}$$

↓ egy számjeggyel szám, a számjegyet helyettesít

321.f.

a) $9 \overline{) 2a3}$ $a = 4$

↑

Ha a számjegyek összege osztható 9-lel, akkor a szám is osztható 9-lel.

c) $6 \overline{) 6642}$ $6 = 0, 3, 6, 9$

↑ Kétjegyű oszthatóság teljesül, csak $3 \mid 6+6+4+2$ kell!

f) $15 \overline{) 3xyy}$

↑ Harmincad és ötös! $(15 = 3 \cdot 5)$

$y = 0, 5 \rightarrow$ Ha $y = 0, x = 2, 5, 8;$
 $\rightarrow$ Ha $y = 5, x = 0, 3, 6, 9.$

325.f. Bizonyítás.

$24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$; ha $n \Rightarrow$ pozitív egész.
 $(n \in \mathbb{Z}^+)$

$24 = 12 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \cdot 2$

↑ ↑ ↑

3 oszthatóságot kell vizsgálni.

$n, n+1, n+2, n+3 \rightarrow$ 4 db egymást követő egész szám.

Biztosan van 2 páros.

egyet 4-el osztható

És legalább 1 3-al osztható van.

Ennyi, be van bizonyítva.

332.f. Bizonyítás.

Ha 5 nem osztója n -nek $(5 \nmid n)$, akkor $5 \mid n^4 - 1 \rightarrow$ igaz-e?

Miért.

Legyen:

$n = 5l \pm 1$ lehet.

$n = 5l \pm 2$

$n = 1$

$n = 2$

$n^4 - 1 = 0 \checkmark$

$n^4 - 4 = 15 \checkmark$

$\therefore$ PRÓBÁVAL OK.

$$n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)(n+1)(n^2 + 1) \quad \text{Inkább fel.}$$

1. eset: $n = 5k + 1$. 1. tényező 5-tel osztható.

$$5 \mid n-1, \text{ mert } 5k+1-1 = 5k \quad \checkmark$$

2. eset: $n = 5k - 1$ 2. tényező - 1 -

$$5 \mid n+1, \text{ mert } 5k-1+1 = 5k \quad \checkmark$$

3. eset $n = 5k \pm 2$ $5 \mid n^2 + 1$ Ez a kérdés. $5 \nmid 5 \quad \checkmark$

$$(5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 + 4 \pm 20k + 1 \rightarrow \text{osztható}$$

$$\begin{array}{cc} 5 \mid & 5 \mid \\ \checkmark & \checkmark \end{array}$$

Ennyire.

343. f. $n \in \mathbb{Z}^+$ n értéke a kérdés, hogy a kifejezés egész szám legyen.

a) $\frac{3n}{6} \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{3n}{6} = \frac{n}{2} \Rightarrow n \text{ legyen páros } n = 2k \quad k \in \mathbb{N}$$

↑
ebben benne van a 0.

b) $\frac{5n+2}{4} \in \mathbb{N}$ Másfélté is: $4 \mid 5n+2$ Inkább: $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{5n+2}{4} = \frac{4n + n+2}{4} = n + \frac{n+2}{4} \quad \text{alakra hozható.}$$

$$4 \mid n+2 \quad n = 2, 6, 10, \dots$$

$$n = 4k+2 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

c) $\frac{n+1}{n-1}$ esete.

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{n-1+1+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$$

$$\begin{array}{c} n=3 \\ \uparrow \\ n-1 \mid 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} n=2 \\ \swarrow \end{array}$$

$$d) \frac{5n+3}{n+7} = \frac{5n+35-35+3}{n+7} = 5 - \frac{32}{n+7}$$

$$\Downarrow$$

$$n+7 \mid 32$$

Több megoldás lesz,
mint előbb volt.

$n+7=1$	$n=-6$	} nem lehet negatív n !
$n+7=2$	$n=-5$	
$n+7=4$	$n=-3$	
$n+7=8$	$n=1$ ✓	
$n+7=16$	$n=9$ ✓	
$n+7=32$	$n=25$ ✓	

$$e) \frac{n^2+2n+6}{n+1} = \frac{n^2+n+n+6}{n+1} = \frac{n(n+1)+n+1+5}{n+1} =$$

$$= n+1 + \frac{5}{n+1}$$

$$n+1 \mid 5$$

$$n+1=1 \rightarrow n=\emptyset \text{ Nem lehet, szüntelen}$$

$$n+1=5$$

$$\underline{n=4}$$

1 megoldás van.

408.f.

A $10!$ prímtényezős felbontása a kérdés.

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

419.f. $\text{lzo}(p^{3^2}; p^4) = \underline{p \cdot q^2}$ Ez ennyi.

$$\text{lzt}(p^3 q^2; p^4) = \underline{p^3 \cdot q^4}$$

659.f. a) $a^2 - 8a + 16 \Rightarrow$ Horvitz $(A \pm B)^2 + C$ alakú.

$$\underline{(a-4)^2} = a^2 - 8a + 16 \quad \checkmark \quad \text{Ez ennyi: } C = \emptyset.$$

b) $\underline{c^2 + 4c + 3 = (c+2)^2 - 1}$

$$c, \quad f^2 + 7f + 5 = 0$$

$$(f + 3,5)^2 = 7,25.$$

669.f. Alakítsuk szorzattá.

$$2x(x-y) - 3y(x-y) = (x-y)(2x-3y).$$

674.f.

$$a, \quad 1 - x^2y^2 = (1 - xy)(1 + xy)$$

$$b) \quad a^6b^2 - c^4d^4 = (a^3b - c^2d^2)(a^3b + c^2d^2)$$

Emeji az egész.

Kétféle feljegyzés képe.

681.f.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{Azonosság.}$$

$$a) \quad 125m^3 + 75m^2 + 15m + 1 = (5m+1)^3$$

$\uparrow \sqrt[3]{125} = 5$

$$b) \quad 64 - 96a + 48a^2 - 8a^3 = (4 - 2a)^3$$

$\uparrow$ emelt 4 .

$\uparrow$ emelt $2a$

c) ...

685.f. Tényezőkre bontás

$$a) \quad a^2 + 2ab + b^2 - 1 = (a+b)^2 - 1 = (a+b-1)(a+b+1)$$

$$b) \quad 25 - x^2 + 2xy - y^2 = -(x-y)^2 + 5^2 = (5-x+y)(5+x-y).$$

Ugyanaz a történet.

696.f. Műveletek törttel

Egyszerítős!

$$\frac{80a}{4a-10} \cdot \left(\frac{2a+5}{2a-5} - \frac{2a-5}{2a+5} \right) =$$

$$\frac{40}{2(2a-5)} \cdot \frac{(2a+5)^2 - (2a-5)^2}{(2a-5)(2a+5)} = \frac{40a}{2a-5} \cdot \frac{(2a-5)(2a+5)}{(2a+5-2a-5)(2a+5+2a-5)} =$$

$$= \frac{40a}{2a-5} \cdot \frac{(2a-5)(2a+5)}{10(2a)} = \underline{\underline{2a+5}}$$

710.f. Egyszerítős!

ℳ: $a \neq -5$!

$$a) \frac{5x-5y+ax-ay}{4a+20} = \frac{5(x-y)+a(x-y)}{4(a+5)} =$$

$$= \frac{(x-y)(5+a)}{4(a+5)} = \underline{\underline{\frac{x-y}{4}}}$$

$$b) \frac{c^3+d^3}{c^2-c-d^2-d} = \frac{(c+d)(c^2-cd+d^2)}{(c-d)(c+d)-(c+d)} = \underline{\underline{\frac{c^2-cd+d^2}{c-d-1}}}$$

$$T: a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Hatványozás

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ - times.}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0!$$

836.f.

$$\left(a^{-1} + b^{-1} \right)^{-2} \cdot (a+b)^2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-2} \cdot (a+b)^2 =$$

$$= \left(\frac{b+a}{ab} \right)^{-2} \cdot (a+b)^2 = \left(\frac{ab}{b+a} \right)^2 \cdot (a+b)^2 = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} \cdot (a+b)^2 = \underline{\underline{a^2 b^2}}$$

$$b) \left(\frac{a^2 b}{x^2} + \frac{a^2 b^3}{x^4} \right) \cdot \frac{a^3 b^{-2}}{x^2} = \left(a^2 b x^2 + \frac{b^3}{a^2 x^4} \right) \left(\frac{a^3}{x^2 b^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{b^3 + a^4 b x^6}{a^2 x^4} \right) \cdot \frac{a^3}{x^2 b^2} = \frac{\cancel{b} (a^4 x^6 + b^2) \cdot a}{b^{\cancel{2}} x^6} = \underline{\underline{\frac{a (a^4 x^6 + b^2)}{b x^6}}}$$

837. f. Melyik nagyobb?

a) 20^{100} vagy 100^{20} ?

$$20^{100} \quad (5 \cdot 20)^{20}$$

$$20^{20} \cdot 20^{80} \quad 5^{20} \cdot 20^{20} \quad / : 20^{20}$$

$$20^{80} > 5^{20} \quad \text{Így már látható.}$$

Vagy: $20^{100} = (2 \cdot 10)^{100}$

$$2^{100} \cdot 10^{100} > 100^{20} = (10^2)^{20}$$

$$2^{100} \cdot 10^{100} > 10^{40}$$

Ez is egy járható út.

b) 10^{16} vagy 16^{10} ?

$$10^{16} = 2^{16} \cdot 5^{16}$$

$$2^{16} \cdot 5^{16} > 2^{40} \left[\left(\frac{5}{2} \right)^{10} \right] / \cdot 2^{16}$$

$$5^{16} > 2^{24} / : 2$$

$$(2 \cdot 5)^{16} > 2^8$$

Sokféle úton lehet eljutni odáig, hogy látható legyen.