

Euklideszi terek jönnek.

$$\langle -, - \rangle : V^2 \mapsto \mathbb{R}$$

↑ szimmetrikus bilineáris leképezés!

$V \mapsto \mathbb{R} \quad v \mapsto \langle v, v \rangle$ kvadrátikus alak pozitív definit.

$$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{szimmetria.}$$

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle.$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{és} \quad \forall \text{ esetben } \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x} \underline{y}^T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{BCS - egyenlőtlenség.}$$

$$\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle.$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{Háromszög - egyenlőtlenség.}$$

Triviális az a dolog is.

$$\text{Ha } u, v \neq 0, \text{ akkor } -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1.$$

Van pontosan 1 $\angle$ ($0 \leq \angle \leq \pi$), hogy
 $\cos \angle = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$ Ennyire.

Orthogonális vektorok esetén

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

ért mondjuk

Számoljuk egy cséppet.

$$\langle u+v, u-v \rangle = 0.$$

$$\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = 0.$$

~~Ha~~ $u, v \neq 0 \Rightarrow$ Ez lesz igaz.

Két vektor hossza csak akkor egyenlő, ha $\langle u+v, u-v \rangle = 0$.

$$\langle u+v, u-v \rangle = \langle u, u-v \rangle + \langle v, u-v \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\|u\|^2} - \underbrace{\langle u, v \rangle}_{\langle u, v \rangle} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{\langle u, v \rangle} - \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|^2} = 0.$$

ennyi.

$$\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2 \rightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

Pitagorasz-tétel.

$u_1, \dots, u_n$ vektorendszer ortogonális, ha mindegyik vektor normális mindegyik vektorra.

$$A \cdot A^T =$$
$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix} a_1^T & a_2^T & \dots & a_i^T & \dots & a_n^T \end{pmatrix}$$

(2)

$$\underline{a_i} \cdot \underline{a_j}^T = \langle a_i, a_j \rangle$$

Ha $A \cdot A^T = E$:

$$\underline{b_i} \underline{b_j}^T = \begin{cases} 1 & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{amúgy} \end{cases}$$

Naggyából ennyi.

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\| = 1.$$

$$\sqrt{\left\langle \frac{1}{\|v\|} \cdot v, \frac{1}{\|v\|} v \right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\|v\|^2} \cdot \langle v, v \rangle} = 1$$

V euklideszi tér, $e_1, \dots, e_n$ ortonormált bázis

$$u, v \in V$$

$$u \text{ koord. szer. } \underline{x}$$

$$v \text{ " " " } \underline{y}.$$

$$\langle u, v \rangle = \underline{x} \underline{y}^T$$

Szimmetrikus lin. transzformációk, kvadrátus alakos feltevések.

$$\langle u\varphi, v \rangle = \langle u, v\varphi \rangle \quad \forall u, v \in V \text{ esetén}$$

φ szimmetrikus (önadjungált).

Ennyire.

$$\varphi: V \rightarrow V, \quad \varphi \in \text{Hom}(V, V)$$

$$e_1, \dots, e_i, \dots, e_n \text{ bázis } \forall i \quad e_i \varphi = \lambda_i e_i.$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$ φ mátrixa ebben a bázisban.

$$e_1 \varphi = \lambda_1 e_1$$

$$e_2 \varphi = \lambda_2 e_2$$

$$\vdots$$

$$e_i \varphi = \lambda_i e_i$$

$$\vdots$$

$$e_n \varphi = \lambda_n e_n$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \lambda_i & \\ 0 & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A főtételben vannak a sajátértékek.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (z, y, x).$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(x^2-1) = (1-x)(x-1)(x+1) = 0.$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0)$$

$$-x + z = 0$$

$$0 = 0$$

$$x - y = 0$$

$$\boxed{x = z}$$

$$u_1 = \{ (x, y, z), x = z \}$$

Ez volt a példa a dolgozatban.

$$u_1: (1, 0, 1), (0, 1, 0)$$

$$u_2: (1, 0, -1)$$

Ezr növelegeset, de még nem ortogonalizált.

$$u_2: \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_1: \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0)$$

Ebben a bázisban:
ennyi ugyanaz működik.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az inverz ebben az esetben a transzponált = inverz.

És nagyjából ennyi az anyag.

