

Robozus tovább témáilag, példák jönnek.

$$\varphi: U \mapsto V, \quad \underbrace{x}_{1 \times m} \mapsto \underbrace{x A}_{1 \times m \cdot m \times n}$$

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in T^m, xA = 0\}^{1 \times n} \quad \text{Tehát ez } xA = 0 \text{ Hom. lin. egyenletrendszer}$$

$$\text{Im } \varphi = \{xA : x \in T^m\} \quad r(\varphi) = ?$$

megoldáshalmaza.

$$\varphi \text{ rangja: } r(\varphi) \stackrel{A}{=} \dim(\text{Im } \varphi) = r(A)$$

$$\varphi: U \mapsto V$$

$u_1, \dots, u_m$ generátorrendszer U -ban $\rightarrow u_1\varphi, \dots, u_m\varphi$ generátorrendszer $\text{Im } \varphi$ -ben.
Lehet független generátorrendszer is.

pl.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \text{ vetítés az } x \text{ tengelyre. (másképp!)} \quad (x, y, z) \mapsto (x, 0, 0) \text{ egyenletünk.}$$

$$(1, 0, 0)\varphi = (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0)\varphi = (0, 0, 0) \quad (0, 0, 1)\varphi = (0, 0, 0)$$

Trivialis.

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ írható fel.}$$

$$\text{Ker } \varphi = ? \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x \ 0 \ 0)$$

Másképp:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\dim \text{Ker } \varphi = 2$$

$$\text{Ker } \varphi = \{(x, y, z), x = 0\}.$$

(1.)

$$\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 1 = r(A) \quad \text{leolvasható.}$$

$$\dim U = \dim(\operatorname{Im} \varphi) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi)$$

$$3 = 1 + 2 \quad \text{ahol a dimenzióképlet.}$$

Ebben az esetben.

$$\operatorname{Im} \varphi = \{ (x, 0, 0), x \text{ tetszőleges } \mathbb{R} \}$$

$$\operatorname{Im} \varphi = [(1, 0, 0)\varphi, (0, 1, 0)\varphi, (0, 0, 1)\varphi] =$$

$$[(1, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)] = [(1, 0, 0)]$$

ennyi.

Ilyen várható pl. a dolgozatban.

$$\begin{array}{c|cc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

Ez a gondolatmód.

Ennyi volt a feladó példa, megjött tovább.

Sajátérték, sajátvektor.

Ismerős dolgoz látszik, abszolútban.

$$\varphi: \operatorname{Hom}(V, V)$$

φ sajátvektora: $v \neq 0$, és $\exists \lambda \in T$, hogy

$$v\varphi = \lambda v$$

λ, v sajátérték - vektorpár.

$f_A(x) = |A - xE|$ a karakterisztikus polinom.

A mátrixé.

A valós gyök pedig karakterisztikus gyök, ha $\in \mathbb{R}$, vagy T .

1) $x \in T^n$ a $v \in V$ és $\lambda \in T$.

λ és v alkot sajátérték-sajátvektor párt, ha

λ és x sajátérték-sajátvektor párhoz A -hoz.

Ha adott φ , kell λ és v : végül fel bontani. Kell a mátrix és annak már lehet a bázis.

Hasonló mátrixok kar. pol.-ján megegyezik. Ez fontos.

$$xA = \lambda x$$

$$\lambda x = \lambda Ex$$

$$xA - \lambda x = 0$$

$$xA - x(\lambda E) = 0$$

$$x(A - \lambda E) = 0 \quad \text{Adott } \lambda, x \text{-re egy harm. lin. egyenletrendszer.}$$

$$\varphi: \lambda \in T, \quad U_\lambda = \{v \in V: v\varphi = v\lambda\}.$$

λ -hoz tartozó saját érték.

$$\lambda \text{ sajátérték} \Leftrightarrow U_\lambda \neq \{0\}$$

$$U_\lambda = \{x \in T^n: x(A - \lambda E) = 0\}$$

A negatív -ot már tanulunk.

Nyíltfelez vissza az előző példához.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) = 0$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 0}} \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 1}}$$

$\lambda_1 = 1$ -hez:

$$\underbrace{(x, y, z)}_X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A - \lambda_1 E} = \underbrace{(0, 0, 0)}_{XX}$$

$$0 = 0$$

$$-y = 0$$

$$-z = 0$$

$$y = z = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$U_{\lambda_1} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = z = 0, x \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim(U_{\lambda_1}) = 1$$

$\lambda_2 = 0$ -hez:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$x = 0, \quad y, z \in \mathbb{R}$$

ennyi.

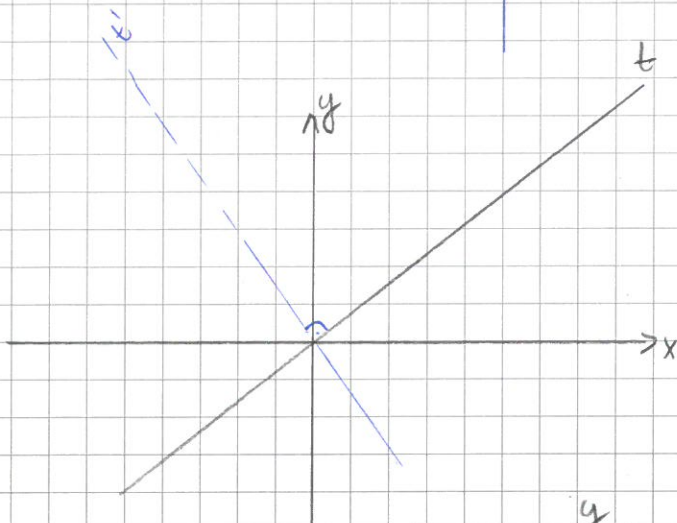
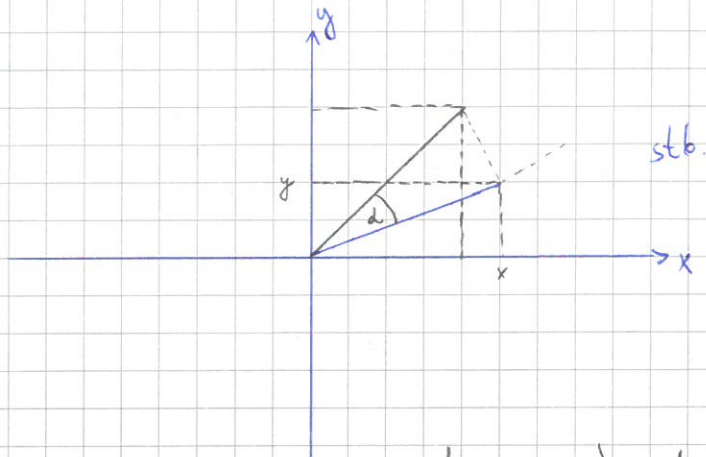
$$U_{\lambda_2} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0, y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim(U_{\lambda_2}) = 2 \quad (\text{kétszemes görg})$$

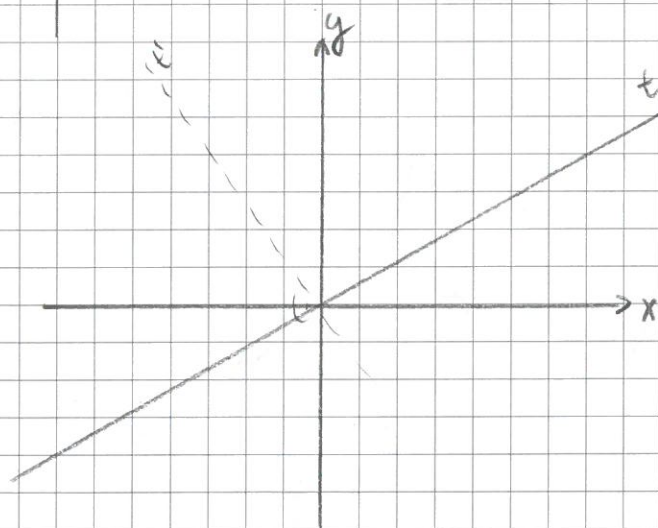
ennyi az egész.

Ez a technika.

$\mathbb{R}^2$, α szöggel elforgatás, de ne legyen 2π . és $\alpha \neq \pi$



$\lambda_1 = 1$, $u_{\lambda_1} : t$ egyenes
 $\lambda_2 = -1$, $u_{\lambda_2} : t'$ egyenes



vetítés:

$\lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 = 0$

szemléletes példák, csak nem nagyon mennek...

példa

S sík merőleges az XY síkra, metszétvonal az $x=y$ egyenes

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, z) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, z \right) \text{ egy íráható fel.}$$

Sajátérték, sajátvektor.

$$f_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= (1 - \lambda) \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = (1 - \lambda) \frac{\lambda^2 - 1}{4}$$

$$(1 - \lambda) \left(\left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right) = (1 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ -hez:

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{array} \right\} \quad x = y \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$0 = 0$$

$$U_{\lambda_1} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y, z \in \mathbb{R} \}$$

$\lambda_2 = 0$ -hez:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{array} \quad z = 0$$

$$U_{\lambda_2} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y, z = 0 \}$$

(6)

Ez annyi.

↓ ez mind sajátvektor.

Legyen $e_1 = (1, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$ $e_3 = (1, -1, 0)$

Ezek sajátvektorok ugye.

$$\Downarrow \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ lesz elvileg.}$$

Robogunk tovább.

$u, v \mapsto$ Bilineáris leképezés

$$l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$$

$$l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$$

$$l(\lambda u, v) = l(u, \lambda v) = \lambda l(u, v) \quad \text{Kell, hogy teljesüljön.}$$

$a_{ij} = ?$

$$\underline{x} A \underline{y}^T = \underbrace{(x_1, \dots, x_m)_{1 \times m}}_{1 \times m} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & a_{ij} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m x_i a_{in} \right)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i e_{ij} y_j$$

Így néz ki egy bilineáris leképezés tulajdonsága.

$$l: V^2 \mapsto T, \quad v \times v \mapsto v$$

Kvadrátikus alak, kvadrátikus leírás.

$q: V \rightarrow T$, ha $\exists$ olyan $l: V \rightarrow T$, melyre

$$q(v) = l(v, v) \quad \forall v \in V \text{ esetén.}$$

Ennyi tulajdonság.

Mintha egy kétváltozós függvény minden két vektort páronként írunk be.

$$\underline{x} A \underline{x}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

négyzetes formátum
jelölést itt meg.

$$q(v) = \underline{y} B \underline{y}^T$$

$$q(v) = \underline{x} A \underline{x}^T$$

$$\Rightarrow B = S A S^T$$

↑
második bázisból az elsőbe
vált átment
mátrix.

$$\underline{x} = \underline{y} S$$

$$\underline{x} = \underline{y} S = (y_1, \dots, y_n) (s_{ij})_{n \times n} = \dots = \left(\sum_{i=1}^n s_{i1} y_i, \dots, \sum_{i=1}^n s_{in} y_i \right)$$

Köcs rang van $r(q)$.

Adható olyan bázis, melyben a q kanonikus alakú.

Valós kvadratis alakok:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

es az egyszerűsített normálalak

Kvadratis alakok osztályozása:

↳ pozitív definit: $\forall v \in V$ esetén $q(v) > 0$

↳ negatív definit

negatív/ pozitív szemi-definit lehet.

0-dt sem csd a nullában van fel.

De lehet indefinit.

Ezre vanhat teljes a rangban.

Főminor fogalma és annak vizsgálata.

Nyomjelről pár példát.

$$l: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \quad l((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_2 y_2$$

$$l(u, v) = (x_1 \ y_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad a_{22} = 1 \text{ lesz.}$$

$$q(x_1, x_2) = l((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_2^2$$

$$0 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 = y_1^2$$

$$x_1 = y_2$$

$$x_2 = y_1$$

pozitív szemi-definit.

még egy példa. A vizsgán lehet.

$$l: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad l((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3$$

Ez nem bilineáris kétféleképp.

Ha melyik vektor 0 vektor $\rightarrow$ az eredmény nulla.

Ez most nem teljesül.

- Alternancia? Eldönteni.
- Függőség / Függelkenység
- Rang számítása
- Lin. kétféleképpes mátrix, mag, $\det$, tr
- Sajátérték / Sajátvektor.

Ezek lesznek a 2. ZH-BAN.