

Lineáris leképezés mátrixa.

U véges dimenziós

T felett.

V pedig végtelen.

Adott U egy bázisa. Egy olyan $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ létezik,
amelyre $e_1\varphi = v_1, \dots, e_n\varphi = v_n$. Pont egy ilyen van.

Bázisváltásról mi a szó? Az egyértelműen meghat-

$\varphi: U \rightarrow V$

$e_1, \dots, e_n$ bázis U -ban.

$u \in U = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ lesz tényleg.

$$u\varphi = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \varphi = \sum_{i=1}^n (\lambda_i e_i) \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i \varphi).$$

A lin. leképezés felírható a lin. kombinációképpel.

Ellenőrizze.

$E: e_1, \dots, e_m$ bázis U -ban.

Véges dimenziós.

$F: f_1, \dots, f_n$ bázis V -ben.

$\varphi \in \text{Hom}(U, V)$.

$$e_i \varphi = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ezért $A_\varphi^{E, F} = (a_{ij})_{m \times n}$ mátrix: lin. leképezés mátrixa

Ha $U=V \Rightarrow$ egy bázis választása.

$$A_{\varphi}^{\varepsilon, \varepsilon} = A_{\varphi}^{\varepsilon} \quad \text{Ez is valószínűleg fájóan szigorúan.}$$

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \underline{e\varphi} = \begin{pmatrix} e_1\varphi \\ e_2\varphi \\ \vdots \\ e_m\varphi \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon, \varepsilon} \underline{f} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} f_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} f_j \end{pmatrix}$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon, \varepsilon} \underline{f} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} f_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ e_1\varphi \\ \vdots \\ e_m\varphi \end{pmatrix} = \underline{e\varphi}$$

$m \times n \qquad n \times 1$

$$\underline{e\varphi} = A_{\varphi}^{\varepsilon, \varepsilon} \underline{f} \quad \text{Ez adódik tulajdonképpen.}$$

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^m x_i e_i = \underline{x} \underline{e} \quad \underline{u\varphi} = \sum_{j=1}^n y_j f_j = \underline{y} \underline{f}$$

$\uparrow$ újabb koordinátái

$$(x_1 \dots x_m) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m$$

φ lineáris leképezés.

$$\underline{u\varphi} = \left(\sum_{i=1}^m x_i e_i \right) \varphi = \sum_{i=1}^m x_i (e_i \varphi)$$

$$\underline{u\varphi} = (\underline{x} \cdot \underline{e}) \varphi = \underline{x} \cdot (\underline{e} \varphi)$$

TEHÁT: $\underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{A}_{\varphi}^{\varepsilon, \varepsilon}$

②

Ez baromi fontos összefüggés, amelyet a mátrix geometriában is gyakran használjuk. (Lásd.: felel és rendszer, Fi, lin. leképezés...).

(T) Van 3 vektortér.

$${}^{E,F}A_{\varphi+\varphi} = {}^{E,F}A_{\varphi} + {}^{E,F}A_{\varphi}, \quad {}^{E,F}A_{c\varphi} = c {}^{E,F}A_{\varphi}, \quad {}^{E,G}A_{\varphi\tau} = {}^{E,G}A_{\varphi} \cdot {}^{F,G}A_{\tau}$$

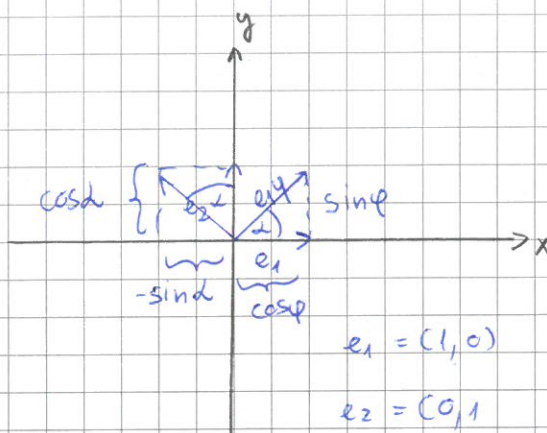
Ettől szép a lineáris világ...

Nyomassuk a szöveget át.

LÉNYEGES ÖSSZEFÜGGÉSEK:

(1) Egy standard bázis van.

φ_α $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ felett
 $\Downarrow$
 α -szöggel való elforgatás



$${}^{E,F}A_{\varphi_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_1\varphi &= (\cos \alpha, \sin \alpha) = \\ &= (\cos \alpha e_1, \sin \alpha e_2) \end{aligned}$$

$${}^{E,F}A_{\varphi} = ?$$

Ennyire:

$$e_2\varphi = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

Egy határozható meg.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \quad \text{lásd. Ez érdekes}$$

$${}^{E,F}A_{\varphi}, \quad {}^{E,F}A_{n\varphi} = ({}^{E,F}A_{\varphi})^n$$

(3)

Tehát ha hatványozzuk A -t, akkor az $n \times n$ -al való forgatás mátrixát kapjuk meg.

Áttérés új bázisra, koordináta-transzformáció.

Legyen E és E' két bázis $\mathbb{R}^n$ -ben.

$$e_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} e'_j \quad e'_i = \sum_{j=1}^m p'_{ij} e_j \quad \text{lesz igaz.}$$

$$P = (p_{ij})_{m \times m}$$

$$P' = (p'_{ij})_{m \times m}$$

Az áttérés mátrixai ezek.

$$\underline{e} = P \underline{e}'$$

és

$$\underline{e}' = P' \underline{e}$$

Világos, mivel van itt szó, csak elég abszolút módon.

☞

$$\underline{e} = P \underline{e}' = (P P' \underline{e}) \Rightarrow$$

$$\underline{e}' = P' \underline{e} = (P' P \underline{e}) \Rightarrow \boxed{P P' = E}$$

E az $m \times m$ -es egységmátrix.

A két átméretmátrix tehát egymás inverze kell, hogy legyen.

$u \in \mathbb{R}$

E -ben

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$$

E' -ben

$$\underline{x}' = (x'_1, \dots, x'_m)$$

$$u = \sum_{i=1}^m x_i e_i = \sum_{i=1}^m x'_i e'_i \Rightarrow \underline{u} = \underline{x} \underline{e} = \underline{x}' \underline{e}'$$

T felett U és V .

$$\varphi = \text{Hom}(U, V).$$

U -ben $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m.$

bázis

U -ben $\mathcal{E}' : e'_1, \dots, e'_m.$

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}, \quad \underline{e}' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix} \quad \underline{e} = P \underline{e}'$$

V -ben: $\mathcal{F} : f_1, \dots, f_n.$

bázis

V -ben $\mathcal{F}' : f'_1, \dots, f'_n.$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \underline{f}' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix} \quad \underline{f} = S \cdot \underline{f}'$$

$\exists A_{\varphi}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$ és $\exists A_{\varphi}^{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}$ Van kapcsolatok

$$\underline{e} \varphi = A_{\varphi}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \underline{f}, \quad \underline{e}' \varphi = A_{\varphi}^{\mathcal{E}', \mathcal{F}'} \underline{f}'$$

$$\begin{aligned} \underline{e}' \varphi &= A_{\varphi}^{\mathcal{E}', \mathcal{F}'} \underline{f}' = (\bar{P}^1 \underline{e}) \varphi = \bar{P}^1 (\underline{e} \varphi) = \bar{P}^1 \left(A_{\varphi}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \underline{f} \right) = \\ &= \bar{P}^1 \left(A_{\varphi}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}} (S \underline{f}') \right) = \left(\bar{P}^1 A_{\varphi}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}} S \right) \underline{f}' \end{aligned}$$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{E}', \mathcal{F}'} = \bar{P}^1 A_{\varphi}^{\mathcal{E}, \mathcal{F}} S$$

Ha $U=V$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{E}'} = \bar{P}^1 A_{\varphi}^{\mathcal{E}} P$$

Tehát A_{φ}^E és A_{φ}^E hasonlók. A két mátrix rangja megegyezik.

$$D: \quad \overbrace{r(\varphi) = \dim(\operatorname{Im} \varphi)}^{\text{Ezt kapjuk.}}$$

Tehát a φ lineáris leképezés rangján a képtér dimenzióját értjük. A leképezéssel mátrix rangja.

φ csak akkor bijektív, ha vektor/bázis bázis bázis mátrixa nem elfajult.

Nyomtatjuk a példákat.

① $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}$ Legyen $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ és $e_3 = (0, 0, 1)$ standard bázis. $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ φ legyen valós XY-síkra.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

$$(x, y, z) \varphi = (x, 0, 0) \varphi + (0, y, 0) \varphi + (0, 0, z) \varphi \text{ lesz igaz mindig.}$$

$$\text{Ebben az esetben: } (x, y, z) \varphi = (x, 0, 0) \varphi + (0, y, 0) \varphi + (0, 0, 0)$$

Ennyire: Kérdés φ mátrixa!

$$E: e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1).$$

$$A_{\varphi}^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ lesz. Ennyire.}$$

$$e_1 \varphi = (1, 0, 0)$$

$$e_2 \varphi = (0, 1, 0)$$

$$e_3 \varphi = (0, 0, 0)$$

legyen $\mathcal{E}'$: $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$, $e'_3 = (1, 0, 0)$
 bázis adott.

$$A_{\varphi}^{\mathcal{E}'} = ?$$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ zérus}$$

$$\cancel{e'_1 \varphi = (1, 1, 0)}$$

$$\cancel{e'_2 \varphi = (1, 1, 0)}$$

E_L nem j'ó. ☹️

$$\cancel{e'_3 \varphi = (1, 0, 0)}$$

$$e'_1 \varphi = (1, 1, 0) = 0 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3$$

$$A_{\varphi}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r=2$$

$$\dim \varphi = 2.$$

$$e'_2 \varphi = (1, 1, 0) = 0 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3$$

$$e'_3 \varphi = (1, 0, 0) = 0 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 1 \cdot e'_3$$

Mi az átmenetmátrix?

$$\underline{e}' = \underline{\bar{P}}' \underline{e}$$

$$\underline{\bar{P}}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ lesz, mert } \underline{\bar{e}} \text{ standard bázis.}$$

$$P = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

E_2 elég egyszerű volt.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e} = \underline{e}' \cdot P.$$

próba:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{e}'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{e}} \quad \checkmark$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon'} = P^T A_{\varphi}^{\varepsilon} P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} A_{\varphi}^{\varepsilon'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{\varphi}^{\varepsilon'} \quad \checkmark$$

Reihen von.

Nyomassuk tovább.

Legyen $\varphi: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$

$$\varepsilon: e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

$$\mathcal{F}: f_1 = (1, 0), \quad f_2 = (0, 1).$$

$$\mathcal{F}': f_1' = (1, 1), \quad f_2' = (1, 0)$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon, \mathcal{F}} = ?$$

$$f = S f'$$

$$f' = S^{-1} f \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = S \quad \text{a már tanult mátrix}$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon, \mathcal{F}} = ?$$

$$A_{\varphi} =$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon, \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \varphi = (1, 0) = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2$$

$$e_2 \varphi = (0, 1) = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$$

$$e_3 \varphi = (0, 0) = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon', \tilde{F}'} = ?$$

$$e_1' \varphi = (1, 1) = 1 \cdot f_1' + 0 \cdot f_2'$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon', \tilde{F}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2' \varphi = (1, 1) = 1 \cdot f_1' + 0 \cdot f_2'$$

$$e_3' \varphi = (1, 0) = 0 \cdot f_1' + 1 \cdot f_2'$$

$$\text{rk}(A_{\varphi}^{\varepsilon', \tilde{F}'}) = 2 \quad \text{jöl} \quad \text{láthatóan} \quad \dim(\text{Im } \varphi) = 2. \quad \checkmark$$

$$A_{\varphi}^{\varepsilon', \tilde{F}'} = P^{-1} A_{\varphi}^{\varepsilon, \tilde{F}} S$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = A_{\varphi}^{\varepsilon', \tilde{F}'} \quad \underline{\underline{\quad \quad \quad}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ennyi

Az n -ed fokú polinomok vektortér algebrája.

Bázis: $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ Koordináták: $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

V : n -ed fokú polinom vektortér

$\varphi: V \rightarrow V, f \mapsto f'$ legyen. (Definiáljuk hozzá a deriválást).

Mi az a mátrixa? Ez érdekes. Lehetőleg egyszerűen!

$$A_{\varphi}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (n+1) \times (n+1) \\ \text{a mátrix} \\ \text{mérete} \end{matrix}$$

Mi a képlet?

$$[1, x, \dots, x^{n-1}] = \text{Im } \varphi$$

$$\underbrace{\dim V}_{n+1} = \underbrace{\dim \text{Im } \varphi}_n + \underbrace{\dim \text{Ker } \varphi}_1 \dim \text{ (konstans polinom)}$$

Így: all össze. $r(A_\varphi^E) = \dim(\text{Im } \varphi) = \mathbb{Q} \ n$

Ha $x^n, x^{n-1}, \dots, 1$ a bázis.

$$A_\varphi^E = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
 A főátló felé fog járni a csúc.

(pl.)

$$\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \varphi: (x, y, z) \mapsto (x, y, 0).$$

$$A_\varphi^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu \quad x$$

$$\mu \varphi \quad x$$

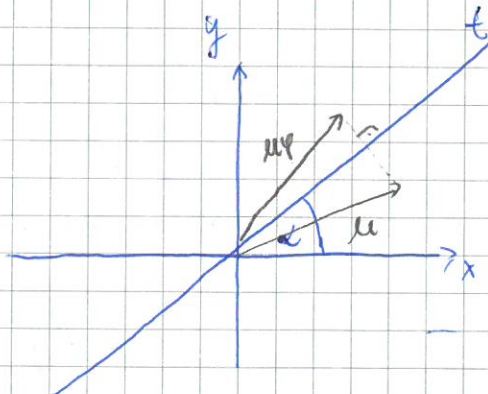
$$y = x \cdot A_\varphi^{E, \mathbb{F}}$$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x \ y \ 0) \checkmark \text{ Ez a hatás.}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{e}'} \text{ volt illegális, vigye.}$$

$$A_{\varphi_t} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

φ_t : birkózás
t-ne.



(pl.)

$$\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$E: e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

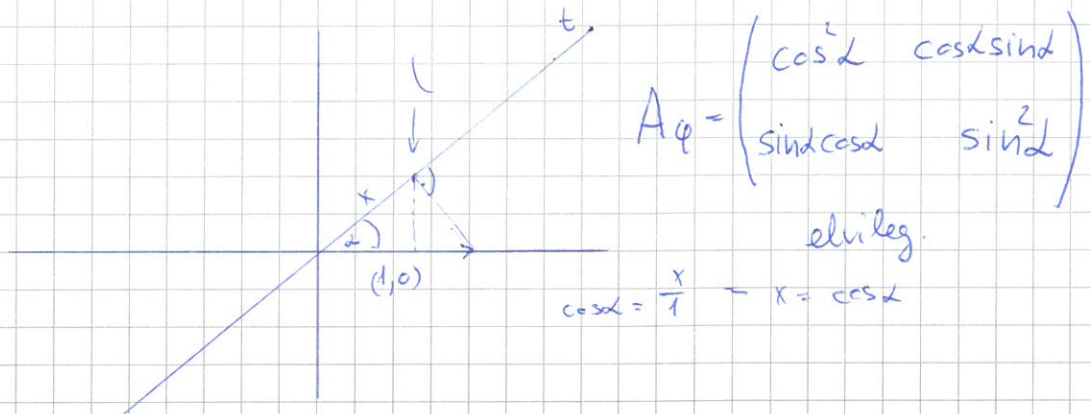
(10)

Ha $\alpha = 45^\circ$:

$$A_{qt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ kell, hogy legyen. } \checkmark$$

Ki is jön.

Kitökéltető, de nem volt egyszerű...



Ha $\alpha = 0$ (x-tengelyre vetítés)

HF: Ezt beadtuk

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha $\alpha = 45^\circ$:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

