

Legutóbb a vektortérre alapozva volt szó.

Lineáris függőség kérdése.

- Legyen V vektortér T felett.

V lineárisan független, ha

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \text{ csak akkor ha}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ha $\underline{0}$ lineáris kombináció triviális $\rightarrow$ csak akkor lesz $\underline{0}$ lineáris kombináció $\underline{0}$.

Ha ez nem igaz: a vektormendeg lineárisan függő.

- $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineárisan függő
- Vagy lehet állni a többi lineáris kombinációjából
- VMELYIK VEKTOR A TÖBBITŐL FÜGG. (vagy $\underline{0}$ előzőtől).

(pl.) $\underline{0}, v \neq \underline{0} \Rightarrow$ függő vektormendeg

$$\underline{0} = \lambda_1 \cdot v, \text{ ahol } \lambda_1 = 0. \text{ Ez triviális.}$$

Nem triviális:

$$1 \cdot \underline{0} + 0 \cdot v = \underline{0} \text{ ez már nem triviális kombináció.}$$

- Ha v független $\rightarrow$ minden vektormendeg is független
- Ha v függő $\rightarrow$ $\nexists$ olyan/anket v bővítvén független. függő.

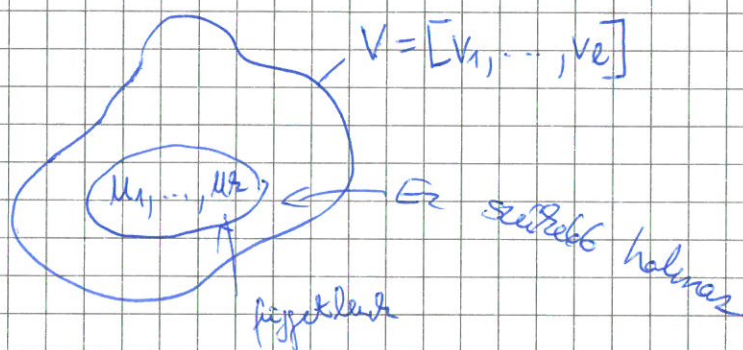
- Ha V független, és hozzáaduk v_{k+1} -t, ami lineárisan függ, akkor az generálható. A többiből.

- Kicsenélési tétel: Ha V független: bármely vektor csúsz / felcsúszhat helyé fel!

Két vektormendse van.

Az egyik nevezhető v -ból lineáris kombinációk szét.

Kicsenélési tétel van itt is.



Véges dimenziós vektortér:

V vektortér T felett.

Ha van véges generátormendse $\rightarrow$ VÉGES DIMENZIÓS A TÉR.

Minimális generátormendse: X , ha X -ből vmit kidobunk, akkor már nem lesz generátormendse!

Maximális lineárisan független vektormendse: Ha bármely függővé eltávolítjuk, akkor már nem lesz független.

Lin. független vektorendszer: változó bázis.

A HÁROM FOGALOM MEGEGYEZIK.

$\rightarrow$ bázis

$\rightarrow$ min. generátorrendszer

$\rightarrow$ max. lin. független generátorrendszer.

Bázisok elemszáma megegyezik véges dimenziós vektortérben.

Bázisok elemszáma: DIMENZIÓ.

jelölés: $\dim V \rightarrow V$ vektortér
b. dimenziója.

$e_1, \dots, e_n$ bázis V -ben.

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

λ -k a koordinátákhoz vannak

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ koordinátasorokhoz vannak

(pl)

bázis (standard bázis): egységvektorok

kanonikus bázis

$n \times n$ $T \in$ mátrixok.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez is.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} E_{ij} \quad \text{lesz igaz.}$$

független is!



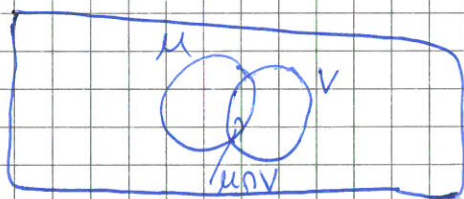
Téy: V -ben $\forall \dim V$ elemű generátormendszer bázis.

Altér dimenziója legfeljebb a vektortér dimenziójával egyenlő.

$$\dim U = \dim V \rightarrow U = V$$

$$\dim U = 0 \rightarrow U = \{0\}$$

Altér dimenziókéle:



$$U+V = \{u+v : u \in U, v \in V\}$$

$$\parallel \\ [U+V]$$

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

"Süta-formula"

Rang: r elemű független rendszerre van.

$$\text{f.e. } r(v_1, \dots, v_r)$$

$$r(v_1, \dots, v_r) = \dim [v_1, \dots, v_r]$$

Ekvivalens vektorendszer:

Mindket rendszer bármely vektora kifejezhető a másik vektor lineáris kombinációjaként

$$[u_1, \dots, u_k] = [v_1, \dots, v_k]$$

megmarad generalizál!

Vektorendszer elemi átalakításai:

(íshorás a mátrixok bemenetében.)

$$V = \dots u \dots v \dots$$

$$\begin{array}{cccc} \dots & uv & \dots & v \dots \\ \dots & uv & \dots & u \dots \\ \dots & v \dots & \dots & u \dots \\ \dots & v \dots & \dots & u \dots \end{array} \quad \downarrow \text{gy. meg a}$$

vektorcsere is.

Bar ez nincs benne a definícióban, abból következik.

Ekvivalens vektorendszer rangja megegyezik.

Mátrixok rangja:

- sorrang r_s
 - ~~vektor~~ oszlop r_o
- } van két féle.

Determinánsrang is van

$$\begin{array}{c} i_1 i_2 i_r \\ \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$r \geq 1$$

$$rd(A)$$

A nullmátrix esetén $r_d(A) = 0$. Def. szerint!

$$\boxed{r_o(A) = r_s(A) = r_d(A)}$$

Rangsámbétel szerint!

Alt. jelölés: $r(A)$.

Ha $|A| \neq 0$;

- Oszlopvektorok rendszer független
- Sorvektorok rendszer független.

A tagadás esetén is igaz ez!

$$r(AB) \leq r(A) r(B)$$

$$\text{Ha } A \text{ invertálható} \rightarrow r(AB) = r(B)!$$

Kronecker - Capelli tétel.

Ha: lineis halmaz: független vektorrendszer.

1 elemű vektorrendszer

$$\hookrightarrow v = \underline{0}. \quad 1 \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad \underline{\text{függő!}}$$

$$\lambda v = \underline{0}$$

$$\text{vagy } \lambda = 0, \text{ vagy } v \neq \underline{0}.$$

↑
Trivialis,

ténleg független

$\exists$ most nem lehet.

$$0 \leq r(V_1, \dots, V_k) \leq k$$

k elemű független részre
szélesíthető!

$$r(V_1, \dots, V_k) = k! \Leftrightarrow V_1, \dots, V_k \text{ lineárisan független.}$$

$$r(V_1, \dots, V_k) = 0 \Leftrightarrow V_1 = 0, V_2 = 0, \dots, V_k = 0.$$

Katározd meg a vektormátrix rangját!

Számoljuk mátrixrangot.

(pl.)

$r(A) = ?$ Hozzuk lépcsős alakra.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Két lépcsőfok van:

$$r(A) = \frac{2}{2}$$

Haladjunk...

Legyen altér. $U = [u_1, \dots, u_k], V = [v_1, \dots, v_l]$

Kérdés: $\dim U = ?$ $\dim V = ?$

(T): $\dim U = \dim [u_1, \dots, u_k]$

$\dim(U \cap V) = ?$

"

$r(u_1, \dots, u_k)$

$\dim(U + V) = ?$

$$\dim V = \dim [v_1, \dots, v_k] = r(v_1, \dots, v_k).$$

$$\dim(U+V) = ? \quad \dim(U+V) = r(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k).$$

$$U+V = [UV] = [u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k]$$

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \quad \text{Dimenziótétel}$$

Legyen egy ilgen.

$$U = [(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)] \quad ; \quad V = [(2, 1, 9, -1), (1, -1, 3, 7)]$$

$$\dim U = ? \quad \dim U = ? \quad \text{Az } U \text{-ban lévő vektorok függetlenek.}$$

Ez látszik!!

$$\dim U = ? \quad (\text{Megszapható lépcsős alakba hozással is!})$$

$$\dim V = 2. \quad \text{Meggyőzősen megfontolásból alapjában.}$$

$$\dim(U+V) = ?$$

$$\boxed{\dim(U+V) = 3.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$r=3$$

$$3 = 2 + 2 - \underbrace{\dim(U \cap V)}_{=1}$$

Adjunk bármely az egyes elemek!

$U+V$ bázis: $(1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 0, 4, 8)$.

Metszetből nehezebb lenne...

Folytatjuk tovább az elméletet:

Lineáris leképezés & transzformációk.

U, V vektorterek T felett.

$\varphi: U \rightarrow V$ leképezés lineáris, ha bármely $u, v \in U$ és $\lambda \in T$

esetén: $(u+v)\varphi = u\varphi + v\varphi$ és

$(\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi)$.

Ez lesz az.

$\text{Ker } \varphi = \{u \in U : u\varphi = 0\}$

$\uparrow$
a leképezés magja

$\text{Im } \varphi = \{u\varphi : u \in U\}$

$\uparrow$
képtér

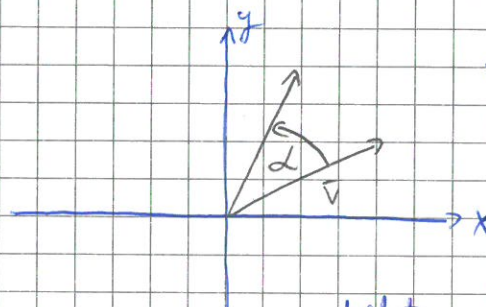
feldolgozás: $\text{Hom}(U, V)$

$\uparrow$
homomorfizmusok halmaza

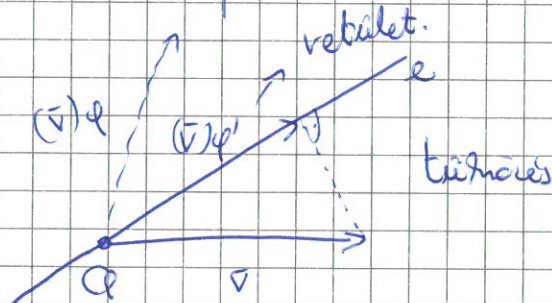
Lineáris transzformáció: $\text{Hom}(U, U)$ önmagába megy a leképezés

Ha $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ bijektív $\rightarrow \varphi$ izomorfizmus.

(Megj.: ez az eddig tanultak ALKALMAZÁSA.)



vektor forgatása
 α szöggel.



$$\varphi \in \text{Hom}(U, V)$$

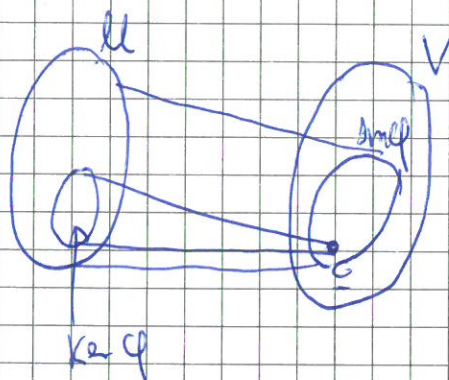
- $\varphi(0) = 0$;
- $\text{Ker } \varphi$ altér U -ban, $\text{Im } \varphi$ altér V -ben;
- φ akkor injektív, ha $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

$$\text{Ker } \varphi = \{u \in U, u\varphi = 0\}$$

- Ha $[u_1, \dots, u_n]$ generátorrendszer U -ban

$u_1\varphi, \dots, u_n\varphi$ generátorrendszer $\text{Im } \varphi$ -ben.

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker } \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi)$$



Ha U véges
dimenziós.

kb.-sz.

bijektív = injektív és
szurjektív

Műveletek lineáris leképezéssel. Az is lesz.

U, V és W vektorterek T felett.

$$\varphi \in \text{Hom}(U, V) \quad \text{és} \quad \psi \in \text{Hom}(V, W) \Rightarrow$$

$$\psi \varphi \in \text{Hom}(U, W) \quad \text{A szorzat is lin. leképezés.}$$

$$\varphi \in \text{Hom}(U, V) \text{ bijektív} \rightarrow \varphi^{-1} \in \text{Hom}(V, U)$$

Az inverz is lineáris leképezés.

U izomorf V -vel, ha $\exists \varphi: U \rightarrow V$ valóban
izomorfizmus

$$U \cong V.$$



reflexív reláció.

Szimmetrikus reláció is.

Ha V izomorf T^n vektortérrel.
↑
 n dimenziós

$$A \underset{\substack{\uparrow \\ n \times 1}}{x} = \underset{\substack{\uparrow \\ m \times 1}}{0}, \quad A \in T^{m \times n}.$$

$$\varphi: T^{n \times 1} \longrightarrow T^{m \times 1}, \quad x \mapsto Ax.$$

A - val balról φ szorosa
(is) lineáris leképezés.

$$\text{Ker } \varphi = \{ x \in T^{n \times 1} : Ax = 0 \}$$

a megoldáshalmaz.

$r(A)$ dimenziós lesz a képlet

ll a lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza

ll bázisai: alapszisztem

példák fémek

$$(A|0) \sim \dots$$

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ x_2 &= f_2(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_r &= f_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} \underbrace{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r}_{\text{kötelek}} & \underbrace{x_{r+1} \ \dots \ x_n}_{\text{szabad}} & & \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & \dots \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{c} n-r \\ \text{db} \end{array}$$

E

Adjunk alapszisztem (megoldás alrendszer bázisát)!

$$A|b = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 0 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & 0 \end{array} \right)$$

Alt. Rendszer, hogy

$$x_1 = \frac{x_5}{3}$$

$$x_2 = \frac{3x_3 - 3x_4 + 5x_5}{6}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline (0 & 1/2 & 1 & 0 & 0) \\ (0 & -1/6 & 0 & 1 & 0) \\ (1/3 & 5/6 & 0 & 0 & 1) \end{array}$$

megoldás után azt
Rendel.

$$\left. \begin{array}{l} n=5 \\ r=2 \\ n-r=3 \end{array} \right\}$$

↑ mindenféle megoldás.
↑ elvett

3 db megoldás, melyek

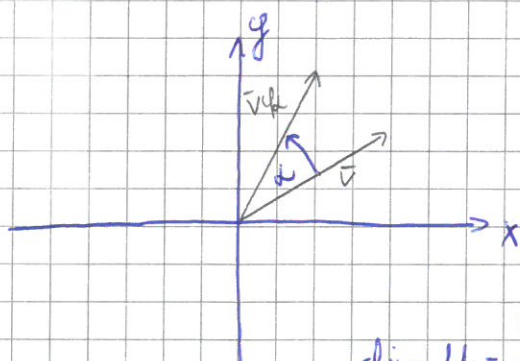
3 dimenziós a megoldás-altér.

fizikailag

EZ EGY ALA PÉLDÁRA. V. megoldás ezek
lineáris kombinációja!

további példák.

① φ_x : x -szögfel Forgatás.



$$\dim U = \underbrace{\dim \ker \varphi}_0 + \underbrace{\dim \operatorname{Im} \varphi}_2$$

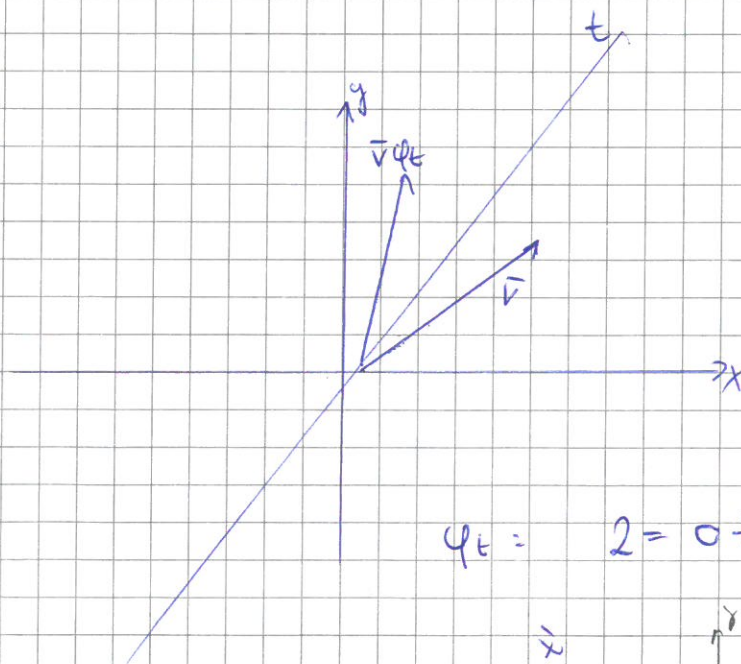
φ injektív, ha $\ker \varphi = \{0\}$.

$\dim U = ?$ $\dim U = 2$ lesz!

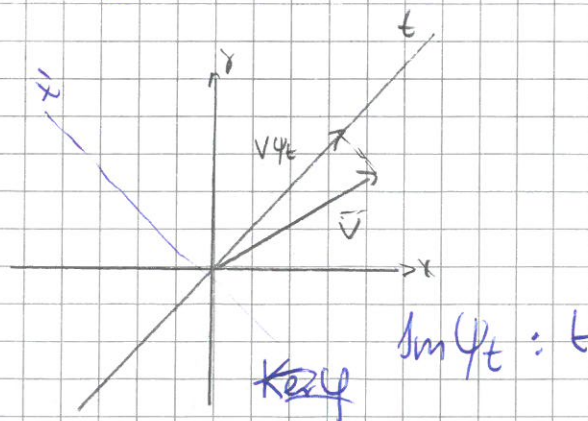
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ vektortér van.

Ennyi.

②



$\varphi_t: 2 = 0 + 2$ alakban lesz.



③ φ_t : vetítés t egyenesre.

⑫

$2 = 1 + 1$ ism. lesz

Igy lehet ellenőrizni ezt a dimenzióbeli.

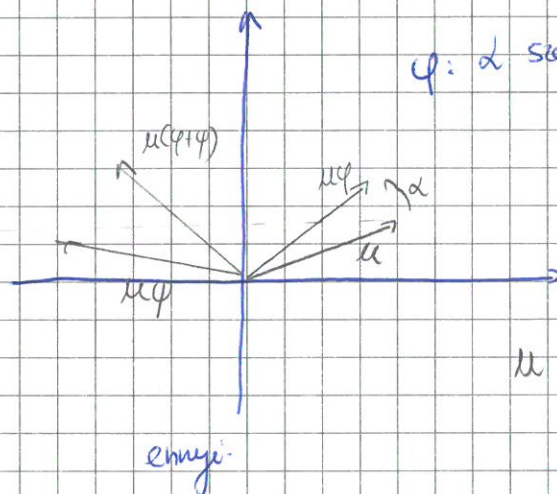
Lineáris leképezéssel végzett műveletek jöhetnek:

$$\varphi, \psi \in \text{Hom}(U, V) \text{ és } c \in T$$

$$u(\varphi + \psi) = u\varphi + u\psi, \quad u(c\varphi) = c(u\varphi).$$

Es itt még van pár dolog, de ezeket már nem tanuljuk, ott vannak a jegyzetben.

Példa:



φ : α szögű forgatás
 ψ : y -ra tükrözés.

$$u(\varphi + \psi) = u\varphi + u\psi$$

~~Döntse el~~ Melyek lineárisok? Ha a K -n, $\mathbb{R}$ -n és eset $\mathbb{C}$ -n?

1) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x+y, xy)$

← emiatt se jöhet, hogy NEM!

$(x, y) \mapsto (2x+y, 3x-y) \checkmark$

$$\left. \begin{aligned} u(1,0)\varphi &= (1,0) \\ (0,1)\varphi &= (1,0) \\ (u+v)\varphi &= u\varphi + v\varphi \\ \lambda(u\varphi) &= (\lambda u)\varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ez tuti lineáris leképezés!

NEM EGYEZNEK MEG.

$$(x, y) \mapsto (x-y, x+y) \checkmark$$

E2 OK.

$$(x \ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \checkmark$$

X A leé perses!

$\mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ típus:

$$(x, y, z) \mapsto (x-2y, -2x+4y, -4x+8y) \checkmark$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

itt is van A.

