

példamegoldással megmutatva tovább.

Van egy $A \underline{x} = \underline{b}$, $A \in T^{n \times n}$ és $|A| \neq 0$.

Gauss-eliminációval: $(A|\underline{b}) \sim (\underline{I}|\underline{b}) \rightarrow (\underline{E}|\underline{x})$.

Így már $\underline{x}_i$ a keresés
alatt.

↑ egységmátrix alátűzött $\underline{x}_i$.

$$\textcircled{1} A|\underline{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$\underline{x}_1 = 1 \quad \underline{x}_2 = 2 \quad \underline{x}_3 = -2$

Valóban jól jött ki.

$$\textcircled{2} A \in T^{m \times n} \quad X \in T^{n \times 1} \quad B \in T^{m \times 1}$$

legyen $AX = B$ egyenlet.

$$X = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n), \quad B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_m)$$

$$\text{Innen: } A \cdot (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_m)$$

$$(\underline{Ax}_1, \underline{Ax}_2, \dots, \underline{Ax}_n) //$$

$$\text{legyen: } (A|\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_m)$$

↑

A-t és B-t

egy mátrix mellé írjuk,

és A|B-t lépésről

alattá hozzuk.

Ez a megoldás.

↕

$$A \underline{x}_1 = \underline{b}_1$$

$$A \underline{x}_2 = \underline{b}_2$$

⋮

$$A \underline{x}_n = \underline{b}_n$$

Oldando meg.

Ha $A \in T^{n \times n}$ és $|A| \neq 0 \Rightarrow (A|B) \sim \dots \sim (E|\underbrace{x_1 x_2 \dots x_n}_{\underline{X}})$

Igy alakul ki az X megoldásmatrix.

$\cdot \bar{A}^{-1} / AX=B$

$\underbrace{\bar{A}^{-1} A}_E X = \bar{A}^{-1} B$

$X = \bar{A}^{-1} B$

Igy is ki lehet hozni, de feltétel, hogy $\exists \bar{A}^{-1}!$

Ha $\bar{A}^{-1} X \Rightarrow AX=E \quad (A \in T^{n \times n}, |A| \neq 0)$

$(A|E) \sim \dots \sim (E|\underline{A^{-1}})!$ Igy jön ki.

$\uparrow$ Ha kijön egy csupa nulla sor $\rightarrow \underline{A^{-1}}$ NEM LÉTEZIK.

példa: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{A^{-1}}}$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{B}^{-1} = ?$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\bar{B}^{-1}}}$

Legyen

$AX=B$

$A, X, B \in T^{n \times n}$

és $|A| \neq 0!$

Ilyen példák lesznek

Lehetne tehát A^{-1} -et számolni + mátrixszorzás.

De legyen: $(A|X) \dots \sim (E|X)$.

Lehetne: $XA = B \quad / \cdot A^{-1}$

$$\overset{E}{X} A A^{-1} = B A^{-1}$$

$$\underline{X = B A^{-1}}$$

transponáljuk:

$$A^T X^T = B^T \text{ adódik!}$$

így vissza lehet vezetni.

$(A^T|B^T) \sim \dots \sim (E|X^T)$ után transponáljuk.

Legyen példa:

$$X \in T^{3 \times 3}$$

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Transponáljuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

így vissza van vezetve.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & +1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

(0 1 1 | 2 3 3)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ennyi a megoldás.

Ilyen lehet a ZH-ban.

$$A X B = C \quad X = ? \quad A, B, C \in T^{n \times n}.$$



$$+ \\ |A| \neq 0, |B| \neq 0.$$

$$\underline{X = A^{-1} C B^{-1}} \quad \text{így közvetlenül kifejezhető.}$$

$$\text{DE: } A(\underbrace{XB}_Y) = C \rightarrow AY = C!$$

↓ megold.

$$(A|C) \sim \dots \sim (E|Y).$$



$$\text{Ez ismét járhatóbb} \quad \begin{matrix} XB = Y \\ B^T X^T = Y^T \end{matrix} \quad \text{így, innen:}$$

let, ha van

hisz még van vele.

$$(B^T | Y^T) \sim \dots \sim (E | X^T)$$

Nézzük példát:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

↓
Y

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 12 & 14 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 12 & -14 \end{array} \right) \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_Y$$

XY!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

itt
↑
szorzat
el.

$$\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 9 & -14 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -7 & 12 & -2 & 3 \\ 9 & -14 & 4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

↑
Charakteristika!

$$XB = Y.$$

Álgebra. ☺

↓

$$X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ 9 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 5 & -7 & 12 \\ 2 & -3 & 9 & -14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 11 & -16 \\ 0 & -1 & 13 & 18 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 24 & -34 \\ 0 & 1 & 13 & -18 \end{array} \right)$$

$$X = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}. \quad \text{Most már jó lett. ☺}$$

(megj: közvetlen albrakommal ZH!). Eddig tart az első ZH.

- 1) Matrikaszámítás (megoldható-e? Ha igen, oldd meg.)
- 2) Cramer-szabály! ($n=3$ vagy $n=4$).
- 3) Matrikegyenlet, inverzes csak Gauss-eliminációval.
- 4) Vandermonde - determináns számítása.

Emugi lesz a tétel.

Vektortér, altér, generálás

T számtest, V nemüres halmaz.

↑

nyitja összeadás:

$u, v \in V$ -hez

vektorközlés
↓
művelet.

$u+v \in V$

szorzás dík hozza.

+ $\forall \lambda \in T$ esetén

$\lambda u \in V$ művelet.

egységeles művelet, ahol $n=1!$

$f: A^n \rightarrow A, (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$A^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in A \}$

↓
 $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$

(5)

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ függvények halmaza. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

A valós függvények halmaza. Tuljdonképpen.

$$\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$A^{\underline{n}} = \{f \mid f: \underline{n} \rightarrow A\}$$

Eldög absztrak, de egyszerű.

- TÍPIKUS T , $n \in \mathbb{N}$ T -beli elem n -esek!

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in T^n \text{ és } \lambda \in T \text{ esetén.}$$

Kezével fogunk foglalkozni.

- Összeadásra egyetlen egységelem van.

$$\underline{0}_1 = \underline{0}_1 + \underline{0}_2 = \underline{0}_2 \quad \text{ennek a bizonyítás.}$$

- 1 additív inverz van. vagy ez 0.

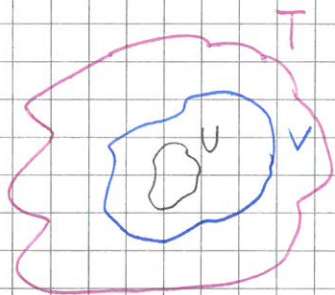
$$\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}, \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \lambda \cdot v = \underline{0} \text{ ha } \lambda = 0. \\ \uparrow \\ \text{vagy ez } 0 \end{array}$$

$$- \lambda(v) = \lambda(-v) = -(\lambda v) \quad \text{ kell, hogy igaz legyen}$$

$$- (\mu + v) = \mu + (-v). \quad \text{Ugye.}$$

Altér: a tér olyan része, amely strukturálisan hasonló a nagy térhez.

Nem precíz definíció, de az. U V altér.



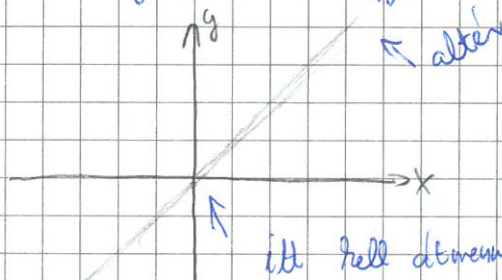
- U és V nullvektorai megegyeznek.
- additív inverz is u -a.
- U altér, ha nem üres halmaz, ha zárt az összeadásra és skalárral való szorzásra, $\forall u, v \in U$ és $\lambda \in T$ esetén $u+v, \lambda u \in U$.

Triviális altér: $\{0\}$ és V .

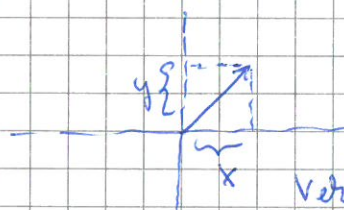
Nem triviális altér $\rightarrow$ valódi altér.

Descartes-koordinátarendszer: a tér $\forall$ pontja térbeli vektor.

altér: $\forall$ origón átmenő egyenes



itt kell átmennie, mert $\{0\}$ kell.



vektor felbontása

Három vektor 3D-ben:

komponenseire.

a tér minden pontja leírható vektor.

Generalizál az egész térre.

- Szorzatok vértantára. Legyen $I \subset \mathbb{N}$. A szorzat bizonyos helyein nulla tagok vannak.

Olyan szorzatok, melyek csak véges sok tagja van nulla!

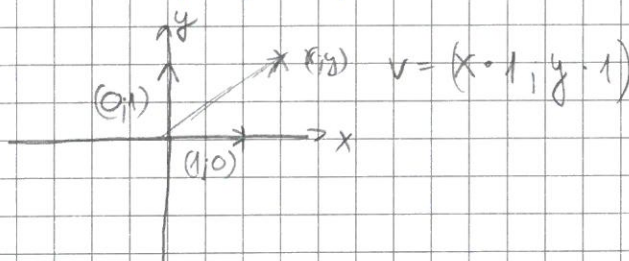
- Vértantók: polinomok halmaza.

Alte: ahhoz $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$ elegendő, ahhoz $X \subseteq \mathbb{R}$ rögzített.

Lineáris kombináció:

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in T$.

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ felett legyen.



$\mathbb{Q}^2$ $\mathbb{Q}$ felett legyen! csak olyan v lehet, ahol

↑ Fontos tudni,

$(x, y) \in \mathbb{Q}$.

mi a T számtest.

Ez csak ezt mutatja.

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

Ha $\lambda = 0 \Rightarrow$ triviális lineáris kombináció.

Ha $n=0$: az eredmény mindig azaz nullvektor.

Legyen X részhalmaza.

Legyen:

↓ nullvektor
benne van

$$[X] = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : n \geq 0, v_1, \dots, v_n \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in T \right\}$$

Ha X fixálja V -t, akkor X generátorrendszerre V -nél! Ez a def.

X fixálja V -t. $[X]$ az $[\{v_1, \dots, v_n\}]$.
így jelölhető.

$[X]$ a legszűkebb altér, amely tartalmazza X -et.

Altérösszege:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1 \text{ és } u_2 \in U_2\}$$

Trivialis.

Az összeg is altér, altér lesz U_1 és U_2 altér tehát.

$$U_1 + U_2 = [\overline{U_1 \cup U_2}]$$

↑ az unió generátora.

Ennyi az élet.

Pl $\mathbb{R}^3 = V$, $\mathbb{R} = T$ legyen. ALTÉR-E U

$$a) U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0}_{x_1 \cdot x_2 = 0 \text{ u.a.}}\}$$

$x_1 \cdot x_2 = 0$ u.a.

□ benne van: lehet altér.

$$\begin{array}{cc} U & U' \\ \downarrow & \downarrow \\ (1, 0, 0) & (0, 1, 0) \end{array}$$

$$U + V = (1, 1, 0) \swarrow \text{rivész.}$$

NEM ALTÉR.

$$b) U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 0\}$$

itt már nem vezet le

ALTÉR!

$$c) \mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \}$$

$$d) \mathcal{U} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = \textcircled{1}, x_2 + x_1 + x_3 = 0 \}$$

Legen $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}$ es legen $A \in T^{m \times n}$ matrix

$$\mathcal{U} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^m \mid \underline{x}A = \underline{0} \} \quad \text{EZ ALTER.}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$\underline{0} = [0, 0, \dots, 0]$$

MINDIG!

n db.

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x}^T A^T = \underline{b}^T$$

$$c) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (0)$$

$\underline{x} \quad A$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ lest an ending.

tflh: $x, y \in \mathcal{U}$. $\forall a: \underline{x}A = \underline{0}, \underline{y}A = \underline{0}$

$$(\underline{x} + \underline{y})A = \underline{x}A + \underline{y}A = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}!$$

$$\underline{x} + \underline{y} \in \mathcal{U}.$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}:$

$$(\lambda \underline{x})A = \lambda(\underline{x}A) = \lambda \underline{0} = \underline{0}.$$



$\lambda \underline{x} \in \mathcal{U}$. Erne is zart.

A d) nem homogén $\rightarrow$ drabja.

$$\mathcal{U} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^m \mid \underline{x}A = \underline{b} \}$$

$\forall \underline{x}$ es $\underline{y}$ is $\in \mathcal{U}$ -nal. $\Rightarrow \underline{x}A = \underline{b}$ es $\underline{y}A = \underline{b}$

$$(x+y)A = xA + yA = \underline{b} + \underline{b} \neq 2\underline{b} ! \quad \text{már } \underline{b} = \underline{0}.$$

Ha $2\underline{b} = \underline{b} \rightarrow$ akkor $\underline{b} = \underline{0}$, ami nem igaz.

Nem zárk az összeadásra, ezért látszik

(Csak a homogén lin. egyenletrendszer altern.)

e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

↑ nem lineáris kombináció...

(Valószínű nem altern, azt sejtjük)

$$\underbrace{(1, 1, -3)}_U \in U. \quad \checkmark$$

NEM ALTERN.

$$2U = (2, 2, -6) \stackrel{?}{\in} U$$

$$3 \cdot 2 + 2 - 6 = 12 - 6 = 6 \neq 0.$$

Elem-e U vektor az U altern?

$$U = (1, -1, 1)$$

$$U = \left\{ \underbrace{(1, -1, 0)}_{U_1}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{U_2} \right\}$$

Példá...

$$U = 1 \cdot U_1 + 1 \cdot U_2$$

$$U = \{[u_1, u_2, \dots, u_n]\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Igy látható fel.}$$

Ezt kell megoldani.

El kell dönteni, hogy megoldható-e.