

példamegoldással kezdünk.

$$\textcircled{1} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & 7 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 19 \\ 1 & 7 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot 18 - 2 \cdot 12 = \underline{\underline{12}}$$

↑ Vandermonde-determináns! $V(1, 2, 3, 4) \Rightarrow$ Ez lesz. Ezt pedig tudjuk.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \text{ lesz!}$$

$$V(1, 2, 3, 4) = \underbrace{(2-1)}_1 \cdot \underbrace{(3-2)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{(3-1)}_2 \cdot \underbrace{(4-1)}_3 \cdot \underbrace{(4-2)}_2 \cdot \underbrace{(4-3)}_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{12}}$$

(Lehet, hogy elitán...)

$$\textcircled{2} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ és legyen } D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} = D \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Hány sorcsere történt? Ezt kell kiszámolni.

$(n-1)$ db sorcsere cserével lehet az első és az utolsó megcserélni.

$$\text{utána: } (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1.$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 1. sor 2. sor 3. sor.

Ez egy számtani sorozat.

$$= \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

↑ kiegészítő száma

egészítsük ki jelek.

$$\boxed{\frac{n}{2}}$$

De lehet máshogy is!

Ha n páros: $\frac{n}{2}$ csere van. Ha n páratlan: $\frac{n-1}{2}$

③ Mi van, ha a mellékeltlona táknénk?

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D'' = \begin{vmatrix} a_{nn} & \dots & a_{2n} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n1} & \dots & a_{n1} & a_{11} \end{vmatrix} = 0!$$

~~$a_{nn} \dots a_{2n} a_{1n}$~~
nem így.

↑
transzponáljuk!

↙ mi a kapcsolat?

↑

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1) Fordítva írjuk a sorokat.

2) Fordítva írjuk az oszlopokat!
Két szeres váltás.

⇓
Ezért: $D'' = D$

Érdesség.

Ennyit a determinánsokról.

Lineáris egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \text{rendszer}$$

egyenletek.

Klasszikusan

legyen:

A matrix $A \in T^{m \times n}$ együtthatómatrix

$A|b$ matrix: bővített matrix lesz.

b : konstans oszlopvektor

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Innen: $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ és $x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}$

Igy tömöríthetjük a cucc. Ezzel:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $m \times n$ $\uparrow$ $n \times 1$ $\uparrow$ $m \times 1$ ✓

Mi az i -edik sor:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{lesz gityűtve!}$$

Ezzel ekvivalens a feltétele.

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad \text{Homogén lineáris egyenletrendszer.}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ \vdots \\ a_{i3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{Ez is ekvivalens.}$$

$c_1 - c_n \in T$ az egyenlet megoldására jó, ha x -ek helyére c -ket az egyenletet igazoljuk.

Def.: Ellentmondó egyenletrendszer $\rightarrow$ nincs megoldása.

- Előre átalakítások:
- nullsor (A₀) elhagyható!;
 - A₀ skálárral szorzása;
 - A₀ egy sorához A₀ sorához skálázásosát;
 - hozzá lehet adni;
 - A₀ sorai szabadon felcserélhetők.

Lépcsős alak: (logikus elvezetés)

- Ha $A|b \rightarrow$ nincsen nulla sor;
- Ha $A|b \vee$ sorban az első nem $\emptyset$ elem 1-es, és ezen vezéregyes oszlopa végig hívjuk $\emptyset$ -oszlop;
- És kész is a lépcső.

Ez a vezéregyes.



ilyen...

Def.: Ha $A|b = \underline{\underline{0}}$, akkor elemi átalakításokkal lépcsős alakra hozható.

Ez fontos.

Gauss-elimináció

↑ Előfeltétel: $A|b$ utolsó sorának vezéregyese az utolsó elem...

Ami akkor jutni, hogy lépcsős alakot ériünk el.

Szabad ismétkendők és szötött ismétkendők lesznek!

↑
adhatunk
hozzá értéket
szabadon.

↑
Az együtthatók a vezéregyes!

Def.: Az egyenletrendszer szabályos ($A \cdot x = b$), ha
 $A \in T^{m \times n}$ esetén $m = n$ és $|A| \neq 0$.

Cramer-szabály

Ha $A \cdot x = b$ szabályos, akkor

↑
több egyenlet.

egyetlen megoldása van:

$$x_k = \frac{D_k}{D} \quad 1 \leq k \leq n$$

ahol $D = |A|$

$$D_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

↑
k-adik oszlopba beírjuk b-t!

(Meggy: ezt azért nem egyszerű kiszámolni.)

Kör: Ha $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$, $A \in T^{n \times n}$, és van triviálisan kivált
megoldás, akkor $|A| = 0$.
↑
legalább két
megoldása
van.
(más szóval)

Ha $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ esetén $\underline{b} = \underline{0}$ egyenletrendszer az $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ homogén
lineáris egyenletrendszere.

- Ha $\underline{c}$ és $\underline{d}$ megoldás a $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ - nek $\Rightarrow \underline{c} - \underline{d}$ megoldás

$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ - nek.

$$\underline{A} \cdot \underline{c} = \underline{b}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{d} = \underline{b}$$

$$\underline{A} \underline{c} - \underline{A} \underline{d} = \underline{0}$$

$$\underline{A} (\underline{c} - \underline{d}) = \underline{0} \quad \text{ennek!}$$

- Ha $\underline{c}$ és $\underline{d}$ megoldás $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ - nek és λ skalar,
akkor $\underline{c} + \underline{d}$ és $\lambda \underline{c}$ is megoldás $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ - nek.

$$\underline{A} \cdot \underline{c} = \underline{0}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{d} = \underline{0}$$

$$\underline{A}(\lambda \underline{c}) = \lambda(\underline{A} \underline{c}) = \lambda \underline{0} = \underline{0}!$$

$$\underline{A}(\underline{c} + \underline{d}) = \underline{0} \text{ igaz.}$$

Az alap mátrixműveletekből ezt könnyű látni.

- Legyen $\underline{c}_0$ megoldása $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ -nek.

Ka $\underline{d}$ -||- $\underline{A} \underline{x} = \underline{0}$ -nek



$\underline{c}_0 + \underline{d}$ megoldása $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ -nek.
 ↑ párhuzamos ↑ homogén általános

példamegoldás.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases} \quad \text{Legyen.}$$

$$\underline{A}|\underline{b} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & +3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow$$

szabványos alakban

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5/3 & 1/3 \end{array} \right]$$

szabványos alakban

$$x_1 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5$$

$$x_2 = \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5$$

⑥

(2.)

$$A|b = \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -7 & 11 & -13 & 19 & -4 \\ 0 & -3 & 9 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 60 & -6 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

↑

$0 = -4$, az egyenletrendszer ellentmondó.

Ez nagyjából ennyi.

Példa Cramer-szabálynra. [Ilyen lesz dolgozatban!]

max $n = 3 - r.a.$

(3.)

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{array} \right\}$$

Legyen.

(7)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 11 & -6 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 11 & -6 \end{vmatrix} = - (6 - 66) \\ \underline{\underline{60}} \checkmark$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 27 & -6 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 27 & -6 \end{vmatrix} = - (-18 + 162) \\ \underline{\underline{180}} \\ \text{(elcsesztam. :6)}$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{180}{60} = \underline{\underline{3}} \quad \text{Ennyi!}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 11 & 27 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} = - (-27 - 33) \\ \underline{\underline{60}}$$

$$X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{60} = \underline{\underline{1}}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 11 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (55 + 5) \\ \underline{\underline{60}}$$

$$X_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{60}{60} = \underline{\underline{1}}$$

(Ezzelán a táblánál oldottam meg példát az nincs itt...)

$$④ \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \bar{A}^1 = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{adj}(A)!$$

Ha $|A| \neq 0$! Ez fontos feltétel. $\uparrow$ adjungált-matrix.

Legyen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \quad \checkmark \quad \text{Eddig OK.}$$

$$\bar{A}^1 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{adj } A}$ (megj: visszajött az a módszer, amit Miklós négy feladatra mutatott :))

$$\underline{\underline{A \cdot \bar{A}^1 = E}} \quad \checkmark \quad \text{Eredmény}$$

⑤

$$\cancel{B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

felsőtrianguláris
a matrix!

$$\det(B) = 1 \cdot (1) = 1$$

$$\bar{B}^1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\swarrow$ Eredmény

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$$

$$B_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$⑥ \quad B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

