

Előadó: Szabó László

Könyv van, a tanár írta. Beszerzhető.

(Bevezetés a lineáris algebra c. tankönyv.)

A második feladást érdemes valószínű bérlete. (2006-os.)

Vizsga írásban. 2 dolgozat a félév során (25 p + 25 p).

Az óránkénti megoldás az infó elérhető. (+ feladatsorok)

50 pontból minimum 20 kell a vizsgához.

A vizsgára a pontot visszik (+50 pont a vizsga, amiből 20-at el kell érni minimum.)

1. ZH valószínű időpontja: november 10.

2. ZH: valószínű a félév végén. Az utolsó konzultáció. (dec 8.)

Számtétel: Zárta a négy alapműveletre.↓
elemi a skalárok

Tartalmozik nullától különböző elemet.

Sűrű halmaz: racionális számok.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{Használható.}$$

Ajt.:

$$\sum_{\text{feltétel}}$$
 tag

Szumma.

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Összegezt tagok összeadása:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

A szumma jól
felcsatlakoztatható.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}!$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq 1} a_i = \emptyset$$

Megállapodás szerint az ilyen összegek nulla.
(Nincs tagja.)

Produktum: $\prod$ - sorozatra alkalmazandó.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

A nulla tagú produktum értéke 1.

Matrixok: Legyen T táblázat, m és n pozitív egészek.

$m \times n$ -es
matrix:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

↑
"gy" is jelölhető.

$1 \times n$: sorvektor.

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

logikusan.

$n \times 1$: oszlopvektor.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Nullmatrix: $\underline{O}$ a jelölése (szó nulla van benne).

Ha $m = n$: négyzetes matrixról beszélünk.

Ez a főátló, úgyje.

De van melléátló is a négyzetes matrixban.

Diagonális mátrix: mindenhol nulla van a főátlón kívül.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Trianguláris: Ilyen a mátrix, ha a főátló felett / felett minden elem nulla.
alsó / felső átló part felé fordított a logika.

Egység mátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Jelölés:

$$\underline{A} \in \underset{\uparrow}{T}^{m \times n}$$

$m \times n$ -es mátrixok halmaza.

$$(a_{ij})_{m \times n} \in T^{m \times n} \text{ így is jelölhető.}$$

Összeadás mátrixokkal:

Csak azonos méret esetén!

Azonos elemeket azonos elemekkel. Világos.

A mátrix $\lambda \in T$ -vel (skalárral) szorozható.

$$(a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \quad \lambda (a_{ij})_{m \times n} = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

T: Kommutatív és asszociatív művelet az összeadás.

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

Kommutativitás!

$$A + \underline{0} = A \text{ lesz igaz.}$$

(2)

$$\text{Ha } -A = (-1) \cdot A$$

$$\downarrow A + (-A) = \underline{0}$$

Skálárszorzás: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Matrixszorzás:

legyen:

$$A = a_{ij} \in T^{m \times n}$$

$$B = b_{ij} \in T^{n \times p}$$

lesz igaz.

$$C = AB = c_{ij} \in T^{m \times p}$$

$$\begin{pmatrix} & A & \\ & \vdots & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & & \\ & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} B & \\ b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}_{n \times p}$$

Def.:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times p}$$

lgy. lehetséges fel. Tömören.

$$\textcircled{\text{pl.}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{lgy. üzemel.}$$

Transzponált fogalma: Ismét és fontos.

$$\textcircled{\text{T:}} \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad ; \quad A(BC) = (AB)C \quad \oplus \quad E_m A_{m \times n} = A E_n = A$$

is igaz.

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{és} \quad (A+B)C = AC + BC$$

Ha létezik ezek a szorzatok, akkor ezen egyenlőségek igazak.

Hf:

$$E_m A_{m \times n} = A E_n = A$$

Ezt be lehet látni ottan.

Transzponált: A^T a jelölés.

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow A^T = (b_{ij})_{n \times m}$$

A sorok oszlopok lesznek, rövidek. Tűnőzés és tulajdonképpen.

$$(A^T)^T = A; \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T; \quad (A+B)^T = A^T + B^T.$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{Ha } AB \text{ létezik.}$$

Példamegoldás zavaroz.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{1 \times 3}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$AB' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B'A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Kiszámolható.

$$(A+B') \cdot D = \begin{matrix} 2 \times 3 & 2 \times 3 & 3 \times 1 \\ \uparrow & \uparrow & \\ 2 \times 3 & 2 \times 3 & \end{matrix} \quad 2 \times 1 \text{-es mátrix lesz a végeredmény.}$$

✓

$$B'^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$(A+B') \cdot C \quad \text{már nem számolható ki.}$$

Determinánsok:

$$A = (a_{ij}) \in T^{n \times n} \quad a_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

rekurzív definícióval adható meg.

Ha $n=1$

$$|A| = a_{11}$$

↑
det. jelölése.

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} D_{1k}$$

EZÉRT.

$$D_{1k} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

↑
komplementár
aldetermináns.

$$k = 1, \dots, n.$$

2x2-es determináns:

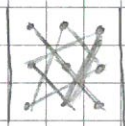
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \checkmark \quad \text{Ismeret alapelve.$$

3x3-es eset:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{det!}} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

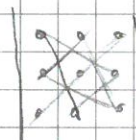
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

↓ így jön ki



Szép szimmetrikus.

Ez a Sarrus-szabály!



Ábrázolva szemléletesebb.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6 + 0 + 0) - (6 + 0 + 0) = \underline{\underline{0}}$$

↑ két egyforma sor esetén

a determináns nulla.

Tulajdonságok:

Az aldetemináns fogalma ismét.

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

↑
komplement aldetemináns.

Ha felszelelünk két sort: előjelváltás történik az előlben.

Másodrendű aldetemináns

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

$$\text{Ha } A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}.$$

Majd lesz példa is erre.

Determináns sorokra vonatkozó tulajdonságok:

- sorazeroság: $\emptyset$ a determináns értéke
- Ha egy sorban van egy sorozótévesztés, az "kiemelhető"!
- Ha van nullsor, akkor a det. értéke nulla.
- Ha melyik sor egy kéttagú összeg, akkor a determináns a két összegére szétbontható.
- Ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sorának λ -szorosát $\rightarrow$ det. nem változik.
- A transzponált determináns megegyezik az eredeti determinánssal.

Dualitási elv:

Ami igaz a sorokra, az igaz az oszlopokra is!

Egymás dualja a képlet.

Det. oszlop szerint is kifejtendő.

Ferdé kifejtés tétel:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{kj} = \begin{cases} |A| & \text{ha } i=j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

↑
adjungált

oszlopokra is igaz.

Vandermonde = determinans.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Tétel:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad ! \quad \text{így lehet számolni.}$$

Bizonyítás:

$n=2$ -re.

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \quad \checkmark$$

$$V(x_1, x_2) = x_2 - x_1 \quad \checkmark \iff$$

$$V(x_2, \dots, x_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad \text{Összelet, a környben benne van.}$$

Determinansok szorzástétele:

$$|A_n B_n| = |A_n| \cdot |B_n| \quad \text{Ennyi az egész.}$$

Inverzmatrixok:

A^{-1} jelölése

$$A = (a_{ij})_{n \times n}.$$

$$XA = AX = E \quad X \text{ az inverzmatrix.}$$

- A -nak legfeljebb 1 db ~~inverz~~ inverze van.

- A^{-1} csak akkor létezik, ha $|A| \neq 0$.

- Ha $|A| = 0$: elfajuló, $|A| \neq 0$: nem elfajuló.
(singuláris) (reguláris)

$$B = X^{-1} A X$$

$\uparrow$ A és B hasonló, ha létezik

ilyen X mátrix.

Reflexív: $\forall$ mátrix önmagához hasonló.

Szimmetikus: $A \approx B \Rightarrow B \approx A$.

Transzitiv: $A \approx B, B \approx C \Rightarrow A \approx C$. (1)

A szorzás nem kommutatív.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de már látszik

fel látható, hogy nem kommutatív a műve.

példa

Ha A alsótrianguláris:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}}{\text{lásd!}}$$

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \checkmark$$

Ez is bizonyítható.

pl.

innen a 3x-ot

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 & -8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Összevont
eredet: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Sarrus szabály:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$

egy!

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -10 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

egy meg egy

det. számítás

$$-2 \cdot (4 + 20) = \underline{\underline{-48}}$$

pl.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \rightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

megvizsgáljuk.

minden sorból
kivonjuk a főtételt
lévő sor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

adott sorát mindkét az első sor.

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

pl.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ & 2 & 2 & \dots & n \\ & & 3 & \dots & n \\ & & & \ddots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \underline{n!}$$

↑ felsőtrianguláris

pl.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{est kell kivonni minden sorból az első sort}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ & 2 & 2 & \dots & 2 \\ & 2 & 3 & \dots & 2 \\ & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{vmatrix}$$

↑
est vonjuk le az első sorát
lévő sorokból

$(-2) \cdot (1) \cdot (2) \cdot \dots \cdot (n-1)$

pl. m-edrendű 1. sorozat a másodfokú $\frac{(x+(m-1)a)(x-a)^{m-1}}{1}$

$$\begin{vmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & & & x & \\ & a & & & \end{vmatrix} \rightarrow \text{Sorok: } x + (m-1) \cdot a$$

$$= \begin{vmatrix} x+(m-1)a & a & a & \dots & a \\ x+(m-1)a & x & a & & \\ x+(m-1)a & a & x & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(m-1)a & a & a & & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(m-1)a & & & & \\ & x-a & & & \\ & & x-a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x-a \end{vmatrix}$$