

$$2) \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

$$A = \frac{1}{4} \quad B = -\frac{1}{4} \quad C = \frac{1}{2} \text{ lesz.}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1} dx - \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx =$$

= ... HF.

$$3) \int \frac{2x-3}{(x+2)^3} dx$$

$$\frac{2x-3}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$A = 0 \quad B = 2 \quad C = -7$$

$$\int \frac{2x-3}{(x+2)^3} dx = \int \frac{2}{(x+2)^2} dx + \int \frac{-7}{(x+2)^3} dx \text{ integrálható}$$

Ha a számláló magasabb fokrú a nevezőnél, akkor az ún. polinomosítást alkalmazzuk. Így az integrandus felbontható egy polinom és egy racionális törtfüggvény összegére, ahol (amelyben) a számláló fokrú $\leq$ nevező fokrú

Hol lehet megnézni? W3. math.hu - sieged. hu / ~ nbo gya / dimak 1011 I / gyakorlat / polinomosítás. pdf

Határozott integrál (a.k.a. Riemann - integrál)

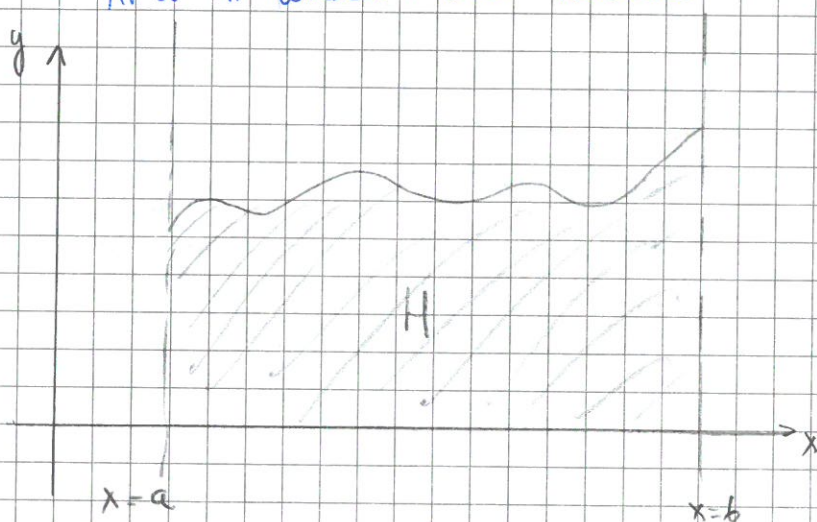
Tf. az $f: [a; b] \rightarrow [m, n]$ le. íg. tehát f korlátos.

Kérdés, hogy miért csináljuk?

Ha f nemnegatív függvény, mi az $y = f(x)$, $x=a$, $x=b$ és $y=0$ görbe által határolt síkresz területe?

$$H = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

↑
Mi a H területe? Ezt keressük.



Fogalom / jelölés:

$[a; b]$ egy felosztása (partíciója)

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

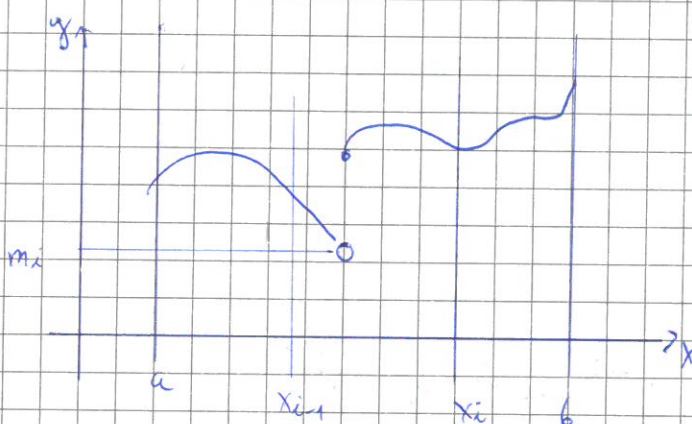
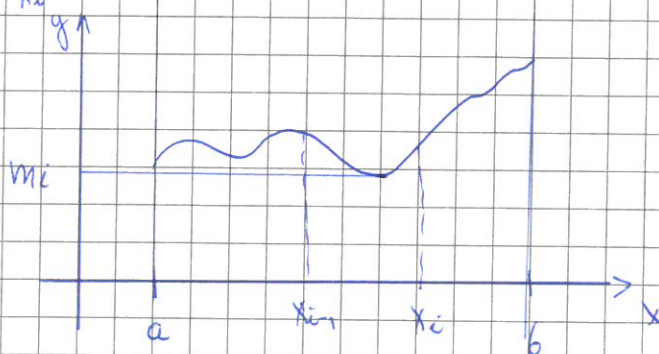
$$P = \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i\text{-edik részintervallum hossza}).$$

②

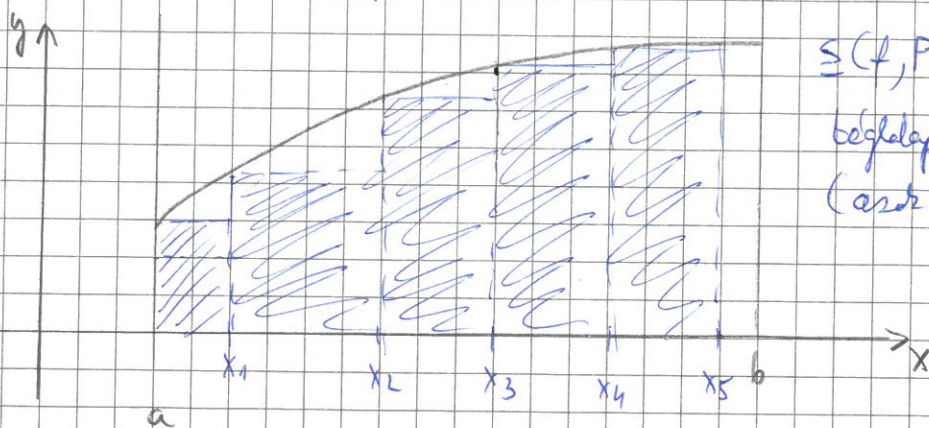
$$m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad (\text{Ha } f \text{ folytonos})$$

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad (\text{Általános esetben})$$



Alsó Darboux-összeg (Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg):

$$\underline{S} = \underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{világos}$$



$\underline{S}(f, P)$ = Beszárított
téglalapok területe
(alsó összeg)

Figy. nézd az x_i tulajdonképpen.

Hasenláb

$$M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Ha folytonos.

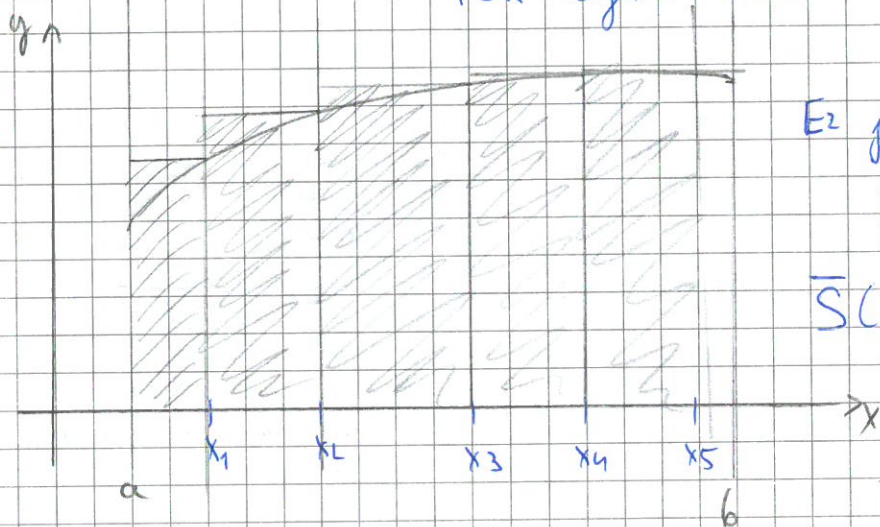
$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Altalában.

Felső Darboux-összeg:

$$\bar{S} = \bar{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k.$$

Tök logikus módon.



Ez jól láthatóan is
felső becslést ad.

$\bar{S}(f, P)$ ezen
területek összege.

Kérdés, hogy $\exists$ -e olyan nagy I szám, hogy $\forall P$ -re

$$s(f, P) \leq I \leq \bar{S}(f, P)$$

Ha igen, akkor hány ilyen $\exists$?

pelda: $f(x) = x^2$ $[a; b] = [0; 1]$

Teljesül a fenti becslést: (neve: Riemann-összeg.)

$$X_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \Rightarrow \Delta X_k = \frac{1}{n} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$0 = X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \dots \quad X_{n-1} \quad X_n = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Error} \quad m_k &= f(X_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \\ M_k &= f(X_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} \left(\frac{0^2}{1} + 1^2 + \dots + (n-1)^2 \right) &= \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \cancel{\frac{n^2}{1}} \right) = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)n}{6} \end{aligned}$$

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) =$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S = \frac{(n^2 - n)(2n - 1)}{6n^3} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{3n^2 - 1}{6n^3} =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3n - 1}{6n^2} \quad \textcircled{S} \quad \bar{S} = \frac{(n^2 + n)(2n + 1)}{6n^3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3n+1}{6n^2}$$

↑ kicsi, de pozitív számok esik

Tehát mindkettő tart az $\frac{1}{3}$ -hoz. Közelednek egymáshoz.

$I = \frac{1}{3}$ az egyetlen valós szám, amelyre $\underline{S} \leq I \leq \bar{S}$ bármely felírt beosztásnál.

Tétel: Ha P és Q tetszőlegesen beosztás, akkor

$$\underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, Q)$$

Következésképpen: $\exists I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall P, Q$ beosztásra

$$\underline{S}(f, P) \leq I \leq \bar{S}(f, Q).$$

Def:

Ha van ilyen I : $\Rightarrow$ integrálható f .

$f: [a; b] \rightarrow [m, M]$ Riemann-integrálható az

$[a, b]$ -n, ha $\exists$ pontosan 1 db $I \in \mathbb{R}$, hogy bármely P, Q beosztásra

$$\underline{S}(f, P) \leq I \leq \bar{S}(f, Q).$$

Tétel:

Legyen $f: [a; b] \rightarrow [m, M]$. Ha bármely $\varepsilon > 0$ -ra

$\exists P$ beosztás úgy, hogy $\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$,
akkor f Riemann-integrálható.

(6)

Tétel

Ha $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ és ha f integrálható, akkor

$\forall \varepsilon > 0$ - hoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall P$ beosztás és

$$0 < \max_k \Delta x_k < \delta \text{ esetén}$$

$$|I - S(f, P)| < \varepsilon \text{ és}$$

$$|I - \bar{S}(f, P)| < \varepsilon.$$

Tétel:

Tf h $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ monoton.

akkor integrálható az f $[a, b]$ -n.

Def.

Azt mondják, hogy az f egyenletesen folytonos

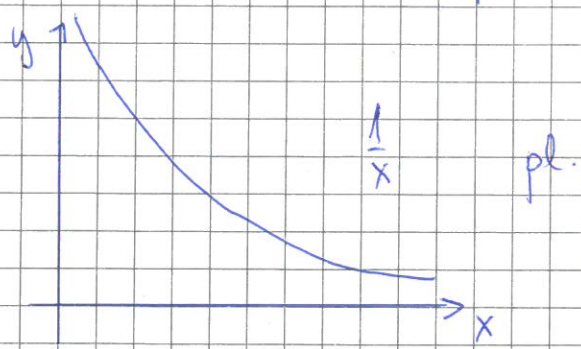
$[a, b]$ -n, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x_0, \forall x_1 \in [a, b]$

$$|x_0 - x_1| < \delta(\varepsilon) \text{ esetén } |f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

T:

Tf h az f folytonos a zárt, szét $[a, b]$ -n.

akkor f egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n.



(T:) Ha f folytonos $[a; b]$ -n akkor f integrálható $[a; b]$ -n.

A határozott integrál tulajdonságai:

(T:) Tfh. az $f: [a; b] \rightarrow [m; M]$ integrálható.

Ekkor $\forall c \in (a, b)$ az f integrálható $[a, c]$ -n és

$[c; b]$ -n is és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(T:) $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, zártosak és integrálhatók $[a; b]$ -n.

$\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

(lineáris képlet az $\int_a^b dx$).

(T:) $f: [a; b] \rightarrow [0, M]$ integrálható $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(T:) $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, zártosak és integrálhatók,

$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a; b]$ -n. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(T.:) $f: [a; b] \mapsto [m, M]$ integrálható az $[a, b]$ -n.

Ekkor $|f(x)|$ is integrálható,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(Def.:) $f: [a, b] \mapsto [m, M]$ integrálható.

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

(Def.:) $f: [a, b] \mapsto [m, M]$, de elég az is, hogy

$f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ és folytonos, akkor f

integrál függvénye $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

(T.:) Ha $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, akkor az F

integrál függvény folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n,

és $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$ esetén.

Kegy.: Azt állítottuk, hogy $F(x)$ a $f(x)$ primitív függvénye.

Köv.: Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor $\exists$ primitív

függvénye. Eszerevétel: Az $\int_a^x f(t) dt$ def.-ből látható.

$$F(a) = 0.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) = F(b) - F(a).$$

Tudjuk, hogy f tetszőleges $[a, b]$ -n folytonos,

(a, b) -n differenciálható primitív függvényre

$$\varphi(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

Newton-Leibniz-tétel:

Tfh. f folytonos $[a, b]$ -n

Tfh. φ folytonos $[a, b]$ -n, $\varphi'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

Ellenőrzés: $\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a). \quad \left[= [\varphi(x)]_a^b \right]$
 jelölési mód.

példák

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x dx &= \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = \\ &= 0 + 1 = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Helyettesítéses integrálás:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \dots$$

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x) dx$$

VALTOZNAK A

HATÁROK.

Megj.: Ez a formula igaz, ha f és g' folytonosak.

Gazolás: Ha $F'(x) = f(x)$:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_a^b \underbrace{f(g(x)) g'(x)}_{[F(g(x))]' } dx =$$

$$= [F(g(x))]_a^b = [F(y)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} F(y) dy.$$

példák:

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{y} dy =$$

$$y = x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[y^{3/2} \right]_1^2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{6}(\sqrt{8}-1)}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx =$$

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x.$$

$$= \underbrace{\left[-\cos x \right]_0^{\pi/2}}_{=1, \text{ már tudjuk.}} + \int_0^{\pi/2} -\sin x \cos^2 x \, dx = 1 + \int_1^0 u^2 \, du =$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$du = -\sin x \, dx$$

$$= 1 - \int_0^1 u^2 \, du = 1 - \underbrace{\left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1}_{\frac{1}{3}, \text{ már tudjuk.}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Parciális integrálás: Tfh f és g és deriváltjaik folytonosak $[a, b]$ -n. Ekkor

$$\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx =$$

$$= f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx =$$

példa jön erre.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^e x^{-1/2} \ln x dx = \left[2 \ln x \cdot x^{1/2} \right]_1^e - \int_1^e 2 \frac{1}{x} \cdot x^{1/2} dx =$$

$$f = \ln x \quad g' = x^{-1/2}$$

$$f' = \frac{1}{x} \quad g = \int x^{-1/2} dx = 2 \cdot x^{1/2} + C$$

$$= 2 \ln e \cdot e^{1/2} - \ln 1 \cdot 2 - 2 \int_1^e x^{-1/2} dx =$$

$$2 \cdot \sqrt{e} - 2 \left[2 \cdot \sqrt{x} \right]_1^e = 2\sqrt{e} - 4 \cdot \sqrt{e} + 4 =$$

$$= 4 - 2\sqrt{e} = \underline{\underline{2(2 - \sqrt{e})}}$$

Az integrálszámítás középérték-tétele

Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\exists c \in [a, b]$,

$$\text{hogy } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Geometriai jelentés:

Az $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ görvek által határolt síknégyes területének megegyezik egy $f(c)$ és $b-a$ oldalú téglalap területével.

Improprius integrálok

Tfh. f nem integrálható $[a, b]$ -n, de $\forall \varepsilon > 0$ -ra,
andha $\varepsilon \in (0, b-a)$ esetén integrálható $[a+\varepsilon, b]$ -n.

Ha a

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ véges határérték létezik és véges,

akkor azt mondjuk, hogy f improprius integrálja $\exists [a; b]$ -n /

f improprius integrálja transzverz $[a; b]$ -n.

feladás:
$$\int_a^b f(x) dx$$

Kaszkában: f nem integrálható $[a; b]$ -n, de $\forall \varepsilon \in [a; b-\varepsilon]$ -n.

integrálható, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \text{ feltéve hogy } \lim \text{ létezik}$$

és véges.

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [x \ln x - x]_{\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln 1 - 1 - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon)) = -1$$

(14)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

Tehát az $\ln x$ improprius integrálható a $[0, 1]$ -en és

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \underline{\underline{-1}}$$

$$2) \int_1^2 \frac{3}{x-2} \, dx$$

$$3 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{x-2} \, dx = 3 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln|x-2| \right]_1^{2-\varepsilon} =$$

$$3 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln|2-\varepsilon-2| - \ln|-1| \right) =$$

$$3 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \varepsilon - 0 \right) = 3 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon = \underline{\underline{-\infty}}$$

Az $\int_1^2 \frac{3}{x-2} \, dx$ nem létezik, nem véges.

Tehát a függvény ezen az intervallumon nem improprius integrálható.

$$3) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\arcsin(1-\varepsilon)} \frac{\sin t}{|\cos t|} \cos t \, dt =$$

$$x = \sin t$$

$$dx = \cos t \, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\arcsin(1-\varepsilon)} \sin t \, dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\cos t \right]_0^{\arcsin(1-\varepsilon)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\cos(\arcsin(1-\varepsilon)) + \cos 0 \right) =$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\cos(0)}_1 = \underline{\underline{1}}$$

Az $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ improprius integrálható a $[0,1)$ -en és

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \underline{\underline{1}}$$

Def: Tfh f nem integrálható $[a,b]$ -n, de $\exists c \in (a,b)$,

hogy f improprius integrálható $[a,c)$ és $(c,b]$ -n.

Ekkor f improprius integrálható $[a,b]$ -n és az

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

módon definiált

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) =$$

$$\textcircled{16} \quad = \infty \quad \text{Nem létezik}$$

Vizsgálódandó végtelenben is.

Def.: Tfh $f: [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ és $\forall t \geq a$ -ra

f integrálható $[a, t]$ -n. Ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

határérték létezik és véges, akkor a határértéket az

f $[a, \infty)$ -en vett improprius integráljának nevezzük.

felírása:
$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Hasonlóan definiáljuk a

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx\text{-et is} \dots$$

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ improprius integrálja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

vagy véges a-ra, ha a két improprius integrál

létezik

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t \frac{1}{x^3} dx \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^t =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\ln|x| \right]_t^{-1} =$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (\ln 1 - \ln t) = -\infty. \text{ Nem létezik.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Létezik?

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \right]_0^t = \dots = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\dots \right]_t^0 = -\frac{1}{2}$$

A határozott integrál geometriai értelmezése

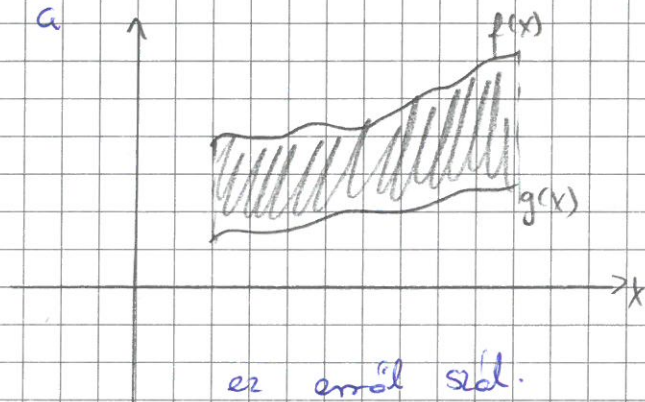
A határozott integrál geometriai jelentése: előjeles terület.

Ha f és g folytonos $[a, b]$ -n és $f(x) > g(x)$
 $\forall x \in [a, b]$ re:

$$x=a, \quad x=b, \quad y=f(x) \text{ és } g(x)$$

görbék által határolt síkresz területe:

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Térfigatsszámítás:

① $f: [a; b]$ folytonos. Az f $[a; b]$ felett eső

ívdarabját forgassuk meg x körül. Az így kapott forgástest

terfogat:

$$V_f = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Forgástest példatípusok felvétel:

Tf $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Differenciálható $(a; b)$ -n ^{altri} folytonos $[a; b]$ -n.

(Mármost a derivált (így végy.) Hasonlóan a terfogatnál kezelt testek
kezelésénél lehet. Ennek felírása.

$$A_f = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Ivohossz számítása:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $[a, b]$ intervallum felett eső görbéjének ivhossza.

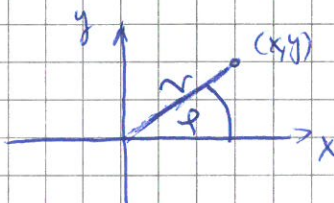
Tfh f folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n (tehát a derivált is folytonos).

Ekkor az ivhossza:

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Terület számítás polárkoordináták alapján

Polárkoordinátarendszer



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

Tétel:

Ha a görbe polárkoordináták előállítására

$r = r(\varphi)$, akkor $\varphi = \alpha$ és $\varphi = \beta$ és az

$r(\varphi)$ görbe által határolt síkbeli terület:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

Példa: $r = 1 + \cos \varphi$, ahol $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$T = \frac{3\pi}{2}$$

kiszámolható

