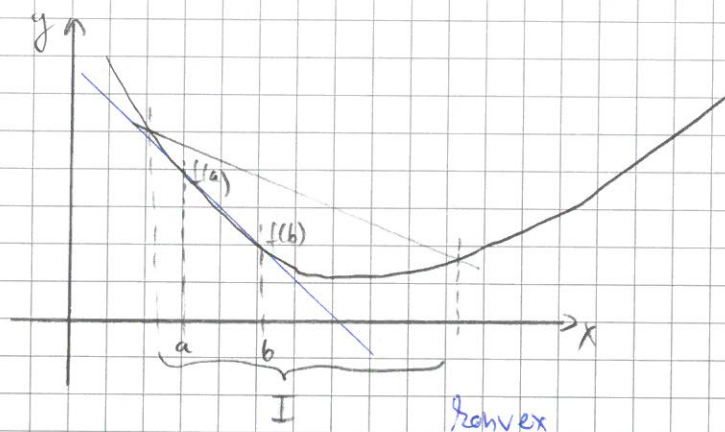


Konvexitással kapcsolatos tételek.

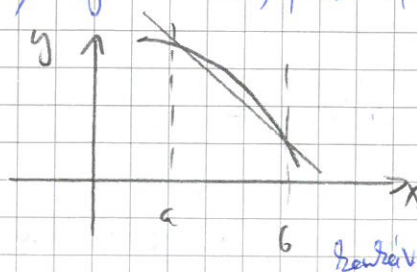
Def: Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ahol $I \subseteq \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f konvex, ha bármely $a, b \in I$ esetén $(a < b)$ és $\forall x(a, b)$ esetén az $(x, f(x))$ pont az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr alatt van, vagy esetleg a húrban van.

Az f szigorúan konvex, ha mindig igaz, hogy az $(x, f(x))$ alatt van.



Def: Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ahol $I \subseteq \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f konkáv, ha bármely $a, b \in I$ esetén $(a < b)$ és $\forall x(a, b)$ esetén az $(x, f(x))$ pont az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr felett, esetleg a húrban van.

Az f szigorúan konkáv, ha mindig igaz, hogy az $(x, f(x))$ felett van.



Tétel: Tfh. az f kétszer differenciálható (a,b) -n. Ekkor

- i) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \iff f$ konvex (a,b) -n.
 ii) $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \iff f$ konkáv (a,b) -n.

Biz: $\Rightarrow$ csak az irány, és csak i.

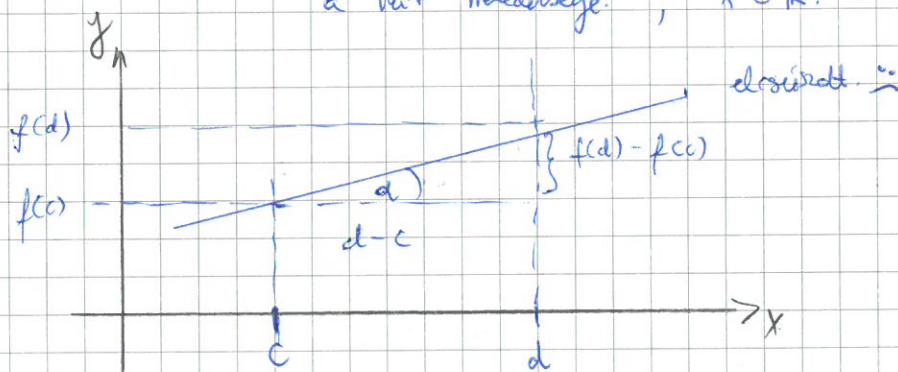
Tfh f kétszer differenciálható és $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ -n.

Legyen $a < c < d < b$.

A $(c, f(c))$ és $(d, f(d))$ pontokat összekötő húr egyenlete:

$$h(x) = \underbrace{\frac{f(d) - f(c)}{d - c}}_{\text{a húr meredeksége}} (x - c) + f(c) \quad \text{lesz.}$$

$x \in \mathbb{R}$.



$$\text{tg } \alpha = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

$$h''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ - n. Belátható.}$$

Legyen $g(x) = (h(x) - f(x)) \cdot (-1) = f(x) - h(x)$ (A húr és a függvény távolsága...)

$$g''(x) = f''(x) - \underbrace{h''(x)}_0 \geq 0.$$

Azaz $g'(x)$ monoton nö. (a,b) -n.

(2)

g folytonos $[c, d]$ -n, hiszen f és h is folytonos.

g differenciálható (c, d) -n, hiszen -11 — differenciálható, folytonos.

$$g(c) = 0.$$

$$g(d) = 0 \quad \text{lesz. Be lehet helyettesíteni.}$$

Itt $\nearrow$ ezért miatt jöhet a Rolle-tétel!

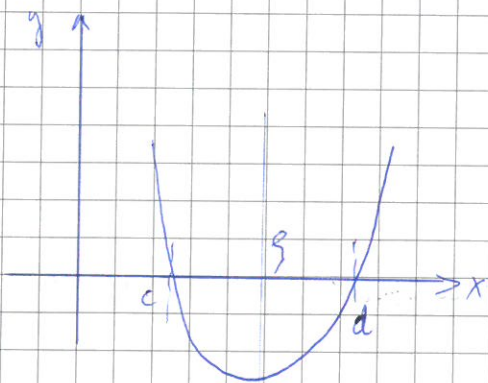
$$\exists \xi \in (c, d), \text{ hogy } g'(\xi) = 0.$$

$$\text{Mivel } g \text{ monoton nö} \Rightarrow g'(x) \leq 0 \text{ ha } x \in (c, \xi)$$

$$g'(x) \geq 0 \text{ ha } x \in (\xi, d).$$

Monotonitás miatt: $g(x)$ csökken, ha $x \in (c, \xi)$

$g(x)$ nö, ha $x \in (\xi, d)$.



Így nö és 8b.

$$\text{Mivel } g(c) = g(d) = 0, \text{ így } g(x) \leq 0 \text{ ha } x \in (c, d).$$



$$g(x) = f(x) - h(x)$$

A kör alatt van

KÉSZ.

$\text{Ha } x \in (c, d) \quad f(x) \leq h(x)$

Megj.: A fenti bizonyítás alapján:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow f \text{ szigorúan konvex};$$

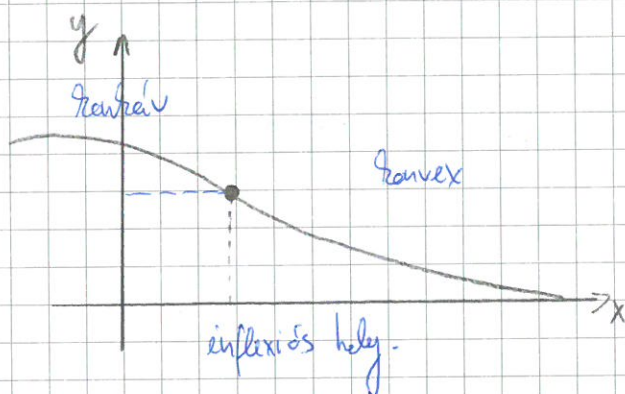
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow f \text{ szigorúan konkáv};$$

Def. Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. A $c \in (a, b)$ az f

inflexiós pontja, ha $\exists \delta > 0$, hogy

- vagy f konvex $(c-\delta, c)$ -n és konkáv $(c, c+\delta)$ -n;

- vagy f konkáv $(c-\delta, c)$ -n és ~~konkáv~~ ^{konvex} $(c, c+\delta)$ -n.



legyen szimmetrikus a
másik eset is.

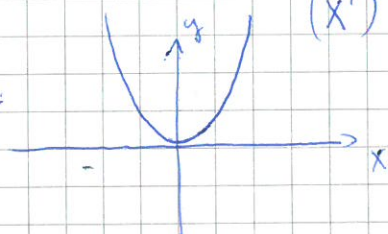
Tétel:

Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható. Ha $c \in (a, b)$

inflexiós pont, akkor $f''(c) = 0$.

Ez nem elegendő feltétel, például $f(x) = x^4$.

De:



$$(x^4)' = 4x^3. \text{ Ez a } \emptyset\text{-ban } \emptyset.$$

láthatóan mindenhol konvex

Tétel:

Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és tfh $f''(c) = 0$, ha $c \in (a, b)$.

Az f -nek a c inflexiós pontja, ha f'' előjelet vált c -ben.

Példák jönnek.

①

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \quad Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 1 + 2 \frac{1}{x^3}$$

$$f'' \text{ hol } 0?$$

$$1 + \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\cancel{x = -\sqrt[3]{2}}$$

$$x = -\sqrt[3]{2} \text{ lesz } f' \text{ kritikus pontja}$$

↑ Lehetőséges inflexiós hely.

$-\sqrt[3]{2} > x$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, \infty)$	f''
+	0	-	+	
∪	inf. hely	∩	∪	

ennyi.

Tétel: (L'Hospital - szabály)

Tfh az f és g függvények differenciálható (a, b) -n, továbbá

$g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, továbbá

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

létezik.

⑤

Ha $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ vagy

$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm \infty$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Hasonló állítások igazak ha $x \rightarrow b^-$ vagy $a = -\infty$ vagy $b = \infty$ esetén.

példa

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{3x^2 - 4x - 1} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

"0/0"

példa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \quad \text{NEH LEHET IGY!}$$

"∞/∞" vagy negis?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$$

példa

Csak hogy lássuk, hogy tényleg deriválható szerzőre is használható. Vagy ha ez egyébként a 0-ból, a másik a $\pm \infty$ -be tel.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-x^2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0^- \end{aligned}$$

(pl.) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = \underline{\underline{0}}$

Teljes függvényvizsgálat

Lépések: ① - $D_f = ?$

② - Zérushelyek meghat. (Ha lehet.)

③ - Paritás vizsgálata

④ - Folytonosság, differenciálhatóság vizsgálata

⑤ - Nevezetes határértékek meghat. ($\pm \infty$, száradási pontok)

⑥ - Monotonitás, szélsőérték (f')

⑦ - Konvexitás (f'')

⑧ - Ábr., $R_f = ?$

Egyes lépések kihagyhatók, a lépések sorrendje sem rögzített.

példa

$$f(x) = x^2 \ln|x|.$$

$$- D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$- x^2 \ln|x| = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$$

$$- f(-x) = (-x)^2 \ln|(-x)| = x^2 \ln|x| = f(x) \text{ PÁROS.}$$

Tehát elegendő $x > 0$ vizsgálata. Tehát.

⑦

Ha $x > 0$: $f(x) = x^2 \ln(x)$.

- $f(x)$ világos, hogy $f(x)$ folytonos és differenciálható.

- Határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \cdot x^2 = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln x = \underline{\underline{\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad \text{a paritás miatt.}$$

Monotonitás, szélsőérték:

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$x_1 = 0$ nem számít

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}}$$

Kritikus pont.
Ha $x > 0$.

$$e(2 \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{e}} + 1)$$

$$e(-2 + 1)$$

x	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$x > \frac{1}{\sqrt{e}}$
f'	-	0	+
f		min. $-\frac{1}{2e}$	

Konvexitás

$$f''(x) = (2\ln x + 1) + x \left(\frac{2}{x} \right) = \underline{\underline{2\ln x + 3}}$$

$$2\ln x + 3 = 0$$

$$\underline{\underline{x = e^{-\frac{3}{2}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e^3}}}} \quad \underline{\underline{\text{Kritikus pont.}}}$$

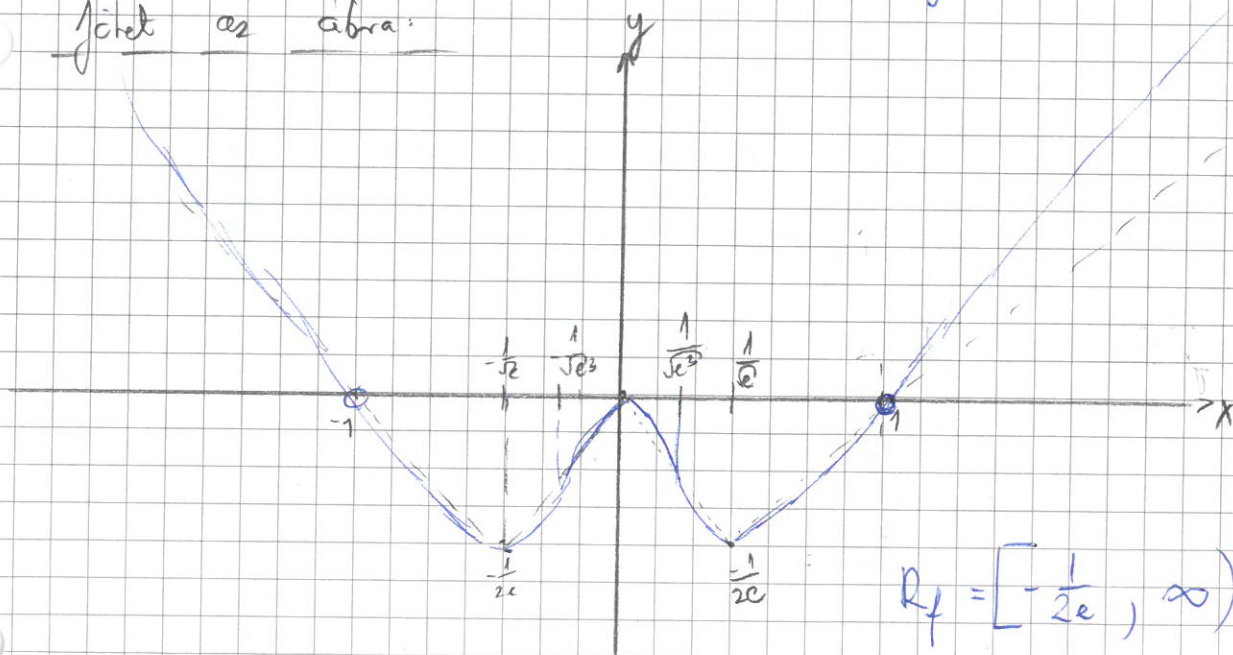
x	$(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}})$	$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	inflexiós hely van.	$\cup$

~~$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \frac{1}{e^3} \ln e^3$$~~

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \frac{1}{e^3} \cdot \ln(e^{-3/2}) = \underline{\underline{-\frac{3}{2} \cdot e^{-3}}}}$$

erősebb lesz.

jólét az ábra:



$$R_f = \left[-\frac{1}{2e}, \infty\right)$$

HF.:

$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{1-x^2}}$ Lehet vele izmozni.

Megj.: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

"Reimates Reimati"

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = e.$$

Integrálszámítás

Határozatlan integrál.

Feladat: Adott egy függvény. Amikor a deriváltja, melynek ismeretében állapít megadni a függvényt.

Def.: $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $I \subseteq \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy F primitív függvénye az f -nek, ha F differenciálható I -n és $F'(x) = f(x)$.

Észrevétel: Ha F primitív függvénye f -nek, akkor az $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ is primitív függvénye f -nek.

Feladás: $\int f(x) dx = F(x) + C.$

Példa: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Észrev. $\int f(x) dx = F(x)$,

$$\int f(x) dx = G(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x)$$

$$f(x) - g(x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ -re. Ezzét $F(x) - G(x) = C$ lesz igaz, $C \in \mathbb{R}$,
 azaz az f összes primitív függvénye $F(x) + C$ alakú.

Differenciálás:

$$(cf)' = cf'$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Tétel:

Tfh $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ és

$g: I \rightarrow \mathbb{R}$ — " — $G: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Ellen:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Példa

$$\int (6x^2 - e^x) dx = \int 6x^2 dx - \int e^x dx = \underline{\underline{2x^3 - e^x + C}}$$

Alapintegrálok:

f	$\int f(x) dx$
1	$x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C, a > 1, a \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C, x \neq 0$
$\sin x$	$-\cos x + C$

f	$\int f(x) dx$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x = 2\pi$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$z \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	

Ennyi. Milyen függvényeknek létezik primitív függvénye?

Tétel: (Elegendő feltétel)

Ha f folytonos, akkor $\exists$ primitív függvény.

Megj.: Ez a primitív függvény nem feltétlenül elemi függvény, illetve nem feltétlenül adható meg zárt alakban.

Híres példák: $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $f(x) = e^{x^2}$

Def.: Intervallumon értelmezett folytonos függvény Darboux-teljesen folytonos, ha bármely két függvény értéke közötti értéket is felvesz.

Pontosabban: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Darboux-tulajdonságú, ha bármely

$a, b \in I$, $a < b$ és $f(a) \neq f(b)$ ha rögzített y -ra

található $c \in (a, b)$ $f(c) = y$.

Minden, intervallumon folytonos függvény Darboux-tulajdonságú.

(Eml.: tétel a Riemann-érték felvételéről!)

Van olyan függvény, amely ~~folyt.~~ nem folytonos, de Darboux-tulajdonságú:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ez pl. elég becsúsz, de oké.

Tétel: Ha az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ -n létezik primitív

függvénye, akkor Darboux-tulajdonságú.

Tétel: Tfh $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható és

az $f \cdot g$ -nek $\exists$ a primitív függvénye. Ekkor az

$f \cdot g$ -nek is létezik primitív függvénye:

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

PARCIA LIS

INTEGRÁ LIS.

A szorzat deriváltjából jön. $(fg)' = f'g + fg'$

$$\int f'g = \underbrace{\int (fg)'}_{fg} - \int fg' \quad \text{Innen jön}$$

példa

$$\int \underbrace{x^5}_{f'} \underbrace{\ln x}_g dx = \ln x \cdot \frac{x^6}{6} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^6}{6} dx = \frac{\ln x \cdot x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + C$$

$g' = \frac{1}{x}$

$$f = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

Szóval...

$$\begin{aligned} \int x^5 \ln x dx &= \frac{x^6}{6} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^6}{6} dx = \frac{\ln x \cdot x^6}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{x^6}{6} + C = \\ &= \underline{\underline{\frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \cdot \frac{x^6}{6} + C}} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln x}_f dx = x \cdot \ln x - \int dx = \underline{\underline{x \ln x - x + C}}$$

$g = x \quad f' = \frac{1}{x}$

!gy is lehet...

$$\begin{aligned} 2) \int \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx &= x^2 e^x - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx = x^2 e^x - \left[2x e^x - \int 2 e^x dx \right] \\ f' &= 2x \quad g = e^x \quad f' = 2 \quad g = e^x \\ &= \underline{\underline{x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \arctg x dx &= \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\arctg x}_g dx = x \cdot \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ f &= x \quad g' = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

alatti. :)
Ezt meg kell tudni.

Helyettesítéssel integrálás:

Ha $F' = f$, akkor $F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Tétel (amiatt):

Legyen g differenciálható az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon. Tíh g É.k. -ét

tartalmará $\exists$ részhalmaza I -nek, ahol az f ^{egy} primitív

függvénye F . Ekkor $\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$



" $\int f(g(x)) g'(x) dx$ " alakú integrálnál a közvetlenő formula megoldást

alkalmazunk:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(y) dy = F(y) + C = \underline{F(g(x)) + C}$$

$$y = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) \Rightarrow \underline{dy = g'(x) dx}$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int x \cdot (x^2+1)^{-1} dx = \frac{1}{2} \int u^{-1} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$u = x^2+1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \boxed{x dx = \frac{du}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$



Meg példák.

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x) dx = \int \sin u du = -\cos u + C$$

↓

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$$

$$-\cos \ln x + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \int x \cdot \underbrace{(x^2+5)^{-1/2}}_m dx = \frac{1}{2} \int m^{-1/2} dm = \frac{1}{2} \frac{m^{1/2}}{1/2} = \frac{1}{2} \cdot 2 m^{1/2} + C$$

$$m = x^2 + 5$$

$$\frac{dm}{dx} = 2x \Rightarrow x dx = \frac{dm}{2}$$

$$\sqrt{x^2+5} + C$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx =$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$u = 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \int \cos u \, du = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad \left(= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} 2 \sin x \cos x + C \right)$$

$$\left(\int f(x \cdot a + b) \, dx = \frac{F(x \cdot a + b)}{a} + C \right)$$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \sin x \cos^{-1} x \, dx = - \int u^{-1} \, du = - \ln |u| + C =$$

$$u = \cos x$$

$$= - \ln |\cos x| + C$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$dx \cdot -\sin x = du$$

$$\ln \left| -\frac{1}{\cos x} \right| + C$$

Tétel: $\int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \arctan x + C$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{1} \int \frac{1}{\frac{x}{1} + 1} \, dx = \frac{1}{1} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{1}\right)^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} \, du =$$

$$\frac{x}{2} = u$$

$$\frac{1}{2} = \frac{du}{dx}$$

$$du = \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \arctan u + C = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int \sin^2 t dt = \dots =$$

$$(x \in (-1, 1))$$

$$x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$dx = dt \cos t$$

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$$

$$\cos^2 t = 1 - x^2$$

$$\cos t = \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t =$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{1}{2} x \cdot \cos(\arcsin x) + C =$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cancel{\sin^2 x} + 2\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{2\cos^2 x}} dx =$$

$$1 + \cos^2 x = \sin^2 x + 2\cos^2 x$$

$$z = \operatorname{tg}^2 x$$

$$x = \operatorname{arctg} z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} z = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x$$

$$dz = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{2+z^2} dz = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \dots \quad \text{Ez nem lép tovább.}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C}}$$

$$\int e^{\sqrt{y}} dy = \int e^x \cdot 2x dx = 2 \left(x \cdot e^x - \int e^x dx \right) = 2(xe^x - e^x) + C =$$

$$x = \sqrt{y}$$

ez már nyomatható parcellisan.

$$\frac{2e^x(x-1)+C}{=}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$= 2e^{\sqrt{y}}(\sqrt{y}-1) + C$$

$$dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$dy = 2\sqrt{y} dx$$

Ha nincs ötletünk, hogy mit helyettesítsünk, helyettesítsük a „legcsúnyább” részt.

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{u^2+3}{u} du = \frac{1}{2} \int \left(u + \frac{3}{u} \right) du$$

$$u = \sqrt{x-2} \Rightarrow u^2 = x-2$$

$$x = u^2 + 2 \quad \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} + 3 \ln|u| \right) + C$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{2} + 3 \ln \sqrt{x-2} + C \right)$$

Elcsesztük. :-

$$= 2 \int \frac{u^2+3}{(u^2+2)} du = 2 \int \frac{u^2+3}{u^2+2} du =$$

Itt valami gáz van a jejjel, megallunk.

Racionális törtfüggvények integrálása.

Elemi tört integrálása.

Elemi tıt: $\frac{A}{(x-a)^n}$, $A \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ egész.

$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}$, $A, B, b, c \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ egész.
 $b^2-4c < 0$.

A₂ $\frac{A}{(x-a)^n}$ integrálása:

$$n=1: \int \frac{3}{x-2} dx = 3 \int \frac{1}{x-2} dx = \underline{\underline{3 \ln |x-2| + C}}$$

$$n \geq 2: \int \frac{3}{(x-2)^5} dx = 3 \int \frac{1}{(x-2)^5} dx = 3 \int (x-2)^{-5} dx = \underline{\underline{3 \frac{(x-2)^{-4}}{-4} + C}}$$

A₂ $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}$ primitív függvénye.

$n=1$ és a szamlo konstans:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \\ &= \frac{1}{2} \arctg(u) + C \\ u &= \frac{x+1}{2} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} dx &= du \\ \underline{\underline{\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C}} \end{aligned}$$

Ezet a példát mindig az $\frac{1}{u^2+1}$ -re vezetjük vissza.

$n=1$ és a szimuláció lineáris

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{2(2x+2)}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx =$$

Tipp: nevező deriváltja kell a szimulációba.

$$(x^2+2x+5)' = 2x+2$$

$$\underline{\underline{2 \ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C}}$$

$$2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} = \underline{\underline{2 \ln|x^2+2x+5| + C}}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{3}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{4}} dx =$$

$$\frac{x+1}{2} = u$$

$$\frac{1}{2} = \frac{du}{dx}$$

$$du = \frac{1}{2} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$\frac{1}{2} \arctg u + C$$

$$\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$n \geq 2$ esete és a szimuláció konstans

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \arctg(x) + C - \dots$$

- $n \geq 2$ és a szimlaké elsőfokú.

$$\int \frac{4x+3}{(x^2+2x+5)^2} dx = \int \frac{2(2x+2)-1}{(x^2+2x+5)^2} dx = 2 \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2} dx =$$

$$(x^2+2x+5)' = 2x+2$$

$$= -2 \frac{1}{x^2+2x+5} - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx = \int \frac{(2x+2)(x^2+2x+5)^{-2}}{1} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{u} + C$$

$$x^2+2x+5 = u$$

$$2x+2 = \frac{du}{dx}$$

$$du = (2+2x)dx$$

$$-\frac{1}{x^2+2x+5} + C$$

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2} dx = \int \frac{1}{((x+1)^2+4)^2} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)^2} dx =$$

$$= 2 \frac{1}{16} \int \frac{1}{(u^2+1)^2} du = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \arctan u + \frac{u}{2(u^2+1)} + C \right)$$

$$u = \frac{x+1}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$du = \frac{1}{2} dx$$

$$\frac{1}{16} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{16} \frac{\frac{x+1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} + C$$

Altalános ractör integrálása:

Ha a nevező fokszáma nagyobb a számláló fokszámánál.

⑦ $\forall$ olyan ractör, melyben a nevező fokszáma $>$ számláló fokszáma, felbontható véges sok elemi tört összegére.

Ha a nevezőben szerepel az $(x-a)^n$ hatvány, akkor felleírhat a következő:

$$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Ha a nevezőben szerepel az $(x^2+bx+c)^n$ hatvány, akkor felleírhat a következő:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

példa

Bontsd fel:

$$\frac{x+2}{x^3+1} = \frac{x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2x+B}{x^2-x+1} =$$

$$(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$= \frac{A_1(x^2-x+1) + (A_2x+B)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$-A_1 + A_2 + B = 1$$

$$A_1 + B = 2$$

$$x^2: (A_1 + A_2)$$

$$x: (B + A_2 - A_1)$$

$$x^0: A_1 + B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

⑦

Mindig, számoltam, de felejtettem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \dots$$

$$A_1 = 1/3 \quad A_2 = -1/3 \quad B = 5/3$$

$$\int \frac{x+2}{x^3+1} dx = \int \frac{1}{3(x+1)} dx + \int \frac{-x+5}{3(x^2+x+1)} dx =$$

$$\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int (-x+5)(x^2+x+1)' dx =$$

megcsinálható.