

Inverz függvény deriváltjának bizonyítása követelhető.

Eml.:

Tfh. f -nek $\exists$ inverse, differenciálható és az a pontban $f'(a) \neq 0$.

Legyen $b = f(a)$, ekkor az $f^{-1}(x)$ diff. b -ben:

$$f^{-1}(b)' = \frac{1}{f'(a)}.$$

Biz.: legyen $f(x) = y \rightarrow x = f^{-1}(y)$.

Tudjuk, hogy f^{-1} folytonos ($\Rightarrow$ nat. deriválható).

Ezért $y \rightarrow b$, akkor $x = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(b) = a$.

$$\text{Igy } (f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{Enneki.}$$

A szélsőérték és derivált kapcsolata

Első rész.

Def.: Az f függvénynek az a pontban lokális (helyi) mi-

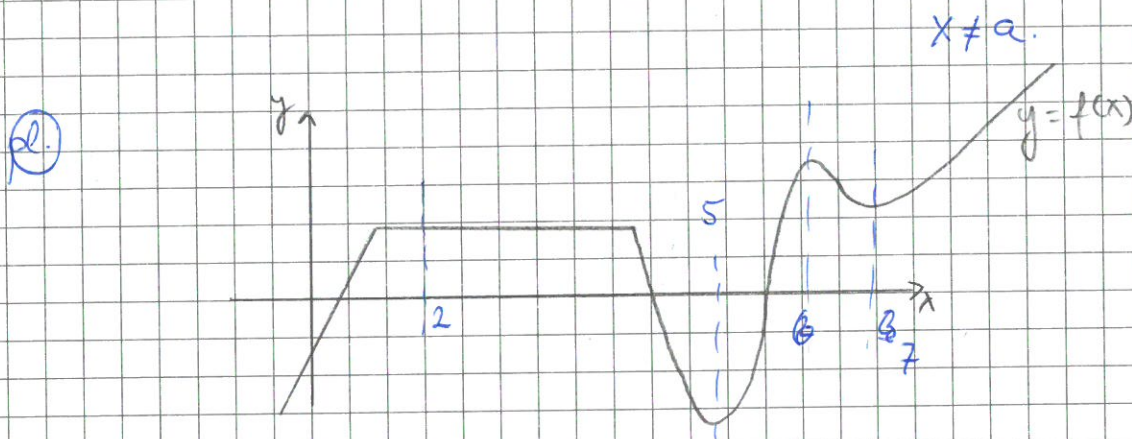
nimuma van, ha $\exists$ olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \geq f(a)$

$\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$ esetén.

Az f -nek az a pontban szigorú lokális (helyi) minimuma van, ha $f(x) > f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ esetén,
 $x \neq a$.

Def.: Az f -nek az $a \in \mathbb{R}$ pontban lokális (helyi) maximuma van, ha $\exists \delta > 0$, hogy $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Az f -nek az $a \in \mathbb{R}$ pontban szigorú lokális (helyi) maximuma van, ha $\exists \delta > 0$, hogy $f(x) < f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.



Ezért az f -nek az ~~az~~ $x = 5$, $x = 7$ pontokban

lokális minimuma van. Ezek szigorú lokális minimumok.

Ezért az f -nek az $x = 2$, $x = 6$ pontokban lokális maximuma van. Ezek közül az $x = 2$ szigorú maximum hely.
 (Csak az $x = 6$).

Tétel: f legyen a -ban differenciálható. Ha f -nek helyi szélsőértéke (maximuma vagy minimuma van, akkor $f'(a) = 0$.

Biz.: Tfh. f -nek a -ban minimuma van.

$$\Rightarrow \exists \delta > 0, \text{ hogy } f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

$$\text{Ha } x \in (a-\delta, a) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) - f(a) \geq 0 \\ x - a < 0 \end{array} \right\} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

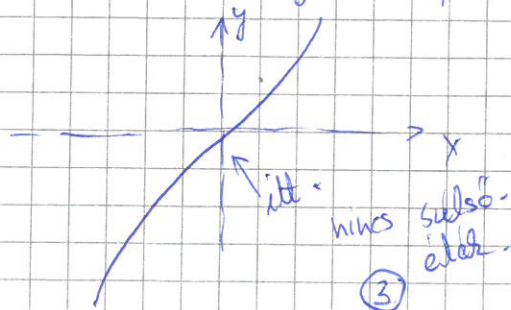
$$\text{Ha } x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) - f(a) \geq 0 \\ x - a > 0 \end{array} \right\} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

Vessük össze a kétet: $f'(a) = 0$. Ez a teljesítés.

Megj.: - A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a derivált nulla legyen.

- Ez nem elegendő feltétel. pl: $f(x) = x^3$.



$$f' = 3x^2$$

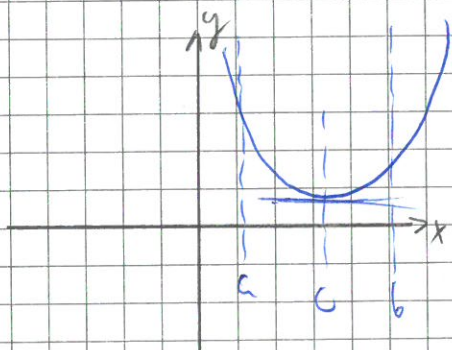
$$3x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$$

Közepértétel - feltételek:

Rolle - tétel

Ha f folytonos az $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n,
továbbá $f(a) = f(b)$, akkor $\exists$ olyan $c \in (a, b)$, hogy
 $f'(c) = 0$.

Ez vhl triviális, de bizonyítható hangsúly.



Biz: Mivel f folytonos, ezért $\exists c_{\min} \in [a, b]$ hogy $f(c_{\min}) \leq f(x)$

$\forall x \in [a, b]$.

És $\exists c_{\max} \in [a, b]$, hogy $f(c_{\max}) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$.

$\Downarrow$

Ha $f(c_{\min}) = f(c_{\max}) \Rightarrow$ akkor $f(x) = C$ konstans függvény, $C \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(x) = 0$. Ez kész.

Ha $f(c_{\min}) \neq f(c_{\max}) \Rightarrow f(c_{\min}) < f(c_{\max}) \Rightarrow f(a) = f(b)$ miatt

legalább az egyik belső pont.

Ha $c_{\min} \in (a, b) \Rightarrow f'(c_{\min}) = 0$.

Ⓢ

Ha $c_{\max} \in (a, b) \rightarrow f'(c_{\max}) = 0.$

Lagrange - tétel:

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n,
 akkor $\exists c \in (a, b)$, hogy $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$

Biz.: Legyen $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x.$

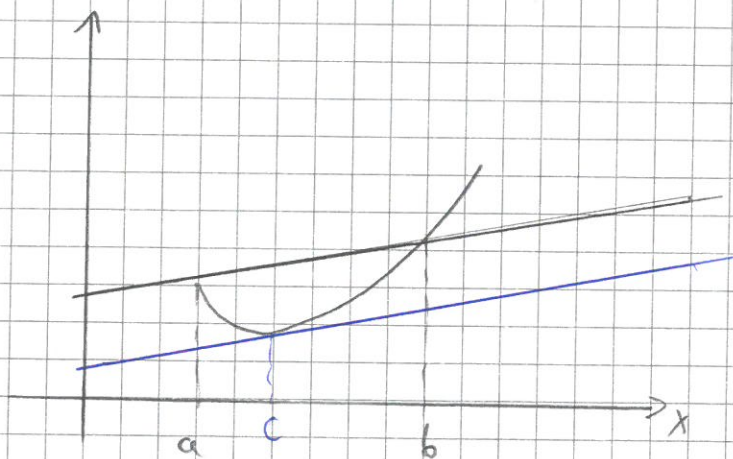
Az $F(x)$ folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n.

Továbbá $F(a) = F(b).$

$\Rightarrow$ Rolle - tétel miatt $\exists c$, hogy $f'(c) = 0.$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \checkmark \quad \text{Megkaptuk}$$



Monotonitás:

Tétel: Tfh hogy f folytonos $[a, b]$ -n és diffható (a, b) -n.

Ezra $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ állandó $[a, b]$ -n.

Biz.: a) $\Leftarrow$ Igen irányban.

Tfh. hogy $f(x) = C \quad \forall x \in [a, b]$.

Ezra $\forall x_0 \in (a, b) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{C - C}{x - x_0} = 0$.

$$x \neq x_0.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0. \quad \checkmark$$

b) $\Rightarrow$ Ez az irány.

Tfh. hogy $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. vagy $\forall x \in (a, b)$.

Lagrange-tétel miatt $\exists c \in (a, x) : 0 = f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$\Downarrow \\ f(x) = f(a)$$

x tetszőleges, $x \in (a, b) \Rightarrow$ A függvény konstans.

Mindkét irány bizonyítva van.

Tétel: Tfh f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n.

$$- f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ monoton növekvő; } x \in [a, b]$$

⊕ Biz. $\Rightarrow$ - $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ monoton csökkenő; $x \in [a, b]$.

Biz.: Az első bizonyítjuk

1) Tfh $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Legyen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

Az f folytonos $[x_1, x_2]$ -n és differenciálható (x_1, x_2) -n.

Lagrange-tétel: $\exists$ olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0$$

$\uparrow$
ezt
feltétel

$\uparrow$
ezt is

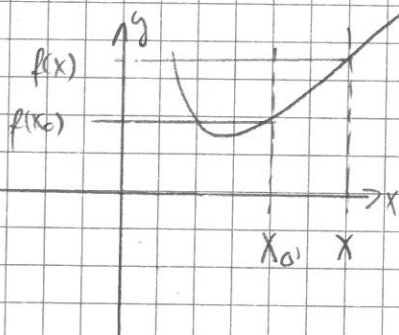
$\Rightarrow$ emiatt lesz igaz.

Azaz $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ez emiatt.

2) Tfh f monoton nö $[a, b]$ -n. Ekkor $x_0, x_0 \in (a, b)$,

$x \neq x_0$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ Lesz igaz.

Emiatt $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. $\checkmark$ Ez is emiatt.



Ebből látszik is.

Megjegyzések: — Ha a fenti feltételek mellett az is igaz, hogy

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ szigorúan monoton nö $[a, b]$ -n.

b) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ szigorúan monoton csökken $[a, b]$ -n.

c) Ezek vissza felé nem igazak!

☹

(pl) $y = x^3$ ismét, ami szig. mon. nö, de $f' = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0!$

Példák:

① $f(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \neq 0$ -ra.

Tehát f szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ -en.

② $f(x) = 2x^2 - 6x + 9$ $f'(x) = 4x - 6$

$$0 = 4x - 6$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}} \text{ itt lesz nulla.}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{ha} \quad x > \frac{3}{2} \Rightarrow f \text{ szig. mon. nö} \nearrow$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{ha} \quad x < \frac{3}{2} \Rightarrow f \text{ szig. mon. csökken} \searrow$$

$x = \frac{3}{2}$ - ben lokális minimum van.

Szélsőérték és derivált II.

Tétel: Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n

és $c \in (a, b)$.

$$\text{Ha} \quad f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, c) \text{ és}$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (c, b)$$

akkor az f -nek helyi maximuma van c -ben.

$$\text{Ha} \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, c) \text{ és}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (c, b) \rightarrow f \text{-nek } c\text{-ben helyi minimuma van.}$$

⑧

Biz: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, c)$ és $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (c, b)$

$\Rightarrow f$ monoton növekvő (a, c) -n és

f monoton csökkenő (c, b) -n.

$\Rightarrow f$ -nek helyi maximuma van c -ben.

Ennyi.

Magasabb rendű deriváltak

Def.:

Az f második deriváltja $f'' := (f')'$ (ha létezik).

Az f harmadik deriváltja $f''' := (f'')' = ((f')')'$ (ha létezik).

Az f n -edik deriváltja $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ (ha létezik)

$n \geq 2$ esetén

Vigyázat! Ha f differenciálható, nem biztos, hogy a magasabb rendű deriváltak léteznek.

Tétel: Legyen f differenciálható (a, b) -n és $\exists f''$ és $c \in (a, b)$

$$f'(c) = 0.$$

Ha f'' létezik:

- Ha $f''(c) > 0$, akkor f -nek a c -ben minimuma van.
(lokális)

- Ha $f''(c) < 0$, akkor f -nek a c -ben maximuma van.
(lokális)

Biz: Nem bizonyítható. ☹

Megj.: A tétel nem mond semmit $f''(c) = 0$ -ról.

Def. Azt mondjuk, hogy $x_0 \in D_f$ kritikus pontja f -nek,
ha $f'(x_0) \nexists$ vagy $f'(x_0) = 0$.

pl) Igazoljuk, hogy az $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$
függvénynek $x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ -ban ~~minimuma~~ ^{minimuma} van. (El lett nevezve
a kritikus! is)

$$0 = f'(x) = \left(ax + \frac{b}{x}\right)' = a - \frac{b}{x^2}$$

$$a - \frac{b}{x^2} = 0$$

$$a = \frac{b}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Mivel csak az $x_0 = +\sqrt{\frac{b}{a}}$ értel. f definíciója
miatt. Ez tényleg kritikus pont.

$$f''(x) = +2\frac{b}{x^3}$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot \frac{b}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3} > 0 \quad \text{Tehát } f\text{-nek az } x = \sqrt{\frac{b}{a}}\text{-ban}$$

minimuma van (lokális).

2o) Vizsgáljuk az $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$ függvény monotonitását,
szélsőértékeit.

Kritikus pontok keresése:

$$f'(x) = \frac{(x^3+1) - x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} =$$
$$= \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2} \Rightarrow 0 = -2x^3+1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

(1o)

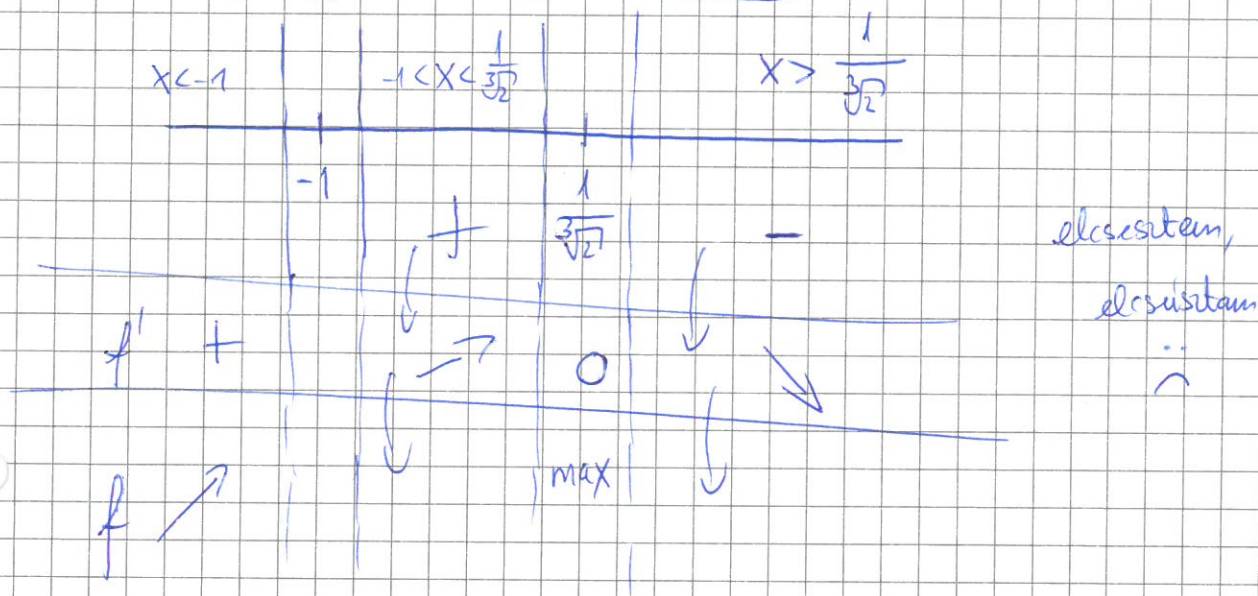
$$f''(x) = \frac{-6x^2(x^3+1)^2 - 2(-2x^3+1) \cdot (x^3+1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^4} =$$

$$= \frac{-6x^2(x^3+1) [(x^3+1) + (-2x^3+1)]}{(x^3+1)^4} =$$

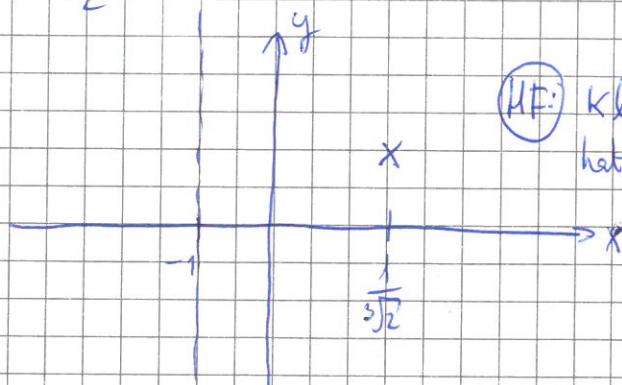
$$= \frac{-6x^2(x^3+1)(2-x^3)}{(x^3+1)^4} = 0 \quad \text{Ezzel nem jutunk tovább.}$$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Van még egy kritikus pont: $x = -1$



$$f\left(x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$$



(MF) klasszikus
határértékek.

Enneji, ill megalak.