

Hf: Az előző konzultáció utolsó feladatát bizonyítani.

Ezerhez jól jönne a szűkítés fogalma.

Halmazok legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja

Def.: Legyen S egy nemüres halmaz, $S \subseteq \mathbb{R}$.

K felső korlátja S -nek, ha $\forall x \in S$ esetén $x \leq K$.

Ha S -nek $\exists K$ -ja, akkor S -t felülről korlátozhat reverzük.

$M \in \mathbb{R}$ az S legkisebb felső korlátja, ha

- M felső korlát;
- $\forall K$ esetén $M \leq K$.

jelölése: $\sup S = M$. (szuprénum)

Hf. Legnagyobb alsó korlát definíciója.

Példa: - $S = (-\infty, 0)$ K lehet $0, 1, 2, \sqrt{27}$, stb., de

$$\sup S = 0.$$

- $S = (-\infty, 0]$ $K = 0, 1, 2, \dots$

$$\sup S = 0.$$

$\sup S$ nem feltétlenül $\in S$ -nek.

Pé. $S = \{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \dots, 1 - \frac{1}{n}\}$ $\sup S = 1$.

(pl.) $S = \{x: x^2 < 3\} = \{x: -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$
 $\sup S = \underline{\sqrt{3}}.$

Axioma: Teljességi axioma.

A valós számok $\mathbb{R}$ nemüres, felülről korlátos részhalmazaiban
 $\exists$ legkisebb felső korlátja.

Tétel: Ha $M = \sup S$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor
 $\exists x \in S$, melyre $x - \varepsilon < x < M$.

Hasonlóan definiálható a legkisebb alsó korlát.
 jelölése: $\inf S$.

(H)

Ha S nemüres, alulról korlátos, akkor $\exists \inf S$.

A Zorbarszö átér felvételéről szóló tétel már bizonyítható.

Tétel: (A Zorbarszö átérne vonatkozó tétel következménye.)

Ha f folytonos $\underset{(a,b)}{[a,b]}$ -n, és $f(a) < 0 < f(b)$
 vagy $f(a) > 0 > f(b)$, akkor $\exists x$, hogy $x \in \underset{(a,b)}{[a,b]}$ és
 $f(x) = 0$.

(pl.) $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x - x^2$, $D_f = [0, 1]$

$$f(0) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = -1.$$

Mivel ez teljesül, ezért $f(x)$ -nek $\exists$ zérushelye a $[0, 1]$ -en.

- Van értelme keresni. Ez csak ennyi infót mond.

Tétel: Legyen f injektív $I \in D_f$ -en. Ha f folytonos, akkor f^{-1} is folytonos.

Differenciálhatóság

Def.: Adott $a \in \mathbb{R}$. Tfh, az f definiálva van az a egy környezetében, azaz az $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy f differenciálható a -ban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \exists \text{ és véges.}$$

Jelölés: ~~$f'(a)$~~ , $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ez az f deriváltja (differenciálhányadosa) a -ban.

Másik megfogalmazás:

f differenciálható a -ban, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\exists$ és véges.

Átíráshoz: $\begin{cases} x = a+h \\ h = x-a \end{cases}$. Ez kellhet.

Még egy, a fentivel ekvivalens definíció:

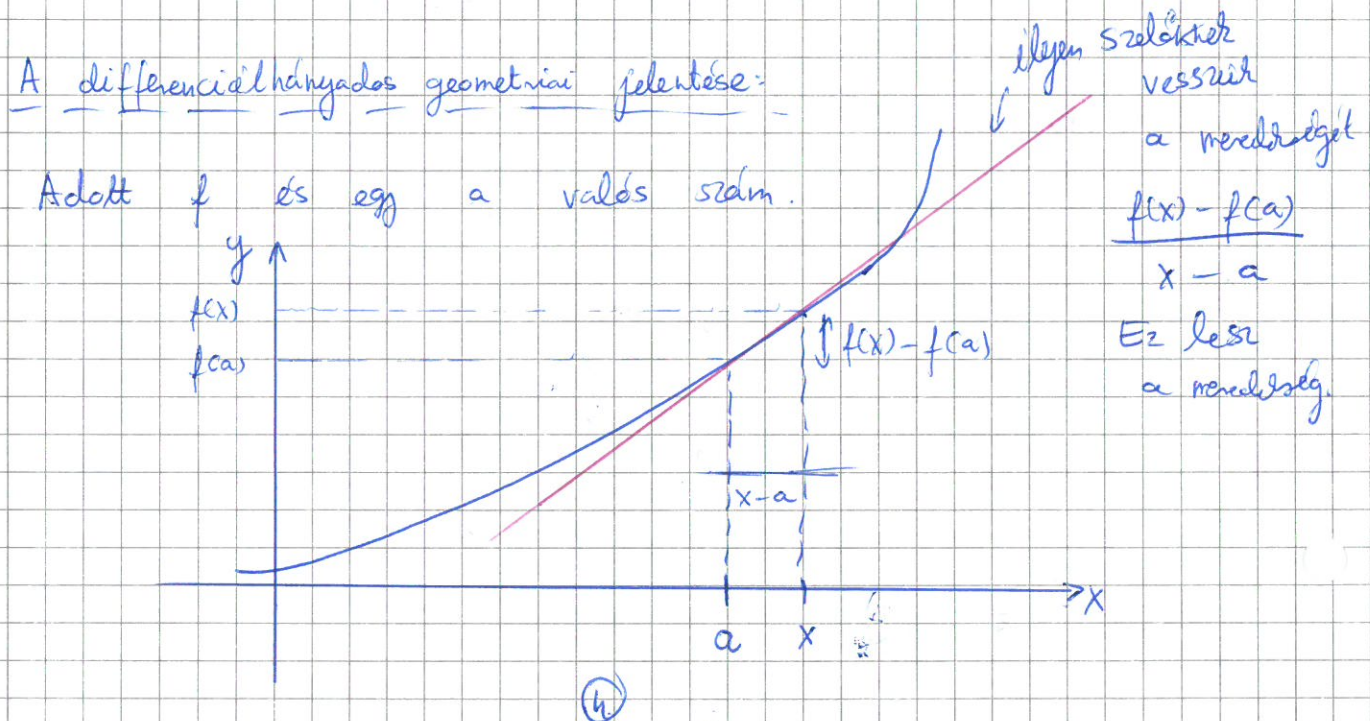
Def.: Tfh f definiálva van az a egy környékében, azaz van egy $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$ intervallumon.

f differenciálható a -ban, ha $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ és ω , $D_{a\omega} = (a-\delta, a+\delta)$ függvény, hogy

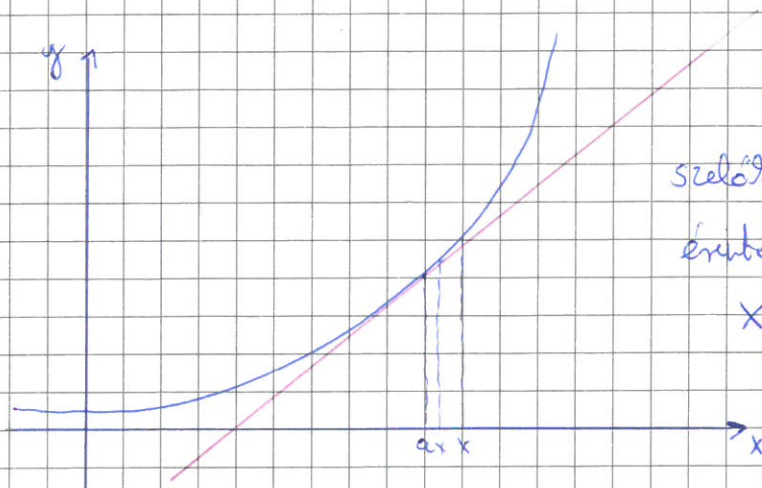
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{w(x)}{x-a} = 0, \text{ és}$$

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \underbrace{w(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{ez az itt van} \\ \text{hiba függvény.}}}, \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Mi ez? Az $A(x-a) + f(a)$ egy lineáris közelítése f -nek a -ban.



Mit csinálunk?



Belátható, hogy a
szelő határhelyezete az
érintő lesz a -ban, ahol
 $x_1 \rightarrow a$.

Az érintő meredeksége pedig éppen a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, ami
pont a függvény deriváltja a -ban.

Tehát f differenciálható a -ban, ha a -ban érintő létezik f
grafikonjához. Továbbá az érintő meredeksége az véges.

Azaz az érintő nem merőleges a vízszintes tengelyre.

Nevezetes függvények deriváltjai

a) $f(x) = x^2$ $f'(a) = ?$ Melyik a esetén $\exists$?

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a.$$

$\forall a$ esetén $\exists$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $x \geq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(5)

A $\sqrt{x}$ függvény csak pozitív x -ek
esetén differenciálható.

c) $f(x) = |x|$.

$|x|$ nem differenciálható $x=0$ -ban. Ezt segítjük.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}, \text{ ami nem létezik, mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Ezért nem is deriválható.

d) $f(x) = \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} \quad \text{Ezt nem jellemezhető.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(x-h)}{h} \quad \text{VAGY}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin a \cosh + \cos a \sinh - \sin a}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin a (\cosh - 1)}{h} + \frac{\cos a (\sinh)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin a \frac{\cosh - 1}{h} + \cos a \frac{\sinh}{h} \right) =$$

$$= \sin a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = \boxed{\cos a}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1)(\cosh + 1)}{h(\cosh + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 - 1}{h(\cosh + 1)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sinh^2 h}{h(\cosh + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{-\sinh^2 h}{h^2}}_{-1} \cdot \underbrace{\frac{h}{\cosh + 1}}_0 = 0$$

Kaptuk: $\sin(x)' = \cos(x)$.

főn a szokásos zínostani táblázat.

$f(x)$	$f'(x)$
$C \in \mathbb{R}$	0
x	1
$x^n, n \in \mathbb{R}$	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Ezéből levezethető pl.: $(\sqrt{x})' = 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\sqrt[3]{x} = ?$ (HF)

Tétel:

Tf h f és g differenciálhatóak a -ban. Ekkor:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } (f+g)' = f' + g' \quad (a\text{-ban}) \\ \text{b) } (cf)' = c f' \quad (a\text{-ban}) \end{array} \right\} \text{linearitás!}$$

$$\text{c) } (f \cdot g)' = f'g + fg' \quad (a\text{-ban})$$

$$\text{d) } g(a) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (a\text{-ban})$$

Bizonyítás:

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} \Rightarrow$$

def szerint:

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) =$$

$$= f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

példák:

$$1) (x+2)' = \underline{1}$$

$$2) (3 \cdot 5^x)' = 3 \cdot \cancel{\ln 5} \cdot \ln 5 \cdot 5^x.$$

$$3) (x \cdot \cos x)' = \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x \sin x$$

$$4) \frac{x^2 - 3x}{x^3} = \frac{(2x-3)x^2 - (x^2-3x) \cdot 3x^2}{x^6} = \dots \text{széghető.}$$

Tétel:

T.f.h. hogy g differenciálható a -ban és az f differenciálható

$g(a)$ -ban. Ekkor $f \circ g$ diff.-ható a -ban és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

példa: $((x^2+5)^3)' = 3(x^2+5)^2 \cdot (2x) = \underline{\underline{6x(x^2+5)^2}}$

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{(1-x)(1+x)}}}$$

HF: $(e^{x^2}-1)'$; $\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)'$

Az érintő egyenletének felírása

Az f függ. a -ban húzott érintőjének egyenlete:

$$y = f(x=a) + f'(x=a)(x-a)$$

példa:

$$f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$a = 32$$

$$f(a) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^4}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^4}}$$

$$f'(x=a) = \frac{1}{5 \cdot 16} \quad y = 2 + \frac{1}{80}(x-32)$$

9

Differenciálhatóság és folytonosság.

Def.: Azt mondjuk, hogy f differenciálható az (a, b)

intervallumon, ha annak minden pontjában differenciálható.

Megengedjük, hogy $a = -\infty$ és $b = \infty$.

Legyen f értelmezve egy $(a-\delta, a]$ intervallumon ($\delta > 0$),

akkor az f bal oldali deriváltja a -ban:

$$f'_{-}(a) = \lim_{x \rightarrow a^{-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Def.: Az f differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, ha

a) diffható (a, b) -n

b) $\exists$ b -ben bal oldali diff és

c) $\exists$ a -ban a jobb oldali diff.

Tétel: Ha f differenciálható a -ban, akkor az f folytonos a -ban.

Bizonyítás: Tfh f diffható a -ban, azaz $\exists$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ha $h \neq 0$ és $(a+h) \in D_f$, akkor

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$$

Ezért $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0.$

Ami:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a).$$



~~$\lim_{x \rightarrow a}$~~ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ami éppen a folytonosság
 definíciója. # megjegyezni.

Megj: A tétel megfordítása nem igaz.

(HF.)

pl: $f(x) = |x|.$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{ha } x \geq 1 \\ 3x^2 - 1 & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

a) Hol differenciálható?

b) Hol folytonos?

Inverz függvény deriváltja:

Tf h. hogy f -nek $\exists$ inverse és differenciálható a -ban úgy,
 hogy $f'(x=a) \neq 0$. Ekkor még legyen $f(a)=b$. Ekkor

f^{-1} differenciálható b -ben és $(f^{-1})'(x=b) = \frac{1}{f'(a)}.$

Legyen $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ ami folytonos.

Ezért ha $y \rightarrow b$, akkor $x = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(b) = a$.

Ezért

$$(f^{-1})'(y=b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

ami

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ennyi a bizonyítás

Példa

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sin(x), \quad x = \arcsin(y).$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

GY:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = -(x-3)(x+2) = -x^2 + x + 6$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -2$$

} Ezek a gyökök.

$$\text{max. hely: } \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4} \text{ ehelyett lesz.}$$

↑ itt.

$$y' = -2x + 1$$

$$-2x + 1 = 0$$

DE nem biztos, hogy

$$x = -\frac{1}{2} \checkmark$$

rendben van.

ahol a derivált nulla, ott szélsőérték van