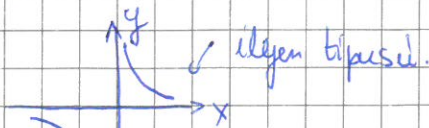


$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{2+2}{1} = 4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \frac{\infty}{0}$$

NEH.



ilyen típusú.

" $\frac{2}{0}$ " NEH LET-
EGIS.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{2}{x-2} \right)$$

nem egyszerű a két- és jobboldali határérték.

↓
nem lehet.

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)^2 \cdot (x+h+x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (x \cdot 2 + h)}{h} = \underline{\underline{2x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{(1+x)^{1/3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/2} - 1}{(1+x)^{1/3} - 1} \cdot \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{3/2} - (1+x)^3}{(1+x) - (1+x)^3} \quad \text{nem vezet eredményre.}$$

! figyel $y^6 = x+1$!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} \right) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3}) \cdot (2 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49) \cdot (2 + \sqrt{x-3})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - x + 3}{(x-7)(x+7) \cdot (2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\cancel{7} - x}{(2 + \sqrt{x-3}) \cdot \cancel{(x-7)} \cdot (x+7)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-1}{(2 + \sqrt{x-3})(x+7)} \\
 &= -\frac{1}{4 \cdot 14} = -\frac{1}{56}
 \end{aligned}$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \underline{\underline{5}}$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{\sin 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} \right) = \frac{5}{2}$$

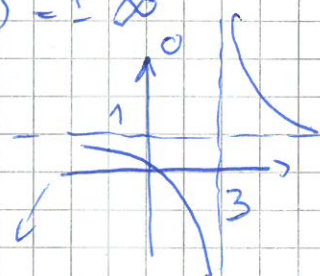
$$h) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \underline{\underline{1}}$$

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x^2}{x^3}}{\frac{1}{x}} \right) \cdot \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \underline{\underline{0}}$$

SZORGALMI: Hogyan definiáljuk?

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = -\infty \quad (\text{Podľa grafu.})$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{x-3} + 1 \right) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x-3} + 1 \right) = \infty$$

"Egy f függ. $+\infty$ -ben vett határértéke $+\infty$, ha $f(x)$ elég nagy x nagy."

Def.: Legyen f értelmezve egy (a, ∞) intervallumon, ahol $a \in \mathbb{R}$.

Azt mondjuk, hogy f -nek $+\infty$ -ben vett határértéke $+\infty$, ha

$\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists$ olyan $L(K) \in \mathbb{R}$, ha $x > L$ esetén $f(x) > K$.

jelölés: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

x, y

$y = \ln x$

HF: Átgondolni, hogy mit

jelöl:

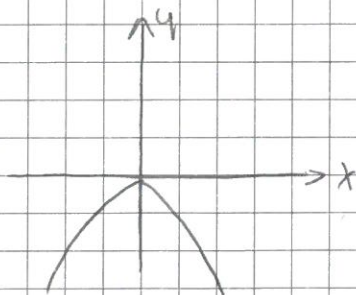
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

pelda

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$



Folytonosság

Def.: Legyen f definiálva egy $(a-\delta; a+\delta)$ intervallumon,

ahol $\delta > 0$. Azt mondjuk, hogy f folytonos a -ban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Teljes: az a pontbeli folytonosságnak 3 dolog kell.

- f definiálva van a -ban;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \exists$ és véges;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

példa: $f(x) = y = x + 2$

All: f folytonos $a = 2$ -ben.

Vizsg.: - $2 \in D_f$. ✓ Rendben.

$$- \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4. \quad \checkmark$$

$$- f(x) \Big|_{x=a} = 4 \quad \checkmark \quad \text{Rendben van.}$$

Def.:

Ha f nem folytonos a -ban, akkor szakadás van. Ezt mondjuk, világos.

Kétféle szakadás van.

1.) Megszüntethető szakadás.

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \exists$, de $\neq f(a)$.

Vagy $f(x)$ nincs értelmezve a -ban ($a \notin D_f$)

(pl.:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \exists.$$

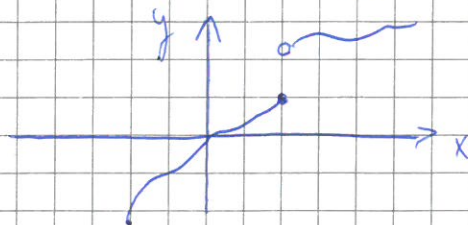
D_f nem tartalmazza $x = 2$ -t.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{ha } x \neq 2 \\ 2 & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Igy tehát folytonos.

2.) Elsőfajú szakadás (ugrás)

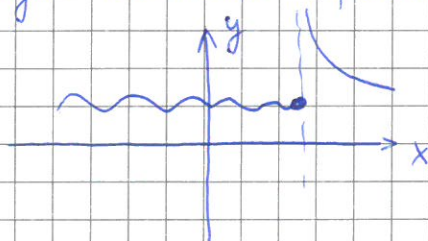
$\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \&\& \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, nem egyeznek meg,
de végesek. És nem egyeznek meg.



3.) Másodfajú szakadás

Gyakorlatilag $\forall$ más eset.

$\Rightarrow$ Vmelyik határérték (feloldali) nem létezik, vagy $\pm\infty$.



Tétel: Ha a az f és g folytonos függvények a -ban:

i) $f+g$

iii) fg

ii) $\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}$

iiii) $\frac{f}{g}$ ha $g|_{x=a} \neq 0$.

függvények is folytonosak a -ban.

Tétel: Ha f folytonos, az a -ban és g folytonos

$f(a)$ -ban, $\Rightarrow fog$ is folytonos a -ban.

Feloldali folytonosság.

Def.: Legyen f definiálva az $(a-\delta; a]$, $\delta > 0$

intervallumon. Azt mondjuk, hogy f folytonos balról, ha

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

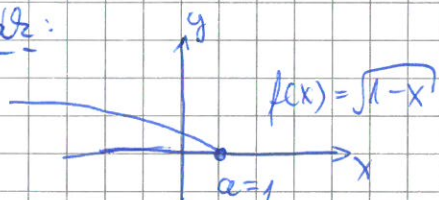
(HF. :) Leírni a jobboldali folytonosságot.

All.: f folytonos h -ban, akkor ha $f(h)$,

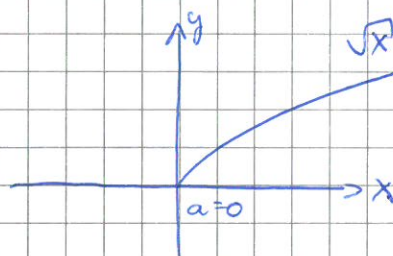
$$\lim_{x \rightarrow h^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow h^+} f(x) \text{ létezik,}$$

és mind a három azonos.

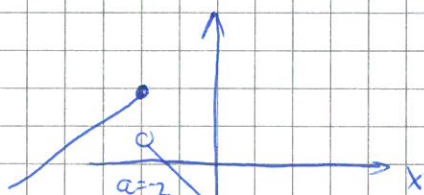
példák:



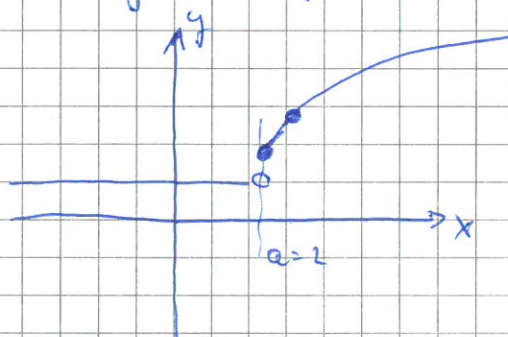
balról folytonos



jobbról folytonos



balról folytonos



jobbról folytonos

Intervallumon való folytonosság:

Def.: Azt f folytonos az $(a; b)$ intervallumon, ha $\forall c \in (a; b)$ esetén folytonos.

Folytonos az $[a; b]$ -n, ha folytonos $(a; b)$ -n és

↑ jobbról folytonos
 a -ban
↓ balról folytonos
 b -ben

(HF.) Adjék meg (értelmezni) az $(a; b]$ és
az $[a; b)$ intervallumokra való folytonosságot.

(HF.) Hol folytonos az elemi függvények?

Példa: Hol folytonos? Milyen szakadási helyei vannak?

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ x^2+1 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

A polinomok folytonosak, így $f(x)$ folytonos ott.

$(-\infty, 0)$, a $(0; 1)$ és a $(1; \infty)$
intervallumokon.

Csak az $x=0$ -ban és az $x=1$ -ben kell vizsgálódni

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = \underline{1}$$

✓ $f(0) = 1 \Rightarrow f$ folytonos
az $x=0$ -ban.

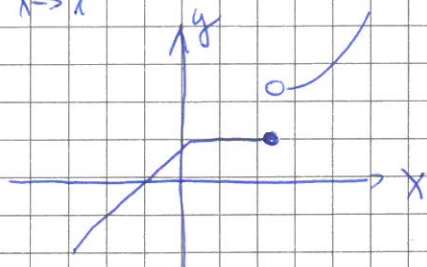
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = \underline{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1) = \underline{1}$$

$$f(1) = \underline{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+1) = \underline{2}$$

Folytonosságról itt
szó sincs.



Ugrása van.

Folytonos függvények alapvető tulajdonságai.

Tétel: (Közbenső értékek felvételéről szóló tétel.)

Tfh. $f(x)$ folytonos $[a; b]$ -n, és $f(a) \leq q \leq f(b)$ vagy $f(a) \geq q \geq f(b)$, mindegy. Ekkor $\exists$ olyan $c \in (a; b)$, hogy $f(c) = q$.

Tétel: (Korlátosság, szélsőérték)

Korlátos és zárt = kompakt.

Tfh. $f(x)$ folytonos $[a; b]$ -n. Ekkor:

- $f(x)$ korlátos $[a; b]$ -n, és

- $f(x)$ felveszi a maximumát és a minimumát $[a; b]$ -n.

Azaz $\exists$ olyan $c_{\min} \in [a; b]$ -n, hogy $f(c_{\min}) \leq f(x)$
($x \in [a; b]$)

és $\exists$ olyan $c_{\max} \in [a; b]$ -n, hogy $f(c_{\max}) \geq f(x)$
($x \in [a; b]$).