

Kalkulus 1.

2. konzultáció

csak lindeg. 2017. 10. 13.

Példák határértékre.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6}{x+3} = \frac{12}{6} = \underline{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-3}{x-4} \Rightarrow \frac{0}{0}$ - típusú határérték
↑
4-ben
nincs értelmezve

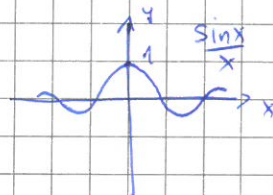
fgg: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-3}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+2) = \underline{6}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3^3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2+3x+9) =$
 $= 9+9+9 = \underline{27}$

↑ $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)!$

4. Fontos határérték.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Példa olyan függvényre, amelynek semmilyen határértéke:

Dirichlet-függvény: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ahogy $x \rightarrow a$, áthatal racionális és irracionális számokra is. $\Rightarrow f(x)$ „ugrál” 0 és 1 között. $\Rightarrow f(x)$ -nek nincsen határértéke.

A határérték pontos definíciója:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ alatt a következőket értjük:

„in formalisan” $|f(x) - A|$ tetszőlegesen kicsi, ha $|x - a|$ tetszőlegesen kicsi, de $|x - a| \neq 0$.

ϵ - δ definíció: $\forall \epsilon > 0$ esetén $|f(x) - A| < \epsilon$, ha $|x - a| < \delta$
valamely kicsi δ -ra.
Igy pontos.

Def.: Legyen f definiálva az $(a - \delta; a + \delta)$ intervallumon, ahol $\delta > 0$. Azt mondjuk, hogy a f határértéke az a pontban A , ha $\forall \epsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\epsilon) > 0$, hogy $|x - a| < \delta(\epsilon) = \delta$ esetén $|f(x) - A| < \epsilon$.

Megjegyzés: $|f(x) - A| < \epsilon$

$\Leftrightarrow$

$$- \epsilon < f(x) - A < \epsilon \Rightarrow A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$$

$\downarrow$

$$f(x) \in (A - \epsilon; A + \epsilon)$$

Ez a logika. És a másik:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$0 < x - a < \delta \quad x \neq a \Rightarrow -\delta < x - a < 0$$

$x \neq a$

$\downarrow$

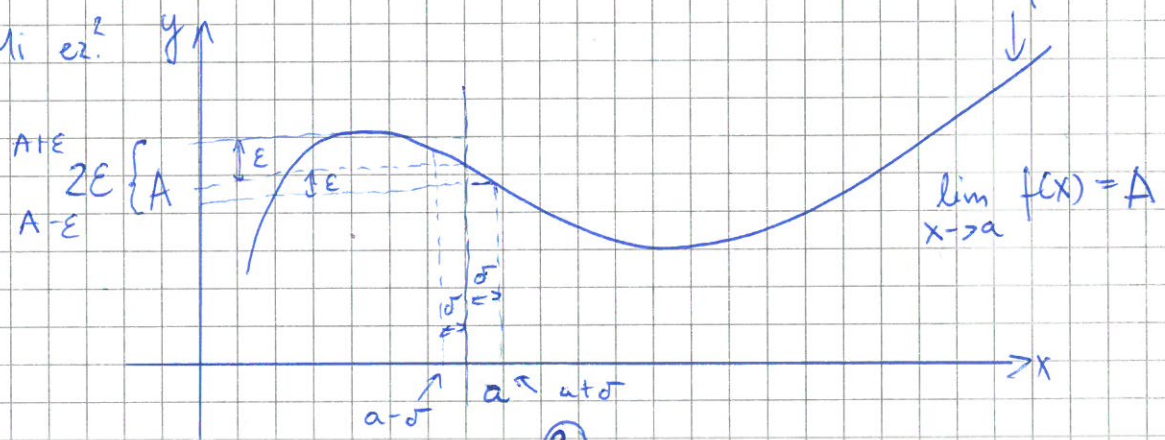
$$\underline{a} < \underline{x} < \underline{a + \delta}$$

$$\underline{a - \delta} < \underline{x} < \underline{a}$$

$$x \in (a - \delta; a) \quad , \quad x \in (a; a + \delta)$$

Egyben: $x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$

Mi ez?



Egy példa:

Mutassuk meg def. szerű, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1) = 3$.

↓ Ezt adjuk.

Legyen $\varepsilon > 0$. Kell adni egy δ -t, hogy $|x-2| < \delta$ esetén

$$|2x-1-3| < \varepsilon.$$

Vegyük észre, hogy: $|(2x-1)-3| = |2x-4| = 2|x-2| < \varepsilon$.

Ebből: Ha $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ pont jó lesz.

Féldoldali határérték definíciója.

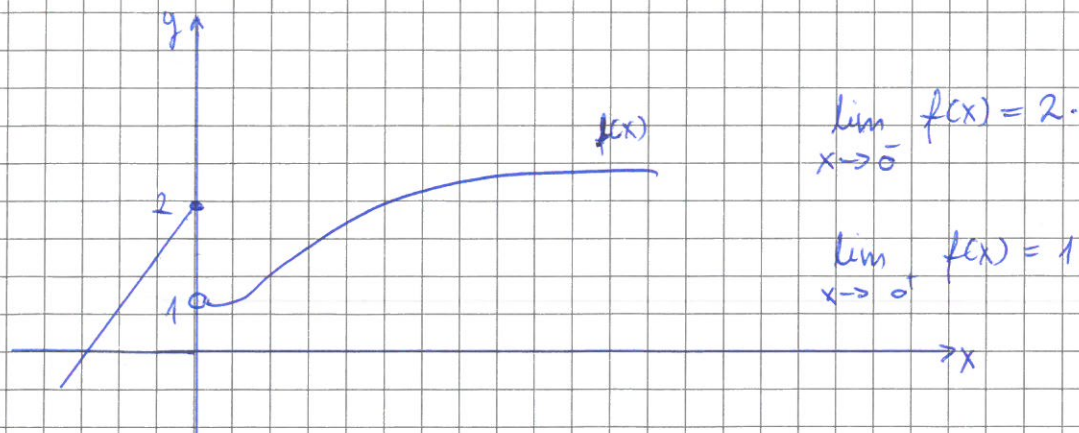
Def.: Legyen az f értelmezve az $(a-\delta; a)$ intervallumon,

ahol $\delta > 0$. Azt mondjuk, hogy az f -nek a a-ban a

A a bal oldali határértéke, ha $\forall \varepsilon > 0$ -ra $\exists \delta > 0$, hogy

$(a-\delta) < x < a$ esetén teljesül, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$.

A jobb oldali határérték hasonlóan definiálható.



Tétel a főmű határértékére.

Tétel: A határérték egyértelmű, ha: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow a} = B$,

akkor $A = B$.

Biz: Nem bizonyítottuk. ☺

Tétel: Ha $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = B$, akkor:

1.) $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = A + B$.

2.) $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot A \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

3.) $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = A \cdot B$.

4.) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, ha $B \neq 0$.

Megj: Ezerből adódik p.l., hogy $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) - f_2(x)) = A - B$.

Bizonyítás: Ismert, hogy $|u+v| \leq |u| + |v|$.
(3. tétel)

$$|f_1(x) \cdot f_2(x) - AB| = f_1(x) f_2(x) \underbrace{\left(\frac{f_2(x)B + f_1(x) \cdot B}{f_1(x)} - AB \right)}_{\text{Bevezetés ide.}} = f_1(x) f_2(x) \left(\frac{f_2(x)B + f_1(x) \cdot B}{f_1(x)} - AB \right)$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Kell egy $\delta(\varepsilon)$,

hogy $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$|f_1(x) f_2(x) - AB| < \varepsilon.$$

$$|f_1(x) f_2(x) - f_1(x)B| + |f_1(x)B - AB|$$
$$|f_1(x)| \cdot |f_2(x) - B| + B |f_1(x) - A|$$

Tudjuk, hogy 1) $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A$

$$\Downarrow$$
$$\exists \delta > 0,$$

hogy $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$|f_1(x) - A| < \varepsilon.$$

Speciálisan igaz $\varepsilon = 1$ esetén.

(és.)

$$\text{Igy: } |f_1(x) - A| < 1.$$



$$A-1 < f_1(x) < A+1$$



$$f_1(x) < |A| + 1$$

$$2.) \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A \rightarrow \exists \delta_2, \text{ hogy } 0 < |x-a| < \delta_2 \text{ esetén}$$

$$|f_1(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}$$

$$3.) \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = B \Rightarrow \exists \delta_3, \text{ hogy } 0 < |x-a| < \delta_3 \text{ esetén}$$

$$|f_2(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(1+|A|)}$$

Legyen $\sigma := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$. Ha $|x-a| < \sigma$, akkor

$$|f_1(x)f_2(x) - AB| \leq |f_1(x)| \cdot |f_2(x) - B| + (1+|B|) \cdot |f_1(x) - A|.$$

$$\leq |f_1(x)| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (1+|A|)} + (1+|B|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} <$$

$$< (|A|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|A|)} + (1+|B|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} = \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Kijött. De nem volt egyenlő.

Határérték a végtelenben.

Legyen f értelmezve az $(x; \infty)$ intervallumon mely $x \in \mathbb{R}$

Azt mondjuk, hogy f -nek $+\infty$ -ben $A \in \mathbb{R}$ a határértéke, ha $f(x)$ tetszőlegesen közel kerül A -hoz $\forall$ elég nagy x esetén.

(informálisan)

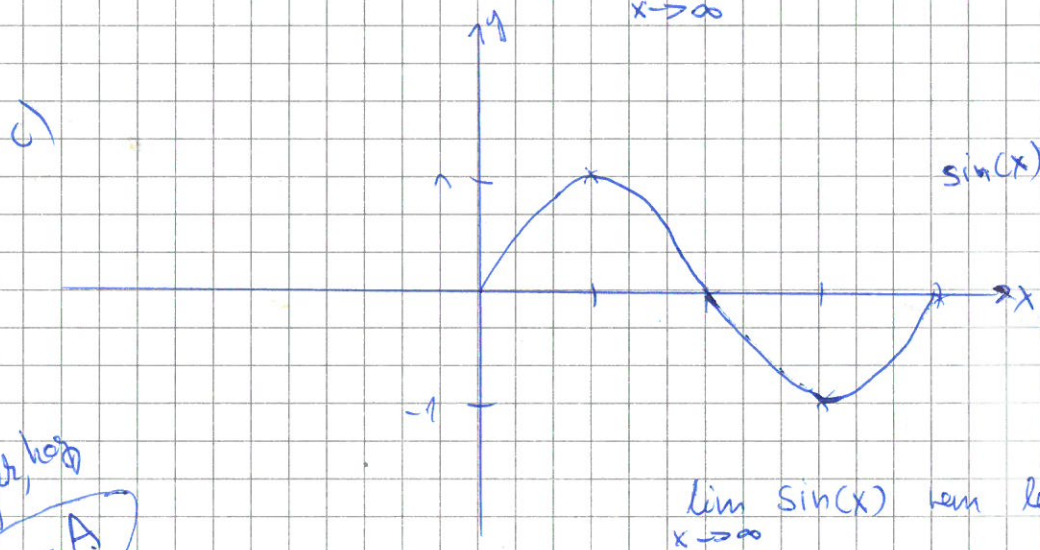
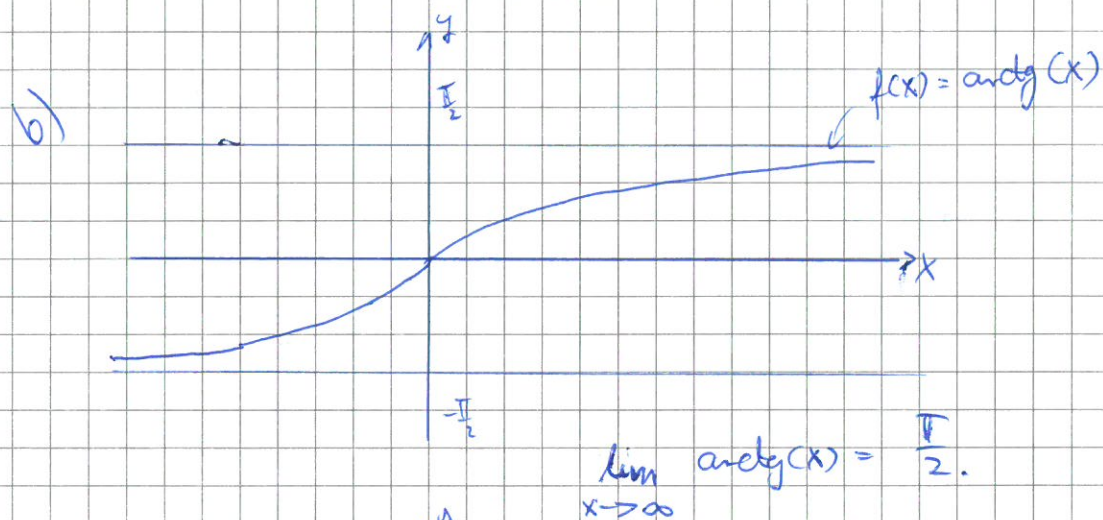
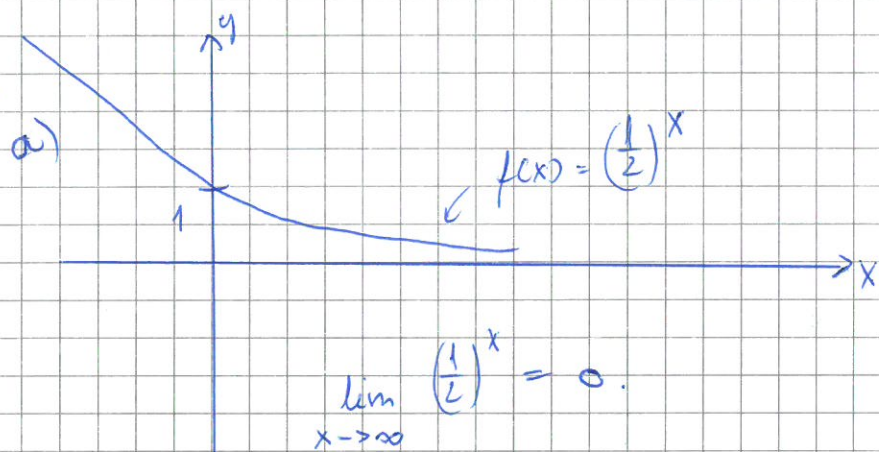
Def.: Legyen $D_f = (L, \infty)$, $L \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f -nek

$+\infty$ -ben A a határértéke, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ van olyan $L = L(\varepsilon)$,

$L \in \mathbb{R}$, hogy $x > L$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$; $f(x) \rightarrow A$ ha $x \rightarrow \infty$.

példák:



Hf.:

definiáljuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$