

Előadó: Kiss Gábor.

e-mail: robag.ssi@ gmail.com.

Minden 2. alkalommal lesz ZH. Max. 15 perces dolgozatok.

4 db-ból 3 lesz figyelembe véve. 10%-al számítanak

a jegybe. 1. ZH: október 14., szombat.

Házi feladat: 4 db lesz.  $\rightarrow$  Ezek is 10%-al számítanak be.Vizsga feltétel: ebből min. 40% kell megid.If  $P < 40\%$ , de legalább  $35\%$ : javító ZH-ra lesz lehetőség.Ekkor  $P_{sz} = \text{max. } 40\%$ .

Vizsga: írásbeli ÉS szóbeli. Sikar, ha min. 40% megvan a 100%-ból.

0 - 49% 1 60 - 69% 3 80 - 89% 5

50 - 59% 2 70 - 79% 4

Irodalom:

a) Császár Ákos - Valós analízis I-II. (1992)

b) Lactovich Miklós / T. Sós Vera: Analízis (2005)

c) Leindler László - Analízis (1989)

+ Szalai Tamás  
videó (alapiszerű)

! \* d) Thomas-féle Kalkulus I. (1. kötet)

HASZNOS LEHET.

e) W. Rudin - A matematikai analízis alapjai (2010)

f) Sós Pál - A differenciál és integrál számítás alapjai (2000)

És ennyi!

Függvények.Def.: Ha az A halmaz  $\forall$  eleméhez hozzárendeljük a B halmaz

pontosan 1 elemét, akkor azt mondjuk, hogy adott A-ból B-be való

létezés, függvény.

 $\text{in}(1) \rightarrow \boxed{\phantom{000}} \rightarrow \text{out}(1)$  Doboz-modellmegj.: Fontos, hogy az A  $\forall$  eleméhez a B pontosan 1  
elemet rendeljük hozzá.



felölés:  $f: A \rightarrow B$ ,  $x \rightarrow f(x)$ . Vagy:

$f: A \ni x \rightarrow f(x) \in B$ . Így is lehet. Vagy:

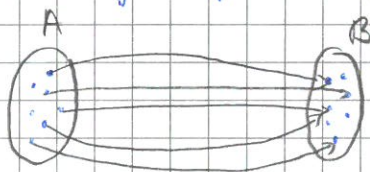
$f: A \rightarrow B$ .

A halmaz: a függvény értelmezési tartománya.

felölés:  $D_f := A$ .

B halmaz: Az ún. képhalmaz (tzu. értékesi halmaz).

Értékesi halmaz: pl.:  $R_f := \{ f(x) : x \in A = D_f \} \subset B$



↑ része a B-nek.

Naggyából így néz ki vizuálisan a dolog.

Def.: Küvető függvények

Legyen  $f_1: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f_2: A_2 \rightarrow \mathbb{R}$

adott.

Összeg függvény:  $E: A_1 \cap A_2$  (hogy mindkettő értelmes legyen)

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \text{ ha } x \in (A_1 \cap A_2)$$

Hasonlóan definiáljuk a  $f_1 - f_2$  és az  $f_1 \cdot f_2$  függvényeket is.

Az  $\frac{1}{f_1}$  fgny.  $E: x \in A_1$ , de  $f_1(x) \neq 0$  és a

def:

$$\left(\frac{1}{f_1}\right)(x) = \frac{1}{f_1(x)}$$

Összetett függvény: t.h.:  $\forall x \in A_1$  esetén  $f_1(x) \in A_2$ .

(Azaz az  $f_1$  az  $A_1$  halmazt az  $A_2$ -be képez. Ekkor az  $(f_2 \circ f_1)(x)$

$$f_2(f_1(x))$$

$x \in A_1$

## Példák - esetek.

$$1) \quad f_1(x) = x^2 + x - 2$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R} \quad \text{ennél a része!}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x},$$

$$D_{f_2} = \mathbb{R}, \text{ de! } [0; \infty)$$

$$f_1(x) + f_2(x) = x^2 + x - 2 + \sqrt{x}$$

$$D_{f_1+f_2} = \mathbb{R} \cap [0; \infty).$$

$$(\text{ami } D_{f_1+f_2} = [0; \infty)).$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = (x^2 + x - 2) \sqrt{x}$$

$$D_{f_1 \cdot f_2} = \mathbb{R} \cap [0; \infty) = [0; \infty)$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ lesz.}$$

$$\frac{1}{f_1(x)} \text{ alakban.}$$

$$\frac{1}{f_2(x)} = x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$D_{\frac{1}{f_2}} = (0; \infty)$$

Ki kell venni a nullát.

$$\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)} = (x^2 + x - 2) x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x}}. \quad D_{\frac{f_1}{f_2}} = (0; \infty).$$

$$2) \quad f_1(x) = \sqrt{3-x}$$

$$D_{f_1} = (-\infty; 3] \text{ és}$$

$$f_2(x) = x^2 - 1$$

$$D_{f_2} = \mathbb{R}.$$

$$(f_2 \circ f_1) = (f_2 \circ f_1)(x) = (\sqrt{3-x})^2 - 1 = 3-x-1 = \underline{\underline{2-x}}$$

örökli tovább az

DE!

$$D_{f_2 \circ f_1} = (-\infty; 3]!$$

első  $D_{f_1}$  tulajdonságát.

feladás:

$\forall$  : minden v. bármely;

$\exists$  : létezik v. van olyan.

Függvények alsó felül tulajdonságai:

Def.: Az  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  szorlatos felül, ha  $\exists K \in \mathbb{R}$ , hogy

$$\forall x \in A \text{ - ra : } f(x) \leq K.$$

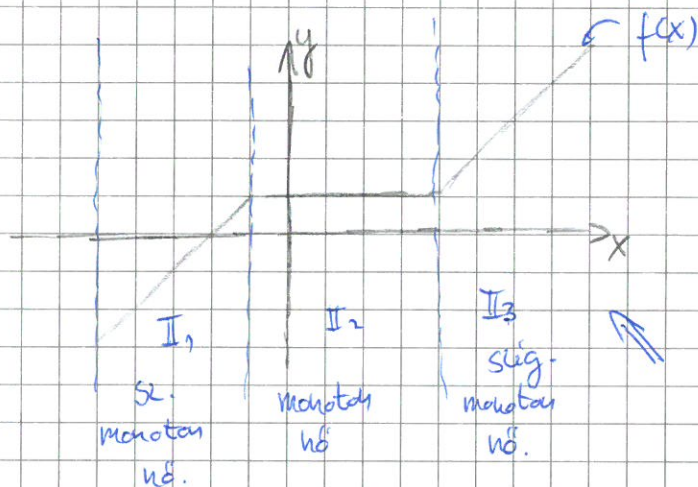


Def.: Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  alulról korlátos, ha  $\exists z \in \mathbb{R}$ , hogy  
 $\forall x \in A$  esetén  $f(x) \geq z$ .

Def.: Egy függvény korlátos, ha alulról és felülől is korlátos.

Def.: Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  monoton nö, ráadásul az  $I$  intervallumon,  
 ha  $\forall x_1, x_2 \in I$   $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Def.: Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton nö, ha az  $I$  intervallumon  
 $\forall x_1, x_2 \in I$   $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) < f(x_2)$ .



Emiatt a logika mindig az egészen.

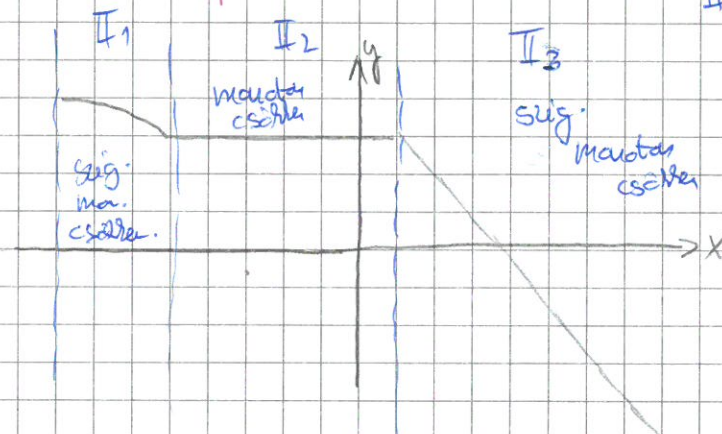
A teljes intervallumon „csak” monoton nö.

Def.: Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  monoton csökken  $I$ -n, ha  $\forall x_1, x_2 \in I$   $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Def.: Az  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton csökken, ha  $I$ -n  $\forall x_1, x_2 \in I$   $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Világos belátás  $\forall$  def. - n:  $I \in A$ .

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$$



Itt csak monoton csökken.



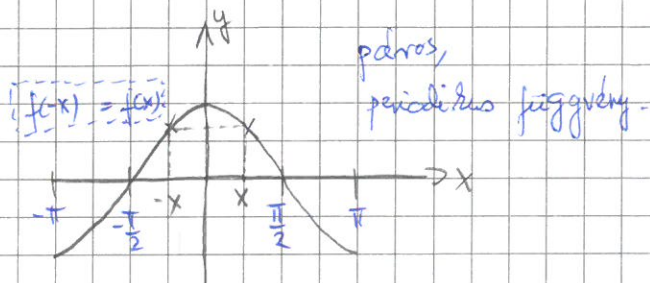
## Szimmetriabizonyítások: (paritási kérdések)

Def.: Azt mondjuk, hogy  $f$  függvény páros, ha  $\forall x \in D_f$  esetén

$-x \in D_f$ , és  $f(-x) = f(x)$  lesz rá igaz.

megj.: ekkor az  $f$  grafikonja szimmetrikus az "y-tengelyre".

példa:  $f(x) = \cos(x)$ .



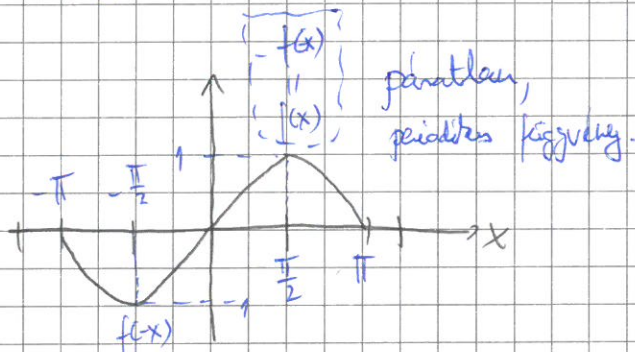
Def.: Azt mondjuk, hogy  $f$  függvény páratlan, ha  $\forall x \in D_f$  esetén

$-x \in D_f$  is igaz legyen, és  $f(-x) = -f(x)$ .

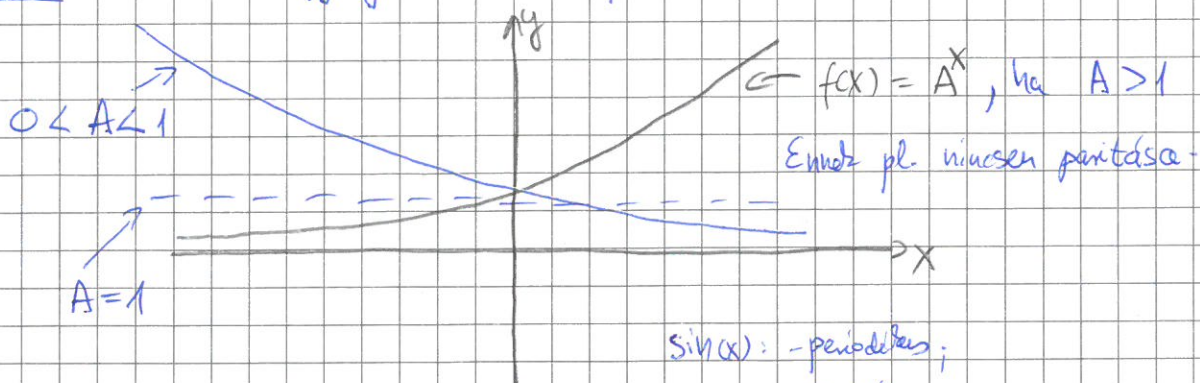
megj.: ekkor az  $f$  grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

példa:  $f(x) = \sin(x)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$



Fontos: Nem  $\forall$  függvény-rez  $\exists$  paritása. Példa:



- $\sin(x)$ : - periodikus;
- korlátos;
- se nem monoton növe;
- se nem monoton csökken.

## Elemi függvények:

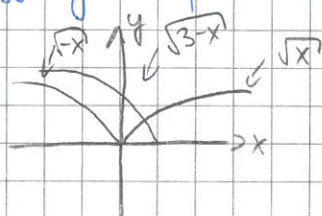
(pl.  $\frac{1}{x}$ )

polinoms, gyök függvények, abszolútérték-függvény, lineáris tört függvény, exponenciális függvény, logaritmus függvény, trigonometrikus függvények.

H.F.: Ezek felismerése, ábrázolása, átláthatósága. (Nem dead end.)

⊕ az elemi függvénytranszformációk (lineáris)

pl:  $\sqrt{3-x}$



Így, lépésenként  
(Nem mértanárányos, de ok.)

példa:  $f(x) = \sqrt{x+2} + |x-3|$

Vegyük észre, hogy ha  $x \geq 3$ , akkor:

$$f(x) = \sqrt{x+2} + x-3 = \underline{\underline{\sqrt{2x-1}}}$$

Ha  $x < 3$ :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - x + 3 = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

Rajzoljuk is le  $f$  tulajdonságait.

a)  $D_f = \mathbb{R}$  - Azért, mert  $\sqrt{5}$  értelmes kifejezés ha  $x < 3$ .

$$- 2x-1 \geq 0$$

Erre:

$$x \geq \frac{1}{2}$$

✓ Ez mindenképpen teljesül, ha  $x \geq 3$ , amit feltételeztünk.

b) Monotonitás.

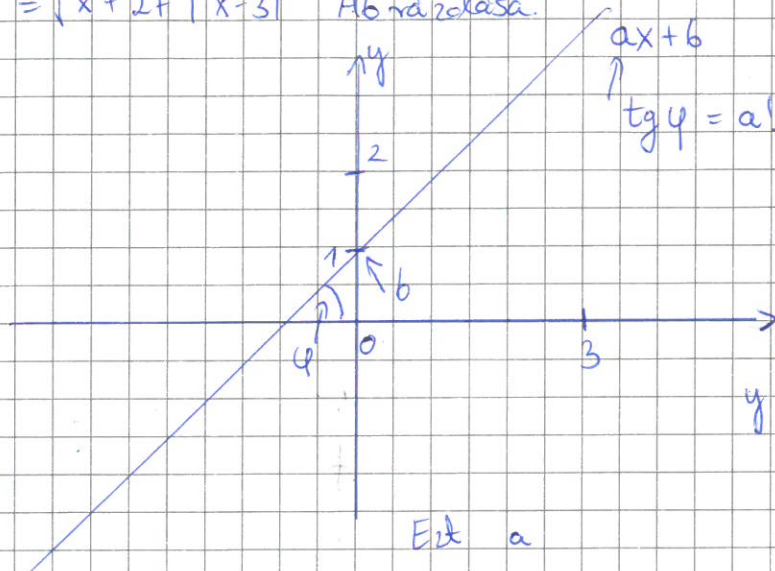
Ha  $x < 3$ , akkor  $f(x) = \sqrt{5}$ , ezért az  $f$  egyenesen monoton nő és monoton csökken.

Ha  $x \geq 3$ , akkor  $2x-1$  szigorúan monoton nő, a  $\sqrt{x}$  is szigorúan monoton nő, és a 2-ből képzett összetett függvény is szigorúan monoton nő.



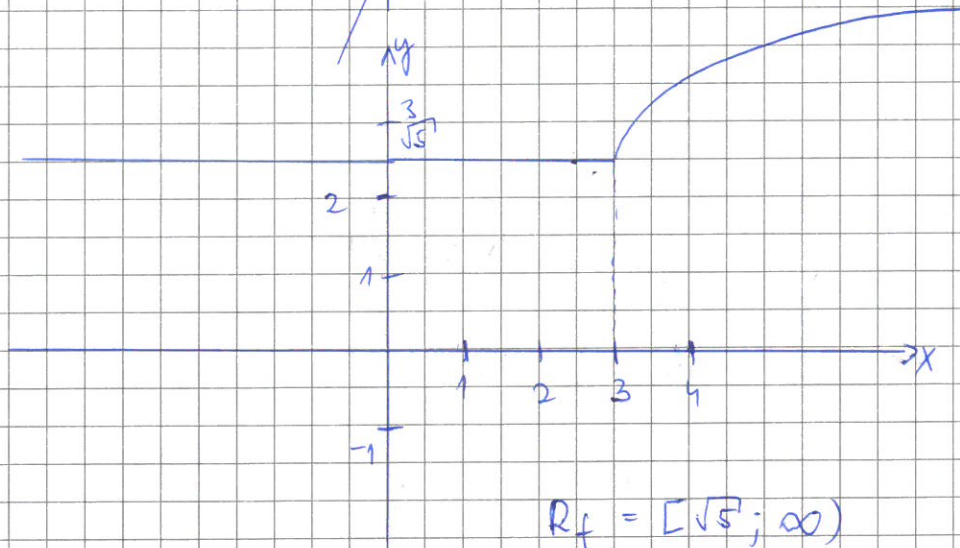
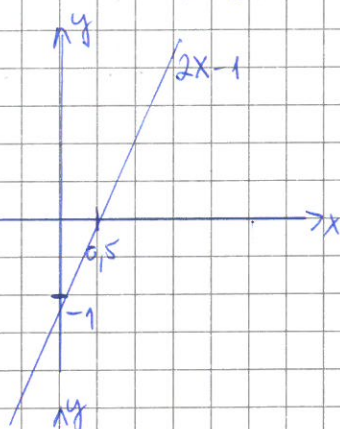
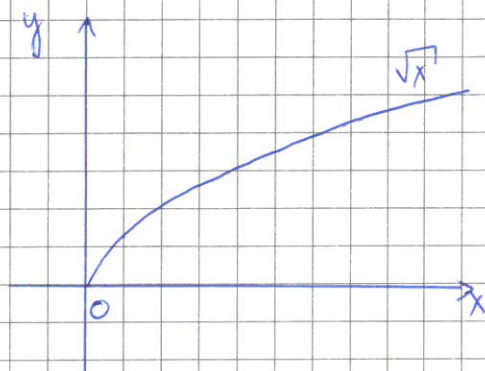
$$f(x) = \sqrt{x+2} + |x-3|$$

Ábrázolása.



Ezt a

reket kell  
kombinálni



$$R_f = [-\sqrt{5}; \infty)$$

A függvény alakból látható,  
de feliról nem. Így nem is látható.

Nincsen paritása.

Ennyi, lapados módszer.

Def.: Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvénynek a  $g$  az inverze, ha

$$f(g(x)) = x \quad \text{teljesül. (A két függvény kompozíciója a tzv. identitás-függvény.)}$$

$\uparrow$   
 $\forall x \in D_g - \text{re.}$

És igaz, hogy  $g(f(x)) = x \quad \forall x \in D_f - \text{re.}$

Ha  $f$  inverze  $g$ , akkor  $D_f = R_g$  és  $D_g = R_f$  lesz igaz.

Ekkor a  $g$  grafikonját megkapjuk / hatjuk az  $f$  grafikonjának az  $y = x$  egyenesre történő tükörféltetéssel.

Jelölés:  $f^{-1}(x)$ .

Példa:  $f(x) = 2^x \rightarrow D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = (0; \infty)$

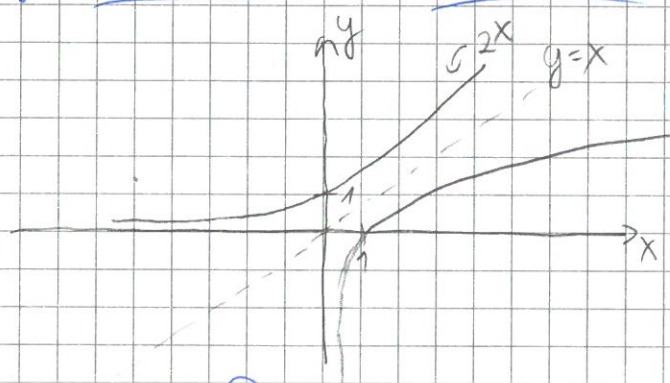
$g(x) = \log_2(x) \rightarrow D_g = (0; \infty), \quad R_g = \mathbb{R}$

$f(x)$  és  $g(x)$  egymás inverzei.

$$\begin{array}{c} \text{külső} \rightarrow f(g(x)) = 2^{\log_2(x)} = \underline{x} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{belső} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{mindkét van} \\ g(f(x)) = \log_2(2^x) = \underline{x} \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

$\forall x \in (0; \infty)$

Azt is látjuk, hogy  $D_f = R_g$  és  $R_g = R_f$ .



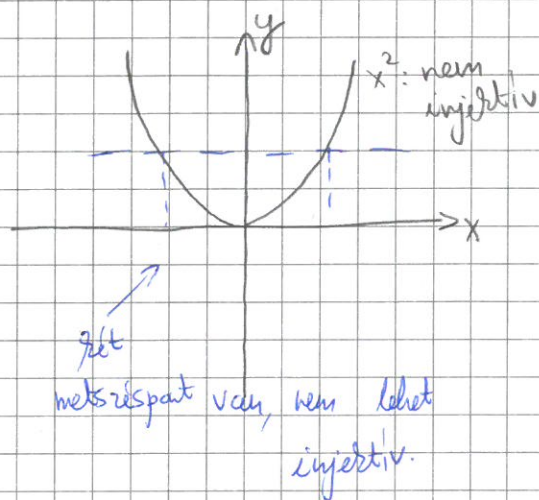
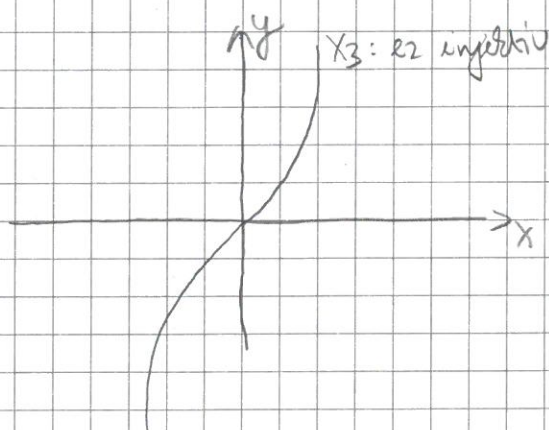
Így kapjuk meg tükörféltetéssel.



Def.:  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  injektív vagy kölcsönösen egyértelmű, ha

$x_1, x_2 \in D_f$   $x_1 \neq x_2$  esetén  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

példa:



Az  $x^2$  nem injektív, hiszen  $(-x)^2 = x^2$ .

Függvény: Az  $f$  invertálható  $D_f$ -en pontosan akkor, ha  $f$  injektív  $D_f$ -en. (Meggyőzés visszafelé is igaz, tanácsrelesen.)  
Egymásnak szükséges és elégséges feltételei.

Az  $f$  invertálható  $I$  intervallumon, ha  $f$  injektív  $I$ -n.

Jó tudni: Ha  $f$  szigorúan monoton  $I$ -n,  $\Rightarrow$  akkor  $f$  injektív  $I$ -n.  
(Ez már nem igaz visszafelé.)  $\downarrow$

Az  $f$  invertálható  
 $I$ -n.

Azt mondjuk, hogy a szigorúan monotonitás elégséges az  $f$  invertálhatóságához.

A szigorúan monotonitás tehát nem szükséges feltétele az invertálhatóságnak.

Az  $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

injektív a függvény, de nem invertálható.

Igy áll ez össze.

pelda:

$$f(x) = \sqrt{x+2 + |x-3|}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1} & \text{ha } x \geq 3 \\ \sqrt{5} & \text{ha } x < 3 \end{cases}$$

Az  $f$  grafikonjából látszik, hogy az  $x > 3$  esetén injektív, hiszen ott szigorúan monoton nö.  $\Rightarrow$  Csak  $x > 3$  esetén invertálható tehát.

Tevénytűz az  $f_1: [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2x-1}$

megszáritását.

$$D_{f_1} = [3; \infty) \text{ és } R_{f_1} = [\sqrt{5}; \infty)$$

Adja meg  $f_1$  inverzét!

$$f(\tilde{f}_1^{-1}(x)) = x. \text{ Ezt ábrázoljuk.}$$

$$\sqrt{2\tilde{f}_1^{-1}(x) - 1} = x \Rightarrow 2\tilde{f}_1^{-1}(x) - 1 = x^2$$

$$2\tilde{f}_1^{-1}(x) = x^2 + 1$$

$$\tilde{f}_1^{-1}(x) = 0,5x^2 + 0,5$$

$$D_{\tilde{f}_1^{-1}}(x) = (\sqrt{5}; \infty)$$

$$R_{\tilde{f}_1^{-1}}(x) = [3; \infty).$$

Trigonometrikus függvények inversei:

A  $\sin(x)$  szigorúan monoton nö a  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ -n  $\Rightarrow$  invertálható.  
(Ezen az intervallumon.)

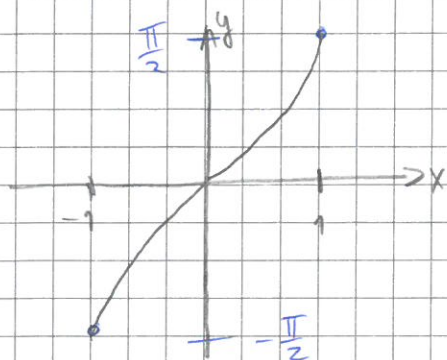
Az inverz  $\tilde{f}(x) = \arcsin(x)$

$$D_{\tilde{f}} = [-1; 1]$$

$$R_{\tilde{f}} = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$



Ha  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  és  $y \in [-1; 1]$ , akkor  $y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$ .



Így néz ki a történet.

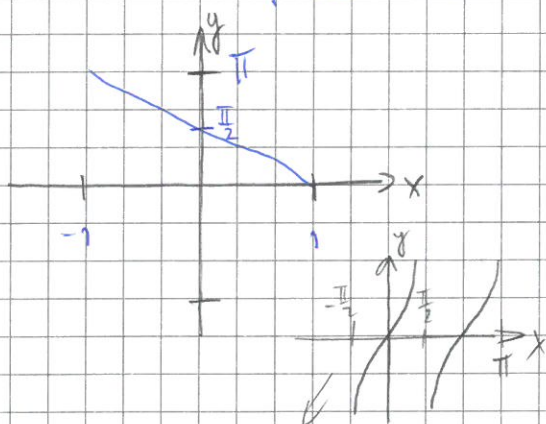
A  $\cos x$  szigorúan monoton csökken a  $[0; \pi]$  zárt intervallumon. Erett

$f(x) = \cos x$  invertálható  $[0; \pi]$ -n. Itt az inverz:

$$f^{-1}(x) = \arccos(x).$$

$$D_{f^{-1}} = [-1; 1];$$

$$R_{f^{-1}} = [0; \pi].$$



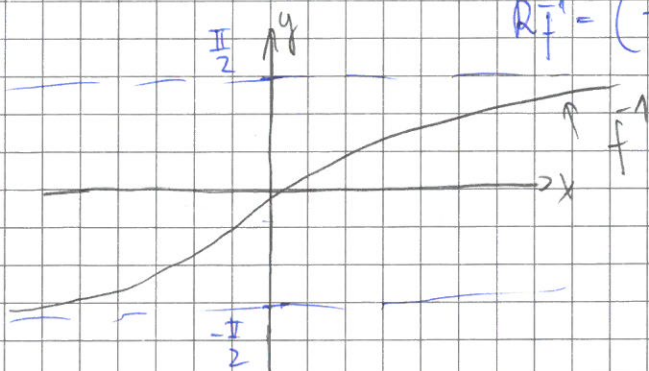
Az  $\arctg x$  a  $\operatorname{tg} x$  függvény  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -re vett inverze.

$$f: (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg}(x).$$

Eller  $f^{-1}(x) = \arctg x$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R};$$

$$R_{f^{-1}} = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$



## Határérték fogalma.

Szemléletes (és pontosan) definíció.

Tfh.  $f$  értelmezve van egy  $a$  pont közelében, de nem feltétlenül az  $a$  pontban. Azt mondjuk, hogy az  $f$  határértéke az  $a$  pontban  $A \in \mathbb{R}$ , ha az  $f(x)$  függvény értéke közelíti  $A$ -t, mikorben  $x$  közelít  $a$ -hoz.

Az  $f$  függvény mindig közel van  $A$ -hoz, ha az  $x$  közel van  $a$ -hoz.  
(De különbség  $a$ -tól.)

jelölés:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Másik:  $f(x) \rightarrow A$ , ha  $x \rightarrow a$ .

példa.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ,  $a = 2$

Ha  $x$  közel van 2-höz:

- $2x^2$  közel van 8-hoz
- $3x$  közel van 6-hoz.
- 1 közel van 1-höz.

Ebből következik:  $2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow 8 - 6 + 1 = 3$  - hoz van közel.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = \underline{\underline{3}}. \quad (\text{Ami a függvény helyettesítési értéke.})$$

példa  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ,  $a = 2$ .

$f(x=2)$ -nél nyilvánvalóan nem lehet értelmezni.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{x} \cdot \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \overset{\rightarrow 2}{\textcircled{x}} \cdot \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( x \cdot \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} \right) = \underset{(\text{iii})}{2} \cdot \frac{1 - \frac{4}{4}}{1 - \frac{2}{2}} \Rightarrow \text{nem értelmez}$$



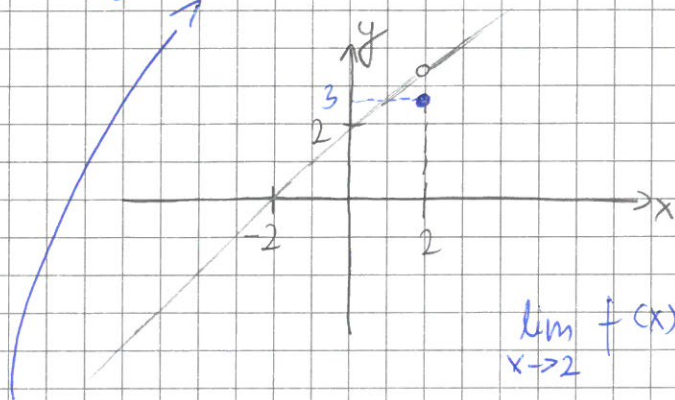
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

↑ innen látható.

Ha  $x$  közel van 2-hez, akkor  $f(x)$  közel van 4-hez.

példa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{ha } x \neq 2 \\ 3 & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4. \text{ Mégis!}$$

Lényegtelen a függvényérték a lim. szempontjából, itt csak ez látszik.

$$\text{Teljesen: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq 3 \text{ Véletlenül sem.}$$

Határérték szempontjából lényegtelen, hogy  $f$  definiálva van-e  $a$ -ban, illetve hogy mi az értéke  $a$ -ban. Csak az  $a$ -hoz közeli  $x$  pontokban felvett értékek számítanak.

(Szabaddal rendelkező függvény esetén a függvény folytonossá tehető.)

Féldoldali határérték szemléletes definíciója:

Def.:  $f$ -hez az  $a$ -ban  $A$  a baloldali határérték, ha:

az  $f(x)$  értéke közelít  $A$ -hoz, ha  $x$  közelít  $a$ -hoz balról.

Def.:  $f$ -hez az  $a$ -ban  $A$  a jobboldali határérték, ha

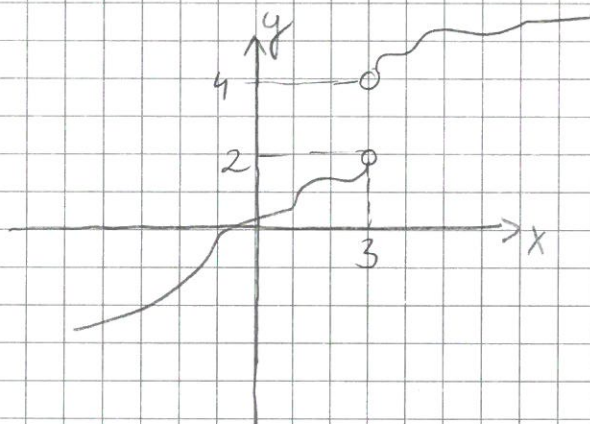
az  $f(x)$  értéke közelít  $A$ -hoz, ha  $x$  közelít  $a$ -hoz jobbról.

feladat: A baloldali határérték  $a$ -ban:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$$

A jobboldali határérték  $a$ -ban:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A.$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4.$$



$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  nem létezik  
ebben az esetben!

A fenti definícióból következik:

-  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  akkor és csak akkor, ha  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$  és  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$

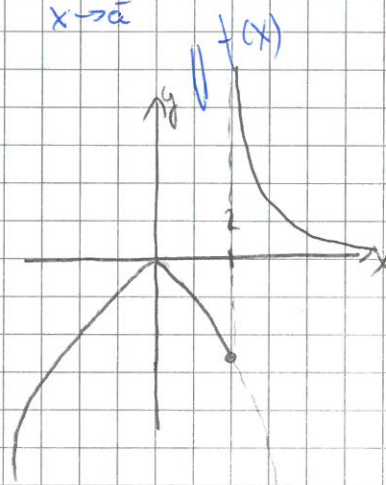
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A!$$

példa:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{ha } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  nem létezik!



$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$  (Hátszéppén fogalmazva  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  nem létezik)

Azt látjuk, hogy  $f$   $\forall$  határán túl n $\acute{e}$ , ha  $x$  tetszőleges

közel van 2-höz, de  $x > 2$ .