

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KALKULUS I., MÁSODIK HÁZI FELADAT

1. BIZONYÍTSUK A KÖZBENSŐ ÉRTÉKEK FELVÉTELÉRŐL SZÓLÓ TÉTELT!

Tétel:

Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos $[a, b]$ -n és $q \in \mathbb{R}$ tetszőleges, hogy $f(a) < q < f(b)$ vagy $f(b) < q < f(a)$. Ekkor $\exists$ olyan $c \in (a, b)$, hogy $f(c) = q$.

Bizonyítás:

Induljunk ki abból az esetből, hogy $f(a) < q < f(b)$. Vegyünk egy S halmazt, amelyet úgy definiálunk, hogy

$$S := \{x \in [a, b] : f(x) \leq q\}.$$

Két dolgot egyből állíthatunk:

1. Mivel abból indultunk ki, hogy $f(a) < q$, ezért $a \in S$, tehát S biztosan nemüres halmaz, és mivel
2. $S \subseteq [a, b]$, tehát részhalmaza egy felülről korlátos halmaznak, ezért S felülről korlátos lesz.

A tanult axióma kimondja, hogy a valós számok minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja, azaz $\exists c = \sup S$. Azt a fentiek alapján állíthatjuk, hogy b biztosan egy felső korlátja az S halmaznak, ebből következik, hogy $c \leq b$. Tudjuk továbbá, hogy $a \in S$, és mivel $c = \sup S$, ezért $a \leq c$. Ezek alapján biztos, hogy

$$a \leq c \leq b.$$

Eddig jó. Következő lépésben az egyenlőségeket lenne szükséges kizárnunk. Ha azt feltételezzük, hogy $f(c) > q$, akkor $f(x) > q$ egy $(c - \delta_1, c]$, $\delta_1 > 0$ intervallumon. De tudjuk azt is, hogyha c legkisebb felső korlát, akkor $\exists x' \in S$, amelyre $c - \delta_1 < x' < c$ lesz igaz. Mivel S halmazt úgy definiáltuk, hogy $f(x') \leq q$, ezért a két állítás ellent mond egymásnak. Így tehát $f(c) \leq q$, $c \neq b$ és $c < b$ lesz igaz.

Amennyiben $f(c) < q$, úgy $f(x) < q$ egy $[c, c + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$ intervallumon. De ha $x \in S$, akkor $x \in (c, c + \delta_2)$, ebben az esetben viszont c már nem lesz felső korlát, ami ellentmondáshoz vezet. Így tehát $f(c) = q$, amelyből adódik, hogy $c \neq a$, azaz $c > a$, tehát $a < c < b$ lesz igaz.

2. DEFINIÁLJUK A LEGNAGYOBB ALSÓ KORLÁTOT!

Legyen S egy nemüres halmaz, $S \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy k alsó korlátja S -nek, ha $\forall x \in S$ esetén $x \geq k$. Ha S -nek $\exists k$ -ja, akkor S -t alulról korlátosnak nevezzük. Az $m \in \mathbb{R}$

az S halmaz legnagyobb alsó korlátja, ha m alsó korlát és $\forall k$ esetén $m \geq k$. A legnagyobb alsó korlát jelölése: $m = \inf S$.

Tétel:

Ha $m = \inf S$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\exists x \in S$, melyre $m < x < m + \varepsilon$.

$$3.) \quad (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Nézzük meg a definíciós határértéket!

$$(\sqrt[3]{x})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}.$$

Eredményre juthatunk a definícióból is, ha ismerjük az egyszerű L'Hospital-szabályt, amely szerint

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}.$$

Deriváljuk tehát a külön-külön a számlálót és a nevezőt h szerint parciálisan:

$$\frac{d(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})}{dh} = \frac{1}{3}(x+h)^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+h)^2}} \quad \text{és} \quad \frac{dh}{dh} = 1.$$

Helyettesítsünk be $h = 0$ -át és végezzük el az osztást:

$$\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+0)^2}}}{1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Egyező eredményekre jutottunk.

$$4.) \quad (e^{x^2} - 1)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

$$\begin{aligned} 5.) \quad \left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)' &= ((\cos^3 x)^{-1})' = (\cos^{-3} x)' = -3 \cdot \cos^{-4} x (-\sin x) = 3 \sin x \cos^{-4} x = \\ &= \frac{3 \sin x}{\cos^4 x} = \frac{3 \tan x}{\cos^3 x} = 3 \tan x \sec^3 x. \end{aligned}$$

6. LEGYEN

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{ha } x \geq 1, \\ 3x^2 - 1, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

- Hol folytonos $f(x)$?
- Hol differenciálható $f(x)$?

Megoldás:

Az $f(x)$ függvény két polinomfüggvény összeillesztése az $x = 1$ pontban. Mivel a polinomfüggvények folytonosak, így a folytonosság megállapításához elegendő csupán az összeillesztési pont környezetén vizsgálni. Tudjuk, hogy a függvény akkor folytonos az $x = 1$ pontban, ha bal és a jobb oldali határértéke létezik és véges, ráadásul megegyeznek egymással és a függvény helyettesítési értékével is. Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e ezek a feltételek!

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + 1) = 1^3 + 1 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2,$$

$$f(x = 1) = 1^3 + 1 = 2.$$

Az $f(x)$ függvény tehát folytonos $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

A differenciálhatósággal kapcsolatban azt mélyebb vizsgálat nélkül is ismét biztonsággal állíthatjuk, hogy az összeillesztési ponton kívül mindenhol differenciálható a függvény, hiszen a definíciós határértékek léteznek és végesek. Az érdekes ismét az $x = 1$ környezete. Amennyiben az $x = 1$ -ben vett bal és jobb oldali deriváltak nem egyeznek meg, úgy a pontbeli derivált nem létezik, tehát a függvény ebben a pontban nem differenciálható.

Vizsgáljuk meg először ezt a definíciós határértékek szerint:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^3 + 1) - (1^3 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3x^2 - 1) - (3 \cdot 1^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3x^2 - 1) - 2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(3x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 3) = 3 \cdot 1 + 3 = 6. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a bal és a jobb oldali derivált nem egyezik meg az $x = 1$ pontban, tehát a függvény ebben a pontban nem differenciálható. Megfordítva: a függvény az $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ intervallumon differenciálható. Természetesen ugyanerre az eredményre kell jutnunk, ha megvizsgáljuk a két függvény deriváltfüggvényének értékét az $x = 1$ pontban:

$$(x^3 + 1)' = 3x^2 \rightarrow f'(x = 1) = 3 \cdot 1^2 = 3, \quad (3x^2 - 1)' = 6x \rightarrow f'(x = 1) = 6 \cdot 1 = 6.$$

Remek példa, amely egyértelműen láttatja az előadáson tanultakat: ha a függvény deriváltja létezik az $x = a$ pontban, akkor a függvény folytonos is, de ez az állítás megfordítva nem igaz, hiszen jelen esetben bár folytonos a függvény, mégsem differenciálható az $x = 1$ -ben.

$$\begin{aligned} 7.) \quad (x\sqrt{x}(3\ln x - 1))' &= \left(x^1 x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2)\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)\right)' = \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} \left(3 \frac{1}{x}\right) = \frac{3x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2)}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{x} = \frac{9\sqrt{x}\ln x - 6\sqrt{x}}{2} + 3\sqrt{x} = \\ &= \frac{9\sqrt{x}\ln x - 6\sqrt{x} + 6\sqrt{x}}{2} = \frac{9\sqrt{x}\ln x}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.) \quad \left(\ln \tan \frac{x}{2}\right)' &= \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \frac{\sin 0,5x}{\cos 0,5x} \cos^2 0,5x} = \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \cdot \left(= \frac{1}{\sin x} \cdot\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.) \quad \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{-2}{(1+x)^2} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{(1+x)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10.) \quad \left(\frac{2x+3}{x^2-5x+5}\right)' &= \frac{2(x^2-5x+5) - (2x+3)(2x-5)}{(x^2-5x+5)^2} = \\
 &= \frac{-2x^2-10x+10 - (4x^2-10x+6x-15)}{(x^2-5x+5)^2} = \frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11.) \quad \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' &= \frac{(-\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\
 &= \frac{-(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \\
 &= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = -1 - \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12.) \quad \left(\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right)' &= \left(-1 \cdot \frac{1}{(3 \cos^3 x)^2} \cdot 3 \cdot 3 \cos^2 x (-\sin x)\right) - \\
 &- \left(-1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x)\right) = \left(\frac{9 \cos^2 x \sin x}{9 \cos^6 x}\right) - \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) = \\
 &= \left(\frac{\sin x}{\cos^4 x}\right) - \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) = \left(\tan x \frac{1}{\cos^3 x}\right) - \left(\tan x \frac{1}{\cos x}\right) = \tan x (\cos^{-3} x - \cos^{-1} x).
 \end{aligned}$$

$$13.) \quad (\sqrt{x e^x + x})' = \frac{1}{2} (x e^x + x)^{-\frac{1}{2}} (e^x + x e^x + 1) = \frac{x e^x + e^x + 1}{2 \sqrt{x e^x + x}}.$$

$$14.) \quad (\sin^2 x^3)' = 2 \sin x^3 \cos x^3 \cdot 3x^2 = 6x^2 \sin x^3 \cos x^3 = 6x^2 \frac{\sin 2x^3}{2} = 3x^2 \sin 2x^3.$$

$$\begin{aligned}
 15.) \quad \left(\frac{x^8}{8(1-x^2)^2}\right)' &= \frac{8x^7(8(1-x^2)^2) - x^8(8 \cdot 2(1-x^2)(-2x))}{(8(1-x^2)^2)^2} = \\
 &= \frac{64x^7(1-x^2)^2 + 32x^9(1-x^2)}{64(1-x^2)^4} = x^7(1-x^2)^{-2} + \frac{1}{2}x^9(1-x^2)^{-3} = \\
 &= \frac{x^7}{(1-x^2)^2} + \frac{x^9}{2(1-x^2)^3}.
 \end{aligned}$$

16. ÍRJUK FEL A FÜGGVÉNY x_0 -BELI PONTJÁBA HÚZHATÓ ÉRINTŐ EGYENES EGYENLETÉT!

$$f(x) = x^2 + 7x + 2, \quad x_0 = 5.$$

Megoldás:

Tudjuk, hogy

$$y = f(x = x_0) + f'(x = x_0)(x - x_0).$$

$$f(x = x_0) = 5^2 + 7 \cdot 5 + 2 = 25 + 35 + 2 = 62,$$

$$f'(x) = (x^2 + 7x + 2)' = 2x + 7, \quad f'(x = x_0) = 2 \cdot 5 + 7 = 17.$$

$$y = 62 + 17(x - 5) = 62 + 17x - 85 = 17x - 23.$$

17. ÍRJUK FEL A FÜGGVÉNY x_0 -BELI PONTJÁBA HÚZHATÓ ÉRINTŐ EGYENES EGYENLETÉT!

$$f(x) = x \cos x, \quad x_0 = 0.$$

Megoldás:

$$f(x = x_0) = 0 \cdot \cos 0 = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$f'(x) = (x \cos x)' = \cos x - x \sin x, \quad f'(x = x_0) = \cos 0 - 0 \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

$$y = 0 + 1 \cdot (x - 0) = x.$$

18. ÍRJUK FEL A FÜGGVÉNY x_0 -BELI PONTJÁBA HÚZHATÓ ÉRINTŐ EGYENES EGYENLETÉT!

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 2}, \quad x_0 = 1.$$

Megoldás:

$$f(x = x_0) = \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 - 2} = \sqrt{3},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 2}} (2x + 4) = \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x - 2}} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x - 2}},$$

$$f'(x = x_0) = \frac{1 + 2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

$$y = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}(x-1) = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}x - \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

19. ÍRJUK FEL A FÜGGVÉNY x_0 -BELI PONTJÁBA HÚZHATÓ ÉRINTŐ EGYENES EGYENLETÉT!

$$f(x) = e^{3x} + 1, \quad x_0 = 0.$$

Megoldás:

$$f(x = x_0) = e^{3 \cdot 0} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

$$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}, \quad f'(x = x_0) = 3e^{3 \cdot 0} = 3e^0 = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$y = 2 + 3(x - 0) = 2 + 3x.$$

20. HOL DIFFERENCIÁLHATÓ AZ ALÁBBI FÜGGVÉNY?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x > 1, \\ -x + 2, & \text{ha } x \leq 1. \end{cases}$$

Nem fogok minden esetben kitérni rá, de egyértelmű, hogy az ilyen típusú feladatok arra kéri a hallgatót, hogy az összeillesztési pontban vizsgálja meg a függvény folytonosságát. A komponensek deriváltfüggvényei természetesen léteznek, nincsen ezen semmi különös. Az összeillesztési pont az $x = 1$. Nézzük meg, hogy a bal és a jobb oldali derivált ebben a pontban megegyezik-e. Ha igen, a függvény a teljes értelmezési tartományon differenciálható lesz. Fussunk neki:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} \cdot 1 = \\ &= -\frac{1}{1} \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x + 2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1.$$

A bal és a jobb oldali differenciálhányados megegyezik, a függvény tehát a teljes értelmezési tartományon differenciálható.

21. HOL DIFFERENCIÁLHATÓ AZ ALÁBBI FÜGGVÉNY?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \geq 1, \\ x, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

Egyszerű dolgunk van, hiszen a függvény $x = 1$ pontban vizsgált jobb oldali deriváltja megegyezik az előző feladatban kiszámolt differenciálhányadossal. Gyorsan lássuk be tehát hogy ez a függvény csak $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén differenciálható:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - x}{x - 1} = \dots = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Érdemes ábrázolni is a függvényt, jól látszik rajta, miért nem lehet differenciálni $f(x)$ -et az összeillesztési pontban. Még akkor is, ha a függvény folytonos.

