

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KALKULUS I., HARMADIK HÁZI FELADAT

1. VÉGEZZÜNK MONOTONITÁS- ÉS SZÉLSŐÉRTÉK-VIZSGÁLATOT A KÖVETKEZŐ FÜGGVÉNYEN:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, mert $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 4 \rightarrow x \neq \pm 2$. Ezek alapján a függvény nevezetes pontjai: $-\infty, -2, 2, \infty$. A függvény határértékei a nevezetes pontokban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \cdot \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{4}{-4 \cdot 0^-} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{4}{-4 \cdot 0^+} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{4}{0^- \cdot 4} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{4}{0^+ \cdot 4} = \infty.$$

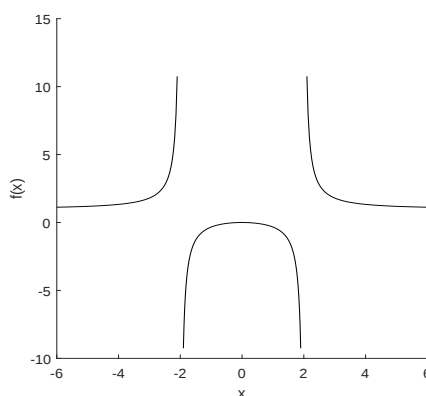
A függvény monotonitásának megvizsgálásához szükség van annak első deriváltjára:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)' = \frac{2x(x^2 - 4) - x^2(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}.$$

Az első derivált a számláló alapján az $x = 0$ helyen lesz nulla, így a függvénynek ebben a pontban lehet szélsőértéke. Készítsünk táblázatot, melybe belefoglaljuk a nevezetes pontokban a derivált előjelét, a függvény határértékeit a nevezetes pontokban, valamint a függvény menetének tendenciáját is.

x	$-\infty$	$(-\infty, -2)$	-2^-	-2^+	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2^-	2^+	$(2, \infty)$	∞
$f(x)$	1	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	1
$f'(x)$		+			+		-			-	

A deriváltfüggvény nevezője mindig pozitív lesz, a számláló pedig negatív x -ek esetén pozitív, pozitív x -ek esetén pedig negatív lesz, ezért a deriváltfüggvény negatív x -ek esetén pozitív, pozitív x -ek esetén pedig negatív előjelű lesz. Ahol az előjel pozitív, ott a függvény monoton nő, ahol negatív, ott monoton csökken. Ebből következik, hogy a függvénynek az $x = 0$ pontban lokális maximuma van, $f(x) = 0$. Ezek alapján a függvény görbéje már felrajzolható.



1. ábra. $f(x)$ a nevezetes pontok környezetében

A függvény képletéből egyszerűen belátható, hogy $f(x) = f(-x)$, tehát a függvény páros. Ha szeretnénk, megkísérelhetjük meghatározni a függvény második deriváltjának segítségével is, hogy az $x = 0$ -nál lévő szélsőérték lokális maximum. Ehhez állítsuk elő a második deriváltat:

$$f''(x) = \left(\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)' = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 32x^2(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4}.$$

Helyettesítsünk be $x = 0$ -át. A nevező pozitív, a számlálóban szereplő összeg második tagja nulla, az első pedig negatív, a pontos értéke lényegtelen. A második derivált tehát ebben a pontban negatív, ami a tanultak alapján azt jelenti, hogy a függvénynek lokális maximuma van.

2. VÉGEZZÜNK MONOTONITÁS- ÉS SZÉLSŐÉRTÉK-VIZSGÁLATOT A KÖVETKEZŐ FÜGGVÉNYEN:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \ln x.$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány a logaritmus miatt $D_f = (0, \infty)$. Ezek alapján a függvény nevezetes pontjai: 0 , ∞ . A függvény határértékei a nevezetes pontokban:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}} \triangleq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -3\sqrt[3]{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \ln x = \infty \cdot \infty = \infty.$$

A definíciós háromszög a L'Hospital-szabály alkalmazását jelenti. A függvény monotonitásának megvizsgálásához szükség van annak első deriváltjára:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} \ln x\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \ln x + \sqrt[3]{x} \frac{1}{x} = \frac{x^{-\frac{2}{3}} \ln x}{3} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^1} = \frac{\ln x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\ln x + 3}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ez csak akkor lehet nulla, ha

$$f \ln x + 3 = 0 \rightarrow \ln x = -3 \rightarrow x = e^{-3}.$$

A függvénynek tehát az $x = e^{-3} \approx 0,05$ helyen szélsőértéke lehet. Nézzük meg a derivált előjelét egy ettől kisebb, valamint egy ettől nagyobb x esetén:

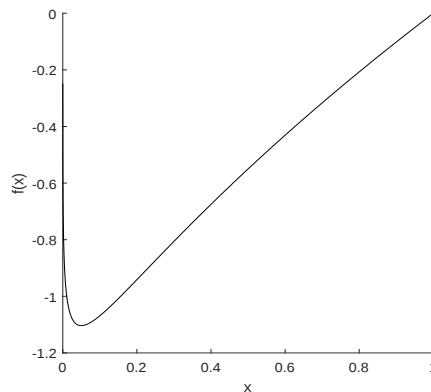
$$f'(x=1) = \frac{\ln 1 + 3}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{3}{3 \cdot 1} = 1.$$

$$f'(x=0,005) = \frac{\ln 0,005 + 3}{3\sqrt[3]{0,005^2}} \approx -26,2.$$

Látjuk tehát, hogy a függvénynek az $x = e^{-3}$ -ban lokális minimuma van. Készítsünk táblázatot:

x	0^+	$(0, e^{-3})$	e^{-3}	(e^{-3}, ∞)	∞
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3e^{-1}$	$\nearrow$	∞
$f'(x)$		-	0	+	

Tulajdonképpen készen is vagyunk.



2. ábra. $f(x)$ a nevezetes pontok környezetében

A függvény szélsőértékét behelyettesítéssel határoztam meg:

$$f(x=e^{-3}) = \sqrt[3]{e^{-3}} \ln e^{-3} = -3\sqrt[3]{e^{-3}} = -3e^{-1}.$$

Minden bizonnyal eredményre lehetne jutni a második deriváltas próbával is a szélsőérték tekintetében, de ez így most egyszerűbbnek bizonyult.

3. VÉGEZZÜNK MONOTONITÁS- ÉS SZÉLSŐÉRTÉK-VIZSGÁLATOT A KÖVETKEZŐ FÜGGVÉNYEN:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}.$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, másképpen írva $D_f = \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$, mert $x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 4$. Ezek alapján a függvény nevezetes pontjai: $-\infty, -2, 2, \infty$. A határértékek ezen nevezetes pontokban:

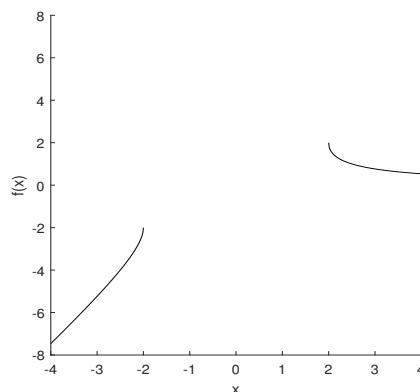
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right) \right) = -\infty \cdot (1 + \sqrt{1}) = -\infty \cdot 2 = -\infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x - \sqrt{x^2 - 4}) = -2 - \sqrt{4 - 4} = -2 - 0 = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - \sqrt{x^2 - 4}) = 2 - \sqrt{4 - 4} = 2 - 0 = 2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 4}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right) \right) = \infty \cdot (1 - \sqrt{1}) = \infty \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, van-e lokális szélsőértéke a függvénynek! Ehhez deriváljuk $f(x)$ -et:



3. ábra. $f(x)$ a nevezetes pontok környezetében

$$f'(x) = (x - \sqrt{x^2 - 4})' = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot 2x = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Látjuk, hogy $f'(x) = 0$ -hoz

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = 1$$

kell, hogy igaz legyen, ami azt jelenti, hogy $x = \sqrt{x^2 - 4}$, ami azt mondja, hogy $x^2 = x^2 - 4$, melynek nincsen megoldása a valós számok halmazán. A függvénynek így nincsen lokális minimum- vagy maximumhelye. Ettől függetlenül a szokásos táblázat felvehető, a görbe felrajzolható.

x	$-\infty$	$(-\infty, -2)$	-2	2	$(2, \infty)$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	2	$\searrow$	0
$f'(x)$		$+$			$-$	

A függvény grafikonját ismét a nevezetes pontok környezetében célszerű felvenni. A grafikon alapján is egyértelműen látszik, hogy az nem rendelkezik lokális szélsőértékkel, az értékkészlete is leolvasható:

$$R_f = (-\infty, -2] \cup (0, 2] .$$

4. VÉGEZZÜNK MONOTONITÁS- ÉS SZÉLSŐÉRTÉK-VIZSGÁLATOT A KÖVETKEZŐ FÜGGVÉNYEN:

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}} .$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mert $x^2 \neq 0$. A nevezetes pontok tehát: $-\infty$, 0 és ∞ . Nézzük meg a határértékeket:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 0 = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 0 = 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{\infty}{1} = \infty .$$

Vizsgáljuk meg a függvény deriváltját a lokális szélsőértékek megkeresésének érdekében:

$$f'(x) = \left(xe^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} + xe^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2 \frac{1}{x^3} = e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \frac{(x^2 + 2)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} .$$

Ez csak akkor lehet zérus, ha a nevező alapján

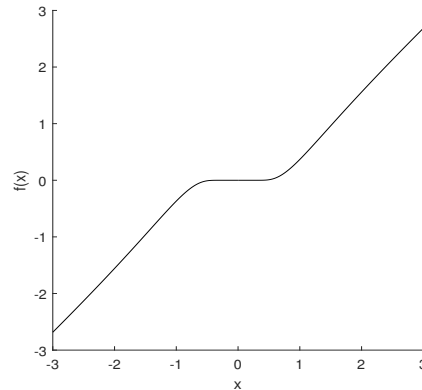
$$x^2 = -4 ,$$

vagy

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 .$$

Mivel a valós számok halmazán egyiknek sincsen megoldása, ezért a függvénynek nincsen lokális maximuma, minimuma. Vegyük fel a szokásos táblázatot, mely alapján a függvény grafikonja már megrajzolható.

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0^-	0^+	$(0, \infty)$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\nearrow$	∞
$f'(x)$		+			+	

4. ábra. $f(x)$ a nevezetes pontok környezetében

5. VÉGEZZÜNK MONOTONITÁS- ÉS SZÉLSŐÉRTÉK-VIZSGÁLATOT A KÖVETKEZŐ FÜGGVÉNYEN:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, mert $1-x \neq 0 \rightarrow x \neq 1$. Ezek alapján a függvény nevezetes pontjai: $-\infty, 1, \infty$. A függvény határértékei a nevezetes pontokban:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = -\infty \cdot \frac{1}{0-1} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \infty \cdot \frac{1}{0-1} = -\infty.$$

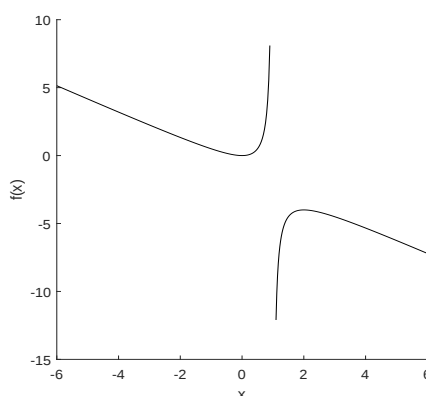
A függvény monotonitásához szükségünk van az első deriváltra:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

A deriváltfüggvénynek ott lesz zérushelye, ahol a nevező felveszi a nullát. Ez az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2$ pontok esetén lesz igaz. Ezen pontokban tehát a függvénynek lokális szélsőértéke lehet.

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1^-	1^+	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$	∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			$+$	0	$-$	

Amennyiben a deriváltfüggvénybe egy negatív x -értéket helyettesítünk be, úgy a nevezője miatt annak előjele is negatív lesz, a függvény tehát monoton csökken. Amennyiben egy nullától nagyobb, de egytől kisebb számot helyettesítünk be (például $0,5$ -öt), úgy pozitív lesz az előjele, a függvény tehát monoton nő. Emiatt a függvénynek az $x = 0$ pontban lokális minimuma van, értéke $f(x) = 0$. A deriváltfüggvény előjele az $(1, 2)$ intervallumon pozitív lesz, így ott a függvény monoton nő. A $(2, \infty)$ intervallumon ez az előjel negatív, így ott a függvény monoton csökken. Ennek a két állításnak a következménye, hogy a függvénynek az $x = 2$ -ben lokális maximuma van, értéke $f(x) = -4$.



5. ábra. $f(x)$ a nevezetes pontok környezetében

6. BIZONYÍTUK BE A KÖVETKEZŐ TÉTELT:

Tegyük fel, hogy f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor ha $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ monoton csökken $[a, b]$ -n.

Megoldás:

Tegyük fel, hogy $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$. Legyen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Ekkor biztos, hogy f folytonos lesz $[x_1, x_2]$ -n és differenciálható lesz (x_1, x_2) -n is. A Lagrange-tétel értelmében ekkor $\exists c \in (x_1, x_2)$, hogy

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Feltevéseink alapján biztosan tudjuk, hogy $x_2 - x_1 > 0$, valamint hogy $f'(c) \leq 0$. Emiatt

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \leq 0.$$

Másként fogalmazva $f(x_1)$ legalább akkora, mint $f(x_2)$.

Tegyük fel, hogy f monoton csökken $[a, b]$ -n. Ekkor $x, x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$ esetén

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ amely miatt } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$