

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KALKULUS I., ELSŐ HÁZI FELADAT

1. ADJUNK DEFINÍCIÓT A KÖVETKEZŐ HATÁRÉRTÉKEKRE:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

Megoldás:

Legyen $f(x) : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ahol $D_f = (-\infty, \alpha)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f -nek $-\infty$ -ben A a határértéke, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists$ olyan $l = l(\varepsilon)$, $l \in \mathbb{R}$, hogy $x < l$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. ADJUNK DEFINÍCIÓT A KÖVETKEZŐ HATÁRÉRTÉKEKRE:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Megoldás:

a.) Legyen $f(x)$ függvény értelmezve az $(a - \rho, a)$ intervallumon, hogy $\rho > 0$. Azt mondjuk, hogy f -nek a -ban ∞ a bal oldali határértéke, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists$ olyan $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, hogy $a - \delta < x < a$ esetén teljesül, hogy $f(x) > K$. Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

b.) Legyen $f(x)$ függvény értelmezve az $(a - \rho, a)$ intervallumon, hogy $\rho > 0$. Azt mondjuk, hogy f -nek a -ban $-\infty$ a bal oldali határértéke, ha $\forall k \in \mathbb{R}$ -hez $\exists$ olyan $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, hogy $a - \delta < x < a$ esetén teljesül, hogy $f(x) < k$. Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

c.) Legyen $f(x)$ függvény értelmezve az $(a, a + \rho)$ intervallumon, hogy $\rho > 0$. Azt mondjuk, hogy f -nek a -ban ∞ a jobb oldali határértéke, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists$ olyan $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, hogy $a < x < a + \delta$ esetén teljesül, hogy $f(x) > K$. Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

d.) Legyen $f(x)$ függvény értelmezve az $(a, a + \rho)$ intervallumon, hogy $\rho > 0$. Azt mondjuk, hogy f -nek a -ban $-\infty$ a jobb oldali határértéke, ha $\forall k \in \mathbb{R}$ -hez $\exists$ olyan $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, hogy $a < x < a + \delta$ esetén teljesül, hogy $f(x) < k$. Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Megj.: Természetesen a definíciók hasonlóságukból kifolyólag összevonhatók, de most inkább arra törekedtem, hogy egymástól függetlenül, áttekinthetően legyenek kimondva.

3. ADJUNK DEFINÍCIÓT A KÖVETKEZŐ HATÁRÉRTÉKEKRE:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

Megoldás:

a.) Legyen $f(x)$ függvény értelmezve egy (a, ∞) intervallumon, ahol $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f -nek ∞ -ben vett határértéke $-\infty$, ha $\forall k \in \mathbb{R}$ -hez $\exists$ olyan $L(k) \in \mathbb{R}$, hogy $x > L$ esetén $f(x) < k$. Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

b.) Legyen $f(x)$ függvény értelmezve egy $(-\infty, a)$ intervallumon, ahol $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f -nek $-\infty$ -ben vett határértéke ∞ , ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists$ olyan $l(k) \in \mathbb{R}$, hogy $x < l$ esetén $f(x) > K$. Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

4. ADJUNK DEFINÍCIÓT EGY VALÓS FÜGGVÉNY JOBB OLDALI FOLYTONOSSÁGÁRA!

Megoldás:

Legyen $f(x)$ definiálva az $[a, a + \rho)$, $\rho > 0$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy f folytonos jobbról, ha

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

5. ÉRTTELMEZZÜK AZ $(a, b]$ ÉS AZ $[a, b)$ INTERVALLUMOKON VALÓ FOLYTONOSSÁGOT!

Megoldás:

A folytonosság definícióját mindkét oldalon nyílt (a, b) , illetve mindkét oldalon zárt $[a, b]$ intervallummal leírható értelmezési tartománnyal rendelkező $f(x)$ függvény esetén a konzultáción megadtuk. Ezen definíciók alapján, felhasználva az ott alkalmazott megfontolásokat a következő értelmezések adhatók:

a.) Az $f(x) : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezzük az $(a, b]$ intervallumon, ha

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p), \quad \forall p \in (a, b) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

b.) Az $f(x) : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezzük az $[a, b)$ intervallumon, ha

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p), \quad \forall p \in (a, b) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

6. HOL FOLYTONOSAK AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK?

Megoldás:

Polinomfüggvények esetén tudjuk, hogy $D_f = \mathbb{R}$. Ezen függvények a teljes értelmezési tartományukon belül folytonosak. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény – lineáris törtfüggvény – esetén $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, amely szintén a teljes D_f -en folytonos. Az $f(x) = \sqrt{x}$ gyökfüggvény esetén $D_f = [0, \infty)$, amely szintén folytonos a teljes értelmezési tartományán, hiszen $x = 0$ -ban jobbról folytonos. Az $f(x) = A^x$, $A \in \mathbb{R}$ exponenciális függvény esetén $D_f = \mathbb{R}$, amely szintén folytonos a teljes értelmezési tartományán belül. Az $f(x) = \log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}$ logaritmussfüggvény esetén $D_f = (0, \infty)$, amely szintén a teljes értelmezési tartományán folytonos. A trigonometrikus függvények közül $f(x) = \sin(x)$ és $f(x) = \cos(x)$ esetén $D_f = \mathbb{R}$, a függvények periodikusak és folytonosak minden valós számra, tehát a teljes értelmezési tartományukon belül folytonosak. Az $f(x) = \tan(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = (-\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, amely szintén folytonos a teljes értelmezési tartományán belül. Ez az állítás igaz $f(x) = \cot(x)$ esetén is, ahol $D_f = (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_0$ lesz igaz.

7. GYAKORLATI FELADATOK

1. a. rész

$$1.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \cdot \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \\ &= -\infty \cdot \frac{1 + 0 - 0}{1 + 0} = -\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{1 - 0}}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -1 \cdot \frac{\sqrt{1 - 0}}{1 + 0} = -1. \end{aligned}$$

$$5.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} \frac{1 + \sqrt{x+2}}{1 + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2) - 1}{(x+1)(1 + \sqrt{x+2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)}{(x+1)(1 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$6.) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} \ln(|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|x|) = -\infty \cdot \infty = -\infty.$$

$$7.) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt[3]{x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{\frac{2}{3}}).$$

Itt álljunk meg egy pillanatra és a nyers erő helyett használjuk az eszünket. Van két polinomunk. Az első határérték triviálisan $-\infty$, nincs mit magyarázni rajta. A második esetben egy gyökös kifejezés alatt van egy nagyon nagy pozitív szám. Ebből belátható szintén triviális módon, hogy a második határérték ∞ . A két függvény összegének határértékét a "domináns tag" fogja meghatározni, azaz ahol x^a , $a \in \mathbb{R}$ esetén a nagyobb. Itt az első tag kivevője a nagyobb, tehát a határérték $-\infty$.

1. b. rész

$$8.) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 4 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \left(1 + \frac{4}{x^4 - 4} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4}{(x-2)(x+2)}.$$

Itt akár meg is állhatnánk kijelentve, hogy a határérték nem létezik. De vizsgáljuk meg a második tagot közelebbről. Az a feltételezésünk, hogy a bal oldali és a jobb oldali határértékek nem egyeznek meg. Járjunk utána:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4}{(x-2)(x+2)} = -\infty.$$

Az első számláló pozitív, értéke 4. Az első nevezőben szereplő szorzat első tagja balról tart -4 -hez, tehát negatív. A szorzat második tagja pedig balról (a negatív számok felől) tart a nullához, azt végtelenül közel megközelíti, de soha nem éri el, előjele tehát negatív lesz. Éppen ezért az első nevezőben szereplő szorzat tagjainak előjele megegyezően negatív, tehát a teljes kifejezés ∞ -hez fog tartani. Ugyanígy átgondolható a jobb oldali határérték esete is, ebben az esetben a nevezőben szereplő szorzat második tagja a pozitív számok felől fog a nullához közelíteni, így a nevező és vele együtt a határérték is előjelet fog váltani. Mivel a két féloldali határérték nem egyezik meg, ezért a pontban vett határérték nem létezik.

$$9.) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2) - x}{-1(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left((-x-2) + \frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x-2) +$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \right).$$

Ismét megállhatunk itt is, kijelentve, hogy a határérték nem létezik, hiszen az összeg második tagjának határértéke nem létezik. Lássuk be ezt ennek a tagnak a bal és jobb oldali határértékének különbözőségével:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} \right) = \infty.$$

$$10.) \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x+1} = \infty.$$

Semmiféle átalakítást nem szükséges elvégezni ebben az esetben. Vizsgáljuk meg a számláló és a nevező előjelét. A számlálóba behelyettesíthetünk -1 -et, $\sqrt{-1+2} - 3 = -2$ lesz az eredmény, tehát a számláló előjele negatív. Garantáltan negatív, hiszen a vizsgált pontban a gyökös függvény folytonos. A nevezőben szereplő függvény $x = -1$ -nél metszi az x -tengelyt, és ha ezt a pontot balról, a negatív számok felől közelítjük, akkor garantálni tudjuk, hogy előjele negatív lesz. Egy negatív számot osztunk el egy infinitezimálisan kicsi, de negatív előjelű számmal, az eredmény ∞ lesz.

$$11.) \quad \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x^2}{1-x}}.$$

Ahhoz, hogy eredményre jussunk, meg kell vizsgálni, hogy létezik-e a kitevőben szereplő függvény határértéke az $x = 1$ pontban. Ehhez szokás szerint megnézzük a jobb és a bal oldali határértékeket, és összevetjük őket, hogy egyenlőek-e. Ha nem, a határérték nem létezik.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1-x} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty.$$

Az első esetben az $(1-x)$ -függvény negatív meredeksége miatt tudjuk garantálni, hogy a nevező a pozitív számok felől közelíti a nullát, ezért az eredmény ∞ . A második esetben ennek az ellenkezőjét tudjuk, tehát a nevező biztosan a negatív számok felől közelíti a nullát, így az eredmény $-\infty$. Az exponenciális függvény tulajdonságából következik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x^2}{1-x}} = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x^2}{1-x}} = 0,$$

így a határérték természetesen nem létezik.

$$12.) \quad \lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{x}{(1+x)^2}}.$$

A sztori teljesen megegyezik az előzővel. Vizsgáljuk meg, hogy a kitevő jobb és bal oldali határértéke megegyezik-e. Ezúttal egyszerű dolgunk van, $x = -1$ esetén ugyanis a számlálója garantáltan negatív, a nevezőben pedig négyzetes kifejezés szerepel, így az pedig garantáltan pozitív. Így nem kérdés, hogy megegyezik a két határérték, amely az ellentétes előjelek miatt $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty,$$

amelyből egyértelműen következik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{x}{(1+x)^2}} = 0.$$

2. rész

$$1.) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

$$2.) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(2 - x)(2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 1)}{(2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{(2 + x)} = -\frac{1}{4}.$$

$$3.) \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}}{-\sqrt{(x + 2)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} -\sqrt{\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)^2}} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -\sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}} = -\frac{4}{0^-} = -\infty.$$

A levezetés az eddigi megoldások alapján már egyértelmű, további magyarázatot nem igényel.

$$4.) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 2} - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 2} - 1}{x + 1} \cdot \frac{\sqrt{x + 2} + 1}{\sqrt{x + 2} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 2) - 1}{(x + 1)(1 + \sqrt{x + 2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)}{(x + 1)(1 + \sqrt{x + 2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1 + \sqrt{x + 2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{-1 + 2}} = \frac{1}{2}.$$

$$5.) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} -(\sqrt{x} + 1) = -(1 + 1) = -2.$$

$$6.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{\sin 2x}{2x \cdot \frac{3}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

$$7.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{5} \cos 5x} = 1 \cdot \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5.$$

Az utolsó két feladathoz csupán a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{és} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

azonosságok felhasználására volt szükség, minden más adja magát.

3. rész

1.) Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt folytonosság szempontjából:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x > 1, \\ x^2 + 1, & \text{ha } x \leq 1. \end{cases}$$

Megoldás:

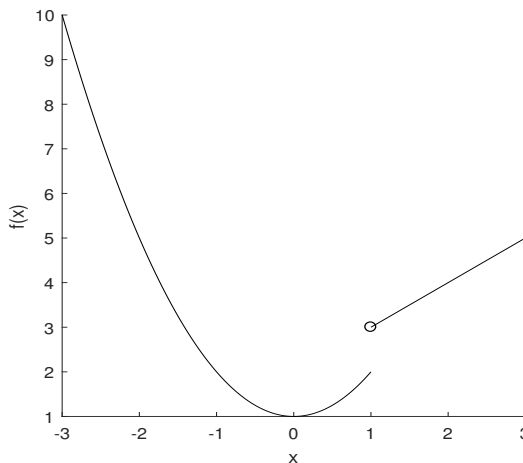
Meglepő lenne, hogyha az $x = 1$ -en kívül lenne bármiféle, számunkra izgalmas torlódási pontja D_f -nek, ahol nem folytonos a függvény. A két elemi függvény ugyanis, amelyek alkotják $f(x)$ -et, definíció szerint folytonosak. Így elegendő csak $x = 1$ környékén kutakodnunk, ami a folytonosságot illeti. Nézzük meg a két féloldali határértéket, valamint a függvény helyettesítési értékét a kérdéses pontban:

$$f(x = 1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Innen már minden látszik. A két féloldali határérték nem egyezik meg, ezért a függvény nem folytonos az $x = 1$ -ben, ott definíció szerint elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van, hiszen a féloldali határértékek végesek. Ezek alapján a függvény grafikonja már megadható $x = 1$ környezetében.



2.) Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt folytonosság szempontjából:

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{ha } x \geq 1, \\ x^2 + 1, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

Megoldás:

Az a paraméterről semmit sem tudunk, így feltételezzük, hogy tetszőleges valós szám lehet. Egyébként – még ha paraméteresen is, de – az első feladathoz hasonlóan szükséges eljárni:

$$\begin{aligned} f(x=1) &= 1 + a, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + a) = 1 + a. \end{aligned}$$

A dolog nyilván arra megy ki, hogy olyan a -t adjon a hallgató, ahol a függvény folytonos lesz. Triviálisan látszik, hogy az $a = 1$ választással kell élni, ekkor a két oldalsó határérték véges lesz, meg fognak egyezni egymással és a függvény helyettesítési értékével is. Minden más esetben a függvénynek elsőfajú szakadása (ugrása) lesz az összeillesztési pontban.

3.) Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt folytonosság szempontjából:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{2x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 3, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Megoldás:

Itt is nyilvánvalóan az a kérdés, hogy miként válasszuk meg a -t ahhoz, hogy a függvényünk folytonos legyen. Azt már tudjuk, hogy a függvény helyettesítési értéke az $x = 0$ -ban 3, valamint azt is tudjuk, hogy a $\frac{\sin x}{x}$ függvény határértéke az $x = 0$ -ban létezik és véges, egészen konkrétan 1. A cél tehát, hogy a -t úgy válasszuk meg, hogy ez a $\frac{\sin x}{x}$ -jellegű határérték 3 legyen, ebben az esetben fog teljesülni, hogy az $x = 0$ pontban a kétoldali határérték létezik és véges, ráadásul megegyeznek egymással és a függvény helyettesítési értékével is. Hát akkor kezdjük el gyúrni, amíg jó nem lesz. Van egy sejtésünk $a = \frac{2}{3}$ -ra és $a = 6$ -ra. Próbáljuk ki az utóbbit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x \cdot \frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3.$$

Hát ez bejött, $a = 6$ esetén tehát folytonos lesz a függvényünk.

