

Integrálszámítás

-63-

Határozatlan integrál

Feladat: függvény deriváltjának ismeretében az eredeti függvény meghatározása

Def: $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I tetszőleges intervallum.

Art mondjuk, hogy F primitív függvénye f -nek, ha F differenciálható I -n és $\forall x \in I$ esetén $F'(x) = f(x)$.

Ésmevétel: Ha F primitív függvénye f -nek, akkor $F+C$ is az, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

felölés: $\int f(x) dx = F(x) + C$
 $\int f = F + C$

Példák:

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3} + C, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctg x + C$$

2. Ésmevétel: Ha F és G ^{tetszőleges, I -n folytonos, I belsőjében differenciálható} primitív függvényei f -nek, azaz $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$ esetén, akkor a 16. Tétel alapján

$$G(x) - F(x) = C \quad \text{mely } C \in \mathbb{R} \text{-re.}$$

Kapjuk: f összes primitív függvénye $F+C$ alakú, ahol F f -nek egy tetszőleges primitív függvénye, és $C \in \mathbb{R}$.

A differenciálszámítás

$$(cf(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

szabályeiból azonnal adódik a következő tétel:

24. Tétel : Tegyük fel, hogy $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ - nek és $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ - nek $\exists$ primitív függvénye, illetve $c \in \mathbb{R}$.

Ekkor
$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx,$$
$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

Példa:

$$\int (6x^2 - e^x) dx = 2 \int 3x^2 dx - \int e^x dx = 2 \cdot x^3 - e^x + C$$

Alapintegrálok

f	$\int f$
1	$x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\text{JH: } n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$ $\text{JH: } a > 0, a \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$ $\text{JH: } x \neq 0$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C, \quad x < 1$

Példa: $\int \operatorname{tg}^2 x = ?$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \\ &= \operatorname{tg} x - x + C \end{aligned}$$

Milyen függvényeknek létezik primitív függvénye?

Egy elegendő feltétel:

25. Tétel: Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor létezik primitív függvénye.

Megjegyzés: ez a primitív függvény nem feltétlenül elemi függvény, és nem biztos, hogy számalással megadható. Híres példák: $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $f(x) = e^{x^2}$

Def: Intervallumon értelmezett valós függvény Darboux-függvény, ha bármely két függvényérték között minden értéket felvesz.

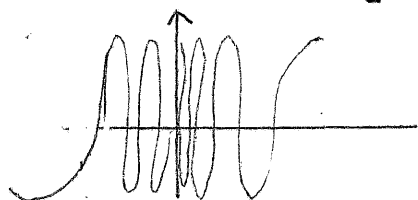
Pontos def: Legyen I intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

f Darboux-függvény, ha $\forall a, b \in I$, $a < b$ és $f(a) \neq f(b)$ esetén bármely $f(a)$ és $f(b)$

között f -hoz megadható $c \in (a, b)$, hogy $f(c) = f$.

Minden, intervallumon folyt. függvény Darboux-függvény (lásd: Közbeső értékek felvételéről szóló tétel.)

Van olyan Darboux-függvény, ami nem folytonos. Példa:
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Primitív függvény létezésének szükséges feltétele:

26. Tétel: Ha $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ -nek létezik primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú.

Módszer a primitív függvény meghatározására

$$\text{Az } (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

szabályból következik az alábbi tétel:

27. Tétel (Parciális integrálás)

Tegyük fel, hogy $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, és fg' -nek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ szorzatnak is létezik primitív függvénye, és

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Példák:

$$\textcircled{1} \int x^5 \cdot \ln x dx = ?$$

$$f' = x^5 \rightarrow f = \frac{x^6}{6}$$

$$g = \ln x \rightarrow g' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^5 \cdot \ln x dx = \frac{x^6}{6} \cdot \ln x - \int \underbrace{\frac{x^6}{6} \cdot \frac{1}{x}}_{\frac{x^5}{6}} dx = \frac{x^6}{6} \cdot \ln x - \frac{x^6}{36} + C$$

$$\textcircled{2} \int x^2 e^x dx = ?$$

$$f' = e^x \quad f = e^x$$

$$g = x^2 \quad g' = 2x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x e^x dx = ?$$

új szereposztás:

$$f' = e^x \quad f = e^x$$

$$g = 2x \quad g' = 2$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - \left[2x e^x - \int 2e^x dx \right] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$\textcircled{3} \int \arctg x dx = \int 1 \cdot \arctg x dx \underset{\substack{f'=1 \\ f=x}}{\overset{\uparrow}{=}} x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \boxed{}$$

$$g = \arctg x \quad g' = \frac{1}{1+x^2}$$

Vegyük észre: $(\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$

$$\left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot x$$

Ez alapján:

$$\boxed{} = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\textcircled{4} \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx \underset{\substack{f'=1 \\ f=x}}{\overset{\uparrow}{=}} x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx =$$

$$g = \ln x \quad g' = \frac{1}{x}$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$\textcircled{5} \int \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin x dx = -\sin x \cdot \cos x - \int -\cos^2 x dx$$

$$\underset{\substack{f'=\sin x \\ f=-\cos x}}{\overset{\uparrow}{=}} -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx$$

$$g = \sin x \quad g' = \cos x$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \int 1 dx - \int \sin^2 x dx =$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= -\sin x \cdot \cos x + x + C - \int \sin^2 x dx.$$

Az elejét és a végét összeolvasva:

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x + C - \int \sin^2 x dx$$

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + C$$

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{C}{2}$$

⑥

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = \boxed{}$$

$$\begin{aligned} f' &= e^x \\ g &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= e^x \\ g' &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' &= e^x \\ g &= \cos x \end{aligned} \quad \begin{aligned} f &= e^x \\ g' &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{} &= e^x \cdot \sin x - \left\{ e^x \cdot \cos x - \int (-\sin x) e^x \, dx \right\} + C = \\ &= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, dx + C \end{aligned}$$

Az elejét és a végét összeolvasva:

$$2 \int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{C}{2}$$

Mikor érdemes parciális integrálást alkalmazni?

polinom * exponenciális függvény
 logaritmikus - " -
 trigonometrikus - " -
 "áthúsz" függvény (arcsin, arctg, stb)

exponenciális függvény * $\sin x / \cos x$
 vagy

Helyettesítéses integrálás

Ha $F' = f$, akkor $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

$\Rightarrow \int f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$. Igaz a köv. tétel:

28. Tétel (Helyettesítéses integrálás): Legyen g differenciálható amely I intervallumon. Tegyük fel, hogy a g értékeit tartalmazó J intervallumon az f függvénynek F egy primitív függvénye. Ekkor

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Az $\int f(g(x)) g'(x) dx$ alakú integráloknál a következő formális megoldást alkalmaztuk:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = ?$$

$$\text{új változó: } y = g(x)$$

Most x szerint deriváljuk mindkét oldalt:

$$\frac{dy}{dx} = g'(x)$$

$\frac{dy}{dx}$ -et törtként kezeljük, és

$$dy = g'(x) dx \text{ - et írunk.}$$

Behelyettesítve:

$$\int f(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x) dx}_{dy} = \int f(y) dy = F(y) + C = F(g(x)) + C$$

Példák

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx &= \int \sin(y) dy = -\cos y + C = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad y = \ln x \\ &\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \\ &\quad dy = \frac{1}{x} dx \\ &= -\cos(\ln x) + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du =$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2x \cdot dx$$

$$= \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

Másik lehetőség:

$$u = \sqrt{x^2+5}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

Evel a helyettesítéssel:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \int 1 \cdot du = u + c = \sqrt{x^2+5} + c$$

③ $\int \sin^2 x dx = ?$

Ismert azonosság:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2 \cdot \sin^2 x$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx =$$

$$u = 2x$$

$$du = 2 dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \int \cos(2x) \cdot 2 dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \int \cos u du =$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(u) + c = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + c$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x + c$$

④ $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{t} dt = - \ln |t| + c =$

$$t = \cos x$$

$$dt = - \sin x dx$$

$$= - \ln |\cos x| + c = \ln \frac{1}{|\cos x|} + c$$

⑤ Tudjuk: $\int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c$

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \frac{1}{2} dx =$$

$$u = \frac{x}{2}$$

$$du = \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$$

(6.)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t dt =$$

$$x \in (-1, 1) \quad x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$dx = \cos t dt$$

$$= \int \frac{\sin^2 t}{|\cos t|} \cos t dt = \int \sin^2 t dt \stackrel{\text{3. példa}}{=} \frac{t}{2} - \frac{\sin t \cdot \cos t}{2} + C$$

$$\begin{aligned} -1 < x < 1 \\ -1 < \sin t < 1 \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \text{Tehát } \cos t > 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

$$\uparrow \cos t = \sqrt{1-x^2}$$

(7.) Néha hűkhös átalakításokra van szükség:

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\tan^2 x + 2} dx = \boxtimes$$

$$\uparrow 1 + \cos^2 x = \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x = \cos^2 x (\tan^2 x + 2)$$

$$z = \tan x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\boxtimes = \int \frac{1}{z^2 + 2} dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du =$$

$$u = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

$$⑧ \int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^y \cdot 2y dy = (*)$$

↖ DE helyettesebb így dolgozni:

$$y = \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$x = y^2$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

$$dx = 2y dy$$

$$(*) \stackrel{\uparrow}{=} 2y \cdot e^y - \int 2e^y dy = 2y e^y - 2e^y + C = 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

Parsciális integrálással

$$f' = e^y \rightarrow f = e^y$$

$$g = 2y \rightarrow g' = 2$$

⑨ Ha nincs ötletünk, hogy mit helyettesítsünk, akkor a "legcsúnyább" részt helyettesítjük:

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx = \int \frac{u^2+3}{(u^2+2)u} du$$

$$u = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = u^2 + 2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$2 du = \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$$

Az eredeti problémát visszaverettük egy racionális törtfüggvény primitív függvényének keresésére.

Racionális törtfüggvények integrálásáról gyakorlaton tanulunk.

Racionális törtfüggvények integrálása

Elemi törték integrálása

Elemi törték: $\frac{A}{(x-a)^n}$, ahol $A \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, n \geq 1$ egész

$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+C)^n}$, ahol $A, B, b, C \in \mathbb{R}, n \geq 1$ egész
és x^2+bx+C -nek nincs valós
gyöke ($\Leftrightarrow b^2-4C < 0$)

$\frac{A}{(x-a)^n}$ integrálása:

$n=1$ eset: $\int \frac{3}{x-2} dx = 3 \int \frac{1}{x-2} dx = 3 \ln|x-2| + C$

$n \geq 2$ eset: $\int \frac{3}{(x-2)^5} dx = 3 \int (x-2)^{-5} dx = 3 \frac{(x-2)^{-4}}{-4} + C$
 $= -\frac{3}{4} \frac{1}{(x-2)^4} + C$

$\frac{Ax+B}{(x^2+bx+C)^n}$ primitív függvénye:

$n=1$ eset, a számláló konstans:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{dx}{4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} =$$

$$\uparrow$$

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 = 4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)$$

Helyettesítés:
 $y = \frac{x+1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$$

Ereket a példát mindig $\frac{1}{y^2+1}$
integráljára vesszük vissza.

-74-

$n=1$ eset, a számláló lineáris:

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5} dx = ?$$

Tipp: alakítsuk ki a nevező deriváltját a számlálóban!

$$(x^2+2x+5)' = 2x+2$$

$$\frac{4x+3}{x^2+2x+5} = 2 \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{x^2+2x+5}$$

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5} dx = 2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

itt használjuk
az
 $u = x^2 + 2x + 5$
 $du = (2x+2)dx$
helyettesítést

ert az előbb megoldottuk

$$2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = 2 \int \frac{1}{u} du = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x^2+2x+5| + C$$

Tehát:

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5} dx = 2 \ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

$n \geq 2$ eset, a számláló konstans:

Egy "egyszerűbb" példa:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = ? \quad (*)$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} \uparrow = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

Az első integrál könnyű. A másodikat parciálisan integráljuk:

$$\int \frac{1}{2} x \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} - \int \frac{1}{2} \frac{-1}{x^2+1} dx = \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$f = \frac{1}{2} x \quad f' = \frac{1}{2}$$

$$g' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad g = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

Erint (*) = $\operatorname{arctg} x - \left[-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right] + C$
 $= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

Kövi feladat: $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = ?$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx = ?$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3} - \frac{x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^3}$$

Az első integrált már kiszámoltuk. A másodikat

integráljuk parciálisan! Vegyük észre, hogy az

$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$ integrált vissza tudjuk vezetni $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ -re!

Egy "általánosabb" példa:

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2} dx = \int \frac{1}{4^2 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)^2} dx =$$

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 = 4 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)$$

Ahogy korábban, használjuk az $y = \frac{x+1}{2}$, $dy = \frac{1}{2} dx$ helyettesítést!

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1}{(y^2+1)^2} dy = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + \frac{y}{2(y^2+1)} \right\} + C =$$

a 74. oldal
alján kiszámoltuk

$$= \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + \frac{1}{16} \frac{\frac{x+1}{2}}{2 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)} + C$$

$$= \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + \frac{1}{16} \frac{x+1}{x^2+2x+5} + C$$

$n \geq 2$ eset, a számláló elsőfokú:

$$\int \frac{4x+3}{(x^2+2x+5)^2} dx = ?$$

Tipp: ahogy korábban, alakítsuk ki a nevező
deriváltját a számlálóban!

$$\int \frac{4x+3}{(x^2+2x+5)^2} dx = 2 \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2} dx$$

Az első integrálban használjuk az

$$u = x^2 + 2x + 5, \quad du = (2x+2)dx$$

helyettesítést. A második integrált az előző példában számoltuk ki.

Általános racionális törtfüggvények integrálása

Ha a nevező fokszáma > a számláló fokszáma:

29.
Tétel: Minden olyan racionális törtfüggvény, amelyben a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma, felbontható véges számú elemi tört összegére.

Ha a nevezőben szerepel az $(x-a)^n$ hatvány, akkor fellepnek a köv. elemi törtök: $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$.

Ha a nevezőben szerepel az $(x^2+bx+c)^n$ hatvány, fellepnek a köv. elemi törtök:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}, \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2}, \dots, \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

Példa:

Bontsuk fel $\frac{x+2}{x^3+1}$ -et elemi törtök összegére!

$$(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad \text{alakhán írható fel.}$$

$$A, B, C = ?$$

Körünk közös nevezőre:

$$\frac{x+2}{x^3+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

A nevezőt elhagyhatjuk) a számlálót rendezzük:

$$0x^2 + x + 2 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C$$

- 77 -

Akkor áll fenn az egyenlőség, ha a hűlőközlő
 x -hatványok együtthatói rendre megegyeznek, azaz

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = -A + B + C \\ 2 = A + C \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{ert} \\ \longrightarrow \\ \text{megoldjuk} \end{array} \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{5}{3} \end{array}$$

Tehát: $\frac{x+2}{x^3+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{-x+5}{x^2-x+1}$

$$\int \frac{x+2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{-x+5}{x^2-x+1} dx$$

Az elemi törték integrálásáról tanultak alapján most
 hiszámolható:

$$\int \frac{x+2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

2. Példa: $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = ?$

Bontsunk parciális törtékre: $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$$x = A(x+1)^2 + B(x^2-1) + C(x-1)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 2A + C \\ 0 = A - B - C \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \dots \text{Hf.}$$

3. Példa: $\int \frac{2x-3}{(x+2)^3} dx = ?$

$$\frac{2x-3}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$2x-3 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C$$

$$2x-3 = A(x^2+4x+2) + B(x+2) + C$$

$$2x - 3 = Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B + C$$

$$\begin{cases} 0 = A \\ 2 = 4A + B \\ -3 = 2A + 2B + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 2 \\ C = -7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{(x+2)^3} dx &= 2 \int \frac{1}{(x+2)^2} dx - 7 \int \frac{1}{(x+2)^3} dx = \\ &= -2 \frac{1}{x+2} + \frac{7}{2} \frac{1}{(x+2)^2} + C \end{aligned}$$

Ha a számláló fokszáma $\geq$ a nevező fokszáma:

ilyenkor első lépésként a számlálót elosztjuk a nevezővel ún. polinomosztással. Erőltat az integrandusz felbontható egy polinom és egy olyan rac. törtfüggvény összegére, amelyben a nevező fokszáma ^{már} nagyobb a számláló fokszámánál.

A polinomosztást itt most nem tárgyaljuk. Az érdeklődők megtanulhatják az alábbi pdf 10. oldalától:

www.math.u-szeged.hu/~nbogya/dimat1011I/gyakorlat/polinomosztas.pdf

Határozott integrál

- 78 -

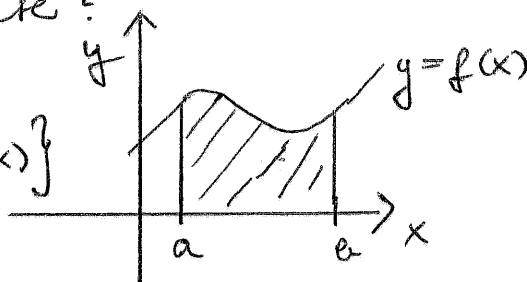
Riemann - integrál

Ezen az előadáson legyen f valós, zárt intervallumon értelmezett függvény: $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$.

Kérdés / motiváció: Ha f nemnegatív függvény, mi az $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ görbék által határolt síkresz "terület"?

$$H = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

H terület?



Fogalmak / jelölések

$[a, b]$ egy felosztása / particiója:

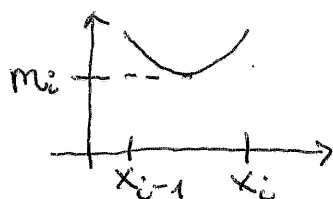
$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

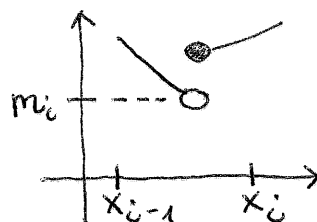
felölés: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (i -dik részintervallum hossza)

$$m_i := \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \text{ ha } f \text{ folytonos}$$

$$m_i := \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \text{ általában}$$



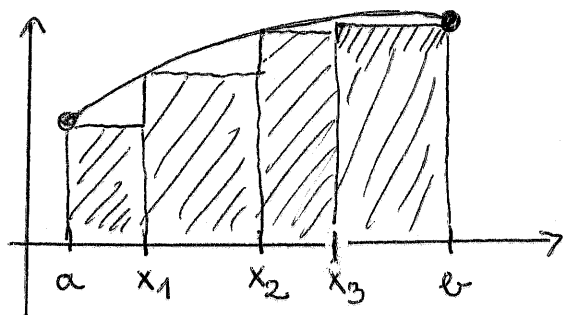
itt f folytonos



nem folytonos

Alsó összeg (Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg):

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{S}(f, P) := m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \end{aligned}$$

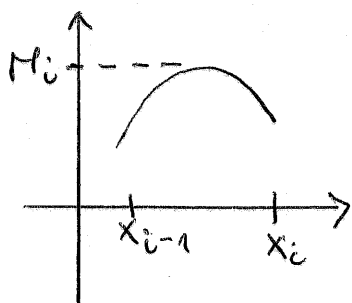


$\underline{S}(f, P)$ a besatírozott
léglalapak területének
összege

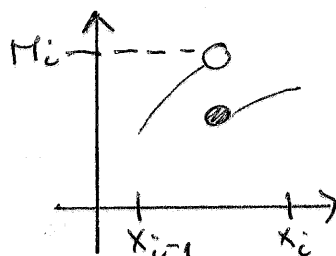
Hasonlóan:

$$M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \text{ ha } f \text{ folytonos}$$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \text{ általában}$$



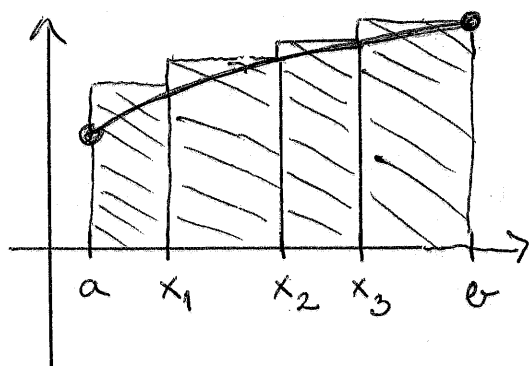
egy folytonos példa



nemfolytonos példa

$$\begin{aligned} \bar{S} = \bar{S}(f, P) &= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \\ &= \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \end{aligned}$$

Felső összeg (Darboux-féle felső integrálközelítő
összeg)



$\bar{S}(f, P)$ a bevonalkázott
léglalapak területének
összege

$$\underline{S}(f, P) \leq \text{f. "terület"} < \bar{S}(f, P)$$

Kérdések: létezik-e olyan I szám, hogy $\forall P$
beosztásra $\underline{S}(f, P) \leq I \leq \bar{S}(f, P)$?

Ha igen, hány ilyen szám létezik?

Példa: $f(x) = x^2$, $[a, b] = [0, 1]$

Teljessük a követhető beosztást (ehvidisutans beosztást):

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n \Rightarrow \Delta x_k = \frac{1}{n}$$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Ehhez $m_k = f(x_{k-1}) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}$

$$M_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\underline{S} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \quad \Delta x_i = \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \{0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2\} = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$\Uparrow$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\bar{S} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n =$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right\} = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

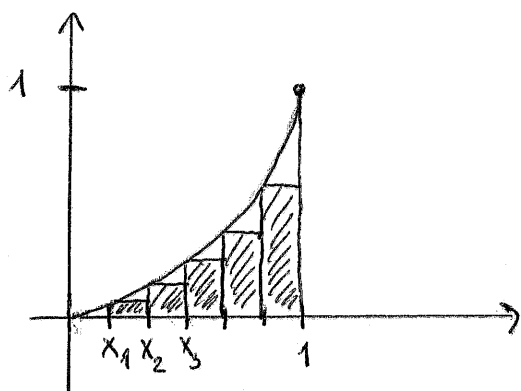
Elemi algebrai átalakításokkal:

$$\underline{S} = \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6n^3} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{3n^2-n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{3n-1}{6n^2}$$

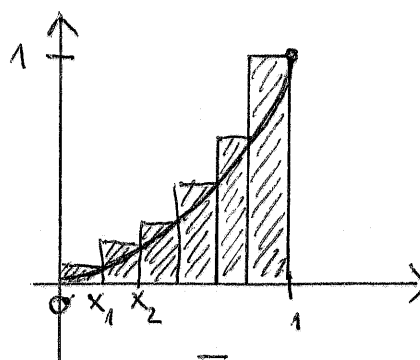
$$\bar{S} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{3n+1}{6n^2}$$

pozitív, de
abszolút értékben kicsi,
ha n nagy

$I = \frac{1}{3}$ az egyetlen valós szám, amelyre
 $\underline{S} \leq I \leq \bar{S}$ bármely fenti beosztással.



$\underline{S}$
7 osztópont esetén



$\bar{S}$ 7 osztópont esetén

$$f(x) = x^2$$

$$[a, b] = [0, 1]$$

30.
Tétel: Ha P és Q két tetszőleges ^{be} felosztás,
akkor $\underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, Q)$

Bizonyítás:

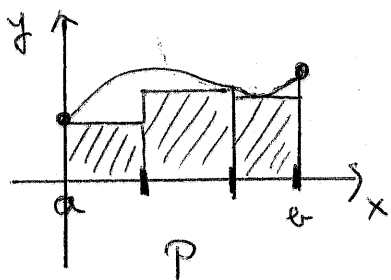
Legyen P tetszőleges felosztás.

Legyen P' az a felosztás, amely tartalmazza P osztópontjait és még egy $x' \in [a, b]$ -t:

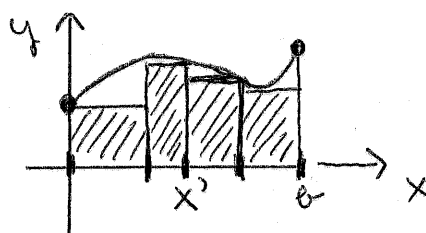
$$P' = P \cup \{x'\}$$

Vegyük észre, hogy ekkor

$$\underline{S}(f, P') \geq \underline{S}(f, P) \text{ és } \bar{S}(f, P') \leq \bar{S}(f, P)$$



$\Rightarrow$



Az alsó összeg biztosan nem csökken
(nő, esetleg nem változik)

Legyen most P és Q tetszőleges felosztás. Az előbbi észrevételből következik, hogy a $P \cup Q$ felosztásra (a P és Q osztópontjait együtt tartalmazó felosztásra):

$$\underline{S}(f, P \cup Q) \geq \underline{S}(f, P) \text{ és}$$

$$\bar{S}(f, P \cup Q) \leq \bar{S}(f, Q).$$

Az nyilvánvaló, hogy

$$\underline{S}(f, P \cup Q) \leq \overline{S}(f, P \cup Q),$$

$$\text{hiszen } \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \leq \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad \left(\inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \leq \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \right).$$

Összegezve:

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P \cup Q) \leq \overline{S}(f, P \cup Q) \leq \overline{S}(f, Q). \quad \square$$

Következmény: $\exists I \in \mathbb{R}$, hogy bármely P, Q beosztásra

$$\underline{S}(f, P) \leq I \leq \overline{S}(f, Q). \quad (*)$$

Bizonyítás:

Előző lemmára $\Rightarrow$ az alsó összegek halmara felülről korlátos, azaz $\{\underline{S}(f, P) : P \text{ beosztása } [a, b]\text{-nek}\}$ felülről korlátos ($\forall Q$ beosztásra $\overline{S}(f, Q)$ felső összeg egy korlát).
 $\Rightarrow \exists \underline{I} = \sup_{P \text{ beosztás}} \underline{S}(f, P)$. Ekkor $\underline{S}(f, P) \leq \underline{I}$

és $\underline{I} \leq \overline{S}(f, Q) \quad \forall P, Q$ beosztásra.

($\underline{I}$ neve: Darboux-féle alsó integrál)

Hasonlóan: $\{\overline{S}(f, P) : P \text{ beosztása } [a, b]\text{-nek}\}$ alulról korlátos $\Rightarrow \exists \overline{I} = \inf_{P \text{ beosztás}} \overline{S}(f, P)$

Ekkor $\underline{S}(f, P) \leq \underline{I} \leq \overline{S}(f, Q)$ bármely P, Q beosztásra.

és is ($\overline{I}$ neve: Darboux-féle felső integrál)

A fenti tulajdonságokból könnyen igazolható:

$$\underline{I} \leq \overline{I}$$

Minden olyan I valós szám megfelelő, amelyre
 $\underline{I} \leq I \leq \overline{I}.$ $\square$

Definíció: $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha létezik pontosan egy I valós szám, hogy $\forall P, Q$ beosztása

$$\underline{S}(f, P) \leq I \leq \overline{S}(f, Q). \quad (*)$$

felölés: $I = \int_a^b f(x) dx$
 vagy: $I = \int_a^b f$ $\leftarrow f$ Riemann-integrálja/
 f határozott integrálja $[a, b]$ -n.

31.
Tétel:

Legyen $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$. Ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz létezik P beosztás úgy, hogy

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon,$$

akkor f integrálható $[a, b]$ -n.

Bizonyítás: Egyszerű.

Tegyük fel, hogy $\exists I_1 < I_2$ a (*) tulajdonsággal, azaz $\forall P$ partícióra

$$\underline{S}(f, P) \leq I_1 < I_2 \leq \overline{S}(f, P).$$

Legyen most $\epsilon = I_2 - I_1$. A tétel feltévése szerint f P beosztás, amelyre

$$\overline{S}(f, P) < \underline{S}(f, P) + \epsilon.$$

$$\text{Ezért } I_2 \leq \overline{S}(f, P) < \underline{S}(f, P) + \epsilon \leq I_1 + \epsilon = I_2.$$

$$I_2 < I_2.$$

Ez ellentmondás. $\square$

32. Tétel Legyen $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$. Ha f integrálható, akkor $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $\forall P$ beosztás és $0 < \max_k \Delta x_k < \delta$ esetén

$$|I - \underline{S}(f, P)| < \varepsilon,$$

$$|I - \bar{S}(f, P)| < \varepsilon.$$

Nem bizonyítjuk. $\square$

A 31. Tétel segítségével igazoljuk, hogy a monoton illetve a folytonos függvények integrálhatóak.

33. Tétel. Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ monoton. Ekkor integrálható $[a, b]$ -n.

Bizonyítás mon. növe függvényekre:

$\forall P$ beosztása

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \underbrace{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i [f(b) - f(a)] < \varepsilon, \text{ ha}$$

$$\max \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

31. Tétel $\Rightarrow f$ integrálható. $\square$

Olvasmány:

Térjünk át a folytonos függvények integrálhatóságára.

Émlékeztető:

f folytonos egy x_0 pontban $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$

$\forall \epsilon > 0$ -hoz létezik $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ úgy, hogy ha

$x_1 \in D_f$ és $|x_1 - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon.$$

f folytonos $[a, b]$ -n $\Leftrightarrow f$ folytonos $\forall x_0 \in [a, b]$ -ben

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in [a, b]$ -hoz $\exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ úgy,

hogy ha $x_1 \in [a, b]$ és $|x_1 - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon.$$

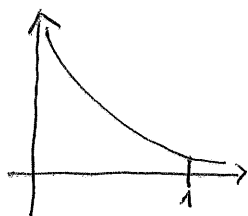
Definíció : Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n, ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ úgy, hogy $\forall x_0, \forall x_1 \in [a, b], |x_1 - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Tehát egyenletes folytonosság esetén δ nem függ x_0 -tól! Csak ϵ -től függ!

34. Tétel : f folytonos a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon $\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n.

Nem bizonyítjuk. $\blacksquare$



$f(x) = \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos $(0, 1]$ -en.

35. Tétel : Ha f $[a, b]$ -n folytonos, akkor integrálható.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy zárt intervallumon folyt. függvény felveszi a szélsőértékeit.

Ezt $M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f(x_i')$ amely $x_{i-1} \leq x_i', x_i'' \leq x_i$ -vel.

$$m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f(x_i'')$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

f egyenletesen folytonos $\Rightarrow \exists \delta > 0$, hogy

$$\forall x_0, x_1 \in [a, b], |x_1 - x_0| < \delta \text{ esetén } |f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Legyen P olyan beosztás, amelyre

$$\max \Delta x_i < \delta$$

$$\begin{aligned} \text{Ekkor } \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{(f(x_i') - f(x_i''))}_{< \varepsilon / (b-a)} \cdot \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\varepsilon}{b-a} (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_n - x_{n-1}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b - a) = \varepsilon \end{aligned}$$

31. Tétel $\Rightarrow f$ integrálható. ▣

A határozott integrál tulajdonságai

36. Tétel

(i) Legyen $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ integrálható. Ekkor $\forall c \in (a, b)$ esetén f $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n is integrálható, és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(ii) $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és integrálható $[a, b]$ -n, $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

(iii) $f: [a, b] \rightarrow [0, M]$ integrálható $\Rightarrow \int_a^b f(x) \geq 0$
(Figyelem: itt $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$)

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és integrálható,
 $f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

(iv) $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ integrálható

$|f|$ is integrálható $[a, b]$ -n, és

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Bizonyítás: Csak az (iv) tulajdonságot igazoljuk, a többi tulajdonság nyilvánvaló.

(iv) bizonyítása:

Tudjuk, hogy $\forall x \in [a, b]$ -re $f(x) \leq |f(x)|$.

$$(iii) \text{ tulajdonság} \Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{B :=} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)| dx}_{A :=}$$

Tehát $B \leq A$.

Hasonlóan: $\forall x \in [a, b] - \mathbb{R} : -f(x) \leq |f(x)|$

$$(iii) \Rightarrow \int_a^b (-f(x)) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ - \int_a^b f(x) dx \\ \parallel \\ -B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Tehát} \\ \Rightarrow -B \leq A \end{array}$$

Összegezve: $B \leq A, -B \leq A \Rightarrow |B| \leq A$

$$\text{Azaz: } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \square$$

Definíció: $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ integrálható

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx := 0.$$

Az integrálfüggvény

Def: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos.

f integrálfüggvénye:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

37. Tétel: Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor az F integrálfüggvény is folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n, és

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b) \text{ esetén.}$$

Bizonyítás:

1. F folytonossága: $x_0 \in [a, b]$ tetszőleges

Kell: $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ - hoz $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
 úgy, hogy $\forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta$ esetén
 $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$

Először tegyük fel, hogy $x > x_0$.

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

3.6.(i) Tétel

f folytonos $[a, b]$ -n $\Rightarrow$ korlátos $[a, b]$ -n, azaz
 $\exists M \geq 0: |f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$.

Következtetések

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \int_{x_0}^x M dt =$$

3.6.(iv) Tétel 3.6.(iii)

$$= M(x - x_0) = M|x - x_0|$$

$x > x_0$

Ha $x < x_0$, akkor hasonlóan érvelünk:

$$F(x) - F(x_0) = \dots = \int_{x_0}^x f(t) dt = - \int_x^{x_0} f(t) dt$$

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \dots \leq \int_x^{x_0} M dt = M(x_0 - x) = M|x - x_0|$$

$x < x_0$

Ha $\delta = \varepsilon/M$ és $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$, akkor a fentiek alapján

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

2. F differenciálhatósága: legyen $x_0 \in (a, b)$

letszöveges, nögrékelt

Kell: $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ létezik, és $= f(x_0)$.

Hár hiszámoltuk:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Legyen először $x > x_0$.

felölje m_x illetve M_x f minimumát illetve maximumát $[x_0, x]$ -en:

$$m_x \leq f(t) \leq M_x \quad \forall t \in [x_0, x].$$

$$3.6. (iii) \Rightarrow \int_{x_0}^x m_x dt \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq \int_{x_0}^x M_x dt$$

$$m_x (x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M_x (x - x_0)$$

$$m_x \leq \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} \leq M_x$$

Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit:

$$\exists x' \in [x_0, x] : m_x = f(x')$$

$$\exists x'' \in [x_0, x] : M_x = f(x'')$$

Ha $x \rightarrow x_0^+$, azaz az $[x_0, x]$ intervallum nähéződik az x_0 pontra, akkor folytonosság miatt

$$f(x') \rightarrow f(x_0) \quad \text{és} \quad f(x'') \rightarrow f(x_0).$$

Tehát

$$m_x \leq \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} \leq M_x$$

$f(x')$
 $\downarrow$
 $f(x_0)$

$f(x'')$
 $\downarrow$
 $f(x_0)$

ha $x \rightarrow x_0^+$

Ezt szükségképpen

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} = f(x_0).$$

RENDŐRELV
ALAPJÁN.

Hasonlóan vizsgáljuk $x < x_0$, $x \rightarrow x_0^-$ esetén:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\int_x^{x_0} f(t) dt}{x_0 - x} = f(x_0).$$

Tehát $F'(x_0) = f(x_0).$



Vegyük észre: azt igazoltuk, hogy ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor az integrál-függvénye a primitív függvénye!

Következmény: 25. Tétel: Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor létezik primitív függvénye.

Eszerint:

Az $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ def.-ből következik: $F(a) = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) dt = F(b) = F(b) - F(a).$$

Tudjuk, f tetszőleges c_f primitív függvényére $[a, b]$ -n folytonos, (a, b) -n differenciálható

$$c_f(x) = F(x) + C \text{ alakú, } C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\underline{c_f(b) - c_f(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)}$$

Kapjuk a következő tételt:

38. Tétel (Newton - Leibniz - formula,

Integrálszámítás alaptétele)

Tegyük fel, hogy

- f folytonos $[a, b]$ -n,

- c_f folytonos $[a, b]$ -n és $c_f'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ -re

(azaz c_f folytonos primitívje f -nek). ▢

$$\text{Ekkor } \int_a^b f(x) dx = c_f(b) - c_f(a).$$

Megjegyzés: felölés: $[c_f(x)]_a^b = c_f(b) - c_f(a)$

Azt szoktuk írni, hogy

$$\int_a^b f(x) dx = [c_f(x)]_a^b = c_f(b) - c_f(a).$$

Példa: x^2 -nek $\frac{x^3}{3}$ a primitív függvénye

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

ert már láttuk!

$$\int_0^{\pi/2} \sin x = \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = -\cos(\underbrace{\frac{\pi}{2}}_0) - (-\cos \underbrace{0}_1) = +1.$$

Helyettesítéses integrálás

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x) dx$$

VALTOZNAK A
HATA'ROK!

Er a formula igaz, ha f és g' is folytonos (g' folytonos $[a, b]$ -n, f folytonos a g értékeit tartalmazó halmazon).

A fenti formulát könnyű igazolni:

Ha $F' = f$, akkor

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_a^b \underbrace{F'(g(x)) \cdot g'(x)}_{(F(g(x)))'} dx = \left[F(g(x)) \right]_a^b$$

$$= \left[F(y) \right]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

Példák:

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{0^2+1}^{1^2+1} \sqrt{y} dy$$

$$y = x^2 + 1$$

$$dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{y} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \{ \sqrt{8} - 1 \}$$

nem térünk vissza az x változóra!

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx =$$

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x$$

A második integrálban használjuk az

$$u = \cos x$$

$$du = -\sin x \, dx \quad \text{helyettesítést.}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx + \int_{\cos 0}^{\cos \frac{\pi}{2}} u^2 \, du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx + \int_1^0 u^2 \, du = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_1^0 =$$

$$= -\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 - (-\underbrace{\cos 0}_1) + \frac{1}{3} 0^3 - \frac{1}{3} 1^3 = \frac{2}{3}.$$

Parciális integrálás: T.f.k. f, g és a deriváltjaik folytonosak $[a, b]$ -n. Ekkor

$$\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = \underbrace{[f(x) g(x)]_a^b}_{f(b)g(b) - f(a)g(a)} - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx.$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Példa:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx = [2\sqrt{x} \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e \underbrace{2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}}_{2 \frac{1}{\sqrt{x}}} \, dx =$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow f = 2\sqrt{x}$$

$$g = \ln x \rightarrow g' = \frac{1}{x}$$

$$= [2\sqrt{x} \cdot \ln x]_1^e - [4\sqrt{x}]_1^e =$$

$$= 2\sqrt{e} \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} - 2\sqrt{1} \cdot \underbrace{\ln 1}_0 - (4\sqrt{e} - 4\sqrt{1})$$

$$= -2\sqrt{e} + 4$$

3.9. Tétel: Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, akkor
 $\exists c \in [a, b]$ úgy, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Biz: legyen $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

3.6. (iii) Tétel $\Rightarrow$

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

Innen:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

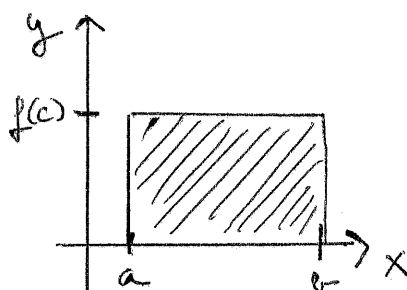
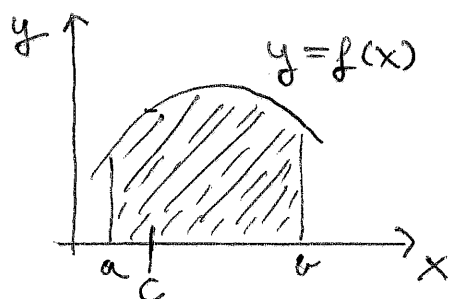
Mivel f folytonos, a minimuma és a maximuma közötti bármely értéket felveszi. $\Rightarrow \exists c \in [a, b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

f integrálközepe $[a, b]$ -n. 

Geometria jelentés:

Az $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ görbék által határolt síknész területe megegyezik egy $f(c)$, illetve $(b-a)$ oldalhosszúságú téglalap területével.



Improprius integrálok

-95-

Def: Tegyük fel, hogy f nem integrálható $[a, b]$ -n, de $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$ esetén f integrálható $[a+\varepsilon, b]$ -n.

Ha a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

véges határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy f improprius integrálható $[a, b]$ -n / f improprius integrálja konvergens $[a, b]$ -n.

felölis: $\int_a^b f(x) dx$ (ahogy korábban).

Hasonlóan: Ha f nem integrálható $[a, b]$ -n, de $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$ esetén integrálható az $[a, b-\varepsilon]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

feltéve hogy ez a határérték létezik.

1. Példa: $f(x) = \ln x$ nem integrálható $[0, 1]$ -en
($x=0$ -ban nincs értelmezve, és a nulla környezetében nem is korlátos)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[x \cdot \ln x - x \right]_{\varepsilon}^1 =$$

67. oldal, 4. Példa

$$= 1 \cdot \ln 1 - 1 - \varepsilon \cdot \ln \varepsilon + \varepsilon = -1, \text{ hiszen}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \cdot \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 0.$$

(Ezt a határértéket kiszámoltuk az 55. oldalon.)

Tehát $f(x) = \ln x$ improprius integrálható $[0, 1]$ -en,
és

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

2. Példa $f(x) = \frac{3}{x-2}$ nem korlátos $[1, 2)$ -n
 $\Rightarrow$ nem integrálható $[1, 2]$ -n.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 3 \int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{x-2} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 3 \left[\ln|x-2| \right]_1^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 3 (\ln \varepsilon - \ln 1) = -\infty$$

$f(x) = \frac{3}{x-2}$ nem improprius integrálható
az $[1, 2]$ intervallumon

3. Példa : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ nem korlátos $[0, 1)$ -en $\Rightarrow$
nem integrálható $[0, 1]$ -en!

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{\arcsin(1-\varepsilon)} \frac{\sin t}{|\cos t|} \cdot \cos t \, dt = \textcircled{*}$$

$$\begin{aligned} x &= \sin t & \Rightarrow \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} \\ dx &= \cos t \, dt & &= |\cos t| \end{aligned}$$

Idevükh fel a 9. oldalra, hogy $\arcsin(z) \in (0, \frac{\pi}{2})$,

ha $z \in (0, 1)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in (0, 1)$ -re $\arcsin(1-\varepsilon) \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ azon az intervallumon, ahol integrálunk, $\cos t > 0$

$\Rightarrow |\cos t| = \cos t \quad \forall t \in [0, \arcsin(1-\varepsilon)]$.

Tehát

$$\textcircled{*} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{\arcsin(1-\varepsilon)} \sin t \, dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\cos t \right]_0^{\arcsin(1-\varepsilon)} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\cos(\arcsin(1-\varepsilon)) + \cos 0 \right\} =$$

$$= -\cos(\arcsin 1) + 1 = -\cos \frac{\pi}{2} + 1 = 1$$

Def: Tegyük fel, hogy f nem integrálható $[a, b]$ -n, de $\exists c \in (a, b)$, hogy f improprius integrálható $[a, c]$ -n és $[c, b]$ -n. Ekkor f $[a, b]$ -n vett improprius integrálja:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Példa: $\int_{-1}^1 x^{-2} dx$ improprius integrál létezik-e?

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\epsilon}^1 = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon} \right) = \infty \end{aligned}$$

ez az improprius integrál nem létezik

Definíció: Tegyük fel, hogy $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ minden $t \geq a$ esetén integrálható az $[a, t]$

intervallumon. Ha a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

határérték létezik és véges, akkor a határértéket f ^{függvény} $[a, \infty)$ -n vett improprius integráljának nevezzük.

$$\text{felölés: } \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Hasanlóan definiáljuk: $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ -et.

Egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja $\mathbb{R}$ -en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

valamely $a \in \mathbb{R}$ -re, ha a jobb oldalon szereplő improprius integrálok léteznek.

1. Példa:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ létezik-e?}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}$$

2. Példa: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$ improprius integrál létezik-e?

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\ln |x|]_t^{-1} =$$

$$= \ln 1 - \ln |t| = -\infty$$

0

ez az improprius integrál nem létezik.

3. Példa

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx \text{ improprius integrál létezik-e?}$$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + 1 \right) = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+x+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \int_1^t \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} dx =$$

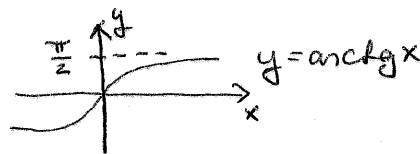
$$u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{2t+1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2t+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1} du = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctg u]_{\frac{2t+1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2t+1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \underset{\substack{\downarrow t \rightarrow \infty \\ \frac{\pi}{2}}}{\operatorname{arctg} \frac{2t+1}{3}} - \underset{\substack{\parallel \\ \frac{\pi}{3}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{3}} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$



4. Példa: $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$ létezik-e?

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx,$$

ha ez utóbbi improprius integrálok léteznek.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_0^t -2x e^{-x^2} dx =$$

$$\begin{aligned} u &= -x^2 \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_0^{-t^2} e^u du = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} [e^u]_0^{-t^2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} (e^{-t^2} - 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

Hasanlóan: $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}$

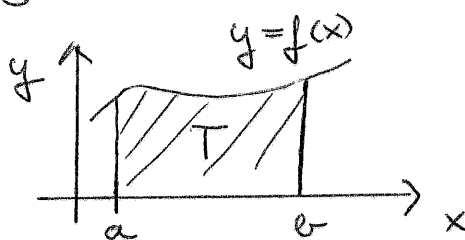
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = 0$$

A határozott integrál (geometriai) alkalmazásai

A határozott integrál geometriai jelentése:
előjeles terület

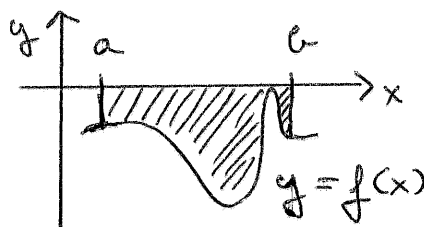
Tegyük fel, hogy f folytonos $[a, b]$ -n és nemnegatív.
Az $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ görtek által
határolt síkrész területe:

$$T = \int_a^b f(x) dx$$



Ha f folytonos $[a, b]$ -n és nemnegatív: az $x=a$,
 $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ görtek által határolt síkrész
területe:

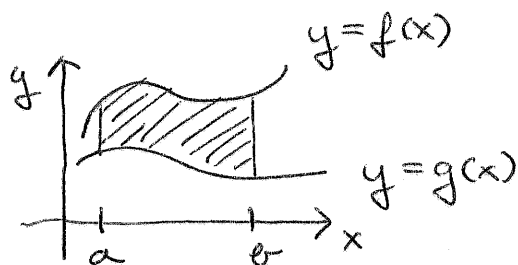
$$T = - \int_a^b f(x) dx$$



Ha f és g folytonos $[a, b]$ -n, $f(x) \geq g(x)$

$\forall x \in [a, b]$ -re, akkor az $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$,
 $y=g(x)$ görtek által határolt terület:

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



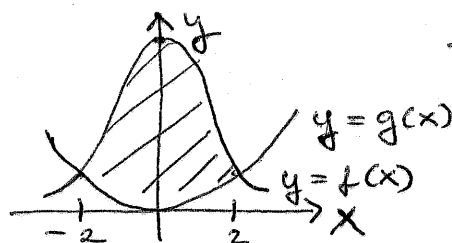
Példa: Határozzuk meg

az $f(x) = \frac{5}{1+x^2}$ és a $g(x) = \frac{x^2}{4}$ függvények
grafikonjai által közrezárt síkidom területét!

Hol van az $y=f(x)$, $y=g(x)$ görtek metszés-
pontja?
Oldjuk meg: $f(x) = g(x)$

$$\frac{5}{1+x^2} = \frac{x^2}{4}$$

$$20 = x^4 + x^2$$



$$z = x^2 \text{ jelöléssel: } 0 = z^2 + z - 20$$

↓

$$z_1 = 4 \quad z_2 = -5$$

er nem jó nekünk

$$x^2 = 4$$

↓

$$x = 2 \text{ vagy } x = -2$$

$$\int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{5}{1+x^2} - \frac{x^2}{4} \right) dx =$$

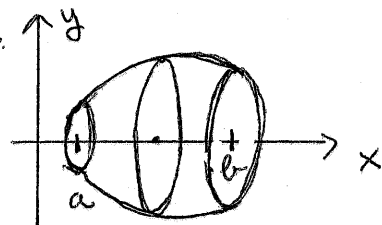
$$= 5 [\arctg x]_{-2}^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \dots = 10 \arctg 2 - \frac{4}{3}.$$

Térfogat-számítás

40. Tétel Legyen f folytonos $[a, b]$ -n. Az f függvény $[a, b]$ fölött eső ívdarabját forgassuk meg az x -tengely körül.

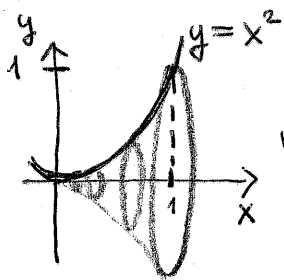
Az így kapott forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Példa: „Koktélos pohár” térfogata

$$f(x) = x^2, \quad [a, b] = [0, 1]$$



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Bizonyítás (a 40. Tételhez):

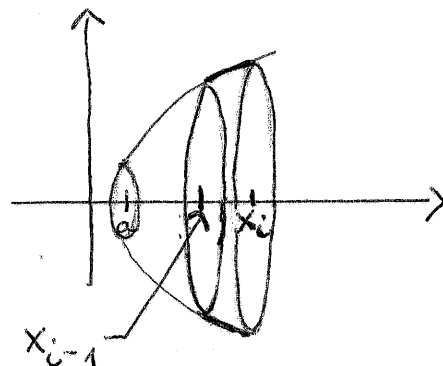
Legyen P az $[a, b]$ egy beosztása:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

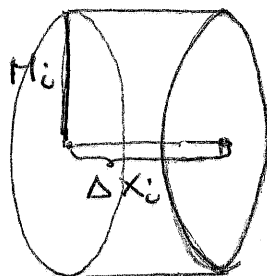
Állítsunk az x_i osztópontokon át az x -tengelyre merőleges síkokat. Így a forgástestet n részre osztjuk fel. (lásd ábra a kör. oldalon)

Jelölje V_i az i -edik résztest térfogatát, $1 \leq i \leq n$.

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \\ = \sum_{i=1}^n V_i$$



Az i -dik résztest lefelé foglalható egy olyan hengerbe, amelynek a magassága $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, alaphörének sugara $M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.



Hasonlóan: az i -dik résztest tartalmaz egy olyan hengert, amelynek a magassága $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, és alaphörének sugara $m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Ezért

$$\pi \underline{S}(f^2, P) = \sum_{i=1}^n m_i^2 \pi \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n V_i \leq M_i^2 \pi \Delta x_i = \pi \overline{S}(f^2, P).$$

Azt kaptuk, hogy a forgástest térfogata bármely beosztás esetén a πf^2 függvény alsó és felső integrálközelítő összege közé esik. Mivel πf^2 folytonos, ezért integrálható $[a, b]$ -n.

Sűrűségképpen

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Forgástest palástjának felszíne

4.1. Tétel: Tegyük fel, hogy f pozitív $[a, b]$ -n, differenciálható $[a, b]$ -n, és a deriváltja folytonos $[a, b]$ -n. Az f függvény $[a, b]$ fölé eső ívdarabjának az x -tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának a felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Példa: „Koktélos pohár” palástjának a felszíne:

$$2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = ?$$

Ívhossz számítása

Mi az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $[a, b]$ intervallum fölé eső görbéjének ívhossza? Ezt itt most nem definiáljuk, intuitív elhíprelésünkre támaszkodunk. Ígazolható a következő:

Ha f folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n (azaz f differenciálható $[a, b]$ -n és a deriváltja folytonos), akkor f függvény $[a, b]$ fölé eső görbéjének ívhossza:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

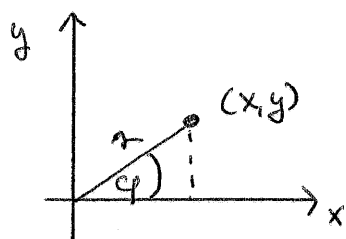
Példa: $f(x) = x^{3/2}$, $[a, b] = [2, 4]$

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_{1+\frac{9}{2}}^{10} \sqrt{u} du = \frac{4}{9} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{5,5}^{10} = \\ &= \frac{8}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - 5,5^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

$u = 1 + \frac{9}{4}x$
 $du = \frac{9}{4} dx$

Területszámítás polárkoordinátás alakban:

Polárkoordináta - rendszer:



Az euklideszi sík tetszőleges (x, y) pontját megadhatjuk az (r, φ) párral is, ahol

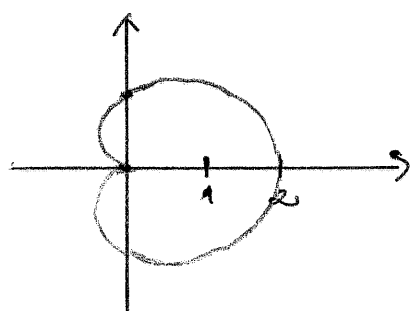
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ az (x, y) pont origótól való távolsága,
 φ az x -tengely és a $(0, 0)$, (x, y) pontokon áthaladó egyenes által bezárt szög.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Ekkor $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$.

Hogyan számoljuk polárkoordinátákkal megadott görbe által határolt síkrész területét?

Példa: $r = 1 + \cos \varphi$, ahol $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



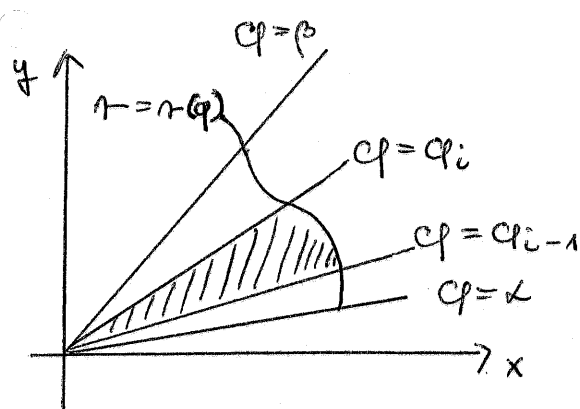
Mekkora a „szív” területe?

4.1. Tétel: Ha a görbe polárkoordinátás előállítására $r = r(\varphi)$, akkor a $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ és az $r = r(\varphi)$ görbék által határolt terület:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

Bizonyítás: $[\alpha, \beta]$ egy beosztása:

$$P: \alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n = \beta$$

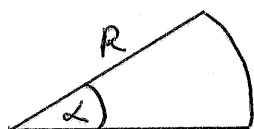


A vizsgálandó síkrész felbomlik n részre: az i -edik síkrész lesz a $q = q_{i-1}$, $q = q_i$, $r = r(q)$ görvek által határolt síkidom. Jelölje T_i ennek területét.

Az i -edik rész benne van egy olyan köríkhöz, amelynek körponti szöge $\Delta q_i = q_i - q_{i-1}$, sugara $\max_{q \in [q_{i-1}, q_i]} r(q)$.

Az i -edik rész továbbá tartalmaz egy köríkhöz, amelynek körponti szöge Δq_i , sugara $\min_{q \in [q_{i-1}, q_i]} r(q)$.

Tudjuk:



területe: $\frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha$
 $\uparrow$
 radiánban
 megadva

Ez alapján:

$$\frac{1}{2} \left(\min_{q \in [q_{i-1}, q_i]} r(q) \right)^2 \Delta q_i \leq T_i \leq \frac{1}{2} \left(\max_{q \in [q_{i-1}, q_i]} r(q) \right)^2 \Delta q_i$$

Összegezve $i = 1, \dots, n-1$:

$$\frac{1}{2} \underline{(r^2, P)} \leq T \leq \frac{1}{2} \overline{(r^2, P)} \quad \text{felsőreleges } P \text{ beosztása}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(q) dq$$



Térjünk vissza a példára: A „sűrű” terület

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \varphi + 2 \cdot \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$