

Differenciálszámítás

- 30 -

Def. Adott $a \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f definiálva van a egy környezetében, azaz a $(a-\delta, a+\delta)$ intervallumon mely $\delta > 0$ -val.

Azt mondjuk, hogy f differenciálható a -ban, ha a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ véges határérték létezik.}$$

felölések: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\leftarrow f$ differenciálható-nyadosa / deriváltja

vagy: $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a -ban

Másik megfogalmazás: f differenciálható a -ban,

ha a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ véges hat. érték létezik.

$$\text{Itt: } \begin{aligned} x &= a + h \\ x - a &= h \end{aligned}$$

Még egy, a fentiekkel ekvivalens definíció

(későbbi tanulmányok szempontjából fontos):

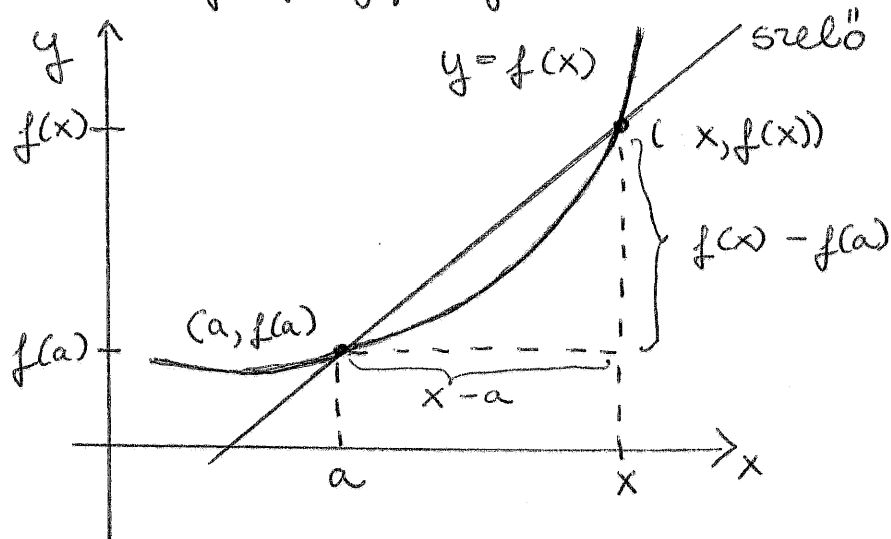
Def: Tegyük fel, hogy f definiálva van az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében, azaz mely $\delta > 0$ -val az $(a-\delta, a+\delta)$ intervallumon. Az f függvény differenciálható a -ban, ha $\exists A \in \mathbb{R}$ szám és $w: (a-\delta, a+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $\lim_{x \rightarrow a} \frac{w(x)}{x - a} = 0$,

$$\text{és } f(x) = f(a) + A(x-a) + w(x) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ esetén.}$$

$\uparrow$
(Azt mondhatjuk, f közelíthető egy lineáris függvénnyel.)

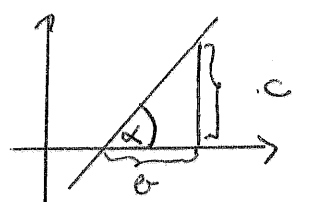
A differenciálhatóság geometriai jelentése:

Adott f függvény és $a \in \mathbb{R}$ pont.



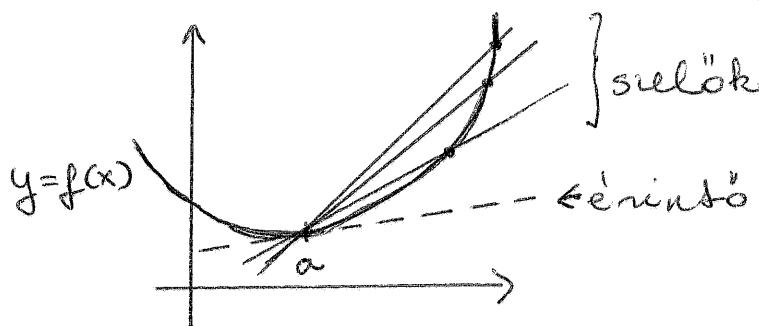
A szelő meredeksége: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

[Ismétlés : egyenes meredeksége : $m = \tan \alpha = \frac{c}{b}$]



The diagram shows a right triangle with an angle α at the origin. The side opposite to α is labeled c , and the side adjacent to α is labeled b .

Érintő az a pontban : a szelők határhelyzete amint $x \rightarrow a$.



Érintő meredeksége : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Tehát :

f differenciálható a pontban $\Leftrightarrow a$ pontban érintő húzható f grafikonjához, és az érintő meredeksége véges (azaz az érintő nem merőleges az x -tengelyre).

Nevezetes függvények deriváltjai (példák)

1. Példa: $f(x) = x^2$ $f'(a) = ?$ Melyik $a \in \mathbb{R}$ esetén létezik?

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ esetén létezik

$$f'(a) = 2a \quad \text{Pl: } f'(1) = 2$$

a -t x-re cserélve azt írjuk: $(x^2)' = 2x$

2. Példa $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} =$$

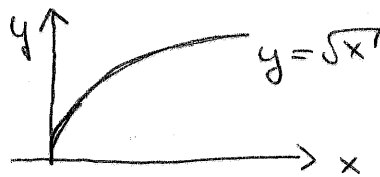
$$\uparrow\uparrow$$

$$(x - a) = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$ véges határérték létezik, ha $a > 0$

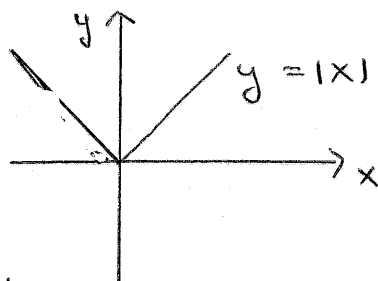
Tehát $\sqrt{x}$ csak $x > 0$ esetén differenciálható.

$a = 0$ -ban az érintő merőleges az x -tengelyre



3. Példa: $f(x) = |x|$

$a = 0$ -ban nem húzható érintő f grafikonjához



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{nem létezik}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

4. Példa: $f(x) = \sin x$, $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = ?$$

$$x = a + h, \quad h \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sin a \cosh + \cos a \cdot \sinh) - \sin a}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin a \frac{\cosh - 1}{h} + \cos a \frac{\sinh}{h} \right)$$

$$= \sin a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h}$$

Vegyük észre:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1)(\cosh + 1)}{h(\cosh + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 - 1}{h(\cosh + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cosh + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{-h}{\cosh + 1}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{0}{2} = 0}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 h}{h^2}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ lásd.} \\ 13. \text{ oldal!}}} \right) = 0$$

Ezért:

$$\sin a \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h}}_{= 0} + \cos a \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h}}_{= 1 \text{ (a 13. oldal szerint)}} = \cos a$$

Levereltük: $f(x) = \sin(x)$ deriváltja a pontban: $\cos a$

$$\text{Azaz: } (\sin x)' = \cos x$$

Táblázat:

$f(x)$	$f'(x)$
c (konstans)	0
x	1
x^n ($n \in \mathbb{R}$)	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x

Ez a táblázat
dolgozatokban
és vizsgán
használható.

Att, hogy a
táblázatban
szereplő
deriváltak
helyesek,
idő hiányában
nem bizonyít-
juk.

$f(x)$	$f'(x)$
$a^x, a > 0$	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x, x > 0$	$1/x$
$\log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x, x < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x, x < 1$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$

Ebből levezethető például:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(3\sqrt{x})' = ? \quad \text{Hf.}$$

Emlékeztető az 1. és a 2. oldalról:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{összegfüggvény}$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \text{szorzatfüggvény}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{hányadosfüggvény} \quad g(x) \neq 0$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \text{összetett függvény}$$

9. Tétel: Tegyük fel, hogy f és g differenciálható a -ban. Ekkor

(a) $f+g$ differenciálható a -ban, és

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

(b) $c \in \mathbb{R}$ esetén cf függvény differenciálható a -ban, és

$$(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$$

(c) $f \cdot g$ differenciálható a -ban, és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

(d) ha $g(a) \neq 0$, akkor f/g differenciálható a -ban, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

10. Tétel: Ha g differenciálható a -ban és f differenciálható $g(a)$ -ban, akkor $f \circ g$ differenciálható a -ban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás: Csak a 9. Tétel (c) állítását bizonyítjuk.

9. Tétel / (c):

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{\text{def } x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$\uparrow$
 szorzatfüggvény
 def.

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x) \cdot g(a) + f(x)g(a) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} = \textcircled{*}$$

$$f \text{ folytonos} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$f \text{ és } g \text{ differenciálható } a \text{ -ban} \Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Ez alapján:

$$(*) = f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a). \quad \text{Házi feladat: 9. Tétel / (a), (b) biz.} \quad \square$$

Példák: $(x+2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$

$$(3 \cdot 5^x)' = 3 \cdot \ln 5 \cdot 5^x$$

$$\left(\frac{x}{2} + \sqrt[3]{x}\right)' = \left(\frac{1}{2}x + x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{2}x' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(x \cdot \cos x)' = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)$$

$$\left(\frac{x^2 - 3x}{x^3}\right)' = \frac{(2x-3)x^3 - (x^2-3x) \cdot 3x^2}{x^6}$$

Példák a 10. Tétel alkalmazására:

- Összetett függvények differenciálása

$$((x^2+5)^3)' = ?$$

$$\text{JH: } g(x) = x^2 + 5, \quad f(x) = x^3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 + 5)^3$$

$$((x^2+5)^3)' = 3(x^2+5)^2 \cdot 2x$$

$$\left(\ln \frac{1-x}{1+x}\right)' = ?$$

$$\text{JH } g(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad f(x) = \ln x$$

$$\left(\ln \frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1(1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2}$$

$$(e^{x^2-1})' = ? \quad \text{JH: } g(x) = x^2 - 1, \quad f(x) = e^x$$

$$(e^{x^2-1})' = e^{x^2-1} \cdot 2x$$

$$\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)' = ? \quad \text{Vegyük észre: } \frac{1}{\cos^3 x} = (\cos x)^{-3}$$

$$\text{JH: } g(x) = \cos x, \quad f(x) = x^{-3}$$

$$((\cos x)^{-3})' = -3 (\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x)$$

$$= -3 \frac{1}{\cos^2 x} (-\sin x)$$

Differenciálhatóság és folytonosság

Def: Azt mondjuk, hogy f differenciálható egy nyitott (a, b) intervallumon, ha annak minden pontjában differenciálható. (JH megengedjük, hogy $a = -\infty$ és/vagy $b = +\infty$.)

Def: Legyen f értelmezve az $(a-\delta, a]$ intervallumon mely $\delta > 0$ -val.

f baloldali deriváltja a -ban:

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(két $x \rightarrow a$ és $x < a$)

Legyen f értelmezve az $[a, a+\delta)$ intervallumon mely $\delta > 0$ -val.

f jobboldali deriváltja a -ban:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Def : f ~~értelmezhető~~ differenciálható a zárt $[a, b]$ intervallumon, ha

- differenciálható (a, b) -n,
- létezik a jobb oldali deriváltja a -ban,
- létezik a bal oldali deriváltja b -ben.

1.1. Tétel: Ha f differenciálható a -ban, akkor folytonos a -ban.

Bizonyítás : Tegyük fel, hogy f differenciálható a -ban, azaz $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ létezik.

Ha $h \neq 0$ és $a+h \in D_f$, akkor

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$$

$$\text{Ezért } \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h =$$

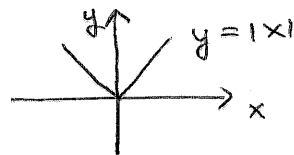
$$= f'(a) \cdot 0 = 0,$$

$$\text{azaz } \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a),$$

$$\text{azaz } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad f \text{ folytonos } a \text{-ban! } \square$$

A Tétel megfordítása nem igaz!

Példák : 1. $f(x) = |x|$ folytonos, de $a = 0$ -ban nem differenciálható



2. Példa

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \geq 1 \\ 3x^2 - 1, & x < 1 \end{cases}$$

Hol differenciálható?
Hol folytonos?

A polinomfüggvények ^{folytonosak,} differenciálhatóak $\rightarrow$
csak $x=1$ -en kell vizsgálni.

Folytonosság vizsgálata $x=1$ -ben:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^3 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x^2 - 1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ folytonos} \\ x=1\text{-ben is,} \\ \text{azaz az egész} \\ \text{számegyenesen.}$$

Az $x=1$ pontban való deriválhatósághoz a folytonosságon kívül kell még:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^3 + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + x + 1) = 3$$

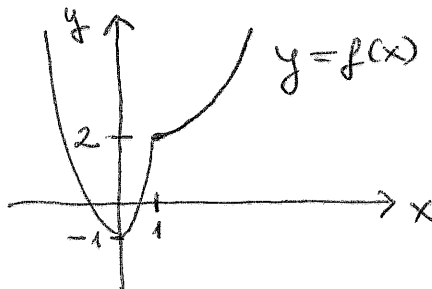
$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(3x^2 - 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} 3(x + 1) = 6$$

Tehát $f'_-(1) \neq f'_+(1)$,

$\Rightarrow f'(1)$ nem létezik.

Kapjuk: f $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ -en differenciálható.



Inverz függvény deriváltja

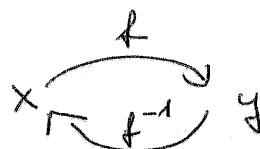
12. Tétel : Tegyük fel, hogy f -nek létezik inverze, differenciálható, és $a \in \mathbb{R}$ pontban $f'(a) \neq 0$. Legyen $b = f(a)$. Ekkor f^{-1} differenciálható b -ben, és

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

"Bizonyítás" :

Legyen $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

A 8. Tétel szerint f^{-1} folytonos

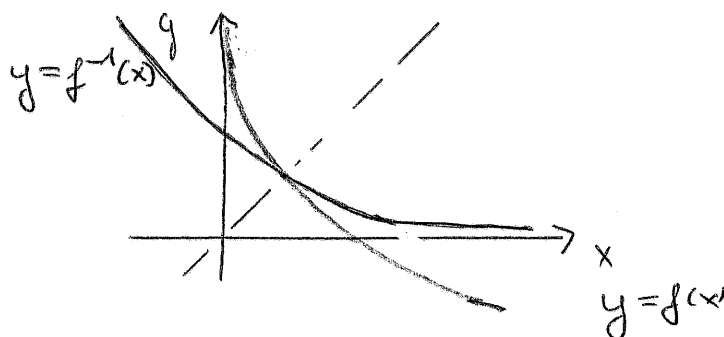


(hiszen f differenciálhatósága miatt f is folytonos).

Ezért ha $y \rightarrow b$, akkor $x = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(b) = a$.

$$\begin{aligned} \text{Így } (f^{-1})'(b) &:= \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}. \quad \square \end{aligned}$$

Megjegyzés : A formula azt a geometriai kényt is mutatja, hogy az f^{-1} grafikonjához a b pontba húzott érintő az $y = x$ egyenesre való tükrözése annak az érintőnek, amit f grafikonjához húzunk az a pontban.



Példá: Már igazoltuk, hogy $(\sin x)' = \cos x$.

Legyen $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

VOLT: $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ (lásd. 9. old.).

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

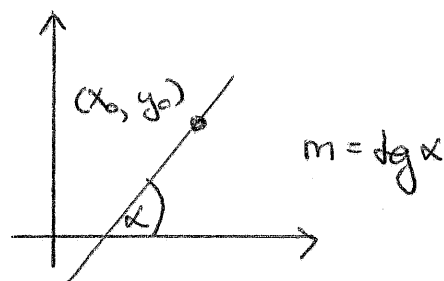
(Tehát most igazoltuk még egy sort a táblázatból.)

Kimaradt anyag, nagyjából a 37. oldalra illene:

Az érintő egyenletének felírása

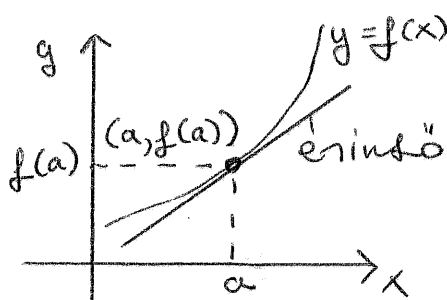
ISMÉTLÉS: m meredekségű, az (x_0, y_0) ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$



A f függvény grafikonjához a pontba húzott érintő egyenlete:

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{meredekség}}}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$



Példa: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 27$

$$f'(x) = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(a) = \sqrt[3]{27} = 3 \quad f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

Az $a = 27$ pontba húzott érintő egyenlete:

$$y = \frac{1}{27}(x - a) + 3$$

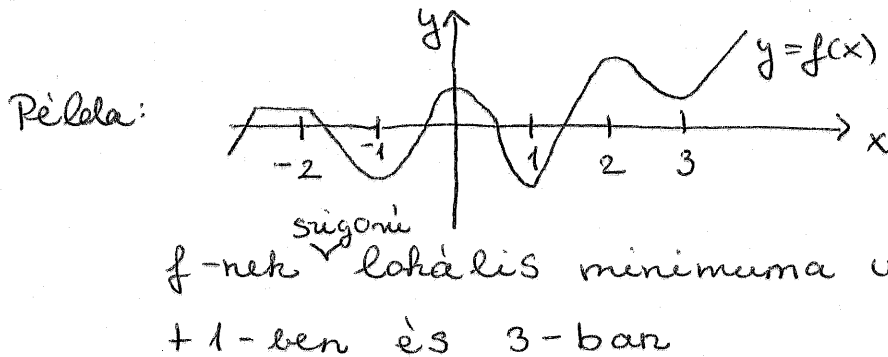
A szélsőérték és a derivált kapcsolatáról I.

Def (a folytonosságnál már előkerült) hasonló formában):

Az f függvénynek helyi / lokális minimuma van a pontban, ha $\exists \delta > 0$ úgy, hogy

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ esetén.}$$

f -nek szigorú helyi / lokális minimuma van a -ban, ha $f(x) > f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a$ esetén.



Def: f -nek lokális / helyi maximuma van az a pontban, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ esetén.}$$

f -nek szigorú lokális / helyi maximuma van az a pontban, ha $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $x \neq a$

$$f(x) < f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a \text{ esetén.}$$

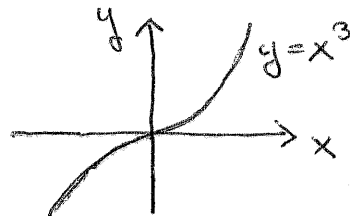
A fenti példában f -nek lokális maximuma van -2 -ben, 0 -ban, $+2$ -ben. Sőt: 0 -ban és 2 -ben szigorú maximuma van, -2 -ben nem.

13. Tétel: Legyen f differenciálható a -ban.

Ha f -nek a -ban helyi szélsőértéke (maximuma vagy minimuma van), akkor $f'(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a szélsőérték létezésének sükséges feltétele az, hogy a derivált nulla legyen.
 Vigyázat! Ez nem elegendő feltétel!

Példa: $f(x) = x^3$
 $f'(x) = 3x^2$
 $f'(0) = 0$



de a 0-ban nincs szélsőértéke

A 13. Tétel bizonyítása:

Tegyük fel, hogy f -nek a -ban helyi minimuma van
 (a maximum esete hasonlóan kezelendő, kihagyjuk).

Ekkor $\exists \delta > 0$: $f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$

Ha $a-\delta < x < a$, akkor $f(x) - f(a) \geq 0$ } $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$
 $x-a < 0$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0.$$

Ha $a < x < a+\delta$, akkor $f(x) - f(a) \geq 0$ } $\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$
 $x-a > 0$

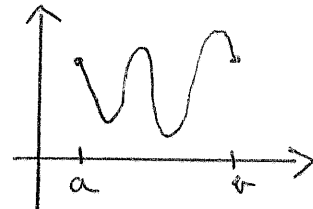
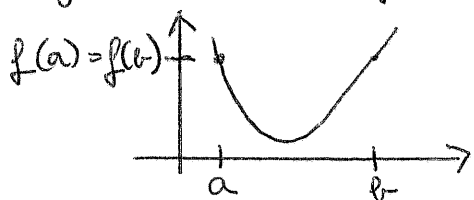
$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0.$$

Tehát $f'(a) = 0$.



Középérték tételek

14. Tétel (Rolle - tétel): Ha f folytonos $[a, b]$ -n,
 differenciálható (a, b) -n, és $f(a) = f(b)$, akkor
 létezik $c \in (a, b)$ úgy, hogy $f'(c) = 0$.



6.(ii) Tétel

Bizonyítás: Mivel f folytonos $[a, b]$ -n
 f felveszi a minimumát és a maximumát $[a, b]$ -n,
 azaz $\exists c_{\min} \in [a, b]$, hogy $f(c_{\min}) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$
 $\exists c_{\max} \in [a, b]$, hogy $f(c_{\max}) \geq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Ha $f(c_{\min}) = f(c_{\max})$ (f minimuma és maximuma megegyezik) $\Rightarrow f$ konstans $\rightarrow f'(c) = 0 \forall c \in (a, b)$.

Ha $f(c_{\min}) < f(c_{\max})$:

$f(a) = f(b)$ miatt $c_{\min}$ és $c_{\max}$ közül az egyik legálább belső pont, azaz vagy $c_{\min} \in (a, b)$ $\leftarrow$ (i) eset
 vagy $c_{\max} \in (a, b)$. $\leftarrow$ (ii) eset

Előző tétel + differenciálhatóság (a, b) -n

$$(i) \quad f'(c_{\min}) = 0$$

$$(ii) \quad f'(c_{\max}) = 0$$

□

15. Tétel (Lagrange -féle középértéktétel):

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n,

akkor létezik $c \in (a, b)$ úgy, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$f(b) - f(a) \stackrel{\uparrow}{=} f'(c)(b - a).$$

Bizonyítás:

Segédfüggvény: $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$

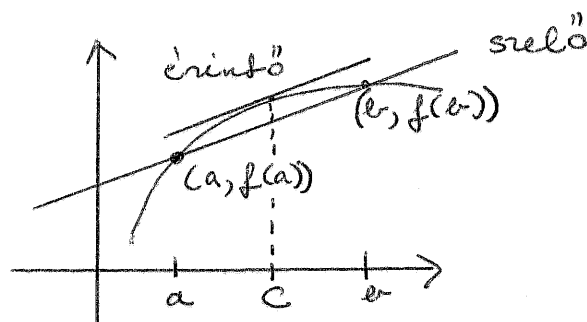
F folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n, $F(a) = F(b)$

Rolle - tétel $\Rightarrow \exists c \in (a, b)$, amelyre $F'(c) = 0$.

Tehát: $0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$

▣

Geometriai jelentés: a Lagrange-tétel feltételei mellett van az (a, b) intervallumnak olyan c pontja, hogy a c pontban a grafikonhoz húzott érintő párhuzamos az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő szelővel.



Monotonitás

16. Tétel: Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ állandó } [a, b]\text{-n.}$$

ahhoz és
csak ahhoz ha

Bizonyítás:

$\Leftarrow$ irány: triviális

Ha $f(x) = C \quad \forall x \in [a, b]$ -re, akkor

$$\forall x_0 \in (a, b)\text{-re} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{C - C}{x - x_0} = 0$$

$\forall x \in (a, b), x \neq x_0$ esetén.

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$\Rightarrow$ irány: Legyen $x \in (a, b]$ tetszőleges.

$$\text{Lagrange} \Rightarrow \exists c \in (a, x) : 0 = f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a)$$

$$\forall x \in (a, b]$$



Ismerjük át a monotonitással kapcsolatos definíciókat!
(3. oldal)

17. Tétel :

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n.

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f$ mon. nö $[a, b]$ -n

(ii) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f$ mon. csökken $[a, b]$ -n.

Bizonyítás: (i) állítás

" $\Rightarrow$ " irány: Tegyük fel, hogy $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Legyen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

f folytonos $[x_1, x_2]$ -n és differenciálható (x_1, x_2) -n

$\Downarrow$ Lagrange

$$\exists c \in (x_1, x_2): f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

Tehát $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$

f mon. nö.

" $\Leftarrow$ " irány: Ha f mon. nö $[a, b]$ -n, akkor

$x, x_0 \in (a, b), x \neq x_0$ esetén

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$



Megjegyzés: A fenti feltételek mellett az is igaz:

(i) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ szig. mon. nö $[a, b]$ -n

(ii) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ szig. mon. csökken $[a, b]$ -n.

(Ezt a fenti bizonyítás " $\Rightarrow$ " irányjából láthatjuk.)

Az állítás megfordítása nem igaz!

Példa: $f(x) = x^3$ szig. mon. nö $\mathbb{R}$ -en, de

$$f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0.$$

Egyszerű példák:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \neq 0 \text{-ra}$$

f ~~mon.~~ szü. mon. csökken $(-\infty, 0)$ -n és $(0, \infty)$ -en (a függvény 0-ban nincs értelmezve)

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 9 \Rightarrow f'(x) = 4x - 6$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

f szü. mon. nö a $[\frac{3}{2}, \infty)$ intervallumon

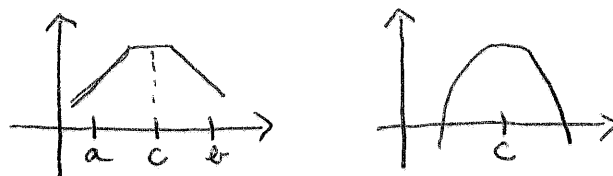
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

f szü. mon. csökken a $(-\infty, \frac{3}{2}]$ intervallumon

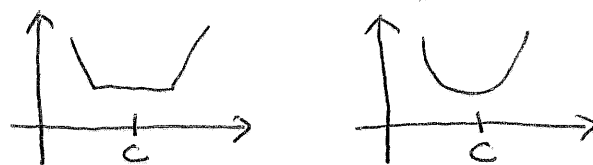
A szélsőérték és a derivált kapcsolata II.

18. Tétel: Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, és legyen $c \in (a, b)$.

Ha $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, c)$ és $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (c, b)$ esetén, akkor f -nek c -ben helyi maximuma van.



Ha $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, c)$ és $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (c, b)$ esetén, akkor f -nek c -ben helyi minimuma van.



Bizonyítás: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, c) \Rightarrow f$ mon. nö $[a, c]$ -n
17. Tétel

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (c, b) \Rightarrow f$ csökken $[c, b]$ -n
17. Tétel

$\Rightarrow f$ -nek helyi maximuma van c -ben.

A második állítás hasonlóan igazolható. ▢

Def: Magasabb rendű deriváltak

f második deriváltja: $f'' := (f')'$

f deriváltjának a deriváltja

f harmadik deriváltja: $f''' := (f'')'$

f második deriváltjának a deriváltja

f n -dik deriváltja

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' \quad n \geq 2$$

Vigyázat: Ha f differenciálható, nem

biztos, hogy a második, harmadik, stb. derivált is létezik!

19. Tétel: Legyen f differenciálható (a, b) -n, és $c \in (a, b)$. Tegyük fel, hogy $f'(c) = 0$ és $f''(c)$ létezik.

(i) Ha $f''(c) > 0$, akkor f -nek c -ben lokális minimuma van.

(ii) Ha $f''(c) < 0$, akkor f -nek c -ben lokális maximuma van.

Nem bizonyítjuk. A tétel nem mond semmit az $f''(c) = 0$ esetről!

A 18. és a 19. Tétel elegendő feltételt ad szélsőérték létezésére!

Def Azt mondjuk, hogy $x \in D_f$ kritikus pontja f -nek, ha $f'(x)$ nem létezik, vagy $f'(x) = 0$.

Példák:

Vizsgáljuk az alábbi függvény monotonitását, szélsőértékeit!

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f'(x) = \frac{1(x^3+1) - x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = 0, \text{ ha } x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

kritikus pont - csak itt lehet szélsőérték!

f' előjelét a $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty)$

intervallumokon kell vizsgálni:

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
f'	+	+	0	-
f	↗ f mon. nö	↗ f mon. nö		↘ csökken

18. Tétel $\Rightarrow$ Következésképpen $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ - ben helyi maximum van! (Ért a hiszöblichben be is írjuk a táblázatba)

Igazoljuk, hogy az $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$ függvénynek $\sqrt{b/a}$ - ban van minimuma!

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow a - \frac{b}{x^2} = 0$$

$$a = \frac{b}{x^2}$$

$$x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ kritikus pont}$$

Hátha nem lehet szélsőérték!

$$\forall x > 0 - na$$

$$f''(x) = (a - b x^{-2})' = 2b x^{-3} = \frac{2b}{x^3} > 0$$

Tehát $f''(\sqrt{b/a}) > 0 \Rightarrow f$ -nek lokális minimuma

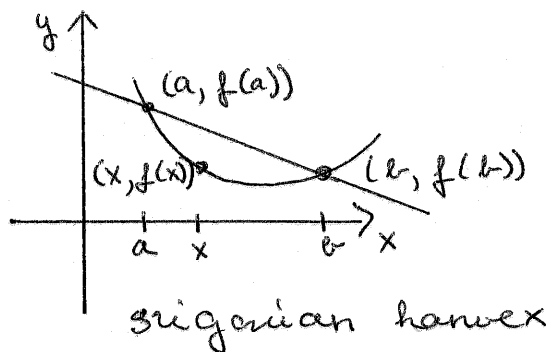
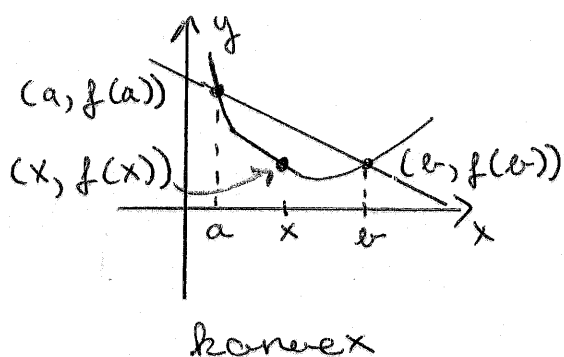
19. Tétel van $\sqrt{b/a}$ - ban

Def: Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum.

Art mondjuk, hogy f konvex I -n, ha bármely $a, b \in I$, $a < b$ és bármely $x \in (a, b)$ esetén az $(x, f(x))$ pont - vagy az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr alatt,

- vagy a húrban van.

f szigorúan konvex I -n, ha $(x, f(x))$ mindig a húr alatt van.

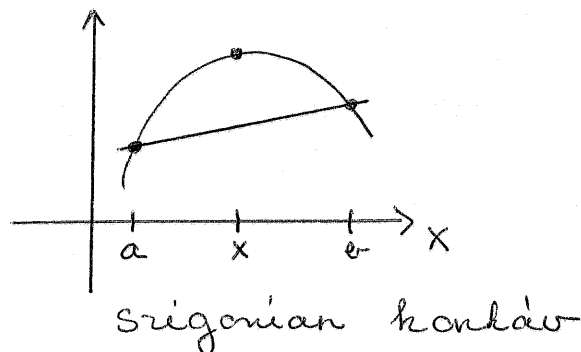
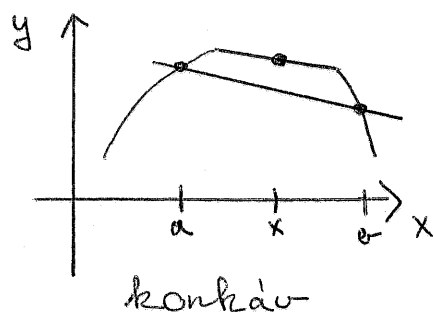


Def: Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum.

Art mondjuk, hogy f konkáv I -n, ha ...

... alatt felett ...

Hasonlóan definiáljuk a szigorú konkáv függvényeket is.



Könnyű igazolni: Ha f konvex, akkor $-f$ konkáv, és fordítva.

2.0 Tétel: Tegyük fel, hogy kétszer differenciálható az (a, b) intervallumon. Ekkor

- (i) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ konvex (a, b) -n,
 (ii) $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ konkáv (a, b) -n.

Bizonyítás: (i) és (ii) hasonlóan igazolható, így csak (i)-t tekintjük. Az (i) állításból is csak az " $\Rightarrow$ " irányt igazoljuk.

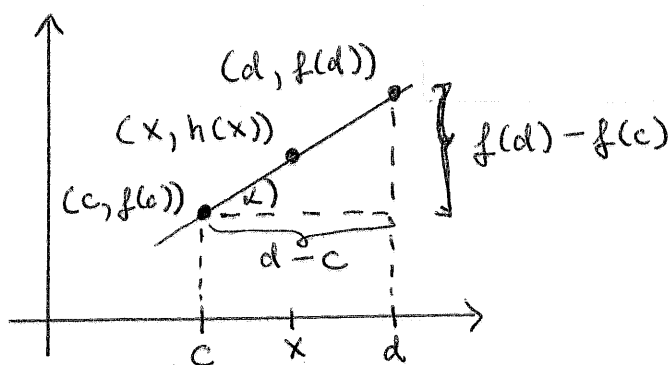
(i) " $\Rightarrow$ ": Tegyük fel, hogy $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ esetén. Legyen $a < c < d < b$. A $(c, f(c))$ és $(d, f(d))$ pontokat összekötő húr egyenlete:

$$h(x) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} (x - c) + f(c) \quad x \in \mathbb{R}$$

↑
a húr meredeksége

meredekség:

$$\tan \alpha = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$



Kétszer deriválunk: $h''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Segédfüggvény: $g(x) := f(x) - h(x), \quad x \in (a, b)$

$$g''(x) = f''(x) - h''(x) = f''(x) \geq 0$$

17. (i) Tételt alkalmazunk g' -re $\Rightarrow g'$ monoton nö (a, b) -n

g folytonos $[c, d]$ -n (hiszen f és h is az)

g differenciálható (c, d) -n (hiszen f és h is az)

$$g(c) = g(d) = 0$$

$\Rightarrow$

Rolle-tétel

$$\Rightarrow \exists \xi \in (c, d) : g'(\xi) = 0$$

Mivel g' mon. nö, ez azt jelenti, hogy

$$g'(x) \leq 0, \text{ ha } x \in (c, \xi),$$

$$g'(x) \geq 0, \text{ ha } x \in (\xi, d).$$

18. Tétel

$\Rightarrow g$ mon. csökken $[c, \xi]$ -n,

g mon. nö $[\xi, d]$ -n.

De $g(c) = g(d) = 0$, így

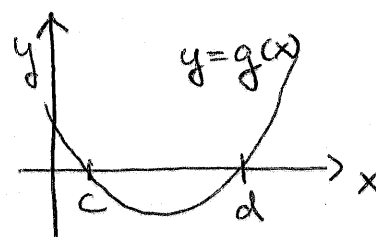
$$g(x) \leq 0, \forall x \in (c, d)$$

$$f(x) - h(x) \leq 0, \forall x \in (c, d)$$

$$f(x) \leq h(x), \forall x \in (c, d)$$

a hisz a függvény felett van

$\Rightarrow f$ konvex!



Megjegyzés: A fenti bizonyítás alapján:

$f''(x) > 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ szigorúan konvex (a, b) -n

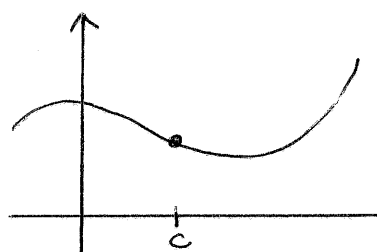
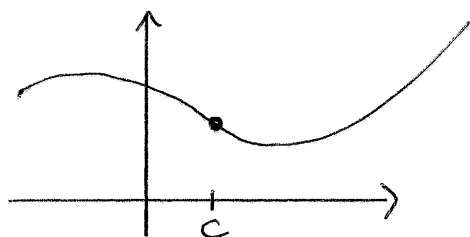
$f''(x) < 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ szig. konkáv (a, b) -n

Def: Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. A $c \in (a, b)$ az f

inflexiós pontja, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

- vagy f konvex $(c-\delta, c)$ -n és konkáv $(c, c+\delta)$ -n,

- vagy fordítva: f konkáv $(c-\delta, c)$ -n és konvex $(c, c+\delta)$ -n.



Inflexiós
pontok

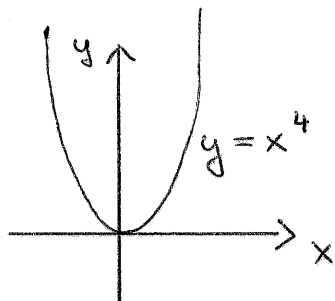
Az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele:

21. Tétel: Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható. Ha $c \in (a, b)$ f inflexiós pontja, akkor $f''(c) = 0$.

Tehát csak ott LEHET f -nek inflexiós pontja, ahol f'' nullával egyenlő.

Er nem elegendő feltétel!

Példa: $f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3$ és $f''(x) = 12x^2$
 $f''(0) = 0$ de a 0 nem inflexiós pont!
 f konvex a szármeggyenesen!



Az inflexiós pont létezésének elegendő feltétele:

22. Tétel: Legyen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható. Ha $c \in (a, b)$ esetén $f''(c) = 0$ és f'' c -ben előjelet vált, akkor c inflexiós pont.

Bizonyítás: Er egyszerűen következik a 20. Tételből. Ha $f''(c) = 0$

és $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c)$ -n amely $\delta > 0$ -val

és $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta)$ -n,

akkor f konvex $(c-\delta, c)$ -n és konkáv $(c, c+\delta)$ -n $\rightarrow c$ valóban inflexiós pont.

(Az is lehetséges, hogy f'' negatívból pozitívba vált a c pontban. Er az eset is hasonlóan kezelendő.)

Példa: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 1 + \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$$

EH LEHET inflexiós pont

	$x < -\sqrt[3]{2}$	$x = -\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2} < x < 0$	$x > 0$
f''	+	0	-	+
f	 konvex		 konkáv	 konvex



Következő lépés: $x = -\sqrt[3]{2}$ inflexiós pont

Még egy alkalmazás differenciálszámításra

2.3. Tétel (L'Hospital-szabály) Tegyük fel, hogy az f, g függvények differenciálhatóak (a, b) -n, $g'(x) \neq 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, továbbá

$$a \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ határérték létezik.}$$

Ha

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0,$$

vagy ha $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm \infty,$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hasonló állítások igazak $x \rightarrow b-$, $a = -\infty$ vagy $b = +\infty$ esetén.

A L'Hospital-szabályt ezen a helyen nem igazoljuk, de alkalmazunk.

1. Példa: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = ?$ Itt a számláló és a nevező is nullába tart.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)'}{(x^3 - 2x^2 - x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{3x^2 - 4x - 1} = \frac{-1}{3}$$

Ezért $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = -\frac{1}{3}$

2. Példa: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = ?$ Itt a nevező $+\infty$ -be tart, ha $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ezért $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3. Példa: Olyan szorzatok határértékének a kiszámolására is használhatunk L'Hospital-szabályt, ahol az egyik tényező 0-ba, a másik $+\infty/-\infty$ -be tart:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = ?$$

$\uparrow$ hányadossá alakítjuk $\uparrow$ a nevező $+\infty$ -be tart

Megoldás:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = 0$.

4. Példa $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} = 0.$$

Teljes függvényvizsgálat - lépések:

- értelmerési tartomány meghatározása $D_f = ?$
- zérushelyek meghatározása (ha lehet)
- paritás vizsgálata:

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f \text{ páros}$$

f grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y -tengelyre

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f \text{ páratlan}$$

f grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra

- folytonosság, differenciálhatóság vizsgálata
- heveretes határértékek meghatározása:

kipikusan $\pm\infty$ -ben számolandó határértékek

szakadási helyeken féloldali határértékeket

- monotonitás, szélsőérték vizsgálata az első derivált segítségével

f'	f
pozitív	$\nearrow$
negatív	$\searrow$
0 és pozitívra vált	helyi maximum
0 és negatívra vált	helyi minimum

- konvexitás vizsgálata a 2. derivált segítségével

f''	f
pozitív	$\cup$
negatív	$\cap$
0 és előjelet vált	inflexiós pont

- ábrázolás, értéktérkép

Egyes lépések bizonyos példákban kihagyhatók.
A lépések sorrendje sem rögzített.

Példák:

Teljes függvényvizsgálat $f(x) = x^2 \cdot \ln|x|$ -re:

$$D_f = ? \quad |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\text{Tehát } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{Zérushelyek: } x^2 \cdot \ln|x| = 0 \xrightarrow{x \neq 0} \ln|x| = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Paritás: } f(-x) = (-x)^2 \ln|-x| = x^2 \ln x = f(x)$$

f páros $\Rightarrow$ elegendő $x > 0$ -ban vizsgálni

Folytonosság, differenciálhatóság:

$$x > 0 \text{ esetén: } f(x) = x^2 \ln x$$

ez folyt. és diff.-ható $x > 0$ -ban

Határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \cdot \ln x = ?$$

Ez egy $0 \cdot (-\infty)$ alakú szorzat $\Rightarrow$ L'Hospital-szabályt alkalmazunk

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Határértéket még $(-\infty)$ -ben illetve 0 -ban bárhol kellene vizsgálnunk, ezeket a szimmetria miatt mégsem kell megcsinálnunk.

Monotonitás, szélsőérték:

$$x > 0: \quad f(x) = x^2 \ln x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ = x(2 \ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 1 = 0$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{kritikus pont}$$

	$0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$	$x = e^{-\frac{1}{2}}$	$x > e^{-\frac{1}{2}}$
f'	-	0	+
f	↘	helyi min	↗

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \underbrace{\ln e^{-\frac{1}{2}}}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$$

Tipp: Hogyan tudjuk könnyen meghatározni f' előjelét $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ -en illetve $(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$ -en?

Helyettesítsük be $e^{-1} \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ -t, illetve $e^1 \in (e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$ -t!

$$f'(e^{-1}) = e^{-1} \left(2 \cdot \underbrace{\ln e^{-1}}_{-1} + 1 \right) < 0$$

$$f'(e^1) = e^1 \left(2 \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} + 1 \right) > 0$$

Konvexitás:

$$x > 0: \quad f'(x) = 2x \cdot \ln x + x \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 \\ = 2 \ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0$$

$$x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

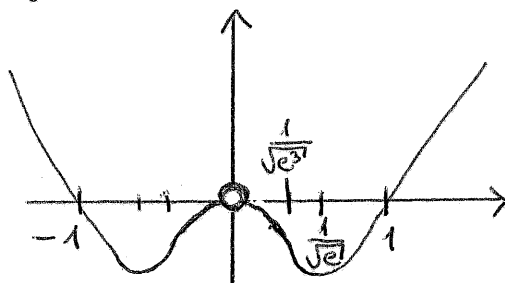
kritikus pont

Konvexitás (folytatás):

	$0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$	$x = e^{-\frac{3}{2}}$	$x > e^{-\frac{3}{2}}$
f''	-	0	+
f	 konkáv	inflexiós pont	 konvex

Tipp: f'' előjelének vizsgálatához $x = e^{-2} - t$ és $x = e^0 - t / e^1 - t$ helyettesítsünk be!

A fentiek alapján:



Először $x > 0$ -ban rajzoljuk fel a függvény grafikonját, $x < 0$ -ban tükrözéssel kapjuk.

Értékkészlet: $R_f = [f(\frac{1}{\sqrt{2}}), \infty) = [-\frac{1}{2e}, \infty)$.

Teljes függvényvizsgálat $f(x) = x e^{\frac{1}{1-x^2}} - x$:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad (\text{hiszen } 1 - x^2 \neq 0)$$

Zérushelyek: $f(x) = 0$

$$x \cdot e^{\frac{1}{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Paritás: $f(-x) = -x e^{\frac{1}{1-(-x)^2}} = -x e^{\frac{1}{1-x^2}} = -f(x)$

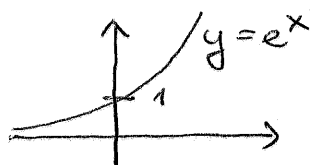
$\Rightarrow f$ páratlan $\Rightarrow$ elegendő $x \geq 0$ -ban vizsgálni

Határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{\frac{1}{1-x^2}} = +\infty, \text{ hiszen}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{1-x^2}} = e^0 = 1$$

Itt nem árt hat $g(x) = e^x$ ábrázolása:



$$\lim_{x \rightarrow 1-} x \cdot e^{\frac{1}{1-x^2}} = \infty, \text{ hiszen } \lim_{x \rightarrow 1-} (1-x^2) = 0+ \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-} e^{\frac{1}{1-x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} x \cdot e^{\frac{1}{1-x^2}} = 0, \text{ hiszen } \lim_{x \rightarrow 1+} (1-x^2) = 0- \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1+} e^{\frac{1}{1-x^2}} = 0.$$

Differenciálhatóság

$f(x)$ folyt. és diff. ható $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ -en.

Monotonitás, szélsőérték

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{1-x^2}} + x \cdot e^{\frac{1}{1-x^2}} \left(\frac{1}{1-x^2} \right)' = \\ &= e^{\frac{1}{1-x^2}} + x e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \\ &= e^{\frac{1}{1-x^2}} \left(1 + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \right) \end{aligned}$$

Látjuk: $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow f$ szig. mon. nö

Konvexitás

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\frac{1}{1-x^2}} \left(\frac{1}{1-x^2} \right)' \left(1 + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \right) + e^{\frac{1}{1-x^2}} \left(\frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \right)' = \\ &= e^{\frac{1}{1-x^2}} \left\{ \frac{2x}{(1-x^2)^2} \left(1 + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \right) + \frac{4x(1-x^2)^2 - 2x^2 \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} \right\} \\ &= e^{\frac{1}{1-x^2}} \left\{ \frac{2x}{(1-x^2)^2} \frac{1+x^4}{(1-x^2)^2} + \frac{4x - 8x^3 + 4x^5 + 8x^3 - 8x^5}{(1-x^2)^4} \right\} \\ &= e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{-2x(x^4-3)}{(1-x^2)^4} \end{aligned}$$

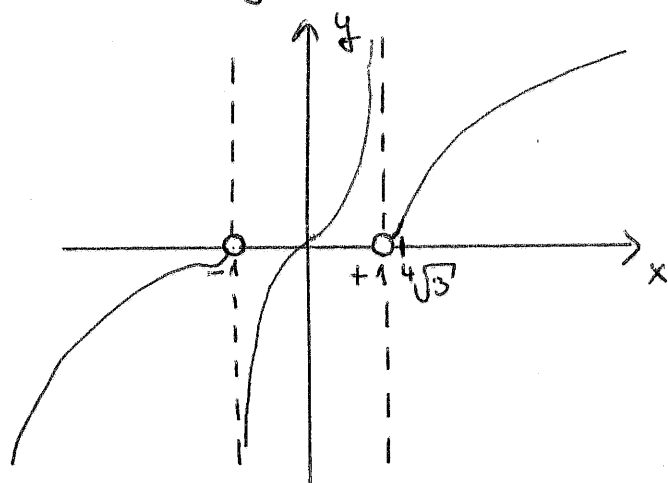
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ vagy } x = \sqrt[4]{3} \text{ vagy } x = -\sqrt[4]{3}$$

kritikus pontok

	$x=0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt[4]{3}$	$x = \sqrt[4]{3}$	$x > \sqrt[4]{3}$
f''	0	+	+	0	-
f		∪	∪	inflexiós pont	∩

↑
 f páratlan, ezért tudjuk, hogy $(-1, 0)$ -n konkáv
 $\Rightarrow x=0$ is inflexiós pont

A fentiek alapján fel tudjuk rajzolni f grafikonját $x \geq 0$ -ban, majd tükrözéssel $x < 0$ -ban.



$$R_f = \mathbb{R}$$

Kiegészítés: Exponenciális függvény értelmezése

Legyen $a > 0$, $a \neq 1$.

Hogyan definiáljuk a $f(x) = a^x$ függvényt?

Ha kitevő nulla: $a^0 = 1$

Ha a kitevő pozitív egész: $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$

Ha a kitevő negatív egész: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Az a szám $a^{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, hatványain azt a b számot értjük, amelyre $b^k = a$.

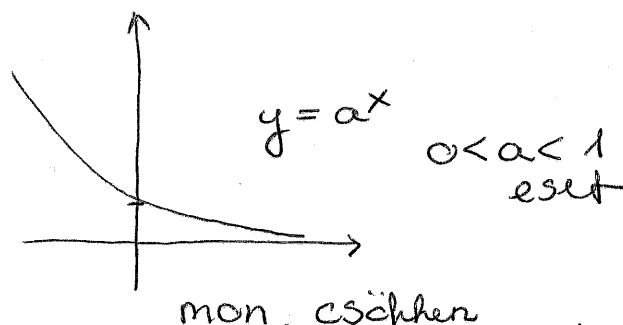
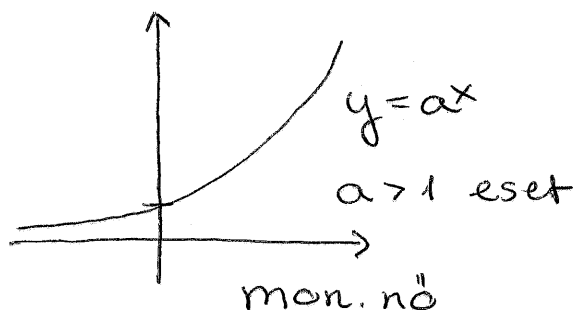
Az a szám $\frac{p}{q}$ -adik hatványa: $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$
 $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Eddig értelmeztük a^x -t bármely x racionális kitevő esetén.

Ha x irracionális, akkor a^x -et a köv. módon értelmezhetjük: a^x legyen az a valós szám, amelyre teljesül, hogy bármely r_1, r_2 racionális számok esetén és $r_1 < x < r_2$ esetén $a^{r_1} < a^x < a^{r_2}$ és a^{r_1} és a^{r_2} köze esik.

Belátható, hogy ez a definíció értelmes.

Belátható, hogy $f(x) = a^x$ szigorúan monoton, folytonos és differenciálható.



Mi $f(x) = a^x$ differenciálhányadosa?

Definíció szerint számoljuk ki a deriváltat tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontban:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{\substack{\uparrow \\ \text{ez nem más, mint a } 0\text{-ban vett derivált, } x\text{-től független konstans}}}$$

ez nem más, mint a 0-ban vett derivált, x -től független konstans

Igazolható, hogy létezik pontosan egy olyan valós a szám, amelyre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$.

Ezt a számot Euler-számnak hívjuk és "e"-vel jelöljük.

$$e \approx 2,71$$

Az $f(x) = e^x$ inverzét $f^{-1}(x) = \log_e x$ -et pedig $\ln x$ -szel jelöljük.

A fentiek alapján $(e^x)' = 1 \cdot e^x = e^x$

Tetszőleges $a > 0$, $a \neq 1$ esetén pedig

$$\begin{aligned} (a^x)' &= (e^{\ln a^x})' = (e^{x \cdot \ln a})' = \underbrace{e^{x \cdot \ln a}}_{a^x} \cdot \ln a = \\ &= \ln a \cdot a^x \end{aligned}$$

Tehát e^x az az exponenciális függvény, amely grafikonjához húzott érintő meredeksége 1.

az $x=0$ pontban

Megjegyzés: A fenti def. nem szorossé.

Sorozatok határértékét ismerő hallgatóknak: Az e

szám definiálható az $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat

határértékékeként: $e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Sorozatok ismerő hallgatóknak: Az e szám legyen

az $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ sor összege.