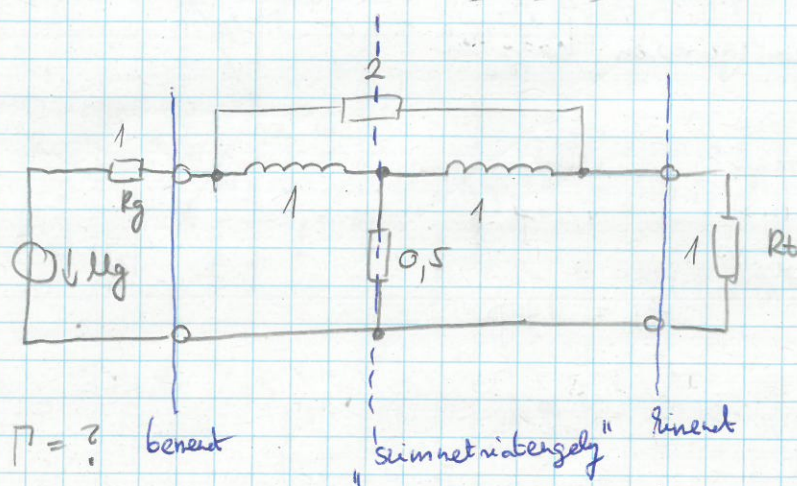


Nézzük meg egy példát Γ -ra!

- 23 -

PÉLDA SZIMMETRIKUS NÉGYPÓLUSRA



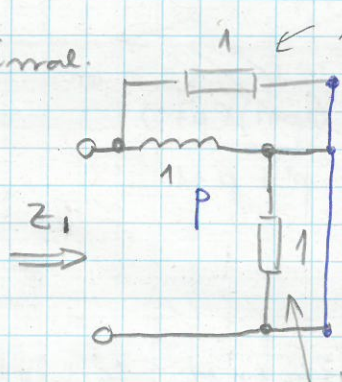
Megj: belátható a szimmetria, a négy pólus a szaggatott vonal mentén "feltérítható".

Definíció: $\Gamma = \frac{(Z_1 + R_t)(Z_{11} + R_t)}{(Z_1 - Z_1) R_t}$ HA $R_t = R_g$! Nem látjuk be, csak elfogadjuk.

Z_1 és Z_{11} az ilyen szimmetrikus hálózatok (hidlakapcsolás is ráadásul) meggyerezt hidimpedanciái.

Z_1 meghatározása

Vágjuk felté a hálózatot a tengely mentén és kössük össze a végét rövidzárral.

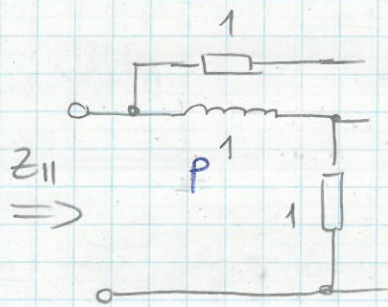


itt $R=1$ lesz, net az $R=2$ ellenállást sorosan ("fügőlegesen") vágjuk felté.

$$Z_1 = 1 \times p = \frac{p}{1+p}$$

itt pedig $R=1$ lesz, net az $R=0,5$ ellenállást párhuzamosan kell feltéríteni.

Ismét feltérképjük a szimmetrikus hídkapcsolást, de ezúttal nem zárjuk rövidre a "végét", hanem röviden hagyjuk.



$$Z_{II} = 1 + p$$

Igy tehát:

$$\Gamma = \frac{(Z_I + R_k)(Z_{II} + R_k)}{(Z_{II} - Z_I) R_k} = \frac{\left(\frac{p}{1+p} + 1\right) \left(1 + p + 1\right)}{\left(1 + p - \frac{p}{1+p}\right) \cdot 1}$$

$$\frac{p}{1+p} + 1 = \frac{p + 1 + p}{1 + p} = \frac{2p + 1}{p + 1}$$

$$(1 + p) - \frac{p}{1+p} = \frac{(1+p)^2 - p}{1+p} = \frac{p^2 + 4p + 1 - p}{1+p} = \frac{p^2 + p + 1}{1+p}$$

$$\text{Kaptuk: } \Gamma(p) = \frac{\frac{2p+1}{p+1} \cdot (p+2)}{\frac{p^2+p+1}{p+1}} = \frac{(2p+1)(p+2)}{p^2+p+1}$$

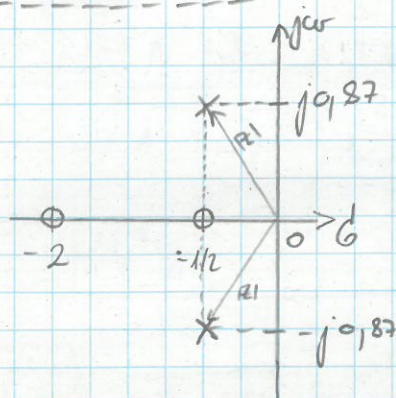
$$\text{Tehát az átviteli tényező: } \Gamma(p) = \frac{(2p+1)(p+2)}{p^2+p+1}$$

Ábrázoljuk Bode-diagrammal!

$$\text{Konstans meghatározása: } \frac{(2p+1)(p+2)}{p^2+p+1} = \frac{2p^2 + 4p + p + 2}{p^2+p+1} = \frac{2p^2 + 5p + 2}{p^2+p+1}$$

$$K = \frac{2}{1} = 2, \quad 20 \cdot \log 2 = 6 \text{ dB}$$

Pólus-zérus hely

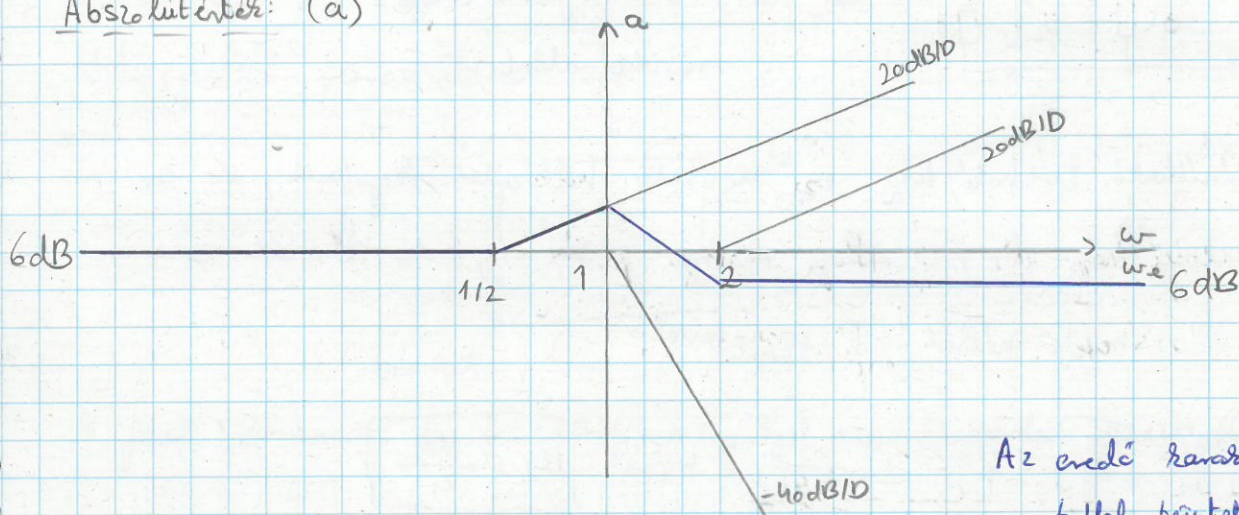


zérusok: $2p+1=0 \Leftrightarrow p=-\frac{1}{2}$
 $p+2=0 \Leftrightarrow p=-2$

pólusok: $p^2+p+1=0 \Rightarrow p_{1,2} \approx -0,5 \pm j0,87$

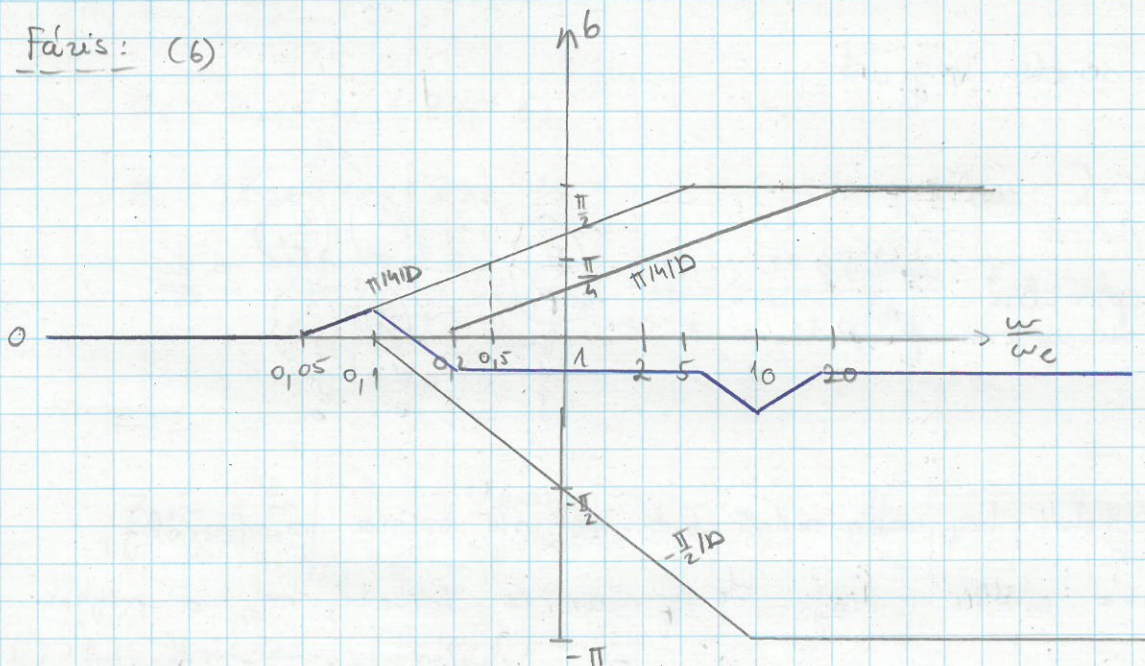
$\xi = |\zeta| = \sqrt{0,5^2 + 0,87^2} = \underline{\underline{1}}$

Abszolútérték: (a)



Az eredő karakterisztikát
tollal bontottam fel.

Fázis: (b)



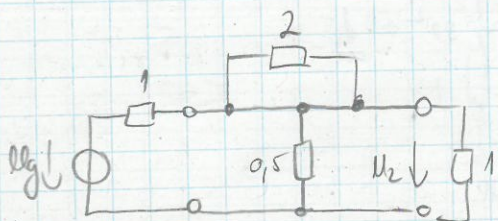
Nézzük meg, hogy amit számoltunk és rajzoltunk az összhangban van-e
a fizikai géppel! (CSAK VÁZLATOSAN)

a) $f=0$ ($\sim \omega = p=0$)

$$\Gamma(p=0) = \frac{(2 \cdot 0 + 1)(0 + 2)}{0^2 + 0 + 1} = 2$$

$$20 \cdot \log 2 = 6 \text{ dB} \quad \checkmark \text{ Eddig jó!}$$

Fürési helyzetesítő lép egyenáránál esetben:



A két telences helyzettesítendő rövidzárral.

U_2 kiszámítható. Látható, hogy egy resistív hálózattal kapunk, és az is egyértelmű, hogy $U_2 \neq 0$. Hogy mennyi pontosan, azt nehezebb kiszámolni Γ ismerete nélkül. Γ ismeretével:

$$\Gamma = \frac{U_g}{2 U_2} \underbrace{\sqrt{\frac{R_t}{R_g}}}_1 = 2 \Leftrightarrow \frac{U_g}{U_2} = 4 \Leftrightarrow \boxed{U_2 = \frac{U_g}{4}}$$

Ezzel is rendben vagyunk.

b) $f \rightarrow \infty$ ($\sim \omega \wedge \sim p \rightarrow \infty$)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2p^2 + 5p + 2}{p^2 + p + 1} = \lim_{p \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{p^2}{p^2}}_1 \cdot \frac{2 + \frac{5}{p} + \frac{2}{p^2}}{1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}} = \underline{\underline{2}}$$

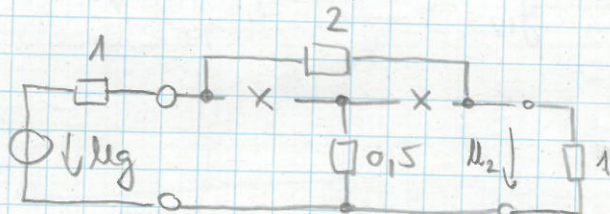
Látható tehát, hogy ugyancsak 6 dB-ker áll vissza a függvény, mint $p=0$ esetben (Megj.: És így az is látható, hogy a rajzon a Bode-diagramon nem pontos. Ez megesik, semmi baj.)

A lényeg, hogy tudják, hogy 6 dB-ker áll vissza.

Rajzoljuk fel azért a fizikai lámpát is.

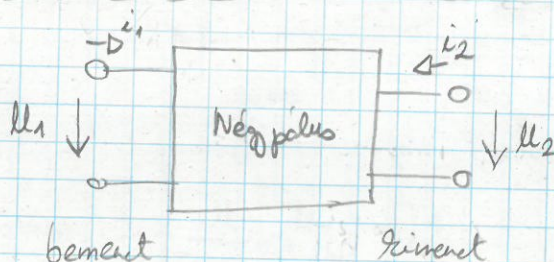
-27-

A teljeskörű helyettesítőrepe szakadás. lesi.



Csak azt vesszük észre, hogy az $R=2$ áthidalja (innen a név) a két szakadást, így tehát $U_2 \neq 0$. ■

Négy pólus - paraméterek



A jelölt áram- és feszültségirányok megállapodás szerint.

a) Impedancia - paraméterek

$$U_1 = Z_{11} \cdot i_1 + Z_{12} \cdot i_2$$

$$U_2 = Z_{21} \cdot i_1 + Z_{22} \cdot i_2$$

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad \text{bemeneti impedancia}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad \text{transzfer impedancia}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad \text{transzfer impedancia}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad \text{kimeneti impedancia}$$

b) Admittancia - paraméterek

$$i_1 = y_{11} U_1 - y_{12} U_2$$

$$i_2 = -y_{21} U_1 + y_{22} U_2$$

$$y_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad \begin{array}{l} \text{bemeneti} \\ \text{admittancia} \end{array}$$

$$y_{12} = - \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0} \quad \begin{array}{l} \text{transzfer} \\ \text{admittancia} \end{array}$$

$$y_{21} = - \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad \begin{array}{l} \text{transzfer} \\ \text{admittancia} \end{array}$$

$$y_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0} \quad \begin{array}{l} \text{kimeneti} \\ \text{admittancia} \end{array}$$

c) Hibrid paraméterek

$$u_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2$$

$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} u_2$$

$$h_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{u_2=0} \quad \begin{array}{l} \text{bemeneti} \\ \text{impedancia} \\ \text{(rövidzárt} \\ \text{kimenettel)} \end{array}$$

$$h_{12} = \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_1=0} \quad \begin{array}{l} \text{feszültség-} \\ \text{visszajelzés} \end{array}$$

$$h_{21} = \left. \frac{-i_2}{i_1} \right|_{u_2=0} \quad \text{áramcsúszás}$$

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{i_1=0} \quad \begin{array}{l} \text{kimeneti} \\ \text{admittancia} \end{array}$$

d) Inverz hibrid paraméterek

$$i_1 = d_{11} u_1 - d_{12} i_2$$

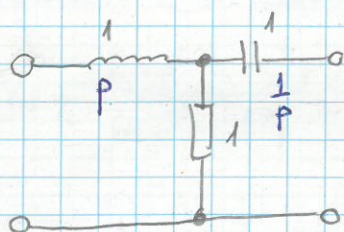
$$u_2 = d_{21} u_1 + d_{22} i_2$$

$$d_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{i_2=0} \quad \begin{array}{l} \text{bemeneti} \\ \text{admittancia} \\ \text{(üresjáratú)} \end{array}$$

$$d_{12} = - \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{u_1=0} \quad \text{áramvisszajelzés}$$

$$d_{21} = \left. \frac{u_2}{u_1} \right|_{i_2=0} \quad \text{feszültségcsúszás}$$

$$d_{22} = \left. \frac{u_2}{i_2} \right|_{u_1=0} \quad \begin{array}{l} \text{kimeneti} \\ \text{impedancia} \\ \text{(rövidzártú)} \end{array}$$

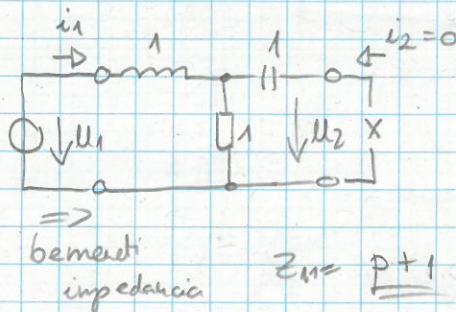


A négy pólus Z - mátrixa:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+p & 1 \\ 1 & \frac{p+1}{p} \end{bmatrix}$$

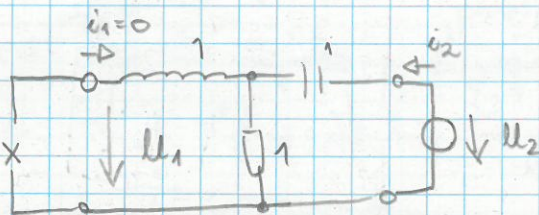
Z paraméterek:

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{i_1} \right|_{i_2=0}$$



$$Z_{11} = p+1$$

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

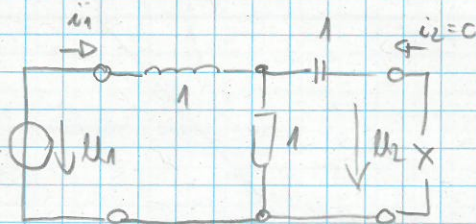


lehetőség:

$$U_1 = i_2 \cdot 1$$

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{i_2 \cdot 1}{i_2} = 1$$

$$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

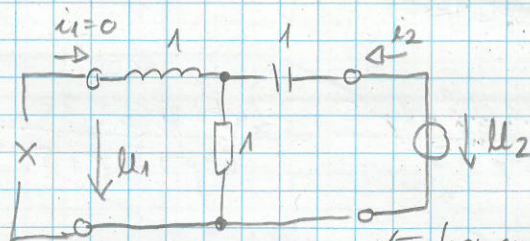


lehetőség:

$$U_2 = i_1 \cdot 1$$

$$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{i_1 \cdot 1}{i_1} = 1$$

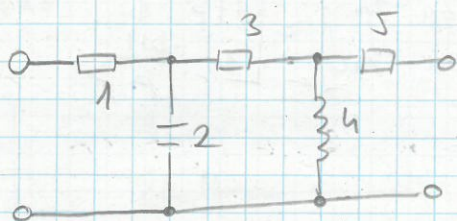
$$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{i_2} \right|_{i_1=0}$$



= bemeneti impedancia

$$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{1}{p} + 1 = \frac{p+1}{p}$$

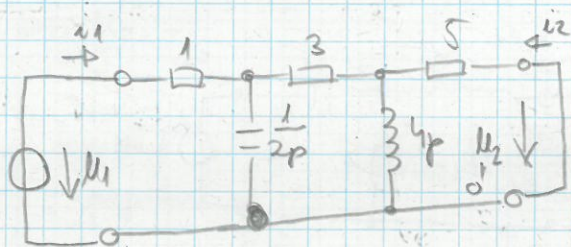
Nézzünk egy komplexebb példát!



$Y_{11} = ? \quad H_{21} = ?$

$Y_{11} = \frac{i_1}{u_1} \Big|_{u_2=0}$

Rajzoljuk fel:



$\Rightarrow$ Bemeneti admittancia (Az impedancia reciproka)

$$Z_{be} = \left(\left[(5 \times 4p) + 3 \right] \times \frac{1}{2p} \right) + 1$$

$$5 \times 4p = \frac{20p}{5+4p}$$

$$\frac{20p}{5+4p} + 3 = \frac{20p+15+12p}{5+4p} = \frac{32p+15}{4p+5}$$

$$\frac{32p+15}{4p+5} \times \frac{1}{2p} = \frac{\frac{32p+15}{(4p+5)2p}}{\frac{64p^2+30p+4p+5}{2p(4p+5)}} = \frac{32p+15}{64p^2+34p+5}$$

$$\frac{32p+15}{64p^2+34p+5} + 1 = \frac{32p+15+64p^2+34p+5}{64p^2+34p+5} = \frac{64p^2+66p+20}{64p^2+34p+5} = Z_{be}$$

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_{be}} = \frac{64p^2+34p+5}{64p^2+66p+20} \quad \text{konstans:} \quad \frac{5}{20} \left(20 \cdot \log \frac{5}{20} = -12 \text{dB} \right)$$

Tipikus feladat: vizsgáljuk Y_{11} -et Bode-diagramon és értelmezzük az eredményt a fizikai róp segítségével!

$$Y_{11} = \frac{64p^2 + 34p + 5}{64p^2 + 66p + 20}$$

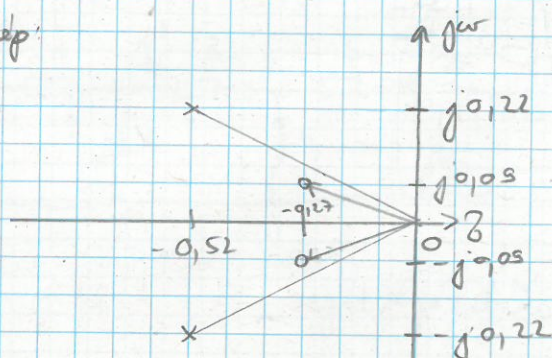
Zérusok:

$$64p^2 + 34p + 5 = 0 \Rightarrow p_{1,2} \approx -0,27 \pm j0,09$$

pólusok:

$$64p^2 + 66p + 20 = 0 \Rightarrow p_{1,2} \approx -0,52 \pm j0,22$$

Pólus-zérus róp:

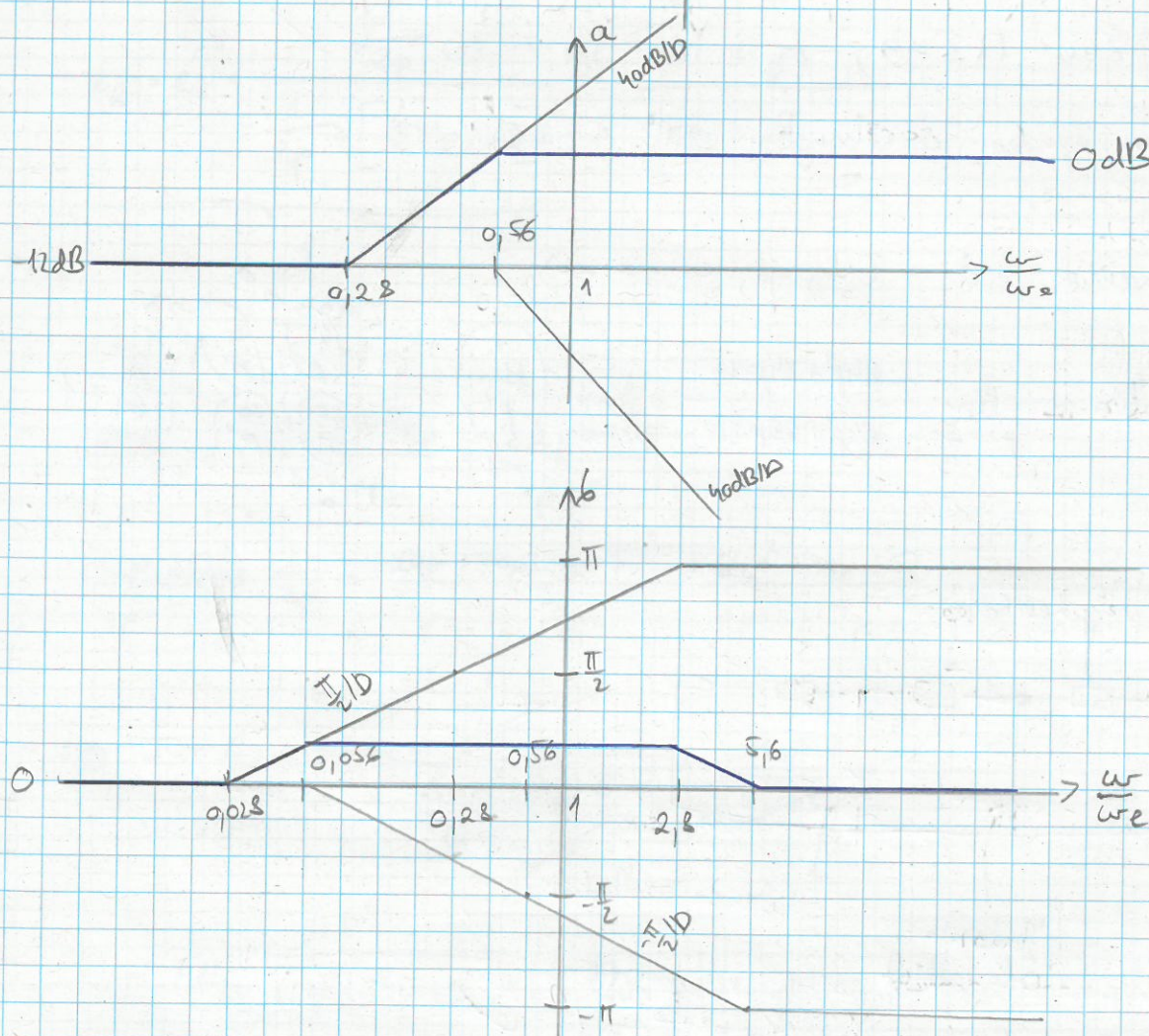


zérusok törés pontja:

$$\xi_1 = \sqrt{0,4^2 + 0,05^2} \approx 0,28$$

pólusok törés pontja:

$$\xi_2 = \sqrt{0,52^2 + 0,22^2} \approx 0,56$$

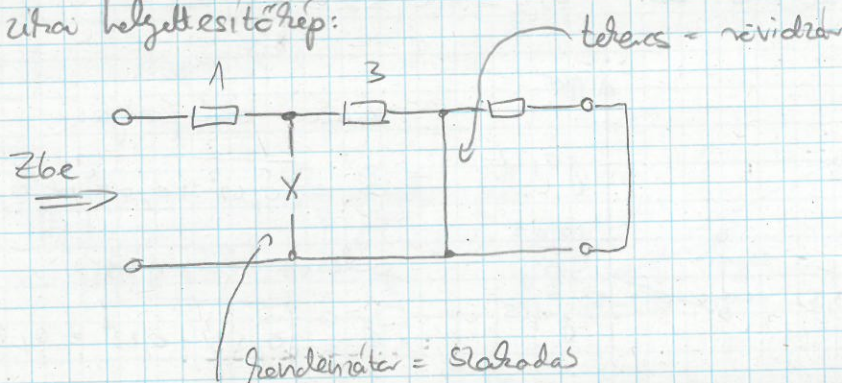


Értelmezés a kapott eredményt!

i) Eigenáramú eset. ($f = p = \omega = 0$)

Matematika:
$$Y_{11} \Big|_{p=0} = \frac{64 \cdot 0^2 + 34 \cdot 0 + 5}{64 \cdot 0^2 + 66 \cdot 0 + 20} = \frac{5}{20} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Fizikai helyettesítőép:



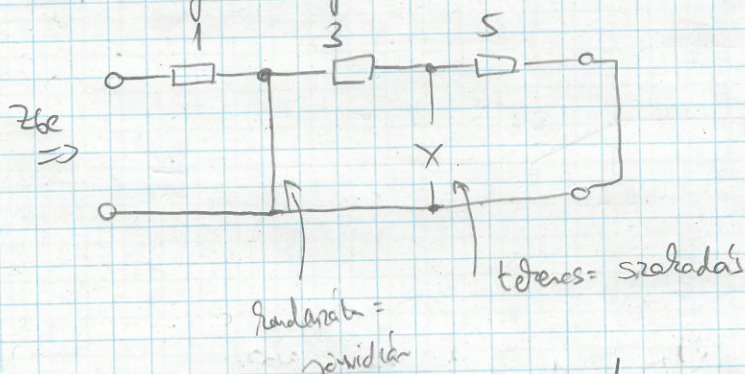
Látjuk: $Z_{be} = 1 + 3 = 4$, így $Y_{be} = Y_{11} = \frac{1}{Z_{be}} = \frac{1}{4} \checkmark$

Rendben van, minden összhangban van mindezzel

ii) Nagy frekvenciás eset. ($f, p, \omega \rightarrow \infty$)

Matematika:
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{64p^2 + 34p + 5}{64p^2 + 66p + 20} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{p^2}{p^2}}{\frac{64}{p^2} + \frac{34}{p} + \frac{5}{p^2}} = \frac{1}{\frac{64}{p^2} + \frac{34}{p} + \frac{5}{p^2}} = \frac{64}{64} = 1.$$

Fizikai helyettesítőép:



Látjuk: $Z_{be} = 1$, így $Y_{be} = Y_{11} = \frac{1}{Z_{be}} = 1 \checkmark$

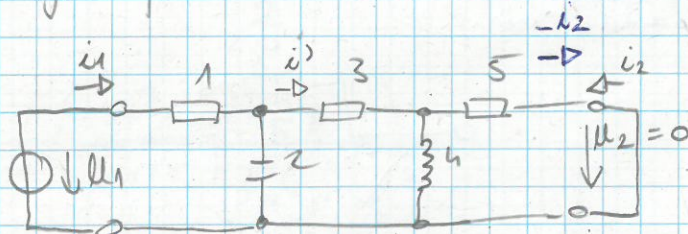
ltöbbiből az is látszik, hogy a Bode-diagram $20 \cdot \log C(1) = 0 \text{ dB}$ - 33 -

ne áll be. Ezt fel is tüntethetjük. $\square$

H_{21} meghatározása

$$H_{21} = \left. -\frac{i_2}{i_1} \right|_{u_2=0}$$

Rajzoljuk fel:



FIGYELJÜNK
AZ IRÁNYRA!

Cél: felírni $-i_2$ -t i_1 segítségével! (= Áramosztás)

$$-i_2 = i_1 \cdot \frac{\frac{1}{2p}}{\frac{1}{2p} + [5 \times 4p + 3]} \cdot \frac{4p}{4p + 5}$$

$$5 \times 4p = \frac{20p}{5 + 4p}$$

$$\frac{20p}{5 + 4p} + 3 = \frac{20p + 15 + 12p}{5 + 4p} = \frac{32p + 15}{4p + 5}$$

$$\frac{32p + 15}{4p + 5} + \frac{1}{2p} = \frac{(4p^2 + 30p + 4p + 5)}{(4p + 5) \cdot 2p} = \frac{4p^2 + 34p + 5}{(4p + 5) \cdot 2p}$$

$$\text{Így: } -i_2 = i_1 \cdot \frac{\frac{1}{2p}}{\frac{4p^2 + 34p + 5}{(4p + 5) \cdot 2p}} \cdot \frac{4p}{4p + 5} =$$

$$= i_1 \cdot \frac{4p}{4p^2 + 34p + 5} \quad \text{Így } H_{21} \text{ már felírható,}$$

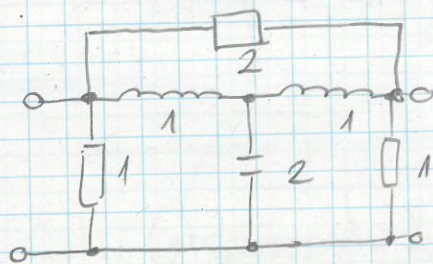
-34-

$$H_{21} = \left. \frac{-i_2}{i_1} \right|_{u_2=0} = \frac{\cancel{i_1} \cdot \frac{4p}{64p^2+34p+5}}{\cancel{i_1}} = \frac{4p}{64p^2+34p+5}$$

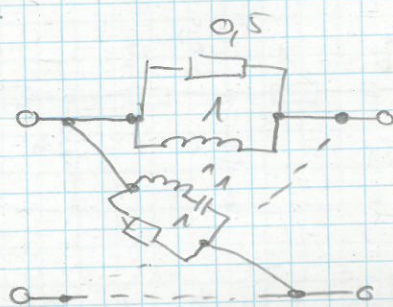
Készen vagyunk. Szorgalmi feladat: ábrázolni Bode-diagramon. 

KITEKINTÉS:

Szimmetrikus négypólusok Z-paraméterei:

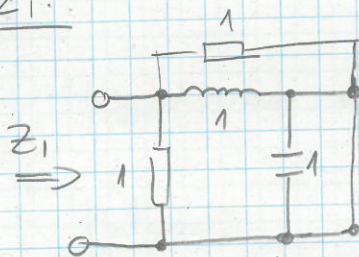


$\equiv$



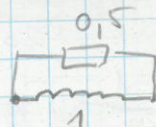
Határozzuk meg a már ismert módon a kapcsolási hidimpedanciákat!

Z_1 :



↑ ez rövidre zárandó

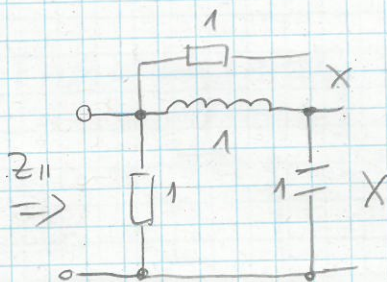
helyettesíthető:



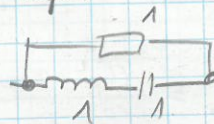
$$Z_1 = p \times \left(1 \times 1 \right) = \frac{p}{1+p} \times 1 = \frac{p}{\frac{p+1+p}{1+p}} =$$

$$= \frac{p}{2p+1}$$

Z_{11} :



helyettesíthető:



$$Z_{11} = \left(p + \frac{1}{p} \right) \times 1 = \frac{1+p^2}{p} = \frac{p^2+1}{p^2+p+1}$$

A Z-paraméterek Z_1 és Z_{11} segítségével felírhatóak ebben az esetben.

Tudjuk, hogy:

- 35 -

$$z_{11} = \frac{z_1 + z_{11}}{2}$$

$$\text{és } z_{12} = \frac{z_{11} - z_1}{2}.$$

$z_{11} = z_{22}$ és $z_{12} = z_{21}$, mert a hálózat szimmetrikus

$$z_{11} = \frac{\frac{p}{2p+1} + \frac{p^2+1}{p^2+p+1}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p^3+p^2+p+2p^3+2p+p^2+1}{(p^2+p+1)(2p+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3p^3+2p^2+3p+1}{(2p+1)(p^2+p+1)} \right).$$

$$z_{12} = \frac{\frac{p^2+1}{p^2+p+1} - \frac{p}{2p+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cancel{2p^3+p^2+2p+1} - p^3 - p^2 - p}{(p^2+p+1)(2p+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{p^3+p+1}{(p^2+p+1)(2p+1)} \right).$$

Ennyi $\square$