

Legyen: $F(p) = \frac{A + B_1 p + B_2 p^2 + \dots + B_n p^n}{C + D_1 p + D_2 p^2 + \dots + D_m p^m}$ zérus: $F(p) = 0$.
 pólus: $F(p) \rightarrow \infty$.
 hogy $n \leq m$, és $p = j\omega$ komplex.

Ez egy komplex, polinom/polinom - alatti tört. Kérdés:

Hogyan viselkedik ez "várhatóan" a $p \rightarrow \omega \rightarrow f$

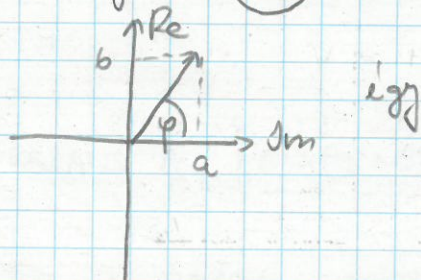
függvényében a $(0, \infty)$ intervallumon?

Csak a jelleg érdekes, nem akarjuk pontosan kiszámolni.

$\Rightarrow$ BODE-DIAGRAM.

Figyelem! $F(p)$ komplex $\rightarrow$ van abszolútértéke ($|F(p)|$) és
 fázisa ($\arg\{F(p)\}$). abs.

eml: $\bar{z} = a + jb = \underbrace{|\bar{z}|}_{\text{abs.}} \cdot e^{j\varphi} \leftarrow \text{fázis}$

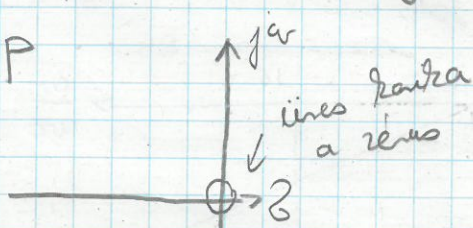


$\Rightarrow$ A Bode-diagram mindig két grafizált jelet $\uparrow$ abszolútérték-
 fázisgrafikon $\downarrow$

Módszer: Megismerjük néhány "alaptag" grafikonját

$\Rightarrow$ azokból felépítjük a bonyolultabb törtet.

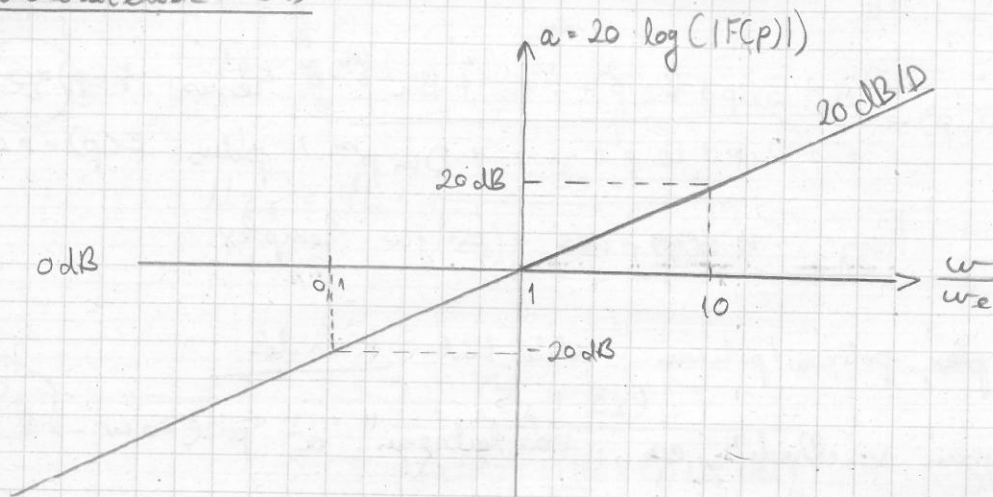
1.) $F(p) = p$



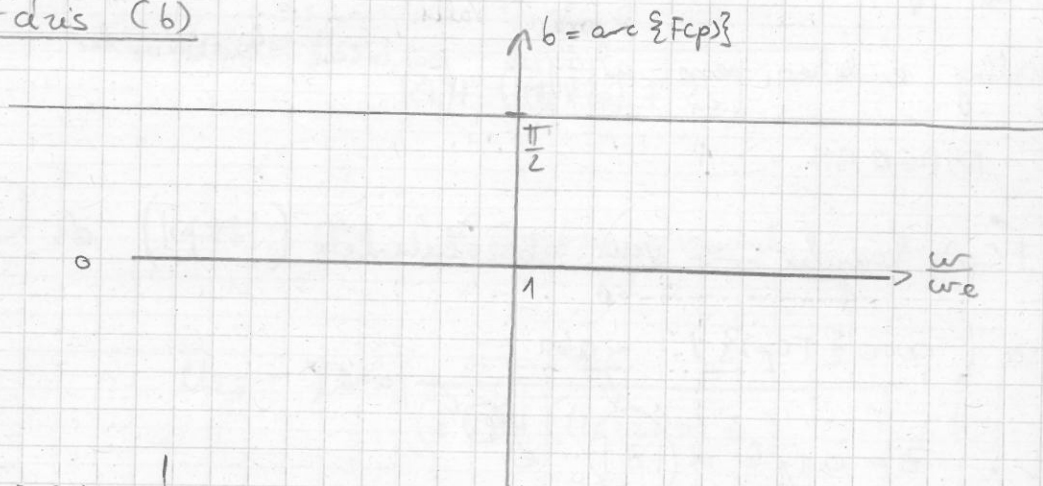
"pólus-zérus-hép"
 az Im-Re-síkon.

Abszolútérték (a)

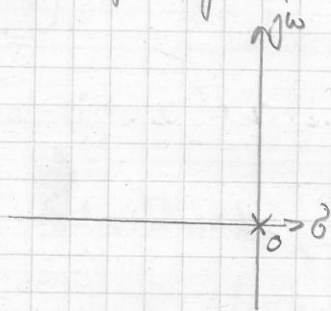
- 10 -



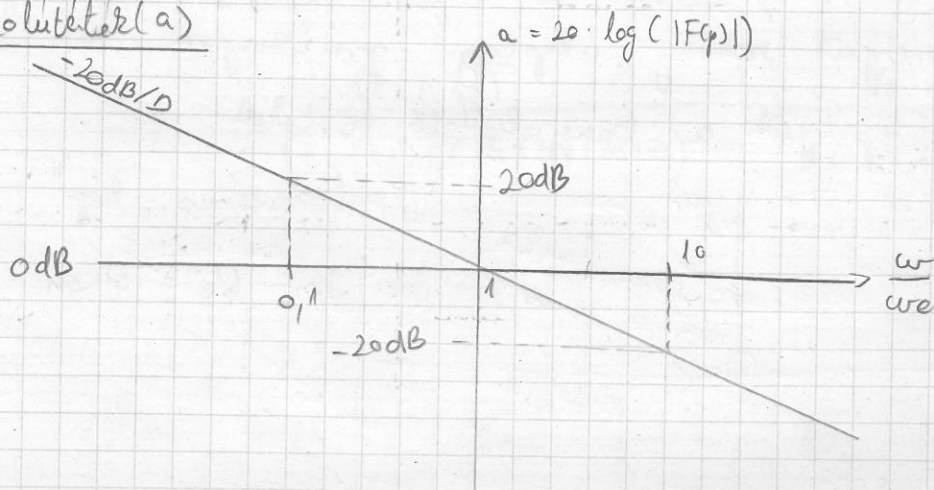
Fázis (b)

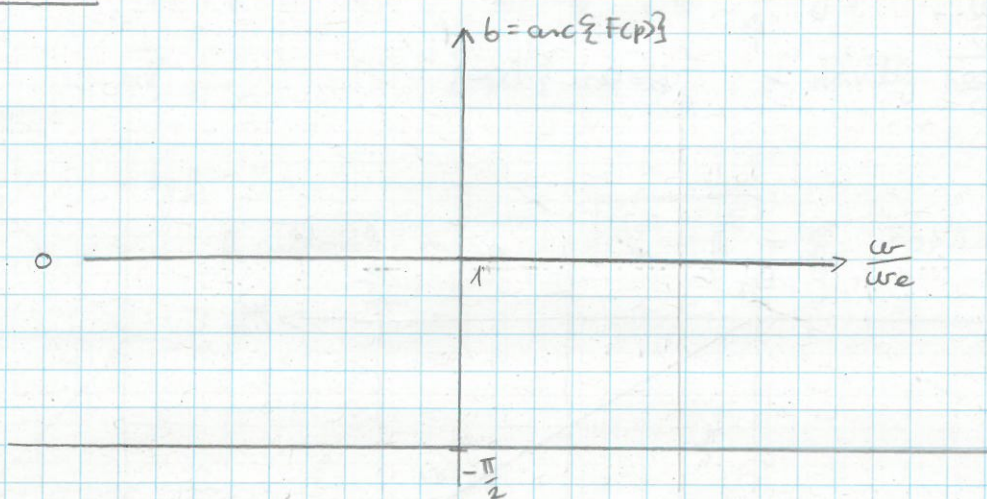


$$2) F(p) = \frac{1}{p}$$



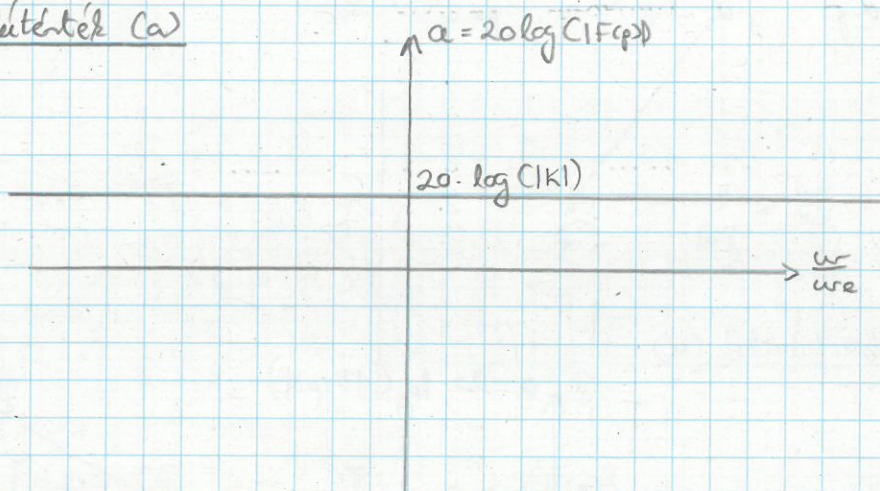
Abszolútérték (a)





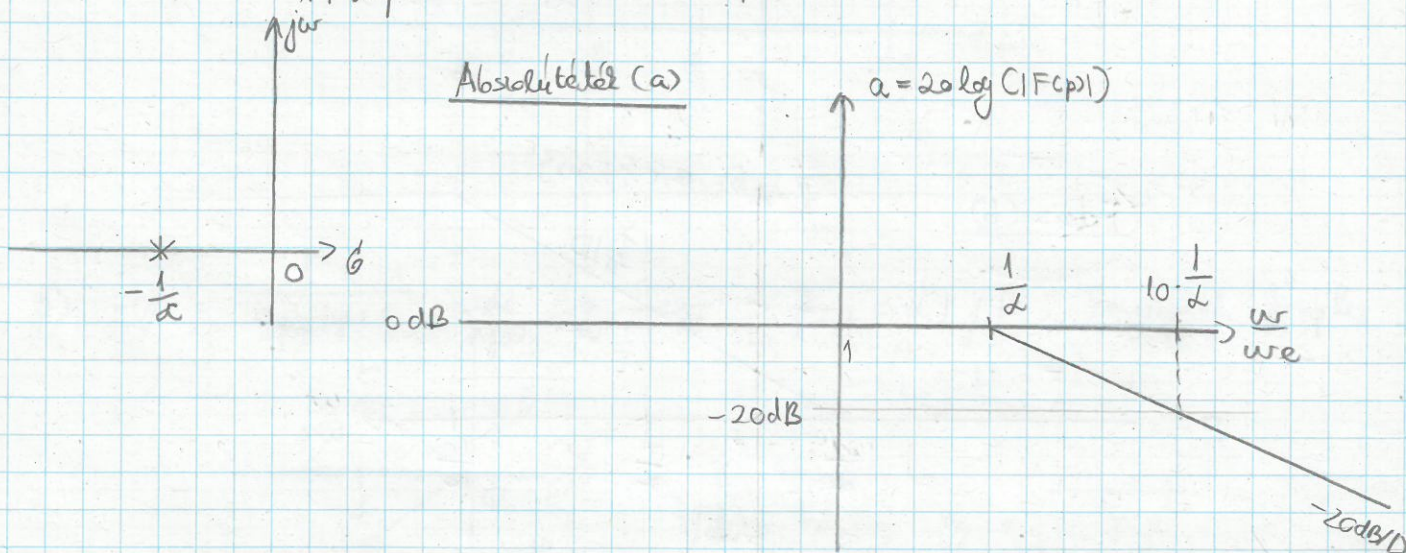
3) $F(p) = K$, $K \in \mathbb{R}^{(+)}$, tehát egy konstans (valós), független p -től.

Abszolútérték (a)

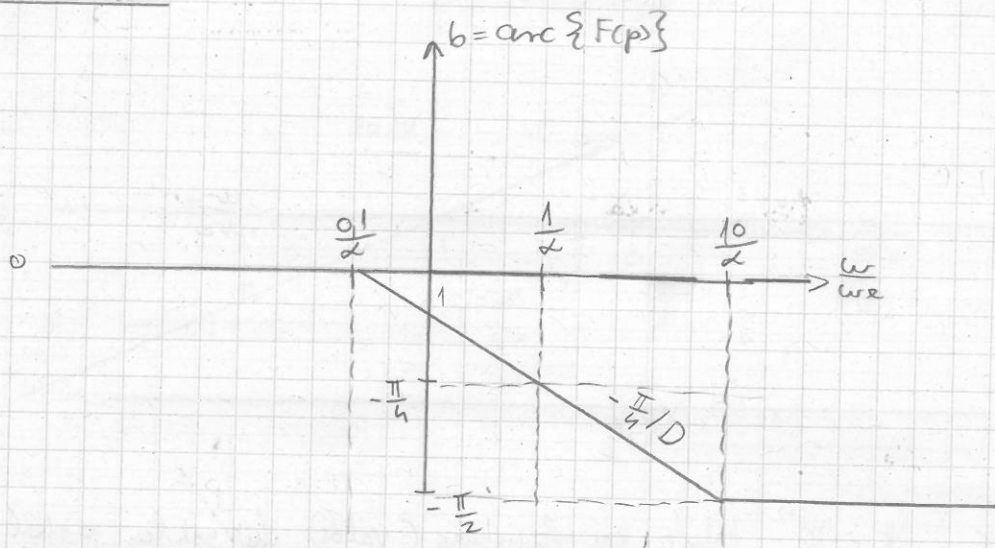


FIGYELEM: A KONSTANS A FÁZISMENETET NEM BEFOLYÁSOLJA!

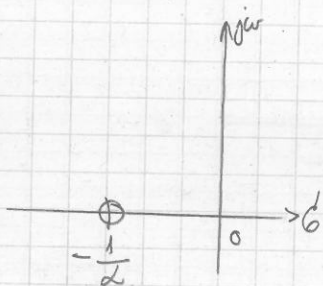
4) $F(p) = \frac{1}{1 + \alpha p}$ α tipikusan pozitív.



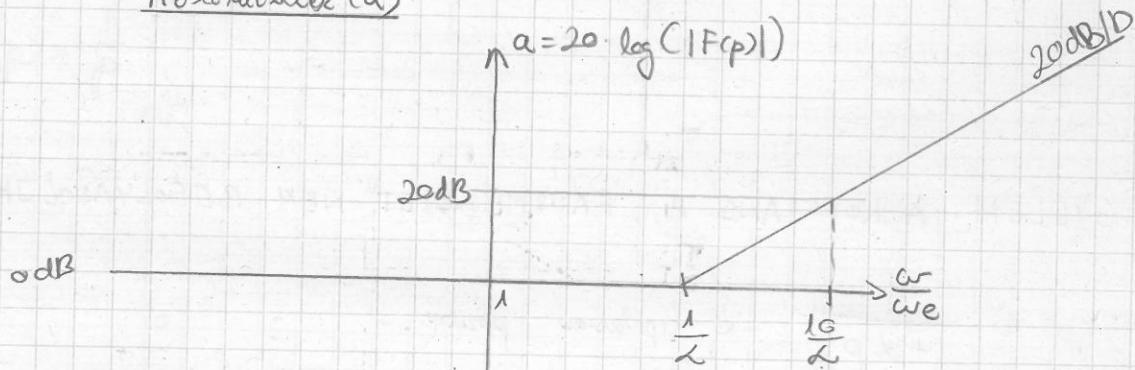
Fázis (b)



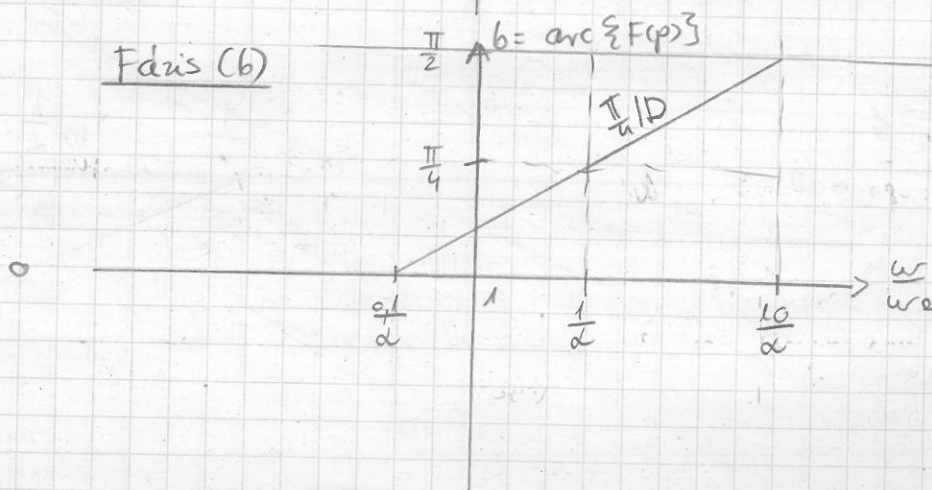
5) $F(p) = 1 + \alpha p$, α tipikusan pozitív



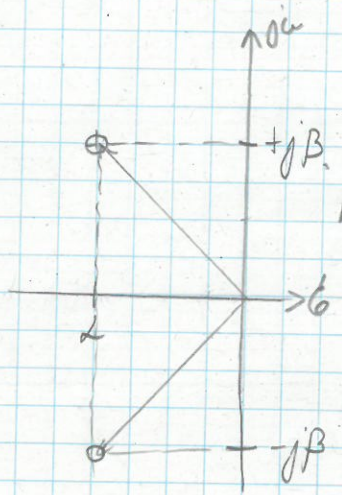
Abszolútérték (a)



Fázis (b)

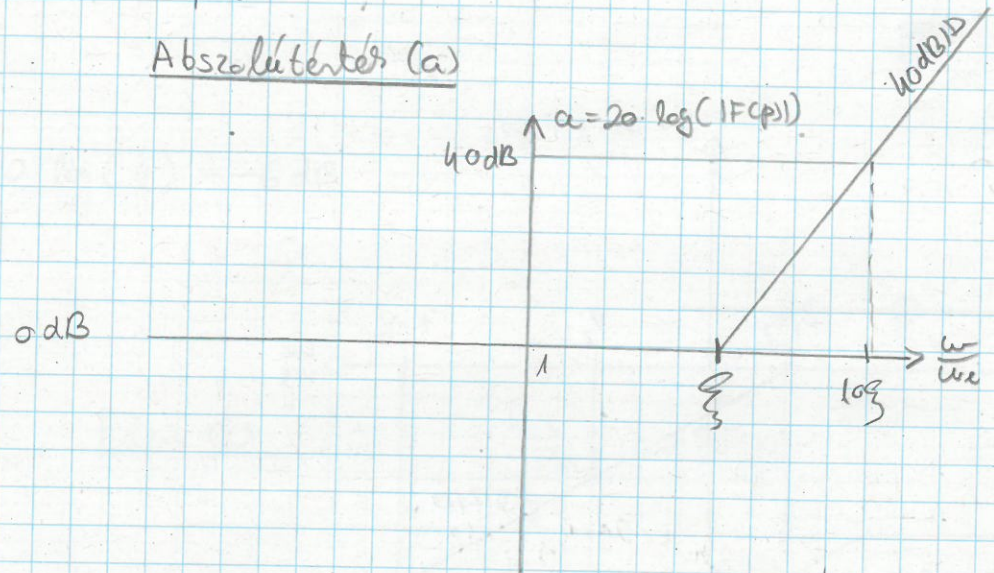


6) $F(p) = ap^2 + bp + c$, és így, hogy $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ konjugált komplex.
 α mindig negatív!

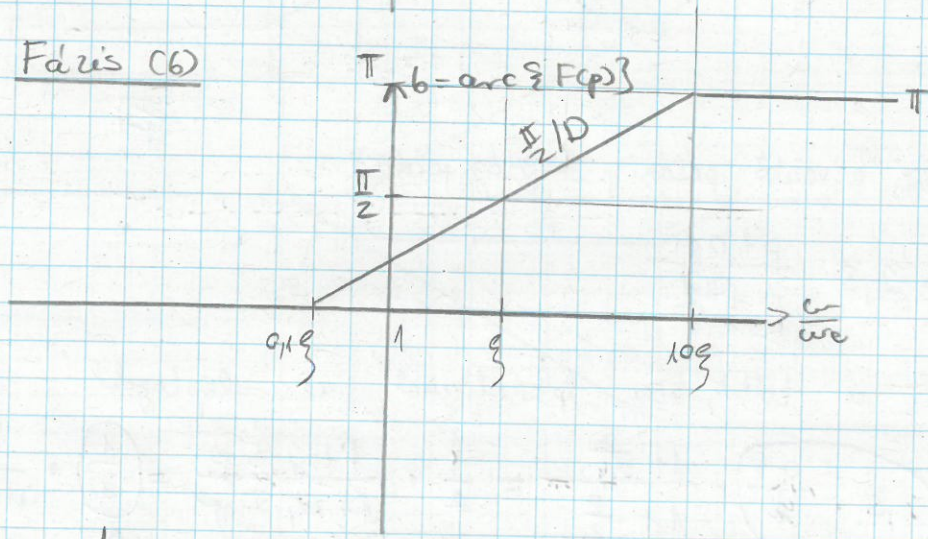


A vektorok hossza: $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \xi$ FONTOS!!!

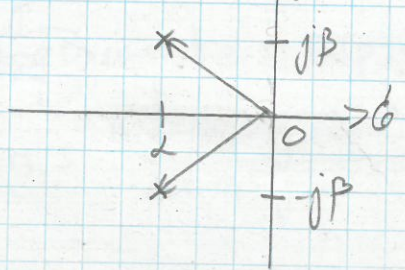
Abszolútérték (a)



Fázis (b)

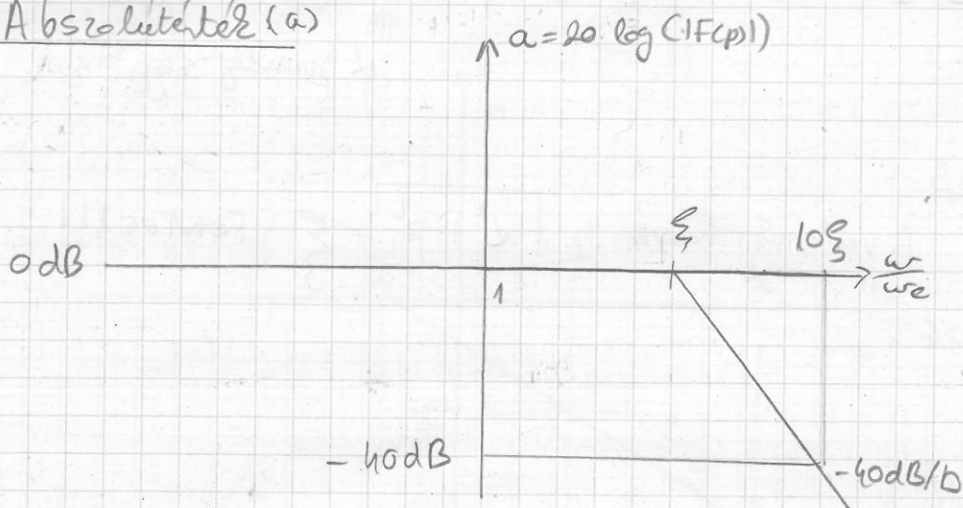


7) $F(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c}$ és így, hogy $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ konjugált komplex.
 α negatív.

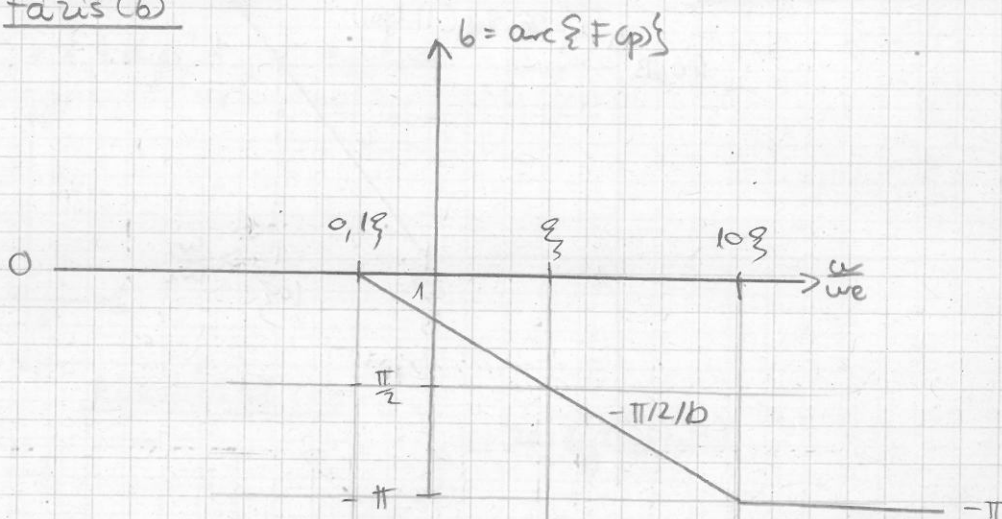


Vektor hossza: $\xi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Abszolútérték (a)



Fázis (b)



Allyon itt egy bevezető példa. (Gyógy példa)

$$F(p) = 2,5 \frac{p + 0,4}{p + 2}$$

Átalítsuk át a törtet, hogy látszódjának az alaptagok!

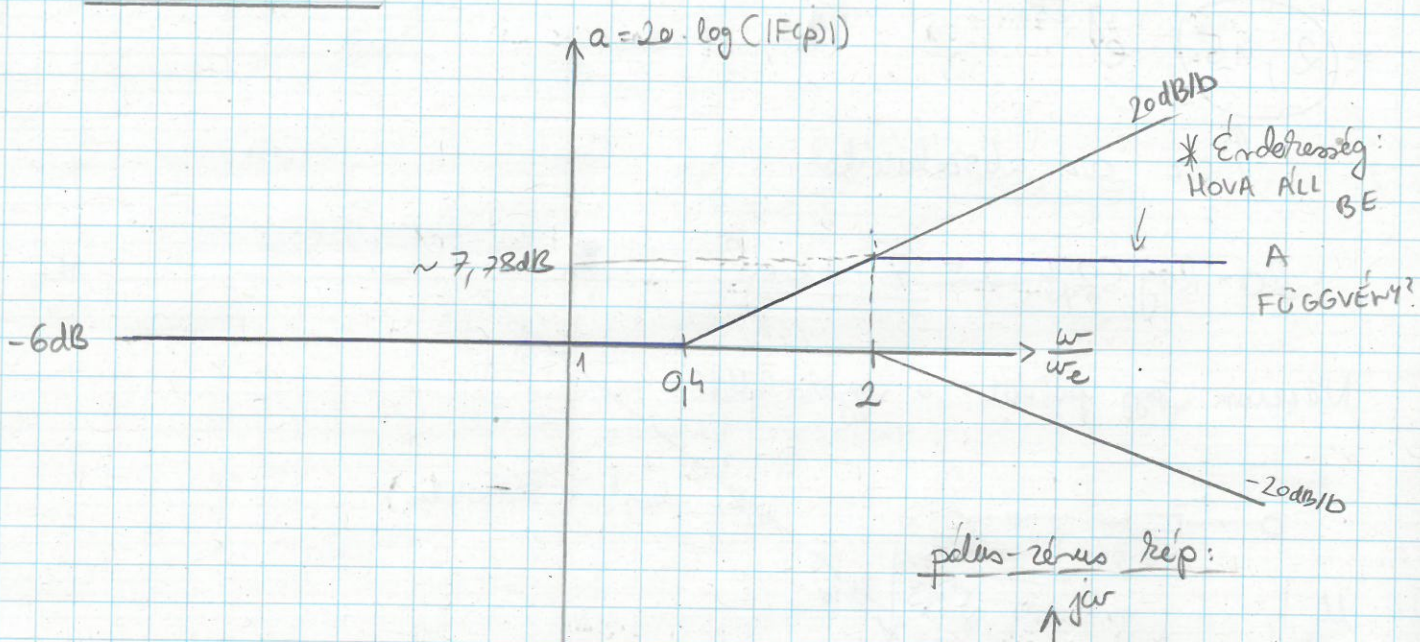
$$F(p) = \underbrace{2,5 \cdot \frac{0,4}{2}}_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{p}{0,4}}{1 + \frac{p}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 2,5p}{1 + 0,5p} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{konstans}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + 0,5p}}_{\substack{-2 \text{ pólus} \\ \text{zérus}}} \cdot \underbrace{(1 + 2,5p)}_{\text{zérus}}$$

Három ismét alaptagból áll össze a függvény.

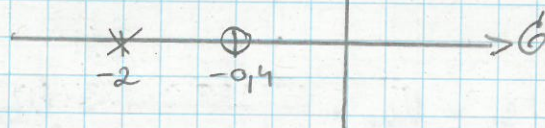
Ábrázoljuk!

Bode-alak

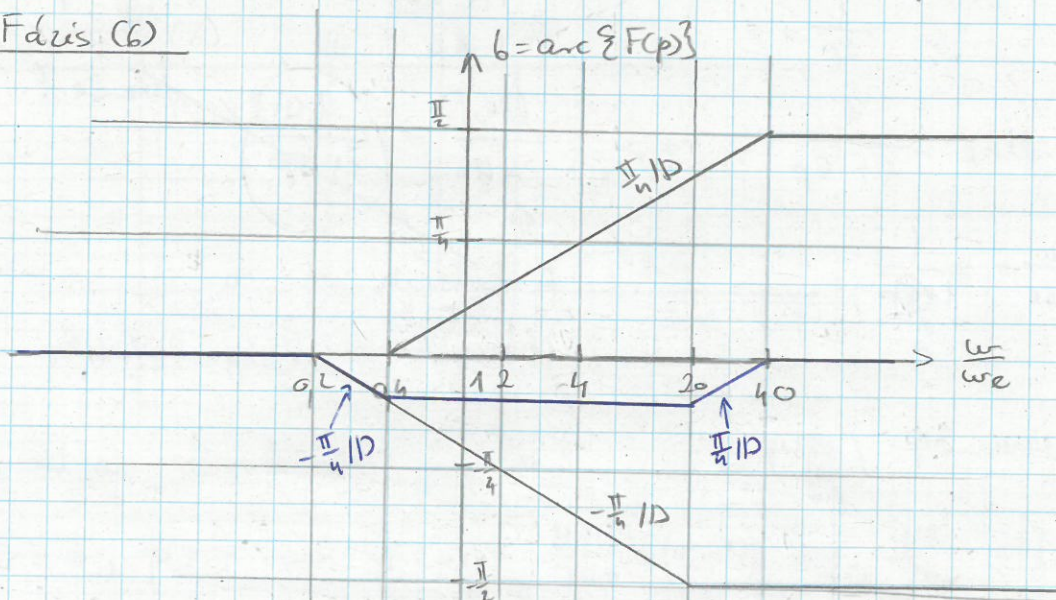
Abszolútérték (a)



$$20 \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) = -6 \text{ dB}$$



Fázis (b)



*: Látjuk: $\frac{\omega}{\omega_e} = 10$ esetén már biztosan "versztes" a grafikon.

$\Rightarrow$ Helyettesítsünk be $F(p) = be$ $p = j10$ -et!

$$F(p) = 0,5 \cdot \frac{1 + 2,5 \cdot j10}{1 + 0,5 \cdot j10} = 0,5 \cdot \frac{1 + j25}{1 + j5} = 0,5 \cdot \frac{\sqrt{626} \cdot e^{j1,53}}{\sqrt{26} \cdot e^{j1,37}} =$$

Ez már sokkal jobb!

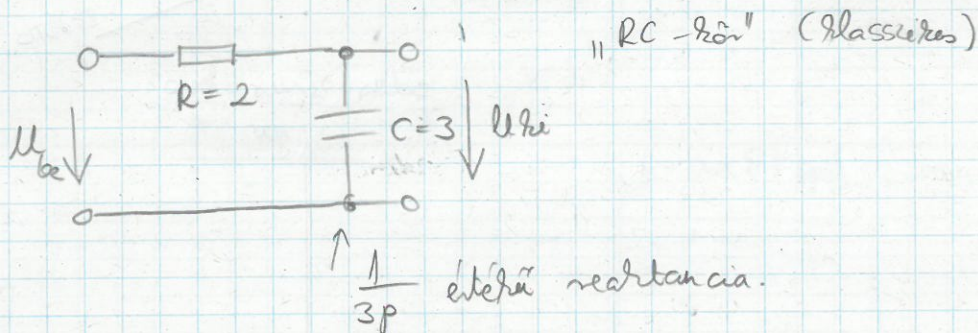
- 16 -

$$= (2,45) \cdot e^{j \frac{4}{25}}$$

↑ ez az abszolútérték

$$20 \cdot \log(2,45) = \underline{\underline{7,78 \text{ dB}}}$$

Nézzünk egy példát a gyakorlatból!



$$U_{xi} = U_{be} \cdot \frac{\frac{1}{3p}}{\frac{1}{3p} + 2} = U_{be} \cdot \frac{\frac{1}{3p}}{\frac{1+6p}{3p}} = U_{be} \cdot \frac{1}{3p} \cdot \frac{3p}{1+6p} =$$

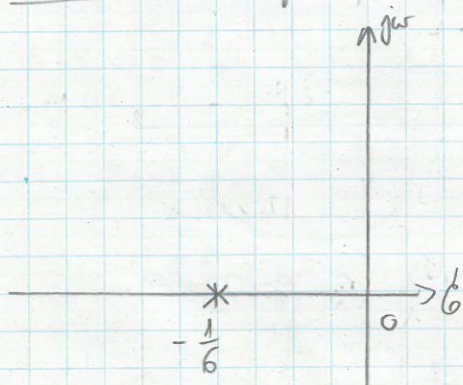
$$= U_{be} \cdot \frac{1}{1+6p} \Rightarrow \frac{U_{xi}}{U_{be}} = \frac{1}{1+6p} \quad \leftarrow \text{ismerős?}$$

$$F(p) = \frac{U_{xi}}{U_{be}} = \frac{1}{1+6p}$$

↑
2

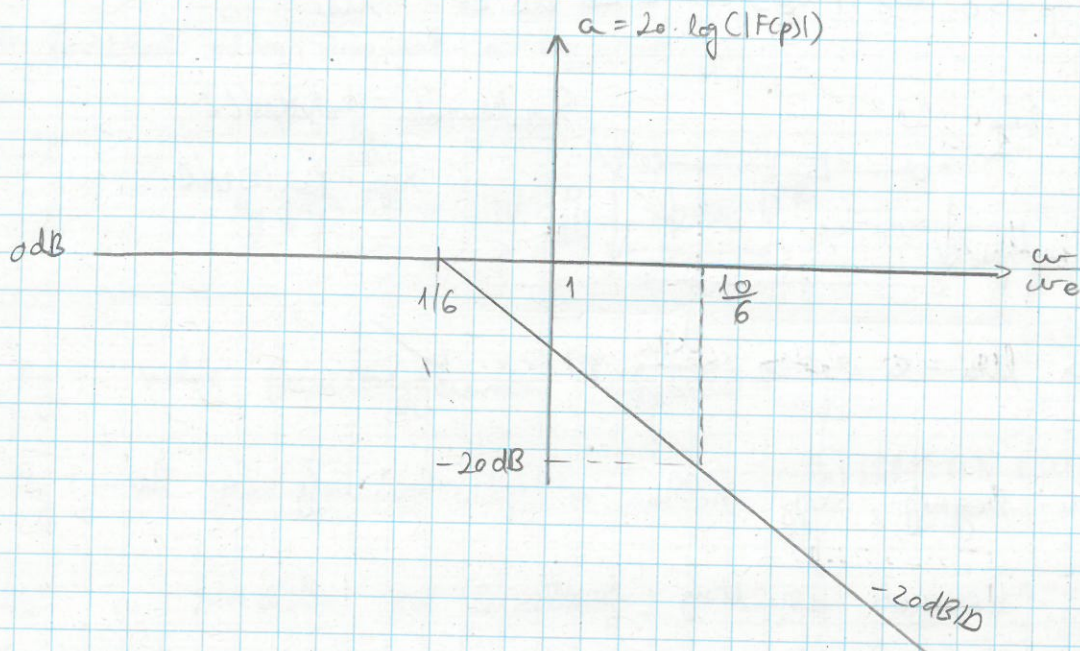
↑
A kimeneti és a
bemeneti feszültség aránya

Pólus-zérus lép.

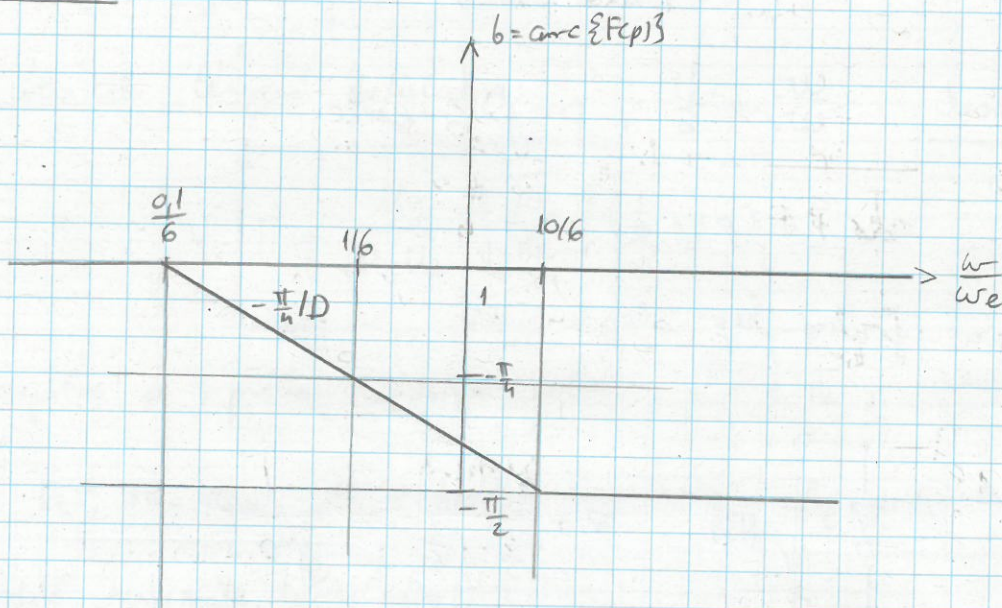


Ábrázoljuk a kimeneti és a
bemeneti feszültség arányát

Bode-diagramon!



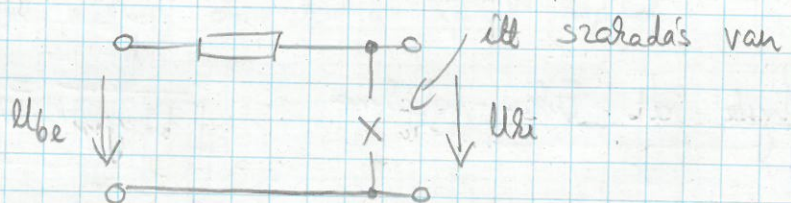
Fázis (b)



Mit mond az abszolútérték-grafikon?

- Ha $\omega = 0, p = 0 \Rightarrow F(p) = \frac{U_{ki}}{U_{be}} = (0 \text{ dB}) \Rightarrow \frac{U_{ki}}{U_{be}} = 1. \Leftrightarrow U_{ki} = U_{be}$

Fizikai kép:

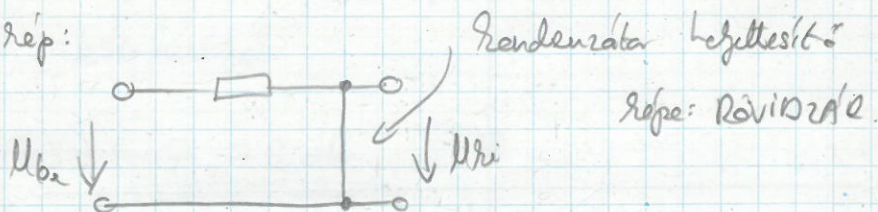


A bemenetre kapcsolt teljes U_{be} feszültség rendelkezésre áll a kimeneten. $U_{be} = U_{ki}$ ✓

-18-

- Ha $\omega \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0 \Rightarrow F(p) \rightarrow \infty \text{ dB} \Leftrightarrow \frac{U_{ri}}{U_{be}} \rightarrow 0$.

Fizikai lép:



$$\Rightarrow U_{ri} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{ri}}{U_{be}} \rightarrow 0. \quad \checkmark$$

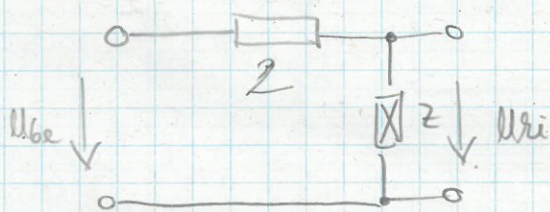
A fázisgrafikon megadja, hogy mekkora a fázis különbség a bemeneti és a bemeneti feszültség között.

$\Rightarrow$ Fázistolás a rendszeren miatt lép fel.

Nevezetes pont: $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{6}$, $p = j \frac{1}{6}$ esete

$$\text{Látjuk: } \arg \{ F(p = j \frac{1}{6}) \} = -\frac{\pi}{4}.$$

Lássuk be a fizikai lép alapján is.



$$Z = \frac{1}{3 \cdot j \frac{1}{6}} = \frac{1}{j 0,5}$$

$$U_{ri} = U_{be} \cdot \frac{\frac{1}{j 0,5}}{\frac{1}{j 0,5} + 2} \Leftrightarrow \frac{U_{ri}}{U_{be}} = \frac{\frac{1}{j 0,5}}{j + 1} = \frac{1}{1 + j}$$

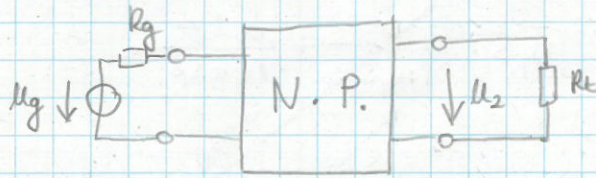
$$\text{Írjuk át Euler-alakra: } \frac{1}{1+j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j \frac{\pi}{4}} \quad \checkmark$$

Természetesen a fizikai lép és a Bode-diagram összehangban van.



Lezáró négyfókusok átviteli tényezője

A követőre módon vizsgáljuk a négyfókusot:



R_g : valódi feszültséggenerátor ellenállása

U_g : a generátor feszültsége

U_2 : a kimeneten eső feszültség

R_t : a kimenetre helyezett terhelő ellenállás

ISMERT ÉRTÉKEK

Az átviteli tényező definíciója:

$$\Gamma = \frac{U_g}{2 U_2} \sqrt{\frac{R_t}{R_g}}$$

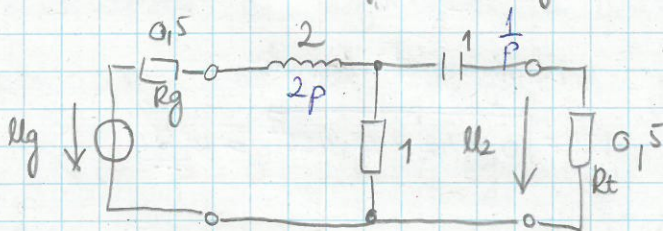
Bizonyítás és precíz indoklás nélkül: $\Gamma = \sqrt{\frac{P_0}{P_2}}$, ahol P_2

az R_t ellenállásra fellépő hatásos teljesítmény, P_0 pedig a generátorból kivehető maximális teljesítmény.

Típus feladat: • Γ meghatározása

• ábrázolása Bode-diagrammon (a, b)

• kapott eredmény összevetése a felkeltéssel.



$$\Gamma(c_p) = ?$$

$$u_2 = u_g \cdot \frac{\left(\frac{1}{p+0,5}\right) \times 1}{\left[\left(\frac{1}{p+0,5}\right) \times 1\right] + 2p+0,5} \cdot \frac{0,5}{0,5 + \frac{1}{p}}$$

$$0,5 \cdot \frac{p}{1+0,5p} = \frac{0,5p}{1+0,5p}$$

$$\frac{1}{p} + 0,5 = \frac{1+0,5p}{p}$$

$$\frac{1+0,5p}{p} \times 1 = \frac{\frac{1+0,5p}{p}}{\frac{1+0,5p}{p} + p} = \frac{1+0,5p}{1+1,5p}$$

$$\frac{1+0,5p}{1+1,5p} + 2p = \frac{1+0,5p+2p+3p^2}{1+1,5p} = \frac{3p^2+2,5p+1}{1,5p+1}$$

$$\frac{3p^2+2,5p+1}{1,5p+1} + 0,5 = \frac{3p^2+2,5p+1+0,5+0,75p}{1,5p+1} = \frac{3p^2+3,25p+1,5}{1,5p+1}$$

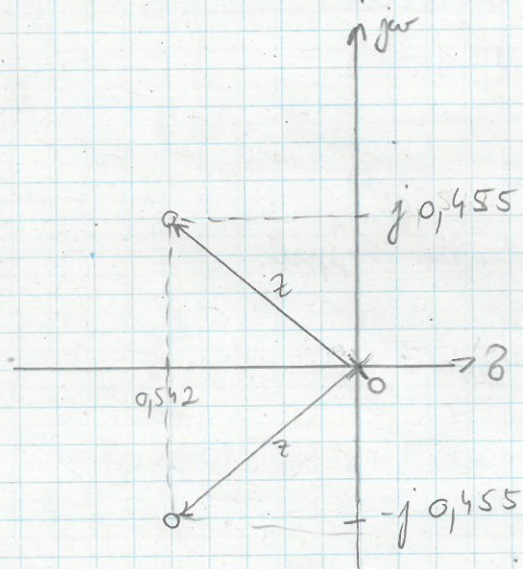
$$s_{gg}: u_2 = u_g \cdot \frac{\frac{1+0,5p}{1+1,5p}}{\frac{3p^2+3,25p+1,5}{1+1,5p}} \cdot \frac{0,5p}{1+0,5p} =$$

$$= u_g \cdot \frac{0,5p}{3p^2+3,25p+1,5} \Leftrightarrow \frac{u_g}{2u_2} = \frac{3p^2+3,25p+1,5}{p}$$

$$\text{és } \frac{R_t}{R_g} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \Rightarrow \Gamma(p) = \frac{3p^2+3,25p+1,5}{p} \quad \textcircled{P}$$

Pólus-zérus lép

↑ pólus $p=0$ -nál



zérusok:

$$3p^2+3,25p+1,5=0$$

$$p_{1,2} = -\frac{13}{24} \pm j0,455 \sim -0,542 \pm j0,455$$

Konjugált komplex:

$$|z| = \sqrt{0,542^2 + 0,455^2} = \underline{\underline{0,71}}$$

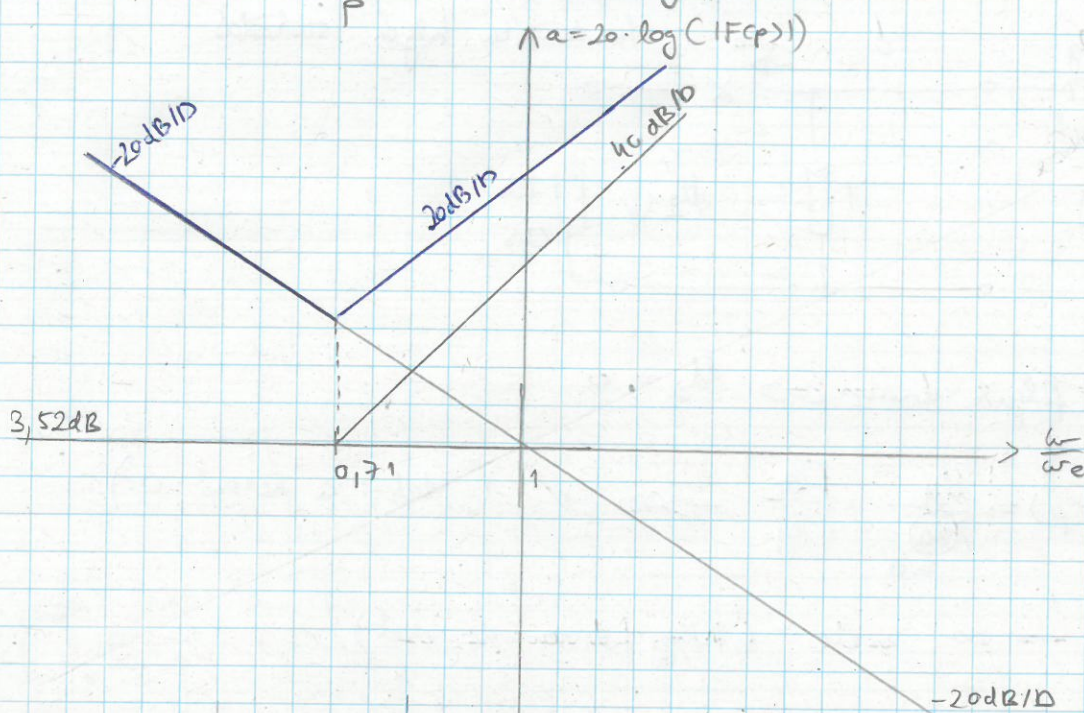
Abszolútérték (a)

$$|P(p)| = \frac{3p^2 + 3,25p + 1,5}{p}$$

konstans

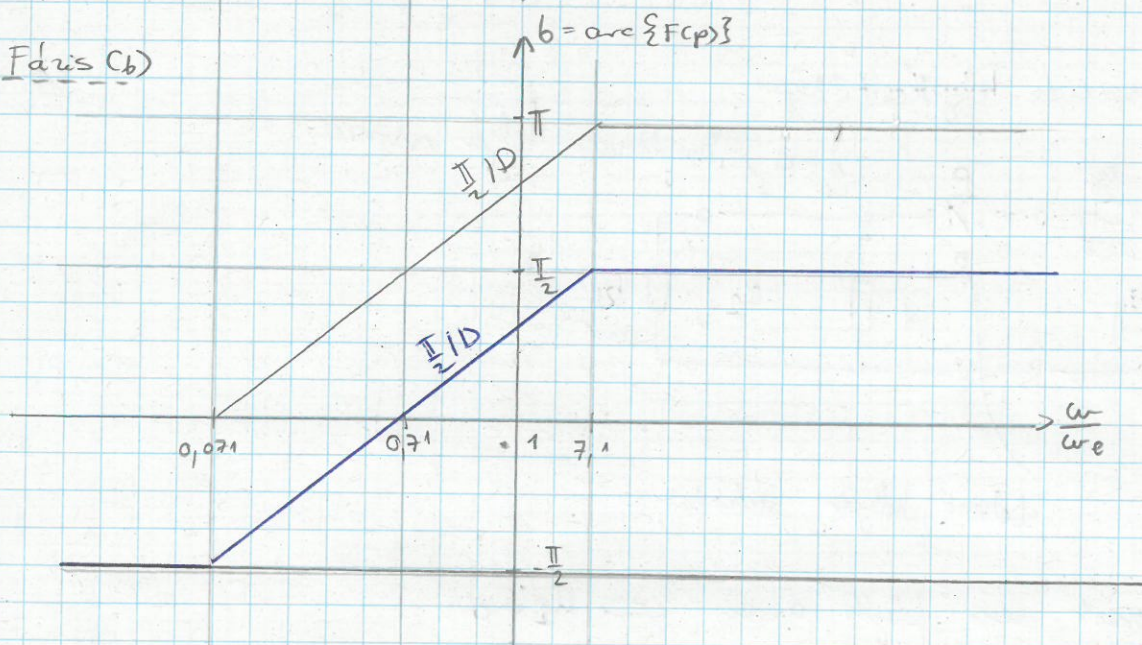
$$20 \cdot \log 1,5 = 3,52 \text{ dB}$$

$$\alpha = 20 \cdot \log(|F(p)|)$$



Fázis (b)

$$\beta = \arg\{F(p)\}$$



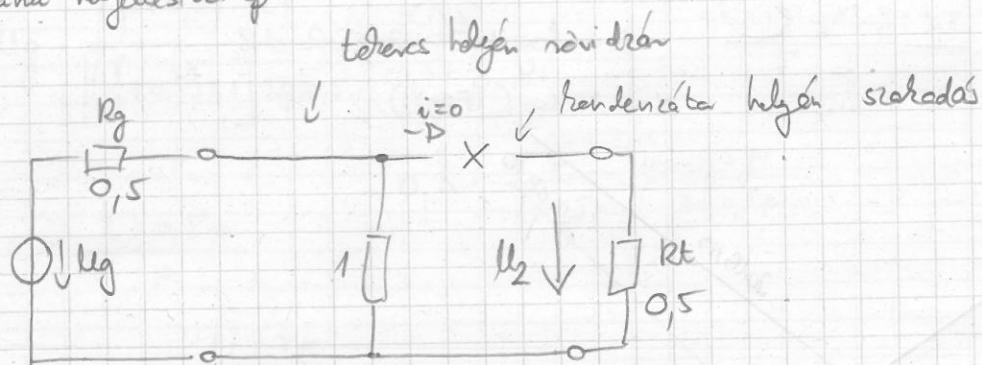
Tervezésen és meg semmi, a fizikai réppel - és nem. az matematikai
 után is - be kell látnunk, hogy jó, amit csinálunk.

① $f = \omega = p = 0$ esete (Egységnyi eset)

megj:

$$\text{Látjuk: } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{3p^2 + 3,25p + 1,5}{p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{p^2}{p} \cdot 3 + \frac{3,25}{p} + \frac{1,5}{p^2} \right) = \infty$$

Egyenáramú helyettesítőre:



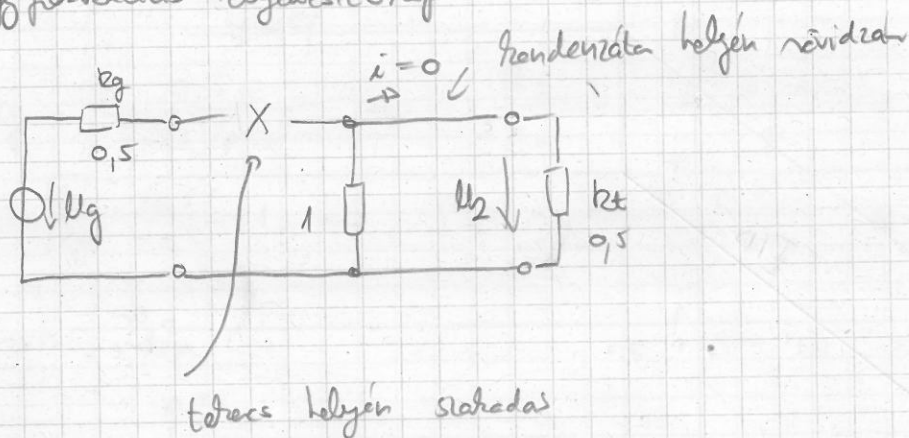
R_t -n nem folyik áram $\Leftrightarrow U_2 = 0$.

Mivel $\Gamma(p) = \frac{U_g}{2U_2} \cdot \sqrt{\frac{R_t}{R_g}} \rightarrow \infty$ ✓ (Mat: a nevező 0.)

② $f, p, \omega \rightarrow \infty$ esete (Nagy frekvenciás eset)

Az előbb már matematikailag beláttuk, hogy $\Gamma(p) \rightarrow \infty$.

Nagy frekvenciás helyettesítőre:



R_t -n most sem folyik áram $\Leftrightarrow U_2 = 0$

Mivel $\Gamma(p) = \frac{U_g}{2U_2} \sqrt{\frac{R_t}{R_g}} \rightarrow \infty$ ■

Igazoltuk, hogy a kapott eredmény összhangban van a fizikai képpel.