Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Laplace-transzformáció és alkalmazása

Szakdolgozat

Kiss Eszter
Matematika BSc., Elemző szakirány

Témavezető: Bátkai András, Egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2012

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat a Laplace-transzformációval és annak alkalmazásával foglalkozik. Először röviden ismertetném Laplace életét és munkásságát, majd a transzformáció definíciója és annak alkalmazása következik néhány függvényre. Ezek után a transzformáltra vonatkozó tulajdonságokat vesszük sorra. A következő fejezetben a Laplace-transzformált és a generátor függvény alakulását nézzük meg deriválásra és integrálásra vonatkozóan. Ezek után a transzformáció inverzét és a parciális törtekre bontás módszerét tárgyaljuk. A dolgozat transzformáció legfontosabb alkalmazásával, a közönséges differenciálegyenletek és egyenletrendszerek valamint az integrálegyenletek tárgyalásával zárul. Ahol láthatjuk hogy a transzformáció a differenciálegyenletek és egyenletrendszerekből algebrailag könnyebben megoldhatót hoz létre.

- Laplace élete és munkássága

Szülei szegényparasztok voltak. Beaumont-ban született. A beaumont-i katonai iskolának bejáró növendéke volt, ahol feltűnt kitűnő emlékezőképességével. Tanulmányainak elvégzése után ugyanennek az iskolának lett tanára. Képességeinek azonban a kis vidéki iskola nem biztosított elég lehetőséget, és ezért Párizsba ment. Ajánlóleveleivel D'Alembertnél jelentkezett. A híres enciklopédista azonban nem fogadta Laplace-t. Ekkor Laplace sajátkezűleg írt levélben kereste fel. A levél elolvasása után Laplace előtt megnyílt D'Alembert ajtaja, hiszen ez az írás a mechanikai elvekről szóló remek értekezés volt. Pár nap múlva Laplace-t az École Militaire matematika tanárává nevezték ki. Ettől kezdve gyorsan haladt előre. 24 éves korában már az akadémia levelező tagja, majd a királyi tüzérség növendékeinek examinátora (vizsgáztatója) lett. 1810 után majdnem minden európai tudományos akadémia tagjául választotta. 1794-ben az École Normale Supérieure analízis tanára lett, nem sokkal később pedig a Mértékügyi Hivatal tagja és elnöke. 1812-ben jelent meg a Théorie analitique des probalitités (A valószínűség analitikai elmélete) című műve, amely a valószínűségszámítást a matematika önálló ágaként

tárgyalja. Ebben a műben jelent meg a valószínűség klasszikus modellje, amely akkor alkalmazható, ha véges sok elemi esemény van, és azok bekövetkezése egyformán valószínű.
A newtoni mechanika alapjain az égi mechanika kifejlődése L. Euler, J. L. D'Alembert, J. L. Lagrange és P. S. Laplace tevékenysége nyomán indult meg. Különösen jelentős Laplace munkássága, mely az égi mechanika valamennyi területére kiterjedt. Nagy összefoglaló műve a "Traité de Mécanique Céleste" (I.-IV. kötet 1798-1805, V. kötet 1825) az égi mechanika problémáinak első rendszeres tárgyalását adja. Joggal tekintik Laplace-t az égi mechanika megalapítójának (az égi mechanika elnevezés is tőle származik).

2. fejezet

Laplace-transzformáció

Ebben a fejezetben a Laplace-transzformáltat fogom definiálni és ennek alapján néhány függvénynek kiszámolom a traszfolmáltját.

2.1. Definíció és alkalmazása

2.1. Definíció. *Az $f : [0, \infty[\to \mathbf{C}, t \to f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja az*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

függvény, melynek értelmezési tartománya a $]0, \infty[$ intervallum azon pontjaiból áll, ahol a fenti improprius integrál konvergens. Jelölés: $L[f(t)] = F(s)$

Definíció alapján számítsuk ki néhány függvény Laplace-transzformáltját!
Az értelmezési tartományt a továbbiakban nem jelöljük külön.

1. $f(t) = 1$
   Alkalmazva a definíciót a következőt kapjuk.
   $$F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$
   Tehát $L[1] = \frac{1}{s}$ és az integrál linearitása miatt tetszőleges $c \in \mathbf{R}$ esetén $L[c] = \frac{c}{s}$.

2. $f(t) = t$
   A parciális integrálást alkalmazom a következő megoldásakor.
   $$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} = \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Tehát $L[t] = \frac{1}{s^2}$, illetve bármely $c \in \mathbf{R}$ esetén $L[c \cdot t] = \frac{c}{s^2}$.

3. $f(t) = t^n, n \in \mathbf{N}^+, n \geqslant 2$.

Ennek meghatározásához teljes indukciót használok. Kiszámolom $n = 2$ és $n = 3$ esetet is.

a) Először legyen $n = 2$. Ekkor parciálisan integrálunk majd felhasználjuk a 2. feladatban kapott eredményt, így

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \left[t^2 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 + \frac{2}{s} \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s} \cdot L[t] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} = L[t^2].$$

b) Ha $n = 3$, akkor

$$F(s) = \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-st} dt = \left[t^3 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 3t^2 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 + \frac{3}{s} \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \frac{3}{s} L[t^2] = \frac{3 \cdot 2}{s^4} = \frac{3!}{s^4} = L[t^3].$$

c) Teljes indukcióval megkapható bármely n-re megkaphatjuk $L[t^n]$ képletét.

$$L[t^n] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st} dt = \left[t^n \cdot \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty n \cdot t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 - \int_0^\infty \frac{n}{-s} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-st} dt = \frac{n}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{n}{s} \left(\left[t^{n-1} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty (n-1) t^{n-2} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s} \left(0 - \int_0^\infty \frac{n-1}{-s} \cdot t^{n-2} \cdot e^{-st} dt \right) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \left(\left[t^{n-2} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty (n-2) t^{n-3} \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s}(0 - \int_0^\infty \frac{n-2}{-s} \cdot t^{n-3} \cdot e^{st} dt) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-3} e^{-st} dt =$$

$$\ldots = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \ldots \frac{4}{s} \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-st} dt = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{s} L[t^3] =$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{s} \cdot \frac{3!}{s^4} = \frac{n!}{s^{n+1}} = L[t^n].$$

A fontosabb exponenciális és trigonometrikus függvények traszformáltja közetkezik.

1. $f(t) = e^{at}$

   Ekkor

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt =$$
$$\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

   Ez alapján

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}.$$

2. Legyen f(t)=$t \cdot e^{at}$, ahol a tetszőleges valós vagy komplex állandó.

   Ismét a parciális integrálást alkalmazzuk az $f = t$ és a $g' = e^{at} \cdot e^{-st}$ kiosztással.

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$
$$= \left[t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt =$$
$$= 0 - \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{(-s+a)^2}\right]_0^\infty = -\left(0 - \frac{1}{(s-a)^2}\right) = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

3. $f(t) = t^n \cdot e^{at}$

   n=1-re már láttuk

$$L[t \cdot e^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

n=2 esetben a következő képpen alakul

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$\left[t^2 \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2 \cdot t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt =$$

$$0 + \frac{2}{s-a} \int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s-a} \cdot \frac{1}{(s-a)^2} = \frac{2}{(s-a)^3}.$$

Folytatható az eljárás $n \geq 3$ esetén is. Teljes indukcióval pedig megkaphatjuk $L[t^n e^{at}]$ képletét. Az indukció során parciális integrálást hajtunk végre.
Tehát

$$L[t^n \cdot e^{at}] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t^n e^{-(s-a)t} = \left[t^n \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty n \cdot t^{n-1} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt = 0 - \int_0^\infty \frac{n}{-(s-a)} t^{n-1} \cdot e^{(s-a)t} dt = \frac{n}{s-a}$$

$$\int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-(s-a)t} dt = \frac{n}{s-a} \cdot \left(\left[t^{n-1} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty (n-1) \cdot t^{n-2} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt \right) = \frac{n}{s-a} \cdot \left(0 - \int_0^\infty \frac{n-1}{-(s-a)} \cdot t^{n-2} \cdot e^{-(s-a)t} dt \right) = \frac{n}{s-a}$$

$$\cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \int_0^\infty t^{n-2} \cdot e^{-(s-a)t} dt = \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \left(\left[t^{n-2} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty (n-2) t^{n-3} \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt \right) = \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \left(0 - \int_0^\infty \frac{n-2}{-(s-a)} \cdot \right.$$

$$\left. t^{n-3} \cdot e^{-(s-a)t} dt \right) = \frac{n}{s-a} \cdot \frac{n-1}{s-a} \cdot \frac{n-2}{s-a} \cdot \int_0^\infty t^{n-3} \cdot e^{-(s-a)t} dt = \ldots =$$

$$\frac{n}{s-a}\cdot\frac{n-1}{s-a}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{s-a}\int_0^\infty t^2\cdot e^{-(s-a)t}dt=\frac{n}{s-a}\cdot\frac{n-1}{s-a}\cdot\frac{n-2}{s-a}\cdot$$

$$\ldots\cdot\frac{3}{s-a}L[t^2e^{at}]=\frac{n}{s-a}\cdot\frac{n-1}{s-a}\cdot\frac{n-2}{s-a}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{s-a}\cdot\frac{2!}{(s-a)^3}=$$

$$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}=L[t^ne^{at}].$$

4. $f(t)=\cos(at)$
   Ebben az esetben használjuk az Euler formulát ($e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$, $e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$). A két egyenlőséget kivonva egymásból és rendezve kapjuk, hogy a $\cos(at)=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$.Ez alapján a transzformált a következő képpen alakul.

$$F(s)=\int_0^\infty\cos(at)\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\cdot e^{-st}dt=$$

$$=\int_0^\infty\frac{e^{(ia-s)t}+e^{(-ia-s)t}}{2}=\int_0^\infty\frac{e^{(ia-s)t}}{2}+\int_0^\infty\frac{e^{(-ia-s)t}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{ia-s}-\frac{1}{-ia-s}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-(-ia-s)-(ia-s)}{-a^2-s^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{-a^2-s^2}=\frac{s}{a^2+s^2}.$$

- Végül a hiperbolikus függvényekre mutatunk néhány példát.

5. $f(t)=\cosh(at), a\in\mathbf{C}$ tetszőleges, $z=at$.
   A $\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ a 4.példára hivatkozva, így kapjuk

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-st}+e^{-at}\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{2}\cdot L[e^{at}]\cdot L[e^{-at}].$$

Az exponenciális függvényeknél már láttuk $e^{\pm at}$ transzformálját,ez alapján az eredmény

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2-a^2}.$$

6. $f(t) = \sinh(at)$

   Itt is felhasználjuk az Euler-formulát,így

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

   tehát

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{at}\cdot e^{-st} - e^{-at}\cdot e^{-st}) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{s-s} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

7. $f(t) = t\cdot\sinh(at)$

$$F(s) = \int_0^\infty t\cdot\sinh(at)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty t\cdot\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\cdot e^{-st}dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty t\cdot e^{at}\cdot e^{-st} - \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-at}e^{-st} = \frac{1}{2}\frac{1}{(s-a)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+a)^2} = \frac{2as}{(s^2-a^2)^2}.$$

Az alábbi táblázatban összegyűjtöttem a fontosabb függvények Laplace-transzformáltját.

	f(t)	L[t]
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	t^2	$\frac{2}{s^3}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6.	$\ln(t)$	$-\frac{1}{s}\cdot(C+\ln(s))$
7.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
8.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
9.	$\cos^2(at)$	$\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
10.	$\sin^2(at)$	$\frac{2(a^2)}{s(s^2+4a^2)}$
11.	$t\cdot\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
12.	$t\cdot\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\arctan(\frac{a}{s})$
14.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
16.	$\cosh^2 at$	$\frac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$
17.	$\sinh^2 at$	$\frac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$

2.2. Fontosabb alkalmazási szabályok

A következő pontban 5 fontos alkalmazási tulajdonságát szemléltetem a transzformáltnak.

1. **Linearitás**

   - Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja $L[f(t)] = F(s)$ akkor $L[K \cdot f(t)] = K \cdot L[f(t)] = K \cdot F(s)$, valamely K valós vagy komplex számra.
     Ugyanis a konstans kiemelhetősége miatt
     $$L[Kf(t)] = \int_0^\infty K \cdot f(t)e^{-st}dt = K \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-st} = K \cdot L[f(t)].$$
   - Adott $f_1(t), f_2(t)$, amelyeknek Laplace transzformáltja $F_1(s), F_2(s)$, akkor
     $$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s).$$
     Ugyanis az integrál additivitása és disztributívitása miatt
     $$L[f_1(t) + f_2(t)] = \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t))e^{-st}dt =$$
     $$\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s).$$
     Mindkét törvényszerűség azzal igazolható hogy a Laplace-transzformált tulajdonképpen határozott integrál.

2. **Eltolási tétel**
   Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja L[f(t)]=F(s), ekkor $f(t-\tau)$ esetén a Laplace transzformált eredménye a $t - \tau = z$,$t = z + \tau$,$dt = dz$ helyettesítéssel
   $$L[f(t-\tau)] = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(z)e^{-(z+\tau)s}dz =$$
   $$\int_0^\infty f(z)e^{-zs}e^{-\tau s}dz = e^{-\tau s}\int_0^\infty f(z)e^{-zs}dz = e^{-\tau s}F(s).$$

3. **Csillapítási tétel**
   Most megviszgáljuk az előző kérdés fordítottját. Ha F az f függvény transzformáltja, akkor az $s \to F(s+a)$ függvény mely generátorfüggvényhez tartozik?
   Mivel
   $$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

ezért

$$F(s+a)=\int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-st}=L[f(t)e^{-at}].$$

Tehát a Laplace-transzformált eltolása a generátorfüggvény e^{-at} exponenciális tényezővel való szorzásával egyenértékű.

A csillapítási tétel segítségével számítsuk ki a következő függvény transzformáltját!

– $f(t)=e^{-at}\cosh(bt)$

Korábban már láttuk hogy $L[\cosh(bt)]=\frac{s^2}{s^2-b^2}$

Ebből következően $s\to s+a$ helyettesítésel adódik:

$$L[e^{-at}\cosh(bt)]=\frac{(s+a)^2}{(s+a)^2-b^2}$$

4. Hasonlósági tétel

Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja $L[f(t)]=F(s)$ ekkor $f(at)$ esetén a Laplace transzformáció eredménye:

Legyen $at=z$, ekkor $t=\frac{z}{a}$ és $dt=\frac{1}{a}dz$ így,

$$L[f(at)]=\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(z)e^{-s\cdot\frac{z}{a}}\cdot\frac{1}{a}dz=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(z)e^{-\frac{s}{a}z}dz=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

- Hasonlósági tétellel számoljuk ki a $L[\ln(at)]$-t!

  Laplace-transzformáltakat tartalmazó táblázatból tudjuk hogy:

  $L[\ln t]=-\frac{1}{s}(C+\ln s)$, ahol C egy állandó.

  Innen a hasonlósági tétellel adódik:

$$L[\ln at]=\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{\frac{s}{a}}\left(C+\ln\frac{s}{a}\right)\right)=-\frac{1}{s}\left(C+\ln\frac{s}{a}\right).$$

- Számoljuk ki a $L[(at)^2\cosh(at)]$-t!

  Szintén a táblázatból tudjuk, hogy

$$L[t^2\cosh(t)]=\frac{2s(s^2+3)}{(s^2-1)^3}.$$

Ahonnan a hasonlósági tétellel adódik

$$L[(at)^2 \cosh(bt)] = \frac{1}{a} \cdot \frac{2 \cdot \frac{s}{a}\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 3\right)}{\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2 - 1\right)^3} = \frac{\frac{2s}{a}\left(\frac{s^2}{a^2} + 3\right)}{a \cdot \left(\frac{s^2}{a^2} - 1\right)^3} = a^2 \cdot \frac{2s \cdot (s^2 + 3a^2)}{(s^2 - a^2)^3}.$$

5. Konvolúció

Az $f_1(t)$ és $f_2(t)$ függvények konvolúcióját a

$$g(t) = \int_0^t f_1(t) f_2(t - \tau) d\tau$$

összefüggéssel értelmezzük. Most tekintsük a $g(t)$ Laplace-transzformáltját. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét, és vezessük be a $t' = t - \tau$ változót:

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f_1(t) f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty f_1(t) d\tau \int_0^t e^{-st} f_2(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-st} f_2(t') dt' = F_1(s) F_2(s). \end{aligned}$$

Így a konvolúció transzformáltja egyszerűen az egyes transzformáltak szorzata.

3. fejezet

Deriválhatóság és integrálhatóság

3.1. A generátor függvény deriválása

Eddig a definíció alapján határoztuk meg egy függvény Laplace-transzformáltját. A most következő részben a gyakorlati szempontból fontos eljárást fogalmazunk meg. Melynek segítségével könnyebben előállítható a transzformált.
Először egy függvény deriváltjának Laplace-transzformáltjával foglalkozunk.
A definíció alapján adódik

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \Big[f(t) \cdot e^{-st}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt =$$

$$-f(0) + s \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = s \cdot L[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0),$$

ahol F az f függvény Laplace-transzformáltja.
Tehát

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0).$$

Ennek a formulának az ismételt alkalmazásával előállíthatjuk magasabb rendű deriváltak transzformáltját is

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s \cdot (sL[f(t)] - f(0)) - f'(0) = s^2L[f(t)] - sf(0) - f'(0).$$

Így ha tovább folytatjuk adódik az n-edrendű deriváltakra vonatkozó formula

$$L[f^{(n)(t)}] = s^nL[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'0 - ... - f^{(n-1)}(0).$$

A következő példákon keresztül illusztrálnám ezt a szabályt.

1. $f(t) = t$

Akkor

$$L[f'(t)] = s \cdot \frac{1}{s^2} - f(0) = \frac{1}{s}.$$

2. $f(t) = \cos(at)$

A táblázatból láthatjuk hogy

$$L[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

akkor

$$L[f'(t)] = L[-a \cdot \sin(at)] = s \cdot L[\cos(at)] - f(0) = s \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - f(0).$$

3. $f(t) = \cos^2 at$

$$f'(t) = 2\cos(at)(-\sin(at))a = -a2\sin(at)\cos(at) = -a\sin 2(at)$$

ekkor

$$L[f'(t)] = -aL[\sin 2at] = -a\frac{2a}{s^2 + 4a^2} = L[f(t)]s - f(0) = sL[f(t)] - 1,$$

tehát

$$L[f(t)] = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \frac{2a^2}{s^2 + 4a^2}\right) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 4a^2 - 2a^2}{s^2 + 4a^2} = \frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}.$$

4. $f(t) = \sin^2 at$

Mivel

$$f'(t) = 2\sin(at)\cos(at) \cdot a = a2\sin(at)\cos(at) = a\sin 2a,$$

ezért

$$L[a\sin 2a] = a \cdot L[\sin 2a] = a \cdot \frac{2a}{s^2 + 4a^2},$$

tehát

$$L[f(t)] = \frac{a \cdot \frac{2a}{s^2+4a^2} + 0}{s} = \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}.$$

3.2. Laplace-transzformált deriválása

Az alábbi eredmény azt mondja, hogy a Laplace-transzformált s-szerinti deriváltját kiszámíthatjuk úgy,hogy a deriválás és az improprius integrál sorrendjét felcserélhetjük, azaz először s szerint deriváljuk az $e^{-st}f(t)$ kifejezést, majd a kapott eredménynek besszük az improprius integrálját. Ezért:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}\cdot e^{-st}dt =$$
$$\int_0^\infty f(t)(-t)\cdot e^{-st} = -\int_0^\infty t\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt$$

így

$$\frac{d}{ds}F(s) = -L[t\cdot f(t)].$$

Általánosan n-edrendű deriváltra a következőt kapjuk

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st} = \int_0^\infty (-t)^n\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt =$$
$$(-1)^n\int_0^\infty t^n\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt = (-1)^n L[t^n f(t)],$$

vagyis

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n L[t^n f(t)].$$

A következő részben az előzőekhez hasonlóan néhány feladaton keresztül mutatnám be az egyes függvények transzformáltjának deriválását.

1.Legyen $f(t) = t\cdot\sin(at)$.

Felhasználva $L[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2} = F(s)$, valamint alkalmazva $\frac{d}{ds}\cdot F(s) = -L[t\cdot f(t)]$ formulát kapjuk, hogy

$$L[t\cdot\sin(at)] = -\frac{d}{ds}\cdot\frac{a}{s^2+a^2} = -\left(-\frac{a\cdot 2s}{(s^2+a^2)^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}.$$

2. Legyen $f(t) = t^2\cdot\cosh(at)$

Korábbról tudjuk a hiperbolikus függvény transzformáltját

$$F(s) = L[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

Erre alkalmazzuk a

$$\frac{d^2}{ds^2} \cdot F(s) = (-1)^2 \cdot L[t^2 \cosh(at)]$$

képletet így,

$$L[t^2 \cosh(at)] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2 - a^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{(s^2 - a^2) - s2s}{(s^2 - a^2)^2}\right) =$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-s^2 - a^2}{(s^2 - a^2)^2}\right) = \frac{2s(s^2 + 3a^2)}{(s^2 - a^2)^3}.$$

3. Legyen $f(t) = t^n e^{at}$.
Induljunk ki az e^{at} Laplace transzformáltjából

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s} = F(s).$$

Alkalmazzuk erre az F-re a $\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n L[t^n f(t)]$ formulát.

$$L[t^n e^{at}] = \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{d^n}{ds^n} \cdot \frac{1}{s-a} = \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \cdot \frac{-1}{(s-a)^2} =$$
$$\frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \cdot \frac{(-1)(-2)}{(s-a)^3} = \ldots = \frac{1}{(-1)^n}(-1)^n \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

ahol $Re(s-a) > 0$.

3.3. A generátor függvény primitív függvényének transzformáltja

A deriváltra vonatkozó formula alkamazásával könnyen levezethetünk egy összefüggést,egy f függvény integrálfüggvényének Laplace transzformáltjára vonatkozóan.
Legyen

$$\phi(t) = \int_0^t f(t)dt$$

Ekkor $\frac{d}{dt}\phi(t) = f(t)$ összefüggés miatt egyrészt

$$L\left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right] = L[f(t)].$$

Másrészt a deriváltra vonatkozó szabály szerint

$$L\left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right] = sL[\phi(t)] - \phi(0) = sL[\phi(t)],$$

hiszen

$$\phi(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0.$$

Átrendezve az egyenletet, kapjuk a keresett összefüggést

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}L[f(t)] = \frac{F(s)}{s},$$

ahol F szokás szerint f Laplace transzformáltja. Eszerint a generátorfüggvény integrálása a Laplace transzformált s-sel való osztásával egyenértékű.

1. Számítsuk ki a $\phi(t) = \int_0^t t\sin(at)dt$ függvény Laplace transzformáltját!
Az előző megállapítás alapján az integrandusnak a Laplace-transzformáltját kell osztani s-sel, így

$$L[\phi(t)] = \frac{1}{s} \cdot L[t \cdot \sin(at)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} = \frac{2a}{(s^2+a^2)^2}.$$

2. Számítsuk ki $\phi(t) = \int_0^t t^2e^{-t}dt$ függvény transzformáltját.
Induljunk ki abból hogy ismerjük a t^ne^{at} transzformáltját, most ezt az $n = 2, a = -1$ helyettesítéssel kapjuk:

$$L[\phi(t)] = \frac{1}{s} \cdot L[t^2e^{-t}] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2!}{(s-(-1))^3} = \frac{s^2+2a^2}{s^2(s^2+4a^2)}.$$

3.4. Laplace transzformált integrálása

A Laplace transzformáltnak az integrálfüggvényét ha megviszgáljuk hasznos összefüggést kapunk. Ehhez állítsuk elő $t \to \frac{f(t)}{t}$ függvény transzformáltját

$$L[f(t)] = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_s^\infty e^{-st}dt =$$
$$= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right)ds = \int_s^\infty F(s)ds,$$

ahol felhasználtuk a $\frac{d}{ds}(\frac{e^{-st}}{t}) = -e^{-st}$ összefüggést.

1. Számítsuk ki az $f(t) = \frac{\sin(at)}{t}$ függvény transzformáltját!
Az előbb levezetett összefüggést alkalmazva

$$L\left[\frac{\sin(at)}{t}\right] = \int_s^\infty L[\sin(at)]ds = \int_s^\infty \frac{a}{s^2+a^2}ds =$$
$$= \frac{1}{a}\int_s^\infty \frac{1}{(\frac{s}{a})^2+1}ds = \left[\frac{1}{a}\left(\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right)a\right]_s^\infty =$$
$$= \left[\arctan\left(\frac{s}{a}\right)\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{a}\right) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right).$$

2. Számítsuk ki az $f(t) = \frac{\sin^2 at}{t}$ függvény transzformáltját.

Itt felhasználjuk hogy $L[\sin^2 at] = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$, amit már kiszámoltunk korábban. Innen következik

$$L[f(t)] = \int_s^\infty L[sin^2 at]ds = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}ds.$$

Az integrál kiszámításához parciális törtekre bontunk

$$\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+4a^2},$$

ennek primitív függvénye

$$\int\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{4}\frac{2s}{s^2+4a^2}\right)ds = \frac{1}{2}\ln|s| - \frac{1}{4}\ln|s^2+4a^2| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{s^2}{s^2+4a^2}\right|$$

ahonnan

$$L\left[\frac{\sin^2 at}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}ds = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{s^2}{s^2+4a^2}\right|\right]_s^\infty =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|1+\frac{4a^2}{s^2}\right|.$$

4. fejezet

Inverz Laplace-transzformáció

4.1. Definíció. *Legyen az F egy, komplex szám független változójú függvény, és létezzen egy $f(t)$ egyváltozós valós szám értekű függvény,amelyre teljesül,hogy $L[f(t)] = F$. Az $f(t)$ függvényt az F függvény inverz Laplace transzformáltjának nevezzük. Az inverz Laplace traszformált jelölése: $L^{-1}[F] = f(t)$.*

A gyakorlati alkalmazás szempontjából egyik legfontosabb tulajdonságot az alábbi állításban adjuk meg.

Állítás: Ha létezik $f_1(t)$=$L^{-1}[F_1]; f_2(t) = L^{-1}[F_2]$; ... ; $f_k(t) = L^{-1}[F_k]$ inverz Laplace transzformált függvények, és c_1;c_2; ... ; c_k tetszőleges adott valós vagy komplex számok akkor

$$L^{-1}[c_1F_1 + c_2F_2 + \ldots + c_kF_k] =$$

$$= c_1L^{-1}[F_1] + c_2L^{-1}[F_2] + \ldots + c_kL^{-1}[F_k] =$$

$$= c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \ldots + c_kf_k(t)$$

azaz az inverz Laplace transzformáció lineáris tulajdonságú.

Fontos még a konvolúciós tételként ismert állítás

Állítás: Egy ismeretlen $f(t)$ függvény F Laplace transzformáltja legyen szorzat alakú: $F = F_1F_2$,de legyenek ismertek az $f_1(t)$ és $f_2(t)$ függvények, mint a tényezők inverz Laplace-transzformáltjai: $f_1(t) = L^{-1}[F_1]$ és $f_2(t) = L^{-1}[F_2]$

Ekkor

$$f(t) = L^{-1}[F] = L^{-1}[F_1F_2] = \int_t^0 f_1(x)f_2(t-x)dx.$$

Alkalmazom a fent megfogalmazottakat néhány függvényre.

1. Számítsuk ki az

$$F(s) = \frac{3s-1}{s^2+4s+13}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

A tört nevezőjét teljes négyzetté alakítjuk

$$F(s)=\frac{3s-1}{s^2+4s+13}=\frac{3s-1}{(s+2)^2+9}=\frac{3(s+2)-7}{(s+2)^2+9}=3\frac{s+2}{(s+2)^2+9}-\frac{7}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

ezért az inverz Laplace-transzormált linearitását,a csillapitási tételt és a koszinusz és szinusz függvényekre vonatkozó azonosságokat alkalmazva:

$$L^{-1}[F(s)]=3L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right]-\frac{7}{3}L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]=3e^{-2t}\cos(3t)-\frac{7}{3}e^{-2t}\sin(3t).$$

2. Számítsuk ki az

$$F(s)=\frac{19-2s}{s^2+s-6}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

$$\frac{19-2s}{s^2+s-6}=\frac{19-2s}{(s-2)(s+3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+3}$$

$$19-2s=A(s+3)+B(s-2)=As+3A+Bs-2B$$

$$A+B=-2\rightarrow A=-2-B$$

$$3A-2B=19$$

$$3(-2-B)-2B=19$$

$$-6-3B-2B=19$$

$$-6-5B=19$$

$$-5B=25$$

$$B=-5\rightarrow A=-2+5=3$$

tehát

$$F(s)=\frac{3}{s-2}-\frac{5}{s+3}.$$

Inverz Laplace-transzformáció linearitását alkalmazva

$$L^{-1}[F(s)]=3L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-5L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=3e^{2t}-5e^{-3t}.$$

4.1. Parciális törtekre bontás módszere

Ez a módszer a későbbiekben is fontos lesz. Ebben a részben általánosan szeretném ismertetni majd egy egyszerű példán bemutatni.

Legyen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ alakú, ahol $p(x)$ egy m-edfokú, $q(x)$ pedig n-ed fokú polinom. A nevezőnek csak egyszeres, valós gyökei vannak. Ekkor $q(x)$ felírható gyöktényezős alakban. Ekkor pedig $\frac{p(x)}{q(x)}$ felírható:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

alakban. Itt az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számokat az egyenlő együtthatók módszerével kapjuk meg. Tehát

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

azonosságban a jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, majd az így kapott számláló együtthatóit összevetjük $p(x)$ megfelelő együtthatóival, így egy egyenletrendszert kapunk A_i-kre, amelyet megoldva megkapjuk a kívánt együtthatókat.

PÉLDA

1. Legyen

$$F(s) = \frac{19-2s}{s^2+s-6}.$$

A nevező szorzattá alakítása után kapjuk,

$$F(s) = \frac{19-2s}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

ebből

$$19 - 2s = A(s+3) + B(s-2) = As + 3A + Bs - 2B$$

ahonnan

$$A + B = -2 \rightarrow A = -2 - B$$

$$3A - 2B = 19$$

Behelyettesítem A-t a második egyenletbe

$$\begin{aligned} 3(-2-B)-2B &= 19 \\ -6-3B-2B &= 19 \\ -5B &= 25 \\ B &= -5 \end{aligned}$$

B-t behelyettesítve az első egyenletbe

$$A = -2-(-5) = 3$$

így

$$F(s) = \frac{19-2s}{s^2+s-6} = \frac{3}{s-2} - \frac{5}{s+3}.$$

5. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek és egyenletrendszerek

A Laplace transzformáció egyik legfontosabb alkalmazása az álladó együtthatós lineáris differenciálegyenletek és differenciálegyenletrend-szerek megoldása. Ehhez tekintsünk egy másodrendű differenciálegyenletet

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

ahol a, b, c adott konstansok, $x = x(t)$ az ismeretlen függvény,f szintén adott függvény.
A megoldási módszer lényege abban áll, hogy képezzük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját. Ha bevezetjük az ismeretlen $t \to x(t)$ függvény transzformáltjának jelölésére az $s \to X(s)$ jelet, és felhasználjuk a korábban bizonyított
$L[x'(t)] = sX(s) - x(0)$
$L[x''(t)] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$
összefüggéseket,akkor a transzformáció eredménye az
$a(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) + b(sX(s) - x(0)) + cX(0) = F(s)$
algebrai egyenlet.
A transzformáció elvégzése után tehát az ismeretlen x függvény transzformáltjára egy közönséges algebrai egyenletet kapunk.

5.1. Példák differenciálegyenletekre

1. Tekintsük az

$$x'' - 4x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot.
Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját

$$L[x''] - 4L[x] = 0.$$

Használva az $X(s) = L[x]$ jelölést valamint a második derivált Laplace-transzformáltjára vonatkozó azonosságot, kapjuk

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 4X(s) = 0$$

A kezdeti értéket használva

$$(s^2 - 4)X(s) = s$$

azaz

$$X(s) = \frac{s}{s^2 - 4}.$$

Bontsuk parciális törtekre $X(s)$-t,

$$\frac{s}{s^2 - 4} = \frac{s}{(s+2)(s-2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2}$$

amiből átszorozva kapjuk, hogy

$$s = A(s-2) + B(s+2)$$

$$A + B = 1 \to A = 1 - B$$

$$-2A + 2B = 0$$

$$-(1 - B) + B = 0$$

$$2B = 1 \to B = \frac{1}{2}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ezért

$$\frac{s}{s^2-4} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}.$$

Inverz Laplace-transzformáltat használva megkapjuk a kezdeti érték feladat megoldását

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\right] = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

2. Tekintsük az

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 1 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4sX(s) - x(0) + 3X(s) = \frac{1}{s}$$

ekkor

$$X(s) = \frac{1}{s^2+4s+3} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3+4s^2+3s}.$$

A nevezőt szozattá alakítjuk és használjuk a parciális törtekre bontás módszerét:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}$$

átszorozva kapjuk

$$1 = A(s^2+4s)+3) + Bs^2 + 3Bs + Cs^2 + Cs$$

ebből

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 4A + 3B + C = 0 \\ 3A = 1 \to A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

A-t behelyettesítve a másik két egyenletbe

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + B + C = 0 \\ \frac{4}{3} + 3B + C = 0 \end{cases}$$

Kivonjuk egymásból a két egyenletet

$$-1-2B=0 \to B=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=0 \to C=\frac{1}{6}$$

így

$$X(s)=\frac{1}{3}s-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{s+3}.$$

Inverz Laplace-transzformáltat használva megkapjuk az egyenlet megoldását:

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}[\frac{1}{3}s-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{s+3}]=\frac{1}{3}1(t)-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}.$$

5.2. Differenciálegyenletrendszerek

Differenciálegyenletek esetén felhasználva az az előzőekben megkapott összefüggéseket, algebrai lineáris egyenletrendszert kapunk az ismeretlenfüggvények transzformáltjára vonatkozólag. Az egyenletrendszer megoldása után ismét a visszatranszformálás a feladat. **1.** Számítsuk ki a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x'=3x-2y+e^t \\ y'=x+6y-e^t \\ x(0)=2 \\ y(0)=-1 \end{cases}$$

vegyük mindkét egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját:

$$\begin{cases} sX(s)-x(0)=3X(s)-2Y(s)+\frac{1}{s-1} \\ sY(s)-y(0)=X(s)+6Y(s)-\frac{1}{s-1} \end{cases}$$

a kezdeti feltételeket használva:

$$(s-3)X(s)+2Y(s)=2+\frac{1}{s-1}$$
$$-X(s)+(s-6)Y(s)=-1-\frac{1}{s-1}$$

az egyenletrendszert rendezve kapjuk:

$$\begin{cases} X(s) = \frac{2s^2-11s+6}{(s-4)(s-5)(s-1)} \\ Y(s) = -\frac{s^2-5s+1}{(s-4)(s-5)(s-1)} \end{cases}$$

és így parciális törtekre bontva $X(s)$-t:

$$\frac{2s^2-11s+6}{(s-4)(s-5)(s-1)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-5} + \frac{C}{s-1}$$

$$2s^2-11s+6 = A(s^2-6s+5) + B(s^2-5s+4) + C(s^2-9s+20)$$

$$2s^2-11s+6 = As^2 - A6s + 5A + Bs^2 - 5Bs + 4B + Cs^2 - 9Cs + 20C$$

$$A+B+C = 2 \rightarrow A = 2-B-C$$

$$-6A-5B-9C = -11 \rightarrow -6(2-B-C)-5B-9C = -11 \rightarrow B = 1+3C$$

$$5A+4B+20C = 6$$

$$5(1-4C)+4(1+3C)+20C = 6$$

$$9+12C = 6$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

$$B = 1+3(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$A = 2-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4}) = 2$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{s-4} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-5} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\right]$$

$$x(t) = 2e^{4t} + \frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{t}$$

majd ismét a parciális törtekre bontás módszerével megkapjuk $y(t)$ is:

$$A+B+C = -1 \rightarrow A = -1-B-C$$

$$-6A-5B-9C = 5 \rightarrow -6(-1-B-C)-5B-9C = 5 \rightarrow B = -1+3C$$

$$5A+4B+20C = -1 \rightarrow 5(-4C)+4(-1+3C)+20C = -1$$

$$-4+12C = -1$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$B = -1+3C = -\frac{1}{4}$$

$$A = -1-\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} = -1$$

$$y(t) = L^{-1}\left[-\frac{1}{s-4} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-5} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\right]$$

$$y(t) = -e^{4t} - \frac{1}{4}e^{5t} + \frac{1}{4}e^{t}.$$

2. Legyen:

$x' = -7x + y + 5 \qquad x(0) = 0$

$y' = -2x - 5y - 37 \qquad y(0) = 0$

Mindkét egyenletnek vesszük a Laplace-transzformáltját.

Ekkor:

$$\begin{cases} sX(s) = -7X(s) + Y(s) + \frac{5}{s} \\ sY(s) = -2X(s) - 5Y(s) + \frac{37}{s^2} \end{cases}$$

Az első egyenletet megszorozzuk $s + 5$-tel majd összeadjuk a két egyenletet így megkapjuk az X(s)-t:

$$\begin{cases} X(s)(s+7) - Y(s) - \frac{5}{p} = 0 \quad /(s+5) \\ Y(s)(s+5) + 2X(s) - \frac{37}{p^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s)(s+5)(s+7) - Y(s)(s+5) = 0 \\ Y(s)(s+5) + 2X(s) - \frac{37}{s^2} = 0 \end{cases}$$

$$X(s)(s^2 + 12s + 35 + 2) - \frac{37}{s^2} - \frac{5s+25}{s} = 0$$

$$X(s) = \frac{37 + 5s^2 + 25s}{s^2(s^2 + 12s + 37)}$$

Parciális törtekre bontjuk X(s)-t:

$$X(s) = \frac{37 + 5s^2 + 25s}{s^2(s^2 + 12s + 37)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12s + 37}$$

$$37 + 5s^2 + 25s = A(s(s^2 + 12s + 37)) + B(s^2 + 12s + 37) + Cs(s^2) + Ds^2$$

$$37 + 5s^2 + 25s$$

$$A + C = 0 \longrightarrow C = -1$$

$$12A + B + D = 5 \longrightarrow D = -6$$

$$37A + 12B = 25 \longrightarrow 37A - 12 = 25 \rightarrow A = 1$$

$$37B = -37 \longrightarrow B = -1$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s+6}{(s+6)^2 + 1}\right] = 1 - t - e^{-6t}cos(t).$$

Majd az egyenletrendszerből megkapjuk az Y(s)-t ha az első egyenletet megszorozzuk 2-vel a másodikat pedig $s+7$-tel és kivonjuk egymásból:

$$\begin{cases} 2X(s)(s+7) - 2Y(s) - \frac{10}{p} = 0 \\ Y(s)(s+5)(s+7) + 2(s+7)X(s) - \frac{37s+259}{s^2} = 0 \end{cases}$$

$$Y(s)(s^2+12s+37) - \frac{37s-259}{s^2} - \frac{10}{p} = 0$$

$$Y(s) = \frac{-10s-37s-259}{s^2(s^2+12s+37)} = \frac{-47s-259}{s^2+12s+37}.$$

Parciális törtekre bontjuk Y(s)-t:

$$\frac{-47s-259}{s^2+12s+37} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+12s+37}$$

$$-47s-259 = A(s(s^2+12s+37)) + B(s^2+12s+37) + Cs(s^2) + Ds^2$$

$$-47s-259 = As^3 + A12s^2 + A37s) + Bs^2 + B12s + 37B + Cs(s^2) + Ds^2$$

$$A + C = 0 \to C = 1$$

$$12A + B + D = 0 \to 12 - 7 = -D \to D = 5$$

$$37A + 12B = -47 \to 37A + 84 = -47 \to A = 1$$

$$37B = -259 \to B = -7.$$

Megkaptuk hogy:

$$\frac{1}{s} + \frac{-7}{s^2} + \frac{s+5}{s^2+12s+37}.$$

Vesszük az előző egyenlet inverz Laplace-transzformáltját:

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{7}{s^2} - \frac{s+5}{s+6}^2 + 1\right]$$

$$y(t) = 1 - 7t + e^{-6t}\cos(t) + e^{-6t}\sin(t).$$

5.3. Integrálegyenletek

Néhány esetben előfordulnak olyan integrálegyenletek,amelyekben az ismeretlen függvény egy konvolúcióban szerepel. A

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x-y)g(y)dy$$

egyenlet, ahol $f(x)$ és $k(x)$ megadott függvények és a λ adott állandó. Ha az előző egyenletben a $x' = x - a, y' = y - a$ változó cserével a következőt kapjuk

$$g(x') = f(x') + \lambda \int_0^{x'} k(x'-y')g(y')dy'$$

Az általános megoldási módszer: alkalmazzuk a Laplace transzformációt az egyenletre,

$$G(s) = F(s) + \lambda K(s)G(s)$$

algebrai egyenletre jutunk, amelyből következik, hogy

$$G(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)}.$$

Az egyenlet átírható a

$$G(s) = F(s) + \frac{\lambda K(s)}{1 - \lambda K(s)} F(s)$$

alakra.

1. Tekintsük az

$$s = \int_0^s e^{s-t} g(t)dt$$

egyenletet. A Laplace transzformáltja a következő

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s-1} G(s)$$

innen

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2},$$
$$g(t) = 1 - t.$$

2. Tekintsük a

$$g(x) = 1 - \int_0^x (x - y)g(y)dy$$

egyenletet. Ekkor

$$G(s) = s^{-1} - s^{-2}G(s),$$

ami a következő megoldást adja:

$$G(s) = \frac{s}{1 + s^2}$$
$$g(x) = cosx.$$

Irodalomjegyzék

[1] Hanka László, Zalay Miklós *Komplex függvénytan* Műszaki könyvkiadó(2010)

[2] Brain Davies *Integráltranszformációk és alkalmazásaik* Műszaki könyvkiadó(1983)

[3] Simon L. Péter, Tóth János *Differenciálegyenletek*, Typotex (2005)