8. fejezet

Elsőrendű dinamikus hálózatok számítása

A csupán rezisztív kétpólusokat tartalmazó hálózatok komponenseinek feszültségei és áramai a gerjesztés időbeli változását azonnal követik. Ha például egy rezisztív kétpólus feszültsége és árama is zérus a $t = 0$ időpillanatig, majd a $t = 0$ időpillanatban a gerjesztést hirtelen rákapcsoljuk, akkor a kétpólus feszültsége is és árama is azonnal a gerjesztésnek, valamint a kétpólus karakterisztikájának megfelelően alakul. Mindez nem igaz a dinamikus kétpólusokat tartalmazó hálózatok esetében. Közismert, hogy ha például egy ellenállásból és egy kondenzátorból álló soros RC-körre egyenfeszültséget kapcsolunk, akkor a kondenzátor feltöltődik, ami időt vesz igénybe, s a feltöltődés végén a kondenzátor kapcsai között az egyenfeszültség mérhető. Ez a feltöltődési folyamat egy bizonyos tehetetlenséget jelent. Tekercset tartalmazó hálózatok esetében is hasonló folyamatok játszódnak le.

Ebben a fejezetben csak olyan hálózatokkal foglalkozunk, amelyek egyetlen dinamikus kétpólust tartalmaznak, azaz vagy egyetlen kondenzátort, vagy egyetlen tekercset. Az ilyen dinamikus hálózatokat elsőrendű hálózatoknak nevezzük. Olyan hálózatokra szorítkozunk, amelyek egyetlen forrást tartalmaznak, több forrást tartalmazó lineáris hálózat esetén ugyanis a szuperpozíciót alkalmazhatjuk. Bevezetjük az állapotváltozó fogalmát, amelynek segítségével az ún. állapotegyenletet írhatjuk fel a hálózatokra. Ennek a megközelítésnek nagy előnye, hogy az állapotegyenlet megoldása minden hálózat esetében ugyanúgy történik, ez tehát kissé elvonatkoztatható a konkrét feladattól. Megvizsgáljuk a hálózatok stabilitását, a dinamikus elemek bekapcsolási és stacionárius állapotban való viselkedését.

Több dinamikus komponenst tartalmazó hálózatokkal, valamint más megoldási módszerekkel és az itt nyitva hagyott kérdésekkel a későbbiekben, a Villamosságtan–rendszerelmélet témakörében foglalkozunk.

8.1. Elméleti összefoglalás

A lineáris, invariáns, dinamikus hálózat lineáris, invariáns, rezisztív, valamint lineáris, invariáns, dinamikus komponensek és források összekapcsolásából áll. Két dinamikus kétpólussal foglalkozunk a könyv keretein belül, a kondenzátorral és a tekerccsel. Megjegyezzük, hogy a dinamikus komponenseket energiatárolós hálózati elemeknek is szokás nevezni, hiszen a kondenzátor elektromos, a tekercs mágneses energiát képes tárolni.

8.1.1. A kondenzátor és a tekercs karakterisztikája

Az 1. fejezetben a karakterisztikák tárgyalásakor röviden utaltunk ezen két dinamikus komponens karakterisztikájára, azaz a kétpólus kapcsai között mérhető feszültség és a komponensen átfolyó áram közötti kapcsolatra.

A kondenzátor karakterisztikája a feszültég és az áram egyező referenciairánya esetén az alábbi:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \text{illetve} \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.1}$$

A tekercs karakterisztikája pedig a következő:

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \text{illetve} \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.2}$$

Itt C jelöli a kondenzátor kapacitását és L a tekercs induktivitását. A kapacitás SI-mértékegysége a farad, melynek jele F, az induktivitás mértékegysége pedig a henry, amelyet H-val jelölünk.

A kondenzátor feszültsége egy rögzített t időpillanatban tehát az áram időfüggvényének t időpillanatig vett integráljával arányos, ami az áram időfüggvényének görbe alatti területe. Ezt illusztrálja a 8.1. ábra. A tekercs feszültség–áram kapcsolata hasonlóan illusztrálható.

A kondenzátor feszültségének és a tekercs áramának az idő szerinti deriváltja szerepel a karakterisztikákban. Ezen változók folytonossága szükséges ahhoz, hogy a karakterisztikákban szereplő deriváltak értelmezhetők legyenek. A folytonosság annyit jelent, hogy minden $t = T$ időpillanatban a változó baloldali és jobboldali határértéke megegyezik, azaz

$$\lim_{t\to T-0} u_C(t) = \lim_{t\to T+0} u_C(t), \quad \text{illetve} \quad \lim_{t\to T-0} i_L(t) = \lim_{t\to T+0} i_L(t). \tag{8.3}$$

A -0 a bal oldali határt, a $+0$ pedig a jobb oldali határ jelöli, azaz a $t = T$ időpillanatot előbbi esetben balról, utóbbi esetben pedig jobbról közelítjük meg. Ha tehát a $t = T$ időpillanatban a gerjesztésben ugrás (átkapcsolás) következik be, $u_C(t)$, illetve $i_L(t)$ akkor is folytonosak:

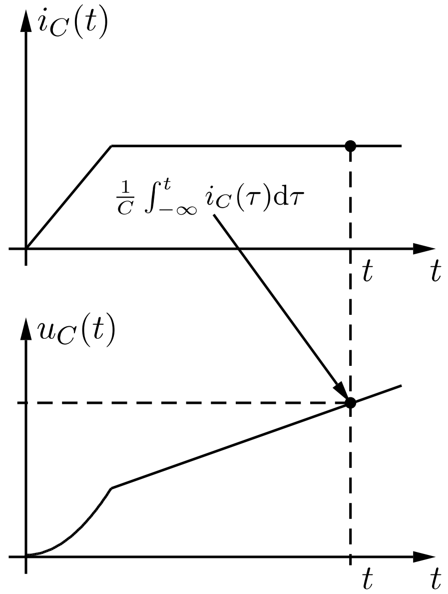
$$u_C(T+0) = u_C(T-0), \quad \text{illetve} \quad i_L(T+0) = i_L(T-0). \tag{8.4}$$

A $t = T - 0$ időpillanatban felvett érték a hálózat előéletére utal, amelyet ismertnek kell tekinteni.

Ennek speciális esete a bekapcsolási folyamat. Ha a hálózat a bekapcsolás előtt energiamentes, azaz a kondenzátor töltetlen és a tekercs árama nulla, akkor

$$u_C(+0) = 0, \quad \text{illetve} \quad i_L(+0) = 0, \tag{8.5}$$

ellenkező esetben ezen értékek ismertek kell legyenek.



8.1. ábra. Az eredetileg töltetlen kondenzátor feszültségének meghatározása az áram alapján egy rögzített t időpillanatban

A jobb oldali határértéket (a kapcsolás utáni időpillanatbeli értéket) kezdeti értéknek, a bal oldali határértéket (a kapcsolás előtti időpillanatbeli értéket) kiindulási értéknek is nevezzük. A kondenzátor feszültségének és a tekercs áramának kezdeti és kiindulási értéke tehát egyenlő, míg a hálózat többi feszültségére és áramára ilyen megkötés nem vonatkozik, azok akár ugrásszerűen is megváltozhatnak. A kondenzátor feszültsége tehát folytonos, de árama nem feltétlenül az. A tekercs árama is folytonos, feszültsége azonban ugrásszerűen megváltozhat. A rezisztív kétpólusok feszültsége és árama is ugrásszerűen megváltozhat, amennyiben valamely forrásmennyiség vagy paraméter megváltozik.

8.1.2. A kondenzátor és a tekercs energiája

A két lineáris, invariáns és dinamikus komponens teljesítményének időfüggvénye az alábbi:

$$p_C(t) = u_C(t)i_C(t) = u_C(t)C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right), \tag{8.6}$$

illetve

$$p_L(t) = u_L(t)i_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}i_L(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li_L^2(t)\right). \tag{8.7}$$

Itt felhasználtuk a karakterisztikákat is a (8.1) és (8.2) első alakjában.

Egy kétpólus munkafüggvényét az alábbi integrál definiálja (l. 1. fejezet):

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8.8}$$

Kondenzátor és tekercs esetében a munkafüggvény a teljesítmény (8.6) és (8.7) összefüggése alapján a következőképp írható fel:

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t), \tag{8.9}$$

illetve

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t), \tag{8.10}$$

amennyiben $u_C(-\infty) = 0$ és $i_L(-\infty) = 0$. A kondenzátor és a tekercs passzív kétpólus, amennyiben $C > 0$ és $L > 0$. A $w_C(t)$ és $w_L(t)$ egyben a kondenzátor és a tekercs által tárolt elektromos és mágneses energia.

8.1.3. Az állapotváltozós leírás

A hálózati egyenletek teljes rendszere dinamikus hálózatok esetében is a Kirchhoff-törvényekből és a hálózati komponensek karakterisztikáiból állnak. Használhatjuk természetesen a szuperpozíció elvét, a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszerét is. A hálózatra felírható egyenletek azonban minden esetben azonos alakra hozhatók, s így tetszőleges dinamikus hálózat számítása azonos keretbe foglalva tárgyalható. Ez a keret az ún. állapotváltozós leírás, ami egy differenciálegyenletből és a válasz ún. normál alakú kifejezéséből áll.

A továbbiakban a (8.1) és (8.2) karakterisztikák deriváltat tartalmazó alakját fogjuk használni. A derivált miatt a hálózati egyenletek differenciálegyenletre vezetnek, amely a következő normálalakra hozható:

$$\dot{u}_C = Au_C + bs, \tag{8.11}$$

vagy

$$\dot{i}_L = Ai_L + bs, \tag{8.12}$$

ahol az A és b együtthatók a hálózat felépítésétől és az azt alkotó komponensek paramétereitől függenek, értékük pedig konstans, hiszen a komponensek paramétere is konstans, $u_C = u_C(t)$ a kondenzátor feszültsége, $i_L = i_L(t)$ a tekercs árama, az $s = s(t)$ gerjesztés pedig a hálózat $u(t)$ forrásfeszültsége, vagy $i(t)$ forrásárama. A változó fölé tett petty az idő szerinti első deriváltat jelenti, azaz

$$\dot{u}_C = \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, \quad \text{és} \quad \dot{i}_L = \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}. \tag{8.13}$$

Értelemszerűen a kondenzátor feszültségének deriváltjára felírható normálalakú egyenlet kondenzátort, a tekercs áramának deriváltjára vonatkozó normálalakú egyenlet pedig tekercset tartalmazó hálózat esetén nyerhető.

Ezen típusú differenciálegyenlet az elsőrendű, közönséges, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek csoportjába tartozik. Elsőrendű, mert csak első derivált szerepel benne. Közönséges, mert a benne szereplő u_C és i_L függvény egyetlen változótól, az időtől függ, s csupán eszerint deriváljuk azt. Lineáris, hiszen a hálózatot alkotó komponensek karakterisztikája lineáris, következésképp a felírható egyenletek is lineárisak. Állandó együtthatós, mert az A és b együtthatók értéke konstans, nem függenek az időtől. Ez pedig a hálózat időbeli invarianciájával kapcsolatos tulajdonság.

Elsődleges feladat az állapotegyenlet felírása és annak megoldása. A megoldás lépéseit a következő fejezetben tárgyaljuk.

A kondenzátor feszültségének, vagy a tekercs áramának meghatározása után tetszőleges feszültség vagy áram meghatározható a következő normálalakú kifejezés segítségével:

$$y = cu_C + Ds, \quad \text{illetve} \quad y = ci_L + Ds, \tag{8.14}$$

ahol c és D egy-egy konstans, amelyek a hálózatot alkotó komponensektől függenek, $y = y(t)$ pedig valamely keresett feszültség vagy áram időfüggvényét jelöli, azaz a válaszjelet.

Megjegyezzük, hogy a kondenzátor feszültségének vagy a tekercs áramának ismerete elengedhetetlen a hálózat bármely más komponense feszültségének vagy áramának meghatározásához. A változók ezen legkisebb halmazát állapotváltozóknak nevezzük. Az állapotváltozó a következő két tulajdonsággal bír:

1.) az állapotváltozó t_a időpontbeli értéke és a gerjesztés ugyanezen időpontbeli értéke alapján az állapotváltozó bármely $t_b > t_a$ időpontbeli értékei meghatározható, és

2.) a válasz t_a időpontbeli értéke ugyanezen adatok ismeretében számítható.

Megjegyezzük, hogy a feszültségek és az áramok időfüggvények, amelyek leírására jeleket, matematikai formulákat, képleteket használunk, s így a jel és a változó sok esetben szinoním fogalmak. A dinamikus hálózatok forrásait sok esetben gerjesztésnek, a kérdéses feszültségeket, valamint áramokat pedig válaszjelnek mondjuk. Ezen fogalmak a rendszerelméletből származnak, de rendszerelmélettel ebben a könyvben bővebben nem foglalkozunk. A fogalmakat viszont sok esetben használjuk. Az állapotváltozó fogalma is a rendszerelméletből származik.

Az alapfeladat a következőképp fogalmazható meg. A hálózat struktúrája és a komponensek karakterisztikája a $0 < t < \infty$ tartományban ismert. Ismert továbbá a hálózat előélete, azaz a változók időfüggvénye a $-\infty < t < 0$ intervallumban. Meghatározandó a változók időfüggvénye a $0 < t < \infty$ időpillanatokban. Ennek technikáját mutatjuk be a következő fejezetben.

Amennyiben az állapotváltozós leírás fenti normálalakú kifejezése nem állítható elő, úgy a hálózat nemreguláris.

8.1.4. Az állapotegyenlet megoldása összetevőkre bontással

Az állapotegyenlet általánosan a következőképp írható fel:

$$\dot{x} = Ax + bs, \tag{8.15}$$

ahol $x = x(t)$ jelöli a kondenzátor feszültségét vagy a tekercs áramát, azaz az állapotváltozót. Az állapotegyenlet számunkra fontos megoldása az az $x = x(t)$ időfüggvény, amely kielégíti a (8.15) differenciálegyenletet, valamint a kezdeti értéket is.

Az állapotegyenlet megoldására itt az összetevőkre bontás módszerét javasoljuk, mely eljárás három lépésből áll.

Az $x(t)$ időfüggvényt ugyanis a következő alakban keressük:

$$x(t) = x_{tr}(t) + x_{st}(t), \tag{8.16}$$

ahol $x_{tr}(t)$ az ún. tranziens összetevő és $x_{st}(t)$ a stacionárius összetevő. A tranziens összetevőt homogén általános megoldásnak, valamint szabad válasznak is nevezzük. A stacionárius összetevőt inhomogén partikuláris megoldásnak, vagy gerjesztett válasznak is mondjuk.

A tranziens összetevő

A tranziens összetevő általános alakja a következő:

$$x_{tr}(t) = M\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{8.17}$$

ahol M egy egyelőre ismeretlen konstans, amelynek értékét a stacionárius válasz felírása után tudjuk csak meghatározni, ez lesz a megoldás menetének harmadik lépése. A λ az ún. sajátérték, amely az exponenciális görbe lecsengésének vagy felfutásának sebességéért felelős.

Bizonyítás. A tranziens összetevő alakja: $x_{tr}(t) = M\mathrm{e}^{\lambda t}$. Ezt a következőképp láthatjuk be. A homogén

$$\dot{x}_{tr} = Ax_{tr} \tag{8.18}$$

differenciálegyenletet írjuk át a következő alakra:

$$\frac{\mathrm{d}x_{tr}}{\mathrm{d}t} = Ax_{tr}, \tag{8.19}$$

majd formálisan alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\frac{\mathrm{d}x_{tr}}{x_{tr}} = A\mathrm{d}t. \tag{8.20}$$

Ezt a változók szeparálásának is nevezik. Integráljuk mindkét oldalt, azaz határozzuk meg mindkét oldal primitív függvényét, s közben használjuk ki, hogy A konstans:

$$\int \frac{\mathrm{d}x_{tr}}{x_{tr}} = \int A\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln x_{tr} = At + N, \tag{8.21}$$

ahol N az integrálási konstans. Mindkét oldalhoz hozzá kellene adni egy-egy interálási konstanst, de ezt egyetlen N konstanssal is kifejezhetjük, mert értéke érdektelen. Végezetül fejezzük ki x_{tr} időfüggvényét:

$$x_{tr} = \mathrm{e}^{At+N} = \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{N} = M\mathrm{e}^{At}, \tag{8.22}$$

azaz $M = \mathrm{e}^N$ helyettesítéssel élünk, M értéke már fontos, de N érdektelen. ■

Az exponenciális görbe lecseng, vagyis nullához tart, ha $\lambda < 0$, és végtelenhez tart, ha $\lambda > 0$. Előbbi esetben azt mondjuk, hogy a hálózat aszimptotikusan stabil. Amennyiben a hálózat aszimptotikusan stabil, úgy az állapotváltozó időfüggvénye a stacionárius komponenshez tart. Ekkor a válaszjel is a stacionárius válaszhoz tart. Ha a hálózat csupán passzív elemekből épül fel, akkor a hálózat biztosan aszimptotikusan stabil, míg aktív komponenseket tartalmazó hálózatok esetében ez nem feltétlenül igaz.

A tranziens összetevőt homogén általános megoldásnak is nevezzük, mert az ún. homogén differenciálegyenlet megoldásaként áll elő, azaz

$$\dot{x}_{tr} = Ax_{tr}. \tag{8.23}$$

Ezt az egyenletet azért hívjuk homogénnek, mert benne csak az $x_{tr} = x_{tr}(t)$ időfüggvény szerepel, és ekkor $s(t) \equiv 0$. Egyetlen olyan függvény van, amely ezt a típusú differenciálegyenletet kielégíti, mégpedig az, amelynek deriváltja egy konstanstól eltekintve magával a függvénnyel egyezik meg, hiszen a homogén differenciálegyenlet pontosan ezt jelenti. Ez a függvény az exponenciális függvény, hiszen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t} = \mathrm{e}^{t}, \quad \text{de} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{8.24}$$

Helyettesítsük utóbbi eredményt a homogén differenciálegyenletbe:

$$\lambda M\mathrm{e}^{\lambda t} = AM\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{8.25}$$

Itt M és $\mathrm{e}^{\lambda t}$ minden esetben kiesik, azaz

$$\lambda = A. \tag{8.26}$$

A sajátérték tehát megegyezik a differenciálegyenletben szereplő A konstanssal.

Az időállandó rendkívül fontos fogalom, amelyet a következőkben vezetünk be. Ehhez először húzzuk be az exponenciális görbe érintőjét a $t = 0$ helyen a 8.2. ábrán látható módon, s írjuk fel annak egyenletét $é = mt + f$ alakban, ahol m az érintő meredeksége és az érintő az f helyen metszi a függőleges tengelyt. A meredekség minden pontban a derivált helyettesítési értéke, azaz a $t = 0$ helyen $m = \lambda M$, s így $f = M$, azaz

$$é = \lambda Mt + M. \tag{8.27}$$

A τ-val jelölt időállandó a 8.2. ábra alapján a következők szerint számítható:

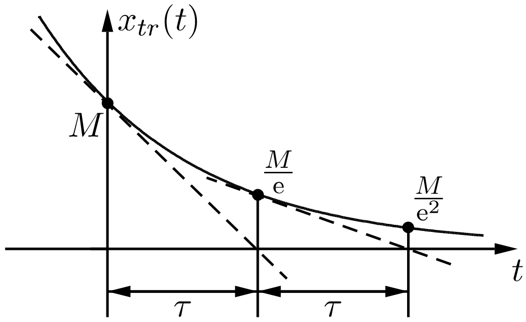
$$0 = \lambda M\tau + M \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{A}, \tag{8.28}$$

azaz az időállandó is kiolvasható az állapotegyenletből. Az időállandó az az idő (mértékegysége a szekundum, $[\tau] = \mathrm{s}$), amely alatt a lecsengő tranziens összetevő e-ad részére csökken, hiszen

$$x_{tr}(\tau) = M\mathrm{e}^{\lambda\tau} = M\mathrm{e}^{-\lambda\frac{1}{\lambda}} = \frac{M}{\mathrm{e}}. \tag{8.29}$$

Ez azonban nemcsak a $t = 0$ időpontra igaz, hanem általánosan is, ha ugyanis tetszőleges t_0 időpillanatban a tranziens összetevő értéke $x_{tr}(t_0) = M\mathrm{e}^{\lambda t_0}$, akkor a $t_0 + \tau$ időpillanatban pontosan $x_{tr}(t_0)/\mathrm{e}$, ugyanis

$$x_{tr}(t_0 + \tau) = M\mathrm{e}^{\lambda(t_0+\tau)} = M\mathrm{e}^{\lambda t_0}\mathrm{e}^{\lambda\tau} = \frac{M\mathrm{e}^{\lambda t_0}}{\mathrm{e}} = \frac{x_{tr}(t_0)}{\mathrm{e}}. \tag{8.30}$$



8.2. ábra. Elsőrendű hálózat tranziens összetevője, az időállandó fogalma

A 8.1. táblázatban látható, hogy ha $t > 3\tau$, akkor a tranziens tag a kezdeti érték kevesebb, mint 5%-a, ha pedig $t > 5\tau$, akkor a tranziens tag a kezdeti érték kevesebb, mint 1%-a. Utóbbit már elhanyagolhatjuk, és az 5τ értéket ökölszabályként is használják a tranziens lecsengési idejének közelítő meghatározására.

8.1. táblázat. Az exponenciális függvény csökkenő jellege

$-t/\tau$	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{e}^{-t/\tau}$	1,0000	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067

Az időállandó bevezetésével a tranziens összetevő általános alakja kétféleképp is felírható:

$$x_{tr}(t) = M\mathrm{e}^{\lambda t} = M\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{8.31}$$

A hálózat tehát pozitív időállandó esetén aszimptotikusan stabilis.

Az egyetlen dinamikus elemet tartalmazó elsőrendű hálózatokat egyidőállandós hálózatoknak is nevezzük.

A stacionárius összetevő

Amennyiben a tranziens lecseng, úgy a stacionárius állapot áll fenn. Lineáris hálózatok esetén a stacionárius összetevő időfüggvényének alakja megegyezik a gerjesztés időfüggvényének alakjával. A korábbi fejezetekben láttuk, hogy egyenáramú

gerjesztés hatására minden feszültség és minden áram értéke konstans. Szinuszos gerjesztés esetén a komplex számítási módszert úgy vezettük be, hogy feltételeztük valamennyi feszültség és áram szinuszos időfüggvény szerinti alakulását. Általánosan is elmondható, hogy a stacionárius komponens időfüggvényének alakja megegyezik a gerjesztés időfüggvényének alakjával, azaz egy táblázat formájában összefoglalhatjuk, hogy bizonyos típusú gerjesztésekhez milyen stacionárius komponenset keresünk. Ez teszi lehetővé az ún. próbafüggvény bevezetését. Itt csupán két jellegzetes próbafüggvényt mutatunk be, az egyenáram próbafüggvényét és a szinuszos gerjesztés próbafüggvényét.
(i) Időben állandó gerjesztés esetén a próbafüggvény konstans, azaz

$$x_{st} = K, \tag{8.32}$$

és a K konstans értékét az inhomogén differenciálegyenlet megoldásaként kapjuk, hiszen a stacionárius komponens függ a gerjesztéstől:

$$\dot{x}_{st} = Ax_{st} + bS \quad \Rightarrow \quad 0 = AK + bS, \tag{8.33}$$

azaz

$$K = -\frac{bS}{A}. \tag{8.34}$$

Itt S jelöli a konstans gerjesztés értékét.

Megjegyezzük, hogy kostans gerjesztés esetén a stacionárius komponens úgy is meghatározható, hogy a kondenzátor helyébe szakadást, a tekercs helyébe pedig rövidzárat rajzolunk, s annak feszültségét, illetve áramát határozzuk meg. Stacionárius állapotban ugyanis az egyenáramú dinamikus hálózat rezisztívvé válik, azaz a tekercsen nem eshet feszültség, a kondenzátoron pedig nem folyhat áram.
(ii) Szinuszos gerjesztés esetén a próbafüggvény szinuszos, azaz

$$s(t) = S\cos(\omega t - \alpha) \tag{8.35}$$

gerjesztéshez

$$x_{st} = X\cos\omega t + Y\sin\omega t \tag{8.36}$$

alakú próbafüggvényt célszerű választani, ahol X és Y a két ismeretlen együttható. Ennek idő szerinti deriváltja

$$\dot{x}_{st} = -\omega X\sin\omega t + \omega Y\cos\omega t. \tag{8.37}$$

Helyettesítsük ezen kifejezéseket az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$-\omega X\sin\omega t + \omega Y\cos\omega t = A(X\cos\omega t + Y\sin\omega t) + bS\cos(\omega t - \alpha). \tag{8.38}$$

Ezen egyenletet tovább tudjuk alakítani a

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{8.39}$$

trigonometrikus azonosság alapján, azaz

$$\begin{aligned}-\omega X\sin\omega t+\omega Y\cos\omega t &= A(X\cos\omega t+Y\sin\omega t)\\ &\quad+bS\cos\omega t\cos\alpha+bS\sin\omega t\sin\alpha.\end{aligned} \tag{8.40}$$

A szinuszos és a koszinuszos időfüggvények együtthatóit egyeztetve két egyenlet írható fel:

$$\begin{aligned}-\omega X &= AY+bS\sin\alpha,\\ \omega Y &= AX+bS\cos\alpha,\end{aligned} \tag{8.41}$$

amelyek megoldása szolgáltatja az X és az Y együtthatókat. Ezen együtthatókból aztán a stacionárius válasz felírható az

$$x_{st}=X\cos\omega t+Y\sin\omega t=\sqrt{X^2+Y^2}\cos\left(\omega t-\mathrm{atg}\frac{Y}{X}\right) \tag{8.42}$$

alakban is.

Megjegyezzük, hogy szinuszos gerjesztés esetén a stacionárius komponens a komplex számítási módszer segítségével is meghatározható.

A kezdeti érték érvényesítése

Meghatároztuk tehát az inhomogén állapotegyenlet általános megoldását, amely azonban tartalmaz egy M konstans értéket, amelyet meg kell határoznunk a kezdeti érték alapján.

Időben állandó gerjesztés esetén a következő kifejezéssel állunk szemben:

$$x(t)=M\mathrm{e}^{\lambda t}+K. \tag{8.43}$$

A kezdeti érték az állapotváltozó $t=+0$ időpillanatbeli értékének ismeretét jelenti, azaz feltételezhető, hogy $x(+0)$ értéke ismert, s így

$$x(+0)=M+K\quad\Rightarrow\quad M=x(+0)-K. \tag{8.44}$$

Speciálisan, ha a hálózat a bekapcsolás előtt ($t<0$) energiamentes volt, $M=-K$. Ezáltal az állapotváltozó időfüggvényét megadtuk.

Szinuszos gerjesztés esetén az állapotváltozó a következőképp írható fel:

$$x(t)=M\mathrm{e}^{\lambda t}+\sqrt{X^2+Y^2}\cos\left(\omega t-\mathrm{atg}\frac{Y}{X}\right). \tag{8.45}$$

A kezdeti feltétel alapján írhatjuk, hogy

$$x(+0)=M+\sqrt{X^2+Y^2}\cos\left(\mathrm{atg}\frac{Y}{X}\right), \tag{8.46}$$

ahonnan M kifejezhető.

Megjegyezzük, hogy a komplex számítási módszerrel számított időfüggvény csupán a stacionárius összetevőt tartalmazza, a tranziens tagot nem. Nagyon fontos tehát, hogy a komplex számítási módszer alkalmazása előtt a hálózat stabilitásáról meggyőződjünk. Stabil hálózat esetén az impedanciával történő számításnak van létjogosultsága, nem stabil hálózat esetén azonban a matematikailag helyesen számított válaszjelnek nincs fizikai tartalma, hiszen ekkor a tranziens komponens, s így a teljes válasz is, a végtelenhez tart.

Eredetileg energiamentes esetben $x(+0) = x(-0) = 0$, ami annyit jelent, hogy a tekercs árama és a kondenzátor feszültsége bekapcsoláskor nulla. Érdekes tehát, hogy energiamentes hálózat bekapcsolásának pillanatában a tekercs szakadásként, a kondenzátor pedig rövidzárként viselkedik. Nem energiamentes esetben, azaz amikor a tekercs árama és a kondenzátor feszültsége nullától különböző, a tekercs áramforrással, a kondenzátor pedig feszültségforrással helyettesíthető.

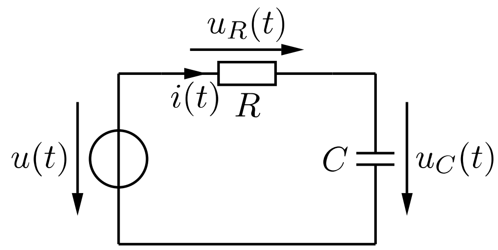
Az állapotváltozó időfüggvényének ismeretében tetszőleges feszültség és áram időfüggvénye meghatározható a (8.14) normálalakú kifejezés alapján.

8.2. Részletesen kidolgozott példák

1. példa. Írjuk fel a 8.3. ábrán látható hálózat állapotegyenletét! Adjuk meg az ellenállás és a kondenzátor feszültségének, valamint a körben folyó áram normálalakú kifejezését! Oldjuk meg az állapotegyenletet és fejezzük ki az egyes válaszjelek időfüggvényét, ha a gerjesztést a $t = 0$ időpillanatban kapcsoljuk az eredetileg energiamentes hálózatra, időfüggvénye pedig a következő:

$$(a)\ u(t) = 1\text{V},$$
$$(b)\ u(t) = 5\cos(\omega t + 10^\circ)\text{V}, \quad \omega = 5\text{krad/s}.$$

A kétpólusok adatai: $R = 10\text{k}\Omega$, $C = 0{,}2\mu\text{F}$.



8.3. ábra. Az 1. példa hálózata

Megoldás. A példát a következő koherens egységrendszerben oldjuk meg: V, mA, kΩ, ms, νF, krad/s. A körben folyó $i = i(t)$ áram kifejezhető a kondenzátor $u_C = u_C(t)$ feszültségével, azaz az állapotváltozóval, $i = C\dot{u}_C$. A hálózatra a következő huroktörvény írható fel az $u_R = u_R(t)$ és $u = u(t)$ jelölésekkel:

$$u_R + u_C - u = 0, \quad \text{ahol} \quad u_R = Ri = RC\dot{u}_C,$$

azaz

$$RC\dot{u}_C + u_C - u = 0.$$

Ezen egyenlet csak az u_C állapotváltozó és a gerjesztés időfüggvényét tartalmazza, azaz az állapotegyenlet belőle kifejezhető:

$$\dot{u}_C = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{RC}u = -0{,}5u_C + 0{,}5u.$$

Az ellenállás feszültsége az $u_R = RC\dot{u}_C = 2\dot{u}_C$ összefüggés alapján fejezhető ki, amelybe tehát az állapotegyenletet vissza kell helyettesíteni, azaz

$$u_R = -u_C + u,$$

ami valójában a huroktörvény.

A kondenzátor u_C feszültsége az állapotegyenlet megoldásaként áll elő, azaz külön egyenlet felírása nem szükséges.

A körben folyó i áram a kondenzátor $i = 0{,}2\dot{u}_C$ karakterisztikája szerint

$$i = -0{,}1u_C + 0{,}1u.$$

A szükséges egyenleteket ezáltal felírtuk. Első lépésben az állapotegyenletet kell megoldani, s annak megoldását, azaz az $u_C(t)$ időfüggvényt kell a válaszjelek normálalakú kifejezéseibe visszahelyettesíteni.

Az állapotegyenlet megoldása az összetevőkre bontás módszerével történik, azaz az $u_C(t)$ időfüggvényt a tranziens összetevő és a stacionárius összetevő összegeként a következő alakban keressük:

$$u_C(t) = u_{C,tr}(t) + u_{C,st}(t).$$

A tranziens összetevő általános alakja és idő szerinti első deriváltja a következő:

$$u_{C,tr} = u_{C,tr}(t) = M\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \dot{u}_{C,tr} = \lambda M\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

A tranziens összetevő a homogén differenciálegyenletet kell, hogy kielégítse, azaz amikor $u \equiv 0$. Helyettesítsük a fenti két formulát a homogén differenciálegyenletbe:

$$\dot{u}_{C,tr} = -0{,}5u_{C,tr}, \quad \text{azaz} \quad \lambda M\mathrm{e}^{\lambda t} = -0{,}5M\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Utóbbi egyenlet szolgáltatja a λ sajátértéket, azaz $\lambda = -0{,}5\,\frac{1}{\mathrm{ms}}$, a tranziens összetevő alakja tehát

$$u_{C,tr} = M\mathrm{e}^{-0{,}5t}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy a tranziens komponens ezen formulája független a gerjesztéstől, de az M konstans meghatározásához a gerjesztés időfüggvényére is szükség van.

Az (a) gerjesztés esetén konstans próbafüggvényt kell alkalmaznunk a stacionárius komponens meghatározása során, azaz

$$u_{C,st} = u_{C,st}(t) = K, \quad \dot{u}_{C,st} = 0, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

Az A konstans az inhomogén differenciálegyenletbe történő visszahelyettesítéssel határozható meg, s ekkor $u = 1$:

$$\dot{u}_{C,st} = -0{,}5u_{C,st} + 0{,}5 \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad 0 = -0{,}5K + 0{,}5,$$

ahonnan $K = 1$. Utóbbi feltételt a gerjesztés tartója miatt kell megjegyezni. A K értékét úgy is megkaphatjuk, ha a kondenzátort szakadással helyettesítjük, s a szakadás feszültségét határozzuk meg.

Az állapotváltozó időfüggvénye tehát

$$u_C = M\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 1, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

Az M konstans meghatározható abból a feltételből, amely azt állítja, hogy a hálózat a gerjesztés bekapcsolása előtt gerjesztetlen, azaz $u_C(-0) = 0$. Az állapotváltozó folytonosságából következik, hogy

$$u_C(+0) = 0 = M\mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot 0} + 1,$$

azaz $M = -1$, s végül

$$u_C = \left[1 - 1\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right] \mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

A kondenzátor időfüggvényének ismeretében az összes válaszjel meghatározható:

$$u_R = -u_C + u = -1 + 1\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 1 = 1\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0,$$

valamint

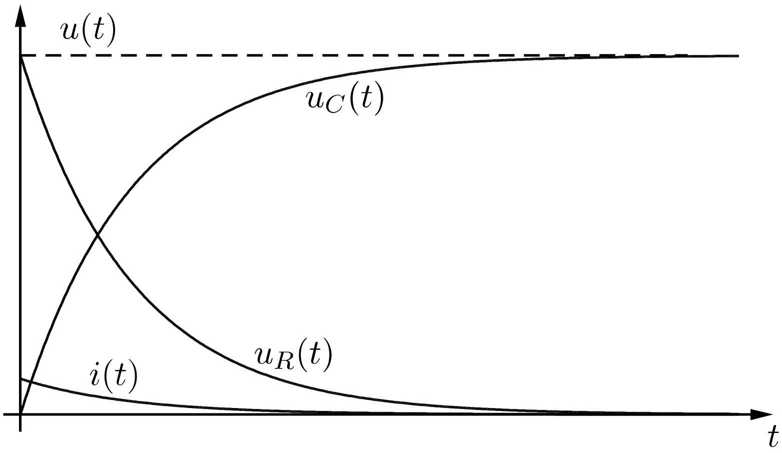
$$i = -0{,}1u_C + 0{,}1u = 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}5t}\,\mathrm{mA}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

Az egyes jelek időbeli lefutása a 8.4. ábrán látható. Az ábrákat úgy célszerű elkészíteni, hogy kiszámítjuk a változók értékét a $t = 0$ és a $t \to \infty$ helyeken, s a kapott értékeket exponenciális jelleg szerint összekötjük. Javasoljuk az Olvasónak, hogy minden feladatban ellenőrizze a $t = +0$ és $t \to \infty$ állapotokban az egyes jelek értékét. Ehhez célszerű lehet felrajzolni a rezisztív hálózatot a kezdeti és a stacionárius állapotban.

Érdemes a megoldást a differenciálegyenletbe helyettesíteni,

$$\dot{u}_C = -0{,}5u_C + 0{,}5u \quad \Rightarrow \quad 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t} = -0{,}5\left(1 - 1\mathrm{e}^{-0{,}5t}\right) + 0{,}5.$$

A visszahelyettesítés természetesen azonosságra vezet. Ennek minden megoldásnál teljesülni kell.



8.4. ábra. Az 1. példa komponenseinek egyenfeszültségű gerjesztésre adott válaszjelei

Megjegyezzük, hogy a hálózat felfogható úgy is, hogy egy Thévenin-generátort kondenzátorral zárunk le. Ennek a hálózatnak a sajátértéke és az időállandója

$$\lambda = -\frac{1}{RC}, \quad \text{és} \quad \tau = RC.$$

Általánosan is elmondható, hogy ha egy lineáris rezisztív hálózat kapcsait egy kondenzátorral zárjuk le, akkor a lineáris rezisztív hálózat helyettesíthető egy Thévenin-ekvivalenssel, aminek belső ellenállása határozza meg a sajátérték és az időállandó értékét.

A (b) gerjesztés esetén szinuszos jellegű próbafüggvényt kell alkalmaznunk a stacionárius komponens meghatározásához,

$$u_{C,st} = X\cos 5t + Y\sin 5t, \quad \dot{u}_{C,st} = -5X\sin 5t + 5Y\cos 5t.$$

Az X és Y konstansok az inhomogén differencálegyenletbe történő visszahelyettesítéssel határozhatók meg, s ekkor az $u = 5\cos(5t + 10°)$ gerjesztés a

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

trigonometrikus azonosságnak megfelelően átírandó a következő alakra ($\alpha = 5t$ és $\beta = 10°$):

$$\begin{aligned} u = 5\cos(5t + 10°) &= 5\cos 5t\cos 10° - 5\sin 5t\sin 10° \\ &= 4{,}9240\cos 5t - 0{,}8682\sin 5t, \end{aligned}$$

tehát

$$\dot{u}_{C,st} = -0{,}5u_{C,st} + 0{,}5(4{,}9240\cos 5t - 0{,}8682\sin 5t),$$

azaz

$$-5X\sin 5t + 5Y\cos 5t = -0{,}5X\cos 5t - 0{,}5Y\sin 5t + 2{,}4620\cos 5t - 0{,}4341\sin 5t.$$

Tegyük egyenlővé a $\sin 5t$ és a $\cos 5t$ kifejezések együtthatóit, aminek eredményeképp egy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk X és Y meghatározása céljából:

$$-5X = -\,0{,}5Y - 0{,}4341,$$
$$5Y = -\,0{,}5X + 2{,}4620,$$

ahonnan $X = 0{,}1347$ és $Y = 0{,}4789$, azaz

$$u_{C,st} = 0{,}1347\cos 5t + 0{,}4789\sin 5t = \sqrt{0{,}1347^2 + 0{,}4789^2}\cos\left(5t - \operatorname{atg}\frac{0{,}4789}{0{,}1347}\right)$$
$$= 0{,}4975\cos(5t - 74{,}2903°),\ \text{ha } t \geq 0.$$

Vessük össze ezen eredményt a 7. fejezet 6. példájában kapott eredménnyel. A két megoldás természetesen ugyanaz, hiszen a komplex csúcsérték és impedancia fogalmával számított mennyiségek a stacionárius állapotban értelmezettek.

Az állapotváltozó időfüggvénye tehát

$$u_C = M\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}4975\cos(5t - 74{,}2903°).$$

Az M konstans szintén abból a feltételből határozható meg, amely azt állítja, hogy a hálózat a gerjesztés bekapcsolása előtt gerjesztetlen, azaz $u_C(-0) = 0$. Az állapotváltozó folytonosságából következik, hogy

$$u_C(+0) = 0 = M\mathrm{e}^{-0{,}5\cdot 0} + 0{,}4975\cos(5\cdot 0 - 74{,}2903°),$$

azaz $M = -0{,}1347$, s végül

$$u_C = \left[-0{,}1347\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}4975\cos(5t - 74{,}2903°)\right]\mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

Az időfüggvény alakulása a 8.5. ábrán látható. Az ábrán feltüntettük a tranziens összetevőt is, amelynek hatása jól kivehető az időfüggvény elején. Az időfüggvény tehát egy exponenciális függvény és egy szinuszos függvény összege. Érdemes megfigyelni, hogy az első periódus minimuma abszolút értékben nagyobb, mint a stacionárius állapotban felvett amplitúdó. Ez a jelenség főleg erősáramú technikában kap nagy hangsúlyt, a tranziens alatt ugyanis a feszültség vagy az áram károsan nagy értéket is felvehet.

A kondenzátor időfüggvényének ismeretében az összes válaszjel meghatározható (l. 8.6. ábra):

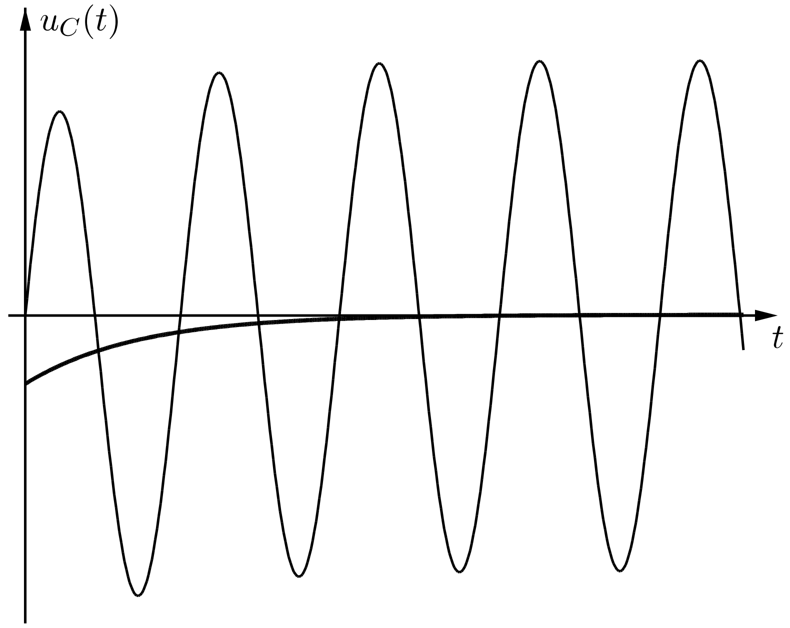
$$u_R = -u_C + u = \left[0{,}1347\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 4{,}9749\cos(5t + 15{,}7032°)\right]\mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0,$$

valamint

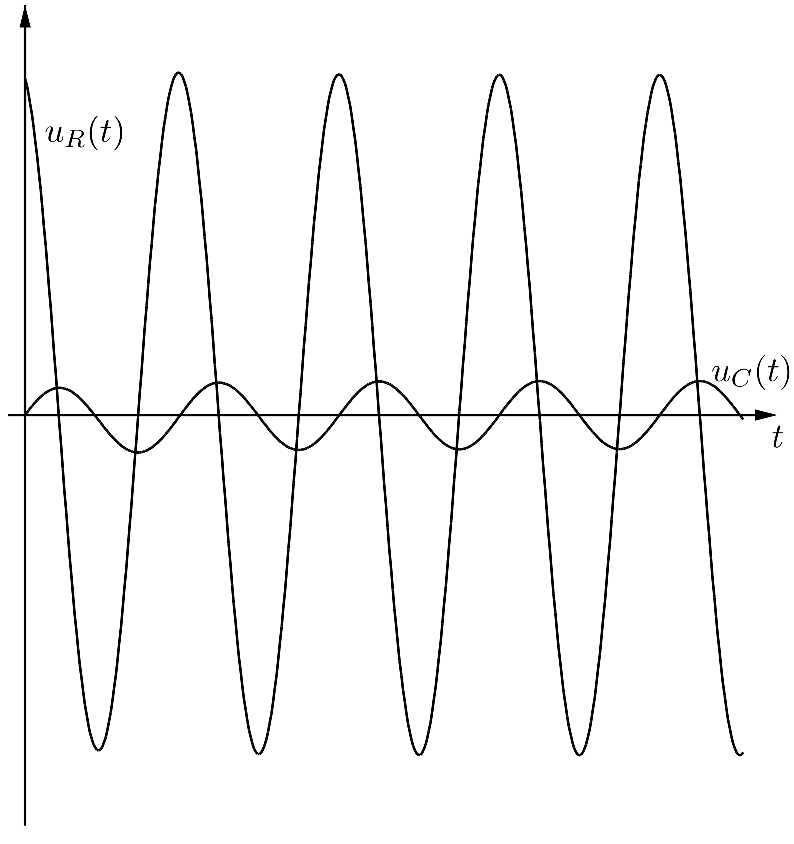
$$i = -0{,}1u_C + 0{,}1u = \left[0{,}0135\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}4975\cos(5t + 15{,}7032°)\right]\mathrm{mA}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

Az utóbbi két kifejezésben a szinuszos jelek összeadását célszerű a komplex csúcsértékek bevezetésével elvégezni (l. 7. fejezet 3. példa). Javasoljuk az Olvasónak, hogy vesse össze a kapott eredményeket a 7. fejezet 6. példájában kapott eredményekkel.

Figyeljük meg, hogy a sajátérték ($\lambda = -0{,}5\frac{1}{\mathrm{ms}}$), s így az időállandó is ($\tau = 2\mathrm{ms}$) minden időfüggvényben ugyanaz, azaz a teljes hálózatra nézve közös.



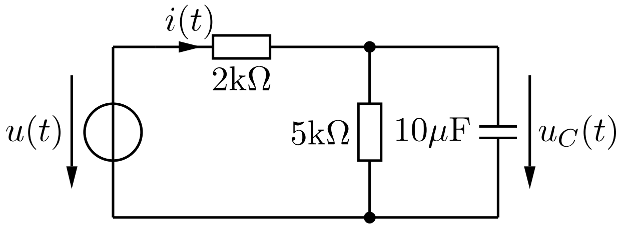
8.5. ábra. A kondenzátor feszültségének időfüggvénye



8.6. ábra. A két komponens feszültségének alakulása

2. példa. Írjuk fel a 8.7. ábrán látható hálózat állapotegyenletét és az $i(t)$ áram normálalakú kifejezését! Oldjuk meg az állapotegyenletet és fejezzük ki a válaszjel időfüggvényét, ha a gerjesztés

$$u(t) = \begin{cases} 0\mathrm{V}, & \text{ha } t < 0 \\ 1\mathrm{V}, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$



8.7. ábra. Az 2. példa hálózata

Megoldás. A koherens egységrendszer az előző példában közölt egységrendszerrel megegyezik. A kondenzátor $u_C = u_C(t)$ feszültsége az állapotváltozó, amelyből a kondenzátoron átfolyó áram is számítható $i_C = C\dot{u}_C$ szerint. Legegyszerűbb, ha a csomóponti potenciálok módszerét használjuk, azaz legyen az alsó csomópont a $\varphi_0 = 0$ báziscsomópont, ekkor a feszültségforrás felső csomópontjának potenciálja $u = u(t)$, s a kondenzátor felső csomópontjának potenciálja u_C. Az u_C jelzésű csomópontra tehát a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{u_C - u}{2} + \frac{u_C}{5} + 10\dot{u}_C = 0.$$

Az állapotegyenlet ezen egyenletből átrendezéssel felírható:

$$\dot{u}_C = -0{,}07 u_C + 0{,}05 u.$$

Az i áram normálalakú kifejezése pedig a következő:

$$i = \frac{u - u_C}{2} = -0{,}5 u_C + 0{,}5 u.$$

A megoldás az 1. példa (a) pontjában bemutatott módszer szerint történik. A mérföldkövek az alábbiak: hálózat sajátértéke $\lambda = -0{,}07 \frac{1}{\mathrm{ms}}$, a próbafüggvény értéke $A = \frac{5}{7}$, az M konstans értéke pedig $-\frac{5}{7}$. Az állapotváltozó időfüggvénye tehát a következő:

$$u_C = \frac{5}{7}\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}07t}\right)\mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

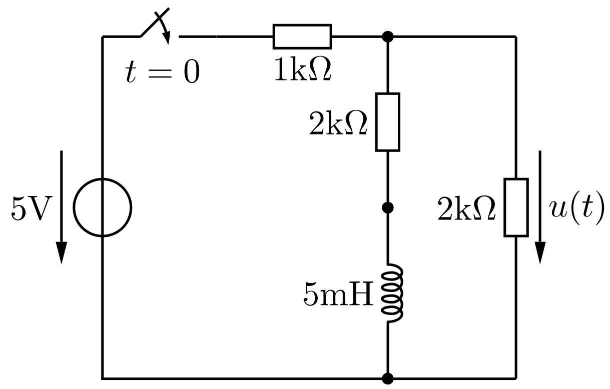
A válaszjel időfüggvénye pedig az alábbiak szerint alakul:

$$i = \left[\frac{1}{7} + \frac{5}{14}\mathrm{e}^{-0{,}07t}\right]\mathrm{mA}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

A válaszjelnek tehát szakadása van a $t = 0$ időpillanatban.

A sajátérték az 1. példa szerint $\lambda = -\frac{1}{(2\times 5)\cdot 10} = -\frac{7}{100}\frac{1}{\mathrm{ms}}$. A stacionárius állapotban felvett értékek könnyedén ellenőrizhetők a kondenzátor szakadással való helyettesítésével.

3. példa. Írjuk fel a 8.8. ábrán látható hálózat állapotegyenletét a kapcsoló zárása utáni időintervallumra! Adjuk meg a bejelölt $u = u(t)$ feszültség normálalakú kifejezését! Oldjuk meg az állapotegyenletet és fejezzük ki a válaszjel időfüggvényét! A tekercs a kapcsoló zárása előtt energiamentes állapotban volt.



8.8. ábra. Az 3. példa hálózata

Megoldás. A kapcsolót a $t=0$ időpillanatban zárjuk. Ez azt jelenti, hogy az 5V-os feszültségforrást a $t = 0$ időpillanatban kapcsoljuk a hálózatra, s addig a hálózat energiamentes volt.

Az állapotváltozós leírás megadásához használjuk a csomóponti potenciálok módszerét. Legyen az alsó közös csomópont a báziscsomópont, a feszültségforrás felső csomópontjának potenciálja ekkor $U = 5\text{V}$, a tekercs felső csomópontjának potenciálja pedig $u_L = u_L(t)$, ami kifejezhető az állapotváltozóval: $u_L = L\dot{i}_L$, ahol $i_L = i_L(t)$ a tekercs árama. A jobb oldali felső csomópont potenciálja megegyezik a keresett $u = u(t)$ feszültségjel pillanatnyi értékével. Két ismeretlen van tehát, u és $\dot{i}_L$, amelyeket normálalakban kell kifejeznünk. A tekercs áramának referenciairánya mutasson lefelé.

A tekercs felső csomópontjára, és a jobb oldali felső csomópontra a következő két egyenlet írható fel:

$$
\begin{aligned}
5\dot{i}_L :)\; i_L + \frac{5\dot{i}_L - u}{2} &= 0,\\
u :)\; \frac{u-U}{1} + \frac{u}{2} + i_L &= 0.
\end{aligned}
$$

Szorozzuk végig mindkét egyenletet 2-vel, s rendezzük azokat:

$$
\begin{aligned}
\dot{i}_L &= -0{,}4 i_L + 0{,}2u,\\
u &= -\frac{2}{3} i_L + \frac{2}{3} U.
\end{aligned}
$$

Az első egyenlet még formailag nem helyes, hiszen nem a gerjesztés szerepel benne, hanem a válaszjel. Utóbbi normálalakú kifejezése azonban visszahelyettesíthető az első egyenletbe, s így a következő állapotváltozós leírást kapjuk:

$$
\begin{aligned}
\dot{i}_L &= -\frac{8}{15} i_L + \frac{2}{15} U, \\
u &= -\frac{2}{3} i_L + \frac{2}{3} U.
\end{aligned}
$$

A differenciálegyenlet megoldása az 1. példa megoldásával analóg módon állítható elő. Használjuk tehát az összetevőkre bontás módszerét, azaz keressük az $i_L = i_L(t)$ áram időfüggvényét a következő alakban:

$$i_L(t) = i_{L,tr}(t) + i_{L,st}(t).$$

A tranziens összetevő alakja a következő:

$$i_{L,tr}(t) = M\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}t}.$$

A stacionárius komponens pedig a konstans értékű próbafüggvénnyel határozható meg a következő egyenlet felírásával:

$$0 = -\frac{8}{15} K + \frac{2}{15} 5,$$

azaz $K = \frac{5}{4}$. A kezdeti feltétel, miszerint a teketcs árama bekapcsoláskor zérus értékű, a következő módon érvényesíthető:

$$i_L(+0) = M\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}0} + \frac{5}{4},$$

ahonnan $M = -\frac{5}{4}$.

A tekercs áramának alakulása tehát a következő időfüggvény szerinti:

$$i_L(t) = \left[\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}t}\right] \mathrm{mA}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

A válaszjel így a következő alakot ölti:

$$u(t) = \left[\frac{15}{6} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}t}\right] \mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

A tekercs árama folytonos a bekapcsolás pillanatában, míg a keresett feszültségnek ugyanitt szakadása van.

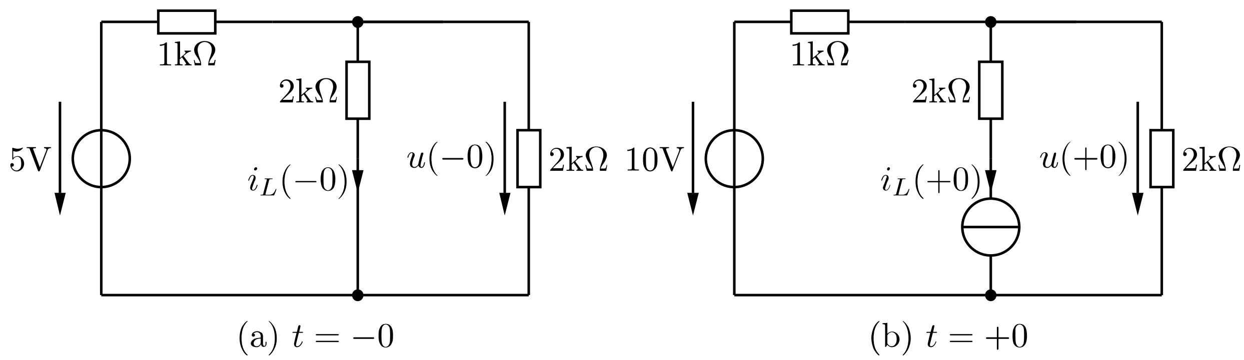
Ellenőrzésképp vegyük ki a tekercset a hálózatból, s határozzuk meg az így előálló rezisztív kétpólus Thévenin-generátorának belső ellenállását, ami az alábbi módon számítható: $R_g = 2 \times 1 + 2 = \frac{8}{3}\mathrm{k}\Omega$. A 3. gyakorló példában látni fogjuk, hogy az L induktivitással lezárt Thévenin-generátor hálózatának sajátértéke $\lambda = -\frac{R}{L}$ és időállandója $\tau = \frac{L}{R}$. Így itt λ értéke valóban $-\frac{8}{15}\frac{1}{\mu\mathrm{s}}$.

4. példa. Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy a kapcsoló zárt állása mellett a hálózatra kapcsolt feszültségforrás feszültsége az alábbiak szerint alakul:

$$u(t) = \begin{cases} 5\text{V}, & \text{ha } t < 0 \\ 10\text{V}, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

A hálózatra tehát régen 5V feszültségű forrást kapcsoltunk, a $t = 0$ időpillanatban pedig a feszültség ugrásszerűen 10V értékre változik.

Megoldás. Feltételezhetjük, hogy a régen bekapcsolt hálózat az átkapcsolás pillanatában, azaz a $t = -0$ időpillanatban állandósult állapotban van, vagyis a tekercs rövidzárként viselkedik. Ezt az állapotot mutatja a 8.9.a. ábra, amikor a forrásfeszültség értéke 5V.



8.9. ábra. A 4. példa hálózatával ekvivalens kapcsolás az átkapcsolás előtt és után

A dinamikus hálózat tehát rezisztív hálózattal reprezentálható, és

$$i_L(-0) = 1{,}25\text{mA}, \quad u(-0) = 2{,}5\text{V}.$$

A tekercs árama állapotváltozó, aminek minden körülmények között folytonosnak kell lenni. Hiába történik tehát hirtelen ugrásszerű változás a gerjesztésben a $t = 0$ időpillanatban, a tekercs árama ekkor sem változhat ugrásszerűen, azaz a bal oldali és a jobb oldali határértéke meg kell egyezzék:

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 1{,}25\text{mA}.$$

A $t = +0$ időpillanatot mutatja a 8.9.b. ábra, amikor a forrásfeszültség értéke 10V.

A többi feszültségnek és áramnak azonban lehet ugrása, amennyiben a gerjesztés ugrásszerűen megváltozik. A válaszként kijelölt feszültség értéke az átkapcsolást követően ugyanis:

$$u(+0) = 10\frac{2}{2+1} - 1{,}25\frac{1}{1+2}2 = 5{,}8333\text{V}.$$

Ennek értékét szuperpozícióval határoztuk meg a 8.9.b. ábra alapján.

A tekercs áramának és a válaszjelnek időfüggvénye általánosan összetevőkre bontással határozható meg. A tekercs áramának tranziens összetevője

$$i_{L,tr}(t) = M\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}t},$$

a stacionárius komponens pedig

$$0 = -\frac{8}{15}A + \frac{2}{15}10 \quad \Rightarrow \quad A = 2{,}5.$$

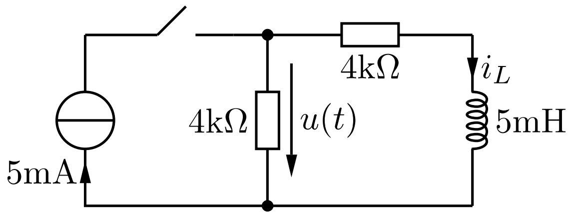
Az M konstans értéke az $i_L(+0) = 1{,}25\text{mA}$ értékhez illesztendő, azaz

$$1{,}25 = M + 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad M = -1{,}25,$$

s végül

$$i_L(t) = \left[2{,}5 - 1{,}25\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}t}\right]\text{mA}, \quad u(t) = \left[5 + 0{,}8333\mathrm{e}^{-\frac{8}{15}t},\right]\text{V} \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

5. példa. A 8.10. ábrán látható hálózatban a kapcsolót a $t = 0$ időpillanatban átbillentjük, majd a $t = 5\mu$s időpillanatban visszabillentjük. Határozzuk meg a tekercs áramának és a bejelölt $u = u(t)$ feszültségnek időfüggvényét!



8.10. ábra. Az 5. példa hálózata

Megoldás. A forrásáramot jelöljük $i = i(t)$-vel az általánosabb felírás érdekében, s írjunk fel egy-egy csomóponti törvényt a két felső csomópontra, miközben az alsó csomópont a báziscsomópont:

$$-i + \frac{u}{4} + i_L = 0$$
$$i_L + \frac{5\dot{i}_L - u}{4} = 0.$$

Ezen két egyenletből az állapotegyenlet és a válaszjel normálalakú kifejezése felírható:

$$\dot{i}_L = -1{,}6i_L + 0{,}8i$$
$$u = -4i_L + 4i.$$

A feladat megoldása két részre osztható, attól függően, hogy a kapcsoló bekapcsolt, vagy kikapcsolt állapotban van.

Bekapcsolt állapotban a mérföldkövek az alábbiak: hálózat sajátértéke $\lambda = -1{,}6$, a próbafüggvény értéke $A = 2{,}5$, az M konstans értéke pedig $-2{,}5$. Az állapotváltozó időfüggvénye tehát a következő:

$$i_L(t) = 2{,}5\left(1 - \mathrm{e}^{-1{,}6t}\right)\text{mA}, \quad \text{ha} \quad t \in [0, \cdots, 5]\mu\text{s}.$$

A válaszjel időfüggvénye pedig az alábbiak szerint alakul:

$$u(t) = \left[10 + 10\mathrm{e}^{-1{,}6t}\right] \mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \in [0, \cdots, 5]\mu\mathrm{s}.$$

A kapcsoló visszabillentett állapotában az áram értéke zérus, azaz $i = 0$, s így a próbafüggvény is nulla értéket szolgáltat. A tekercs árama egyenlő a tranziens összetevővel:

$$i_L(t) = M\mathrm{e}^{-1{,}6t}, \quad \text{ha} \quad t \geq 5\mu\mathrm{s}.$$

Az M konstans értéke az

$$i_L(5+0) = i_L(5-0)$$

feltétel alapján számítható, ahol

$$i_L(5-0) = 2{,}5\left(1 - \mathrm{e}^{-1{,}6\cdot 5}\right) \cong 2{,}5,$$

azaz

$$i_L(5+0) = M\mathrm{e}^{-1{,}6\cdot 5} = 2{,}5,$$

ahonnan

$$i_L(t) = 7452{,}3949\mathrm{e}^{-1{,}6t}\mathrm{mA}, \quad \text{ha} \quad t \geq 5\mu\mathrm{s}.$$

A válaszjel kifejezése:

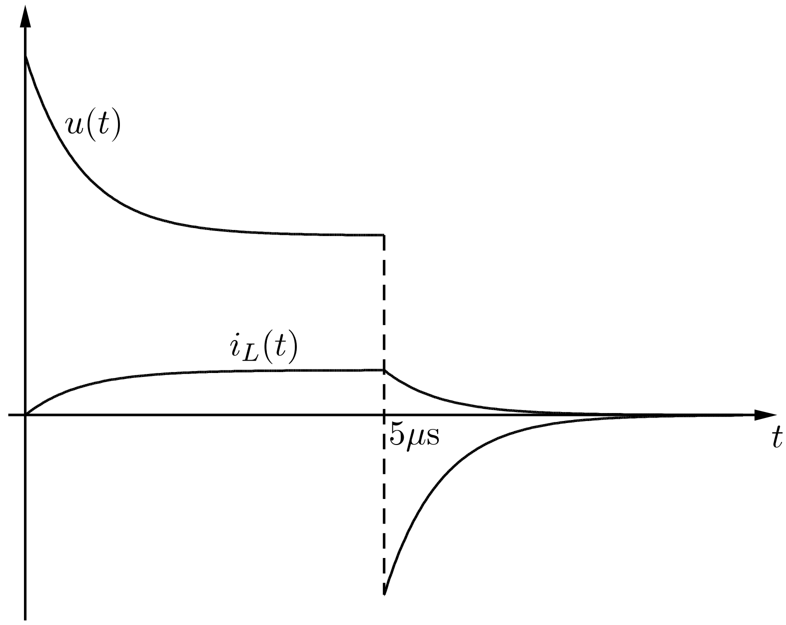
$$u(t) = -4i_L(t) = -29809{,}5799\mathrm{e}^{-1{,}6t}\mathrm{V}, \quad \text{ha} \quad t \geq 5\mu\mathrm{s}.$$

A tekercs áramának és a válaszjel időbeli alakulása a 8.11. ábrán látható.

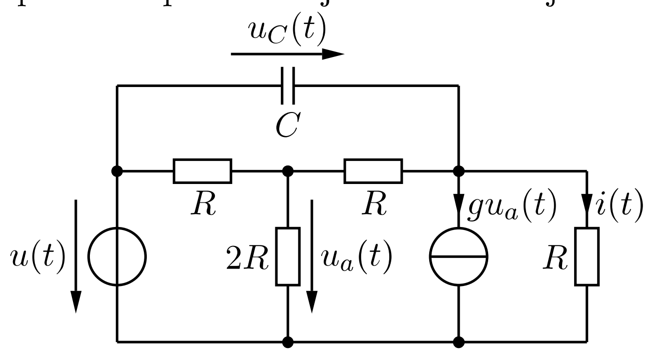
6. példa. A 8.12. ábrán látható hálózatban a válaszjel a bejelölt $i = i(t)$ áram. Írjuk fel az állapotváltozós leírás normálalakját és a válaszjel normálalakú kifejezését! Vizsgáljuk meg g mely értékeire stabilis a hálózat!

Megoldás. Az állapotegyenletet és a válasz normálalakú kifejezését a csomóponti potenciálok segítségével írjuk fel. Legyen az alsó közös csomópont a báziscsomópont, ekkor a feszültségforrás felső csomópontjának potenciálja $u = u(t)$, a $2R$ rezisztenciájú ellenállás felső csomópontjának potenciálja $u_a = u_a(t)$, a harmadik csomópont potenciálja pedig $u - u_C$, ahol $u_C = u_C(t)$. Két egyenlet írható fel az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} u_a :)\, & \frac{u_a - u}{R} + \frac{u_a - (u - u_C)}{R} + \frac{u_a}{2R} = 0, \\ u - u_C :)\, & \frac{u - u_C - u_a}{R} + gu_a + \frac{u - u_C}{R} - C\dot{u}_C = 0. \end{aligned}$$



8.11. ábra. Az 5. példa állapotváltozójának és válaszjelének időbeli alakulása



8.12. ábra. A 6. példa hálózata

Szorozzuk végig az első egyenletet $2R$-rel, rendezés után kapjuk, hogy

$$u_a = -0{,}4u_C + 0{,}8u.$$

Szorozzuk végig az $u - u_C$ csomópontra felírt második egyenletet R-rel, s helyettesítsük be u_a fenti eredményét. Így az u_a ismeretlent elimináltuk, s az állapotegyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\dot{u}_C = -\frac{1{,}6 + 0{,}4Rg}{RC}u_C + \frac{1{,}2 + 0{,}8Rg}{RC}u.$$

A válaszjel normálalakú kifejezése pedig a következő:

$$i = -\frac{1}{R}u_C + \frac{1}{R}u.$$

A stabilitásvizsgálat az állapotegyenlet alapján végezhető el. A sajátérték ugyanis:

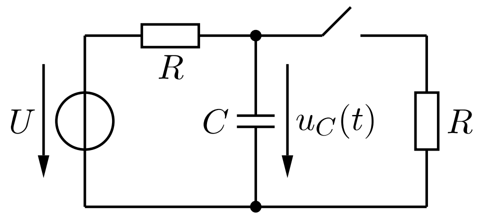
$$\lambda = -\frac{1{,}6 + 0{,}4Rg}{RC},$$

ami akkor biztosan negatív, ha $R > 0$ és $C > 0$ mellett

$$g > -\frac{4}{R}.$$

Mindez az $1{,}6 + 0{,}4Rg > 0$ feltételből levezethető.

7. példa. A 8.13. ábrán látható, egyenfeszültségű forrást tartalmazó hálózatban a nyitott kapcsolót a $t = 0$ időpillanatban zárjuk. A kapcsoló zárása előtt a hálózat állandósult állapotban van. Határozzuk meg a kondenzátor feszültségének időfüggvényét!



8.13. ábra. A 7. példa hálózata

Megoldás. A kapcsoló zárása előtt a kondenzátor feszültsége $u_C(-0) = U$. A tranziens összetevőben szereplő M konstans illesztését tehát ezen értékhez kell elvégezni.

A kapcsoló zárása után kell felírnunk az állapotegyenletet, hiszen a kondenzátor feszültségének alakulását a kapcsoló zárása után keressük. A kondenzátor felső csomópontjára felírható csomóponti egyenlet alapján az állapotegyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\dot{u}_C = -\frac{2}{RC}u_C + \frac{1}{RC}u,$$

amelynek megoldása a következő:

$$u_C(t) = 0{,}5U\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{RC}t}\right), \quad \text{ha} \quad t \geq 0.$$

8. példa. Mutassuk meg, hogy az időállandó $\tau = RC$ és $\tau = L/R$ kifejezései valóban idő dimenziójú mennyiségeket szolgáltatnak!

Megoldás. A $\tau = RC$ kifejezésben használjuk fel az Ohm-törvényt és a kapacitás definícióját, azaz

$$RC = \frac{u}{i}\frac{q}{u} = \frac{q}{i}.$$

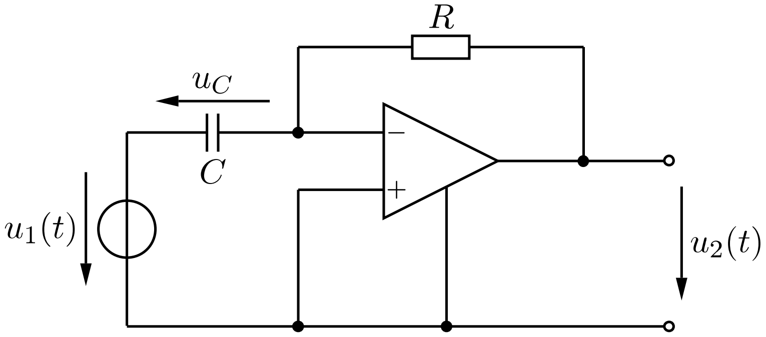
A töltés és az áram dimenzió hányadosa idő dimenziót ad.

A $\tau = L/R$ kifejezésben hasznáni kell az induktivitást definiáló összefüggést és az Ohm-törvényt,

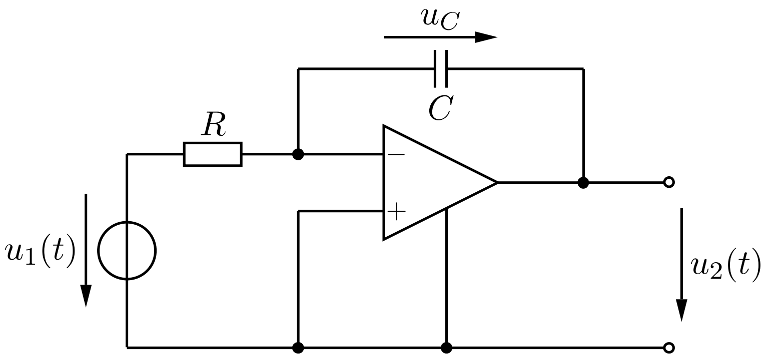
$$\frac{L}{R} = \frac{\frac{\Psi}{i}}{\frac{u}{i}} = \frac{\Psi}{u}.$$

A fluxus és a feszültség dimenzió hányadosa idő dimenziót ad.

9. példa. Adjuk meg a 8.14. ábrán és a 8.15. ábrán látható hálózatok $u_2(t)$ kimeneti feszültségének időfüggvényét az $u_1(t)$ bemeneti feszültség függvényében!



8.14. ábra. A 9. példa első hálózata, a differenciáló kapcsolás



8.15. ábra. A 9. példa második hálózata, az integráló kapcsolás

Megoldás. Mindkét esetben az ideális erősítő invertáló bemenetére írunk fel egyenletet. Az áramok referenciairánya ezen csomópontból kifelé mutat.

A 8.14. ábrán az invertáló bemenet potenciálja zérus, amennyiben az alsó csomópont a bázicsomópont. Ekkor a kimeneti csomópont potenciálja u_2, a bemeneti csomópontra pedi azt írhatjuk, hogy $u_1 = -u_C$. A felírható egyenlet az alábbi:

$$C\dot{u}_C + \frac{0 - u_2}{R} = 0,$$

azaz

$$-C\dot{u}_1 + \frac{0 - u_2}{R} = 0,$$

ahonnan

$$u_2(t) = -RC\dot{u}_1(t).$$

A 8.14. ábrán látható hálózat tehát deriválja a bemenetére érkező feszültségjelet.

A 8.15. ábrán az invertáló bemenet potenciálja szintén zérus, amennyiben az alsó csomópont a bázicsomópont. Ekkor a bemeneti csomópont potenciálja u_1, a kimeneti csomópont potenciálja pedig u_2, ami pontosan $-u_C$. A felírható egyenlet az alábbi:

$$\frac{0-u_1}{R}+C\dot{u}_C=0,$$

azaz

$$\frac{0-u_1}{R}-C\dot{u}_2=0,$$

ahonnan

$$u_2(t)=-\frac{1}{RC}\int_0^t u_1(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \text{ha} \quad u_1(0)=0.$$

A 8.15. ábrán látható hálózat tehát a bemenetére érkező feszültségjel integrálját állítja elő a kimenetén.

8.3. Gyakorlófeladatok

1. feladat. Egy $C=5\mu$F kapacitású kondenzátor feszültségének időfüggvénye az alábbi:

$$u(t)=\begin{cases} 0\text{V}, \text{ ha } t<0 \\ (2-2\cos 50t)\text{V}, \text{ ha } t\geq 0. \end{cases}$$

A körfrekvencia mértékegysége rad/s. Adja meg a kondenzátor áramának időfüggvényét!

Oldja meg a feladatot az $L=5$mH induktivitású tekercs esetén is!

2. feladat. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet az összetevőkre bontás módszerével, s határozza meg a válaszjel időfüggvényét is! A gerjesztést a $t=0$ időpillanatban kapcsoljuk be, s értéke 3, a bekapcsolás előtt pedig $x(-0)=0$.

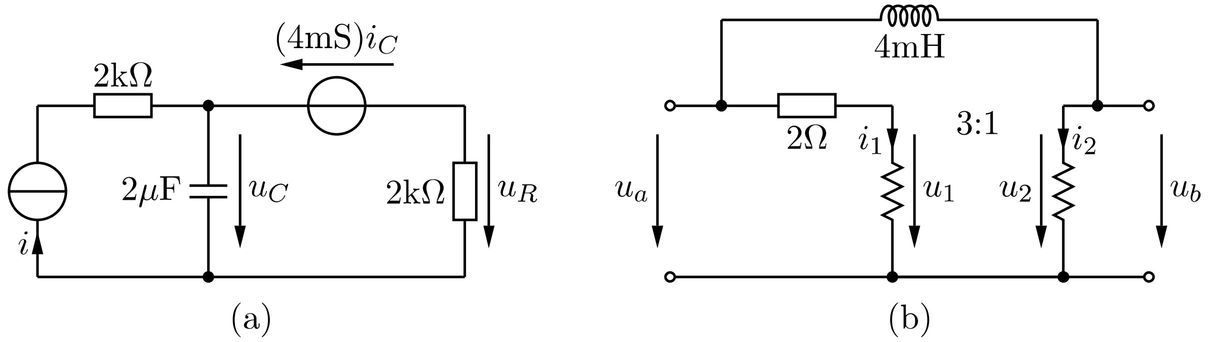
$$\dot{x}=-5x+2s,$$
$$y=4x+5s.$$

Oldja meg a példát, ha $x(-0)=10$!

3. feladat. Adja meg egy soros RL-kör állapotegyenletét, ha a válaszjel a tekercs feszültsége, a gerjesztés pedig egy $u=u(t)$ feszültségű feszültségforrás! Adja meg egy párhuzamos RL-kör állapotegyenletét, ha a gerjesztés egy $i=i(t)$ áramú áramforrás, a válaszjel pedig az ellenállás árama!

4. feladat. Határozza meg az 6. részletesen kidolgozott feladat kondenzátora feszültségének időfüggvényét és az i áram időfüggvényét, ha $R=10$kΩ, $C=0{,}1\mu$F és $g=0{,}1$mS, továbbá az egyenfeszültségű forrást a $t=0$ időpillanatban kapcsoljuk be, amelynek értéke 1V! Tételezzük fel, hogy a kondenzátor bekapcsolás előtt töltetlen volt.

5. feladat. Írja fel a 8.16. ábrán látható két hálózat állapotváltozós leírását, ha (a) a gerjesztés az i áram, a válasz pedig az u_R feszültség, illetve (b) a gerjesztés az u_a feszültség, a válasz pedig az u_b feszültség!



8.16. ábra. Az 5. feladat hálózatai

6. feladat. Egy C kapacitású kondenzátort U_0 feszültségre töltünk fel, majd a $t = 0$ időpillanatban vele párhuzamosan kapcsolunk egy R rezisztenciájú ellenállást. Adja meg a közös feszültség időfüggvényét!

7. feladat. A 8.13. ábrán látható hálózatban legyen a kapcsoló zárt állapotban, s ezt a zárt kapcsolót a $t = 0$ időpillanatban nyitjuk. A kapcsoló nyitása előtt a hálózat állandósult állapotban van. Határozza meg a kondenzátor feszültségének időfüggvényét!

Megoldás.

1. $i(t) = 0{,}5\sin(50t)\text{mA}$, ha $t \geq 0$, illetve $i(t) = [400t - 8\sin(50t)]\,\text{A}$, ha $t \geq 0$;

2. $x(t) = 1{,}2\left(1 - \text{e}^{-5t}\right)$, ha $t \geq 0$, $y(t) = 19{,}8 - 4{,}8\text{e}^{-5t}$, ha $t > 0$, illetve $x(t) = 1{,}2 + 8{,}8\text{e}^{-5t}$, ha $t \geq 0$, $y(t) = 19{,}8 + 35{,}2\text{e}^{-5t}$, ha $t > 0$;

3. $\dot{i}_L = -\frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u$, $u_L = -Ri_L + u$, illetve $\dot{i}_L = -\frac{R}{L}i_L + \frac{R}{L}i$, $i_R = -i_L + i$;

4. $u_C(t) = 1 - \text{e}^{-2t}$, $i(t) = 0{,}1\text{e}^{-2t}$, ha $t \geq 0$;

5. $\dot{u}_C = -\frac{1}{12}u_C + \frac{1}{6}i$, $u_R = \frac{1}{3}u_C + \frac{4}{3}i$, illetve $\dot{i}_L = -\frac{1}{18}i_L + \frac{1}{6}u_a$, $u_b = \frac{4}{18}i_L + \frac{1}{3}u_a$;

6. $u(t) = U_0\text{e}^{-\frac{1}{RC}t}$, ha $t \geq 0$;

7. $u_C(t) = U - 0{,}5U\text{e}^{-\frac{1}{RC}t}$.