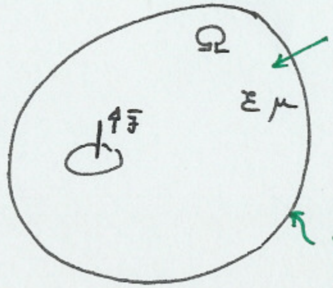
Antennaszámítási alapok – Maxwell-egyenletek alapján.

Legyen a vizsgált tartomány homogén, ε és μ állandó, $\bar{J}$ pedig ismert. Ekkor:

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{J} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} & (1)\\[2mm]
\operatorname{rot}\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} & (2)\\[2mm]
\operatorname{div}\bar{B} = 0 & (3)\\[2mm]
\operatorname{div}\bar{D} = \rho & (4)\\[2mm]
\bar{B} = \mu\bar{H} \quad \text{és} \quad \bar{D} = \varepsilon\bar{E} & (5)
\end{cases}
$$



pl. egy antenna, melynek árama ismert, s környékén levegő van, μ_0 és ε_0.

végtelen messze lévő perem, amely elnyelő

A folytonossági egyenlet: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{H} = \operatorname{div}\bar{J} + \dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\bar{D}$ alapján ((1) divergenciája)

$$\boxed{0 = \operatorname{div}\bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

azaz az áram- és töltéssűrűség nem független egymástól.

$\bar{A}$ – mágneses vektorpotenciál

(3) alapján $\boxed{\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A}}$, hiszen $\operatorname{div}\bar{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{A} \equiv 0$.

(2)-be: $\operatorname{rot}\bar{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\bar{A} = -\operatorname{rot}\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$\operatorname{rot}\left(\bar{E} + \dfrac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0$, ahonnan $\bar{E} + \dfrac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi$, azaz $\boxed{\bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi}$, mivel $\cancel{\operatorname{div} g}$ $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0$.

φ – elektromos skalárpotenciál.

(5) felhasználásával (1) a következő:

$$\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\bar{B} = \bar{J} + \varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad \text{azaz:}$$

$$\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\bar{A} = \bar{J} - \varepsilon\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \Big/ \mu \text{ (mert konstans)}$$

$$\underbrace{\text{rot rot } \bar{A}} = \mu \bar{J} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu \varepsilon \,\text{grad}\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \Delta \bar{A}$$

$$-\Delta \bar{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \text{grad div } \bar{A} = \mu \bar{J} - \text{grad}\left(\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

$\boxed{\text{Lorentz-mérték: } \quad \text{div } \bar{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}}$

a vektorpotenciál rotációja mellett a divergenciát mindig rögzíteni kell!

$$\boxed{\Delta \bar{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t} = -\mu \bar{J}}$$

Inhomogén hullámegyenlet.

Ennek megoldása szolgáltatja $\bar{A}$-t, div $\bar{A}$ segítségével φ egy konstanstól eltekintve meghatározható, s így minden térjellemző számítható.

Speciálisan (ami sokszor előfordul) a gerjesztés szinuszos, s ekkor komplex számítási módszert használhatunk:

$$\boxed{\Delta \bar{A} + \omega^2 \mu \varepsilon \bar{A} = -\mu \bar{J}}$$

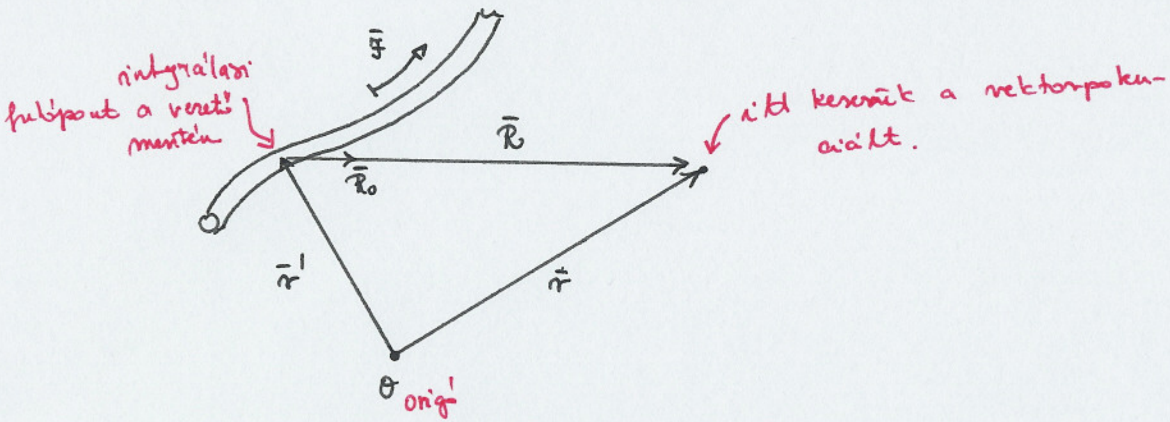
Inhomogén Helmholtz-egyenlet.

Fontos! A fenti levezetés csak akkor igaz, ha a tér közege homogén. Egyéb esetben más módon fogunk eljárni.

Retardált potenciálok:

Ha a teret kitöltő közeg homogén (pl. antenna terének számításakor), akkor az inhomogén hullámegyenlet megoldása a következő:

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{R} \, \bar{J}\left(\bar{r}', t - \frac{R}{v}\right) d\Omega'}$$



$$\bar{r} = \bar{r}' + \bar{R} \rightarrow \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$$

$$R = |\bar{R}|$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

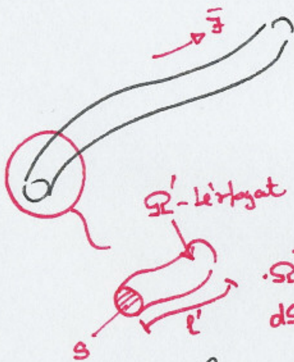
Itt R/v az az időtartam, amely alatt a v sebességgel terjedő elektromágneses hullám a forrástól ($\bar{r}'$) megteszi az R távolságot a kérdéses $\bar{r}$ pontig. Ennek csak nagyfrekvencián van jelentősége.

A t időpillanatban nem a t időpillanatbeli gerjesztést kell használni, hanem egy korábbi $t - R/v$ időpillanatbelit. Emiatt hívjuk itt $\bar{A}$-t retardált, azaz késleltetett potenciálnak.

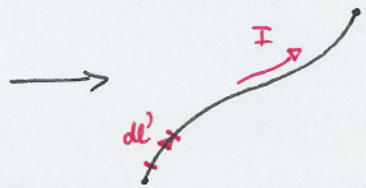
(φ-re hasonló hullámegyenlet, és hasonló alakú potenciál tartozik, de az itt érdektelen, nem is foglalkozunk vele)

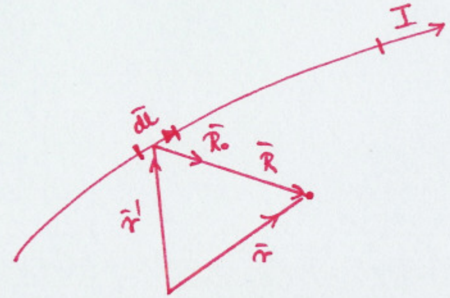
Az általánosított Biot-Savart-törvény.

Szorítkozzunk huzalantennákra:



$\Omega' = S \cdot l'$, ha rövid a szakasz:
$d\Omega' = S\, dl'$





$$\bar A(\bar r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{R}\,\bar J\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)d\Omega' = \frac{\mu}{4\pi}\int_{l}\frac{1}{R}\,\underbrace{\bar J\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)S}_{I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)}\,d\bar l' \Rightarrow \boxed{\bar A(\bar r,t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{l}\frac{1}{R}\,I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)d\bar l'}$$

Ebből $\bar H=\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar A$ szerint kapjuk a mágneses térerősséget:

$$\bar H=\frac{1}{4\pi}\int_{l}\mathrm{rot}\underbrace{\left[\frac{1}{R}\,I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)\right]}_{\varphi}\underbrace{d\bar l'}_{\bar v}$$

$$\mathrm{rot}\,\varphi\bar v=\varphi\,\underbrace{\mathrm{rot}\,\bar v}+\mathrm{grad}\,\varphi\times\bar v=\mathrm{grad}\,\varphi\times\bar v \quad \text{stb.}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar v=\begin{vmatrix}\bar e_x & \bar e_y & \bar e_z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ dl_x & dl_y & dl_z\end{vmatrix}=\emptyset$$

, mert $d\bar l$ konstans vektor, és csak R függ a koordinátától

Az integrandusz:

$$\mathrm{rot}\left[\frac{1}{R}\,I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)\right]d\bar l'=\left[\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\,I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)\right]\times d\bar l'=\underbrace{\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{R}\,I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)\right]}\underbrace{\bar R_0\times d\bar l'}_{-d\bar l'\times\bar R_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{R}\,I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)\right]=-\frac{1}{R^2}\,I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)-\frac{1}{R}\,\frac{\partial I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)}{\partial t}\,\frac{1}{v}$$

$$\boxed{\bar H(\bar r,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{l}I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)\frac{d\bar l'\times\bar R_0}{R^2}+\frac{1}{4\pi v}\int_{l}\frac{\partial I\left(\bar r',t-\frac{R}{v}\right)}{\partial t}\,\frac{d\bar l'\times\bar R_0}{R}}$$

közeltéri komponens

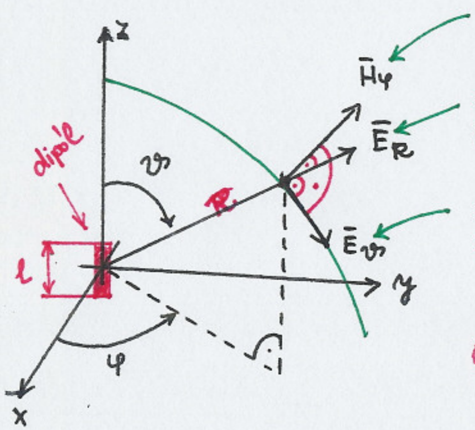
távolteri komponens.

A második tag az áram idő szerinti deriváltjával arányos, sőt a távolsággal fordítottan arányos. Az sokkal lassabban tart nullához, mint az első tag, ami R^2-tel fordítottan arányos. Ez az elnevezések oka: közeli tér, távoli tér.

Fontos konklúzió: a második tag a deriválttal arányos!

előírt nagyságú mágneses teret annál kisebb árammal tudunk előállítani, minél nagyobb az áram frekvenciája

A Hertz-dipólus (a legegyszerűbb antenna).



r, ϑ síkra merőleges komponens.

sugárirányú, kifelé mutató komponens.

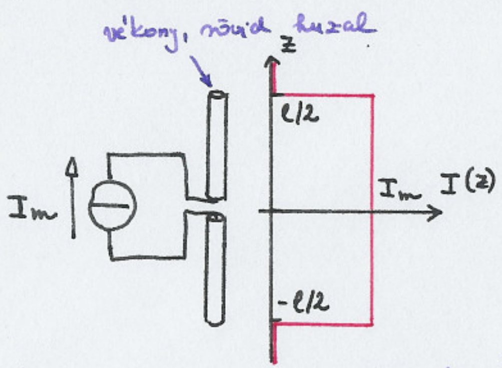
a körív érintőjével egyező irányba mutató komponens.

Gömbi koordináta rendszer: R, ϑ, φ.

Látni fogjuk, hogy a mágneses térerősség egyetlen komponenssel bír, míg az elektromos térerősség kettővel.

Ezek egymásra ortogonálisak.

Áramelosztás a Hertz-dipólus mentén:



(egy adott t időpillanatban)
(itt $t = \varnothing$)

- a Hertz-dipólus árama konstans: $I(z) = I_m$, ha $|z| \le l/2$ (ábra)
- ez csak akkor lehetséges, pontosabban, ez csak akkor jó közelítés, ha az antenna nagyon rövid a hullámhosszhoz képest: $\boxed{l \ll \lambda}$. A dipól átmérőjét elhanyagoljuk!
- később hosszabb antennával is foglalkozunk! a Hertz-dipólus egy fontos építőeleme.

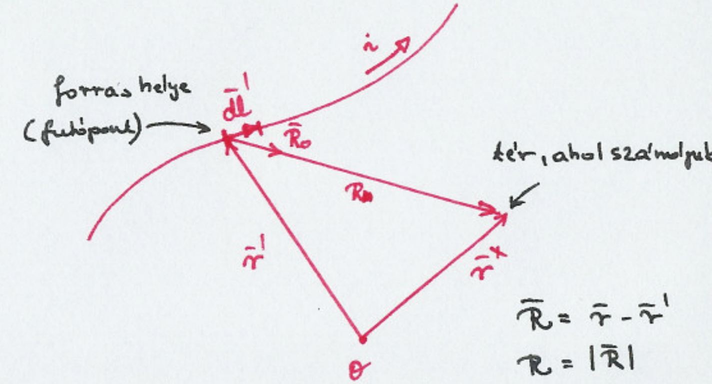
Az áram szinuszosan változik: $\cancel{I}\, i(t) = I_m \cos \omega t$. Legyen a fázisa $\varnothing°$, ami nem szükséges, de egyszerűbb.
(az áram tehát szinuszosan változik az időben, de a dipól mentén konstans!)

Az áram komplex pillanatértéke: $\bar{i}(t) = I_m e^{j\omega t}$; azaz: $i(t) = \mathrm{Re}\{\bar{i}(t)\} = \mathrm{Re}\{I_m e^{j\omega t}\}$ $\quad / \; i(z,t) = i(t) \; /$

A továbbiakban komplex cuccsal számolunk!

Induljunk ki az általánosított Biot-Savart-törvényből:

$$\bar H(\bar r,t) = \frac{1}{4\pi}\int_l i\left(\bar r', t-\frac{R}{v}\right) \frac{d\bar l' \times \bar R_0}{R^2} + \frac{1}{4\pi v}\int_l \frac{\partial i\left(\bar r', t-\frac{R}{v}\right)}{\partial t}\,\frac{d\bar l'\times \bar R_0}{R}$$



$\bar R = \bar r - \bar r'$

$R = |\bar R|$

$\bar R_0 = \bar R / R$

Ha a dipól rövid, akkor az integrandusok konstansok: $\int_l d\bar l' = \bar l$, így

$$\bar H(\bar r,t) = \frac{1}{4\pi}\, i\left(\bar r', t-\frac{R}{v}\right) \frac{\bar l \times \bar R_0}{R^2} + \frac{1}{4\pi v}\,\frac{\partial i\left(\bar r', t-\frac{R}{v}\right)}{\partial t}\,\frac{\bar l\times \bar R_0}{R}$$

Az $\bar l$ vektor a dipól tengelyében van, pozitív z irányba mutat: $\bar l$ I_e

Vegyük most figyelembe, hogy $i(\bar r,t) = i(t) = I_m \cos\omega t$, így:

i nem függ $\bar r'$-től, hiszen időben változik csak.

$$i\left(\bar r', t-\frac{R}{v}\right) = I_m \cos\omega\left(t-\frac{R}{v}\right) = \mathrm{Re}\left\{I_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\right\},$$ azaz:

$$\bar H(\bar r,t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4\pi} I_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\frac{\bar l\times\bar R_0}{R^2} + \frac{1}{4\pi v}\overset{\text{deriválás!}}{j\omega}\, I_m e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\frac{\bar l\times\bar R_0}{R}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\left[\frac{1}{4\pi} I_m e^{-j\omega\frac{R}{v}}\frac{\bar l\times\bar R_0}{R^2} + \frac{1}{4\pi v} j\omega I_m e^{-j\omega\frac{R}{v}}\frac{\bar l\times\bar R_0}{R}\right]}_{\bar H(\bar r)\text{ komplex érték}} e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\bar H(\bar r) e^{j\omega t}\right\}$$

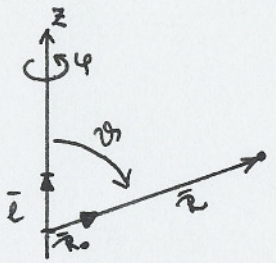
Áttérünk a $\bar H(\bar r,t)$ jelölésről a $\bar H(\bar r)$ komplex értékre, mert $e^{j\omega t}$ minden tagban benne lesz. A komplexnél is szokás, ↑ jelölésnél – a vektorra utal, de itt a komplex egyéb jelölésétől eltekintünk!

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{I_m}{4\pi}\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}\, \frac{\bar{l}\times\bar{R}_0}{R^2} + \frac{j\omega I_m}{4\pi v}\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}\, \frac{\bar{l}\times\bar{R}_0}{R} =$$

$$= \underbrace{\frac{I_m}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{vR}\right) e^{-j\omega\frac{R}{v}}}_{\text{skalár}}\ \underbrace{(\bar{l}\times\bar{R}_0)}_{\text{vektor}}$$

← ez tehát komplex csúcsérték!

Hova irányul az $\bar{l}\times\bar{R}_0$ vektor?



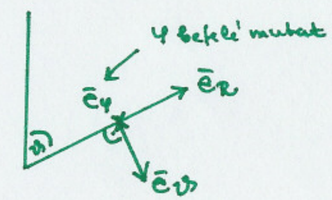
$\bar{l}\times\bar{R}_0$ iránya befelé mutat, azaz φ irányú.

forgássummetrikus!

$|\bar{R}_0| = 1$

$|\bar{l}| = l$

$\bar{l}\times\bar{R}_0 = l \sin\vartheta$



$\bar{l}\times\bar{R}_0$ tehát φ irányba mutat, azaz sem sugárirányú, sem ϑ irányú komponense nincs!

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{H}_R(R,\vartheta) &= \emptyset \\ \bar{H}_\vartheta(R,\vartheta) &= \emptyset \\ \bar{H}_\varphi(R,\vartheta) &= \frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{Rv}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} \end{aligned}}$$

közeltéri komponens.

távolltéri komponens

Itt $\bar{H}_R(R,\vartheta)$ van, s nem $\bar{H}_R(R,\vartheta,\varphi)$, mert forgássummetrikus, s nem függ semmi φ-től!

Határozzuk meg az elektromos térerősség komponenseit:

$$\operatorname{rot}\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} \longrightarrow \bar{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\operatorname{rot}\bar{H} \quad \text{alapján.}$$

Rotációs képzés gömbi koordinátarendszerben: (csak H_φ komponens van)

$$(\operatorname{rot}\bar{H})_R = \frac{1}{R\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, \bar{H}_\varphi) - \cancel{\frac{\partial H_\vartheta}{\partial\varphi}}\right] = \underline{\frac{1}{R\sin\vartheta}\left[\cos\vartheta\, H_\varphi + \sin\vartheta\frac{\partial H_\varphi}{\partial\vartheta}\right]}$$

$H_\vartheta = 0 \quad H_R = 0$

$$(\operatorname{rot}\bar{H})_\vartheta = \frac{1}{R}\left[\cancel{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial H_R}{\partial\varphi}} - \frac{\partial}{\partial R}(R H_\varphi)\right] = \underline{\frac{1}{R}\left[-H_\varphi - R\frac{\partial H_\varphi}{\partial R}\right]}$$

$$(\operatorname{rot}\bar{H})_\varphi = \frac{1}{R}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial R}(R H_\vartheta)} - \cancel{\frac{\partial H_R}{\partial\vartheta}}\right] = \underline{\emptyset}$$

← innen látható, hogy $\bar{E}$-nek csak két komponense van, $E_\varphi = \emptyset$.

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{Rv}\right)\cos\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}$$

$$\hookrightarrow (\operatorname{rot}\bar{H})_R = \frac{1}{R\cancel{\sin\vartheta}}\cdot\cos\vartheta\,\underbrace{\frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{Rv}\right)\cancel{\sin\vartheta}\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}_{H_\varphi} + \frac{1}{R}\underbrace{\frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{Rv}\right)\cos\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}_{\partial H_\varphi/\partial\vartheta} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{2}{R^3} + \frac{j2\omega}{R^2 v}\right)\cos\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial R} = \frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{-2}{R^3} - \frac{j\omega}{R^2 v}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} - \frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{Rv}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}\cdot j\omega\frac{1}{v}$$

$$\hookrightarrow (\operatorname{rot}\bar{H})_\vartheta = -\frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^3} + \frac{j\omega}{R^2 v}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} + \frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{2}{R^3} + \frac{j\omega}{R^2 v}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} + \frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{Rv}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}\frac{j\omega}{v} =$$

$$\frac{j\omega}{R^2 v} - \frac{\omega^2}{R v^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^3} + \frac{j\omega}{R^2 v} - \frac{\omega^2}{R v^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}}}$$

Végül:

$$E_R(R,\vartheta) = \frac{I_m l}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2}{j\omega R^3} + \frac{2}{R^2 v}\right)\cos\vartheta \, e^{-j\omega \frac{R}{v}}$$

„még közelebbi" k. — közeltéri k.

$$E_\vartheta(R,\vartheta) = \frac{I_m l}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{j\omega R^3} + \frac{1}{R^2 v} + \frac{j\omega}{R v^2}\right)\sin\vartheta \, e^{-j\omega \frac{R}{v}}$$

távoltéri k.

$$E_\varphi(R,\vartheta) = \varnothing.$$

$\bar{E}$-nek tehát valóban nincs φ irányú komponense, $\bar{H}$-nak viszont csak az van.

↓

$\boxed{\bar{E} \perp \bar{H}.}$

Távoltéri komponens: $\frac{1}{R}$ szerint a leglassabban csökken, ha R nő - sugárzás szempontjából ez fontos!

Közeltéri komponens: $\frac{1}{R^2}$ szerint gyorsabban hunyt el, az $\frac{1}{R^3}$ pedig még gyorsabban - antenna közelében dominál!

$\frac{1}{R^2}$ - indukciós komponens

$\frac{1}{R^3}$ - sztatikus komponens, egyenáramon csak ez dominál

} csak meddő teljesítményt hoznak létre az antenna környezetében.

Alakítsuk át a három nullától különböző komponensét:

- $$\underline{\underline{H_\varphi(R,\vartheta)}} = \frac{I_m l}{4\pi}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{j\omega}{Rv}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} = \frac{I_m l}{4\pi}\,\frac{j\omega}{v}\left(\frac{1}{R}-j\frac{v}{R^2\omega}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}$$

$$= \frac{I_m l}{4\pi}\, j\, \frac{2\pi f}{v}\left(\frac{1}{R}-j\frac{v}{R^2\omega}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} = \underline{\underline{j\,\frac{I_m l}{2\lambda}\left(\frac{1}{R}-j\frac{1}{\beta R^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\beta R}}}$$

$v = f\cdot\lambda$

$\beta = \frac{\omega}{v}$

- $$\underline{\underline{E_R(R,\vartheta)}} = \frac{I_m l}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2}{j\omega R^3}+\frac{2}{R^2 v}\right)\cos\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} = j\,\frac{I_m l}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{v}\left(-\frac{j}{R^2}-\frac{1}{R^3\frac{\omega}{v}}\right)\cos\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}}\cdot\frac{\frac{\omega}{v}}{\frac{\omega}{v}} =$$

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$$= j\,\frac{I_m l}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\frac{2\pi f}{v}\left(-\frac{j}{R^2\frac{\omega}{v}}-\frac{1}{R^3\left(\frac{\omega}{v}\right)^2}\right)\cos\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} = \underline{\underline{j\,\frac{120\pi I_m l}{\lambda}\left(-\frac{j}{\beta R^2}-\frac{1}{\beta^2R^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-j\omega\cancel{\frac{R}{v}}\beta}}}$$

$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$

- $$\underline{\underline{E_\vartheta(R,\vartheta)}} = \frac{I_m l}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{j\omega R^3}+\frac{1}{R^2 v}+\frac{j\omega}{Rv^2}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} = j\,\frac{I_m l}{4\pi\varepsilon}\,\frac{\omega}{v^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{j}{R^2\frac{\omega}{v}}-\frac{1}{R^3\frac{\omega^2}{v^2}}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} =$$

$$= j\,\frac{I_m l}{4\pi\varepsilon}\,\frac{2\pi f}{v}\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\frac{1}{R}-\frac{j}{R^2\frac{\omega}{v}}-\frac{1}{R^3\frac{\omega^2}{v^2}}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\omega\frac{R}{v}} = \underline{\underline{j\,\frac{60\pi I_m l}{\lambda}\left(\frac{1}{R}-\frac{j}{\beta R^2}-\frac{1}{\beta^2R^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-j\beta R}}}$$

Ez a három eredmény az irodalomban sokszor előfordul, ezért vezettük le!

Ez tehát a dipólantenna teljes tere.

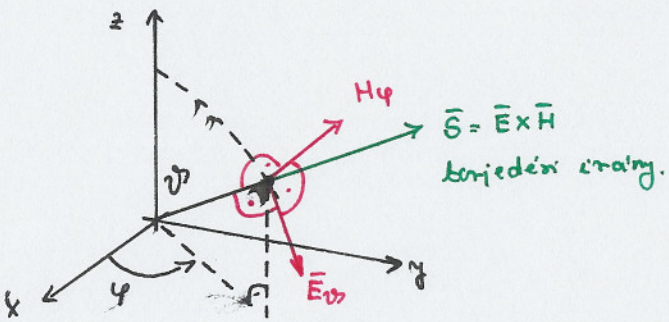
Távoltér: $R \to \infty$

$$\boxed{\begin{aligned} H_\varphi(R,\vartheta) &= j\,\frac{I_m l}{2\lambda}\,\frac{1}{R}\,\sin\vartheta\; e^{-j\beta R} \\ E_R(R,\vartheta) &= \emptyset \\ E_\vartheta(R,\vartheta) &= j\,\frac{60\pi I_m l}{\lambda}\,\frac{1}{R}\,\sin\vartheta\; e^{-j\beta R} \end{aligned}}$$

Itt $1/R^2$ és $1/R^3$ típusú tagokat elhagyhat, ha $R \to \infty$.

Fontos, hogy ezek közelítő síkhullámot írnak le, ugyanakkor nem elégítik ki a Maxwell-egyenleteket, így nem valódi tér, közelítés!

H_φ és E_ϑ azonos fázisban vannak a j szorzó és $e^{-j\beta R}$ miatt, így a Poynting-vektor valós, valós teljesítmény áramlik.



$$\boxed{\frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = 120\pi = Z_0}$$

a szabadtér hullámellenállása jön ki a helytől függetlenül.

A dipólustól kellő távolságra tehát E_ϑ és H_φ a két nullától különböző komponens, melyek egymásra mindig merőlegesek, s rájuk merőleges a Poynting-vektor, azaz a terjedési irány.

Mi ez a kellő távolság?

(távoli és közeli komponensek)

H_φ-ből: $\frac{1}{R} > \frac{1}{\beta R^2}$

E_ϑ-ból: $\frac{1}{R} > \frac{1}{\beta R^2}$

$\Downarrow$

$R > 1/\beta$	$R > v/\omega$	$R > \frac{\lambda}{2\pi}$

A Poynting vektor: csak radiális komponense van (l. első oldal ábra) [sin 90° = 1]

$$S_R(R,\vartheta) = \frac{1}{2} E_\vartheta(R,\vartheta)\cdot H_\varphi^*(R,\vartheta) = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{j\,\frac{60\pi I_m l}{\lambda}\,\frac{1}{R}\,\sin\vartheta\, e^{-j\beta R}}_{E_\vartheta}\cdot \underbrace{(-j)\,\frac{I_m l}{2\lambda}\,\frac{1}{R}\,\sin\vartheta\, e^{+j\beta R}}_{H_\varphi^*} =$$

$$= \frac{30\pi I_m^2 l^2}{2\lambda^2}\,\frac{1}{R^2}\,\sin^2\vartheta = 15\pi\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2\,\frac{\sin^2\vartheta}{R^2} \in \mathbb{R}.$$

A kisugárzott teljesítmény: mivel $S \in \mathbb{R}$, ezért csak valós teljesítmény van a távoltérben.

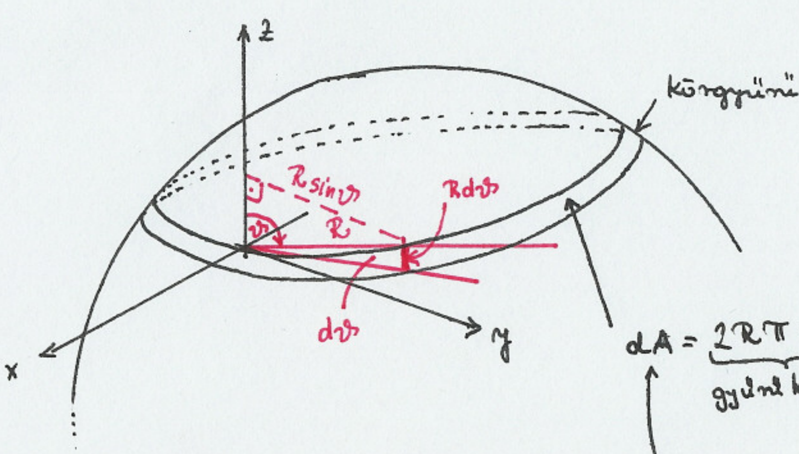
$$P = \oint_A S\, d\bar{A} = \int_0^\pi S_R(R,\vartheta)\, 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi R^2\, 15\pi\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2\,\frac{1}{R^2}\underbrace{\int_0^\pi \sin^2\vartheta\,\sin\vartheta\, d\vartheta}_{4/3} = 40\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2$$

A ← gömbfelület

Sugárzási ellenállás: $P = \frac{1}{2} R_s I_m^2$ (csúcsérték)

$$\boxed{R_s = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2}$$

ez pontosan a bemeneti impedancia valós része.



$$dA = \underbrace{2R\pi\,\sin\vartheta}_{\text{gyűrű kerülete}} \cdot \underbrace{R\,d\vartheta}_{\text{gyűrű szélessége}}$$

a körgyűrű kerülete, amit $\vartheta = 0$-tól $\vartheta = \pi$-ig kell integrálni

Nyereség:

$S_R(R,\vartheta)$ maximuma $\vartheta = 90°$-nál van: $S_{max} = 15\pi \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2 \frac{1}{R^2}$

$$S_0 = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{40\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2}{4\pi R^2}$$

$$G = \frac{S_{max}}{S_0} = \frac{15\pi \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2 \frac{1}{R^2}}{40\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2} 4\pi R^2 = 1{,}5$$

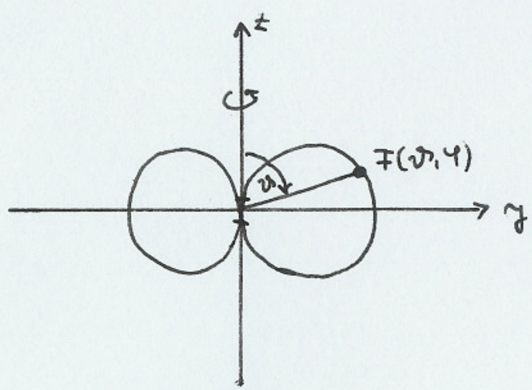
Iránykarakterisztika:

$$G(\vartheta,\varphi) = \frac{S_R(R,\vartheta)}{S_{max}(R,\vartheta)} = \sin^2\vartheta$$ – teljesítményiránykarakterisztika

– feszültség iránykarakterisztika (amplitúdó)

$$F(\vartheta,\varphi) = \sqrt{G(\vartheta,\varphi)} = |\sin\vartheta|$$

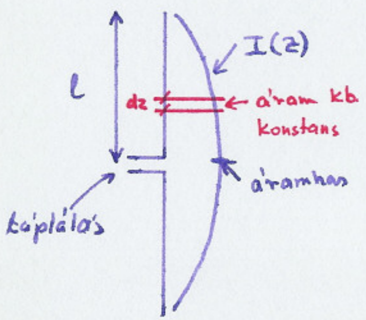
ugyanez jön ki $E_\vartheta / \max E_\vartheta$-ból is.



forgásszimmetrikus, toroid alakú.

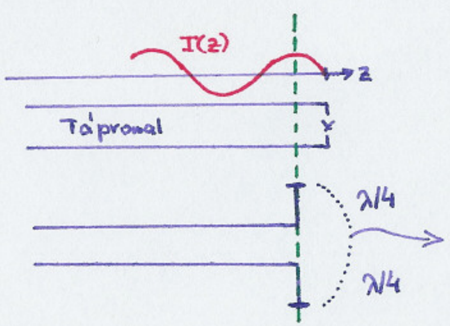
körsugárzó

Lineáris antennák térerősségének számítása:



- az antenna felbontható N db rövid dz hosszúságú dipólra, melyek árama ismert kell legyen.
- egy adott pontban az egyes dipólok hatását összegezzük, integráljuk
- sok esetben az áramelosztást szinuszosnak tételezzük fel, ami azonban közelítés, az egzakt áramelosztás numerikusan számítható, amivel foglalkozni fogunk (ha tehát az áramelosztás ismert, ez a superpozíción alapuló számítás pontos)
- erre számítógépes programok vannak, de az analitikus formula levezetésével nem foglalkozunk, a végeredményt közöljük. Ez nemcsak dipólusra igaz!

A szinuszos közelítés oka:



$$\boxed{I(z) = I_m \sin \beta (l - |z|)}$$

$\beta = 2\pi/\lambda$ - fázistényező

A szinuszos közelítés a távoltérre jó közelítés, de a bemeneti impedancia számítására nem alkalmas, nem általánosan alkalmas. Az antennák kölcsönhatásának számítása is pontosabb modellt kíván.