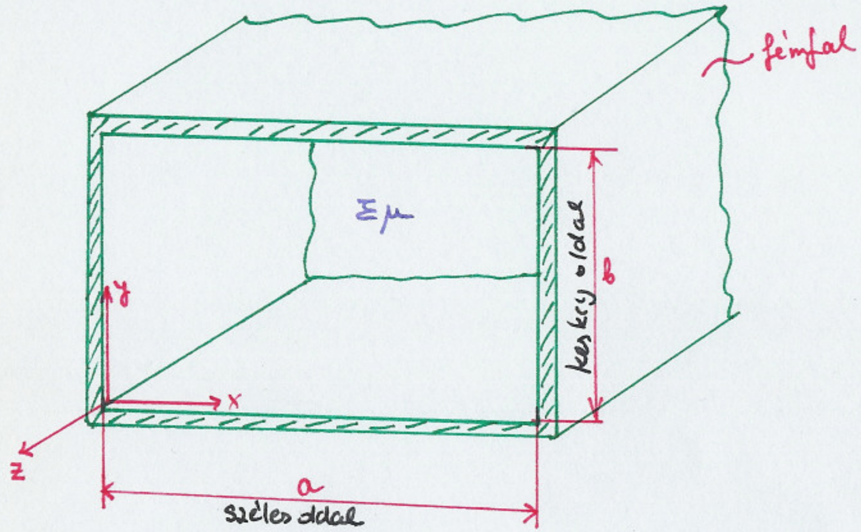
Négyszögletes csőtápvonal



Általában: $b = a/2$.

Kellően nagy frekvenciájú elektromágneses hullámok terjedhetnek egy fémfalú cső belsejében. Itt a négyszögletes csőtápvonalakkal foglalkozunk.

Érnélküli kábelnek is hívják, mert a fémfalban folyó áramot a belső dielektrikumban fellépő eltolási áram vezeti vissza, vagyis nincs szükség belső érre.

Itt a Maxwell által feltételezett $\partial D/\partial t$ eltolási áram fontos szerephez jut.

A csőtápvonal kifelé nem sugároz.

A fémfal ideális vezető.

A kitöltő közeg itt homogén, izotróp és lineáris. Ez a legegyszerűbb eset, amely analitikusan kezelhető.

Hogy hogyan lehet a csőtápvonalba jelet juttatni, azzal itt nem foglalkozunk.

Szinuszos gerjesztést tételezünk fel, azaz a problémát a komplex [illegible] segítségével oldjuk meg.

A terjedés iránya a z-tengellyel esik egybe.

A kiinduló Maxwell-egyenletek a csőben, vagyis a szigetelő közegben:

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot}\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} & (1)\\
\operatorname{rot}\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} & (2)\\
\operatorname{div}\bar{H} = \emptyset & (3)\\
\operatorname{div}\bar{E} = \emptyset & (4)
\end{cases}
$$

A kiinduló vektorpotenciál definiálható egyrészt (3), másrészt (4) alapján:

(3) $\operatorname{div}\bar{H} = \emptyset \mapsto \boxed{\bar{H} = \operatorname{rot}\bar{A}}$

(2) $\operatorname{rot}\bar{E} = -j\omega\mu \operatorname{rot}\bar{A}$

$\operatorname{rot}(\bar{E} + j\omega\mu\bar{A}) = \emptyset$

$\boxed{\bar{E} = -j\omega\mu A - \operatorname{grad}\varphi}$

(1) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = j\omega\varepsilon(-j\omega\mu\bar{A} - \operatorname{grad}\varphi)$

$\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A} - \Delta\bar{A} = \omega^2\mu\varepsilon\bar{A} - j\omega\varepsilon\operatorname{grad}\varphi$

Lorentz-mérték: $\operatorname{div}\bar{A} = -j\omega\varepsilon\varphi$

$\boxed{\Delta\bar{A} + \omega^2\mu\varepsilon\bar{A} = \emptyset}$ Helmholtz-egyenlet

(4) $\operatorname{div}\bar{E} = \emptyset \mapsto \bar{E} = \operatorname{rot}\bar{Z}$

(1) $\operatorname{rot}\bar{H} = j\omega\varepsilon\operatorname{rot}\bar{Z}$

$\operatorname{rot}(\bar{H} - j\omega\varepsilon\bar{Z}) = \emptyset$

$\boxed{\bar{H} = j\omega\varepsilon Z - \operatorname{grad}\varphi}$

(2) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{Z} = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\bar{Z} - \operatorname{grad}\varphi)$

$\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{Z} - \Delta\bar{Z} = \omega^2\mu\varepsilon\bar{Z} + j\omega\mu\operatorname{grad}\varphi$

Lorentz-mérték: $\operatorname{div}\bar{Z} = j\omega\mu\varphi$

$\boxed{\Delta\bar{Z} + \omega^2\mu\varepsilon Z = \emptyset}$ Helmholtz-egyenlet.

$\bar{A}$ – mágneses vektorpotenciál, $\bar{Z}$ – elektromos vektorpotenciál. Látható, hogy a divergencia ilyen formájú megválasztása azt eredményezi, hogy a φ skalárpotenciálra nincs is szükség, hisz $\bar{A}$ és $\bar{Z}$ ismeretében számítható: $\varphi = -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\operatorname{div}\bar{A}$, illetve $\varphi = \frac{1}{j\omega\mu}\operatorname{div}\bar{Z}$.

Tegyük fel, hogy $\bar{A}$ és $\bar{Z}$ számítható a Helmholtz-egyenletből. Ekkor:

$$\bar{H} = \mathrm{rot}\,\bar{A} \qquad\qquad \bar{E} = \mathrm{rot}\,\bar{Z}$$

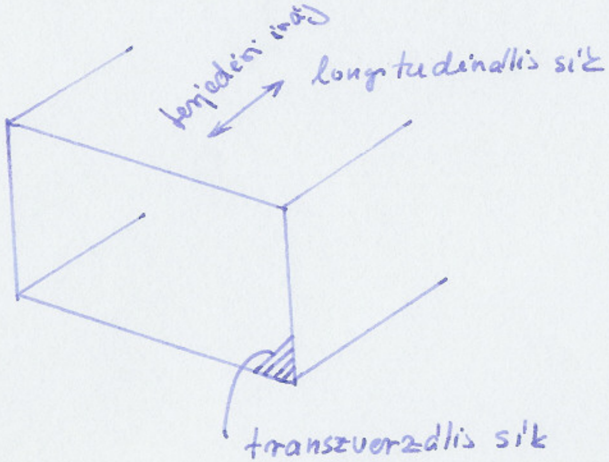
$$\bar{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\bar{H} \qquad\qquad H = -\frac{1}{j\omega\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{E}$$

Azaz a potenciálok ismeretében a mágneses tér és az elektromos tér számítható.

Nézzük, hogy határozható meg $\bar{A}$ és $\bar{Z}$.

$\bar{A}$ vektorpotenciál segítségével olyan eredményt kapunk, amelynél a mágneses térerősségnek nincs terjedésirányú komponense, azaz csak x-y sík. transzverzális mágneses módusok vannak, TM-módusok.

$\bar{Z}$ vektorpotenciálból kiindulva olyan megoldásra jutunk, melynél az elektromos térnek nincs z irányú komponense, azaz transzverzális elektromos, TE-módushoz jutunk.



Összefoglalva:

TM-módus: $H_z = 0$

TE-módus: $E_z = 0$

A z irányba terjedő hullámhoz tartozó mágneses vektorpotenciál a következő:

$$A_x = 0 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = F(x,y)\, e^{-\gamma z} \qquad \left(A_z = A_z(x,y,z)\right)$$

azaz z-től nem függ
ez kérdéses függvény

$\gamma = \alpha + j\beta$ terjedési együttható, ami szintén kérdéses, s biztosítja a z-től való függést.

Írjuk fel a Helmholtz-egyenletet:

$\Delta \bar{A} + \omega^2 \mu \varepsilon \bar{A} = 0$, részletesen:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon A_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon A_y = 0$$

A_x és A_y zérus, ezért ezzel a két egyenlettel nem kell foglalkoznunk!

$$\boxed{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon A_z = 0}$$

Helyettesítsük be A_z feltételezett alakját:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \gamma^2 F\right) e^{-\gamma z} + \omega^2 \mu \varepsilon F e^{-\gamma z} = 0$$

$e^{-\gamma z}$-vel lehet egyszerűsíteni:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right) F = 0$$

legyen: $\boxed{k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0}$$

Először keressük meg a fenti parciális differenciálegyenlet megoldását, majd a térjellemzőket.

Megoldás:

Ún. szorzatszeparációs alakban keressük a megoldást, azaz: $F(x,y) = X(x)\,Y(y)$, vagyis $X(x)$ az x-től, $Y(y)$ az y-tól függ csak.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XY) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(XY) + k^2(XY) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}X + k^2 XY = 0 \qquad / : XY$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 = 0$$ itt írhatunk közönséges deriváltat.

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{-k_y^2} = -k^2$$

legyen $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, vagyis ha mindkét tag konstans (k_x és k_y), akkor az összeg is konstans.

$\Downarrow$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

mindkettő közönséges, homogén differenciálegyenlet.

$$X := Me^{\lambda x}$$

analóg módon:

$$\lambda^2 Me^{\lambda x} + k_x^2 Me^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + k_x^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm jk_x \qquad\qquad \lambda_{1,2} = \pm jk_y$$

$Me^{jk_x x} + M^* e^{-jk_x x}$ alakú a megoldás mindkét esetben, M pedig tiszta képzetes, írhatjuk, hogy:

$$jMe^{jk_x x} - jMe^{-jk_x x} = -2M\,\frac{e^{jk_x x} - e^{-jk_x x}}{2j} = -2M\sin k_x x$$

, azaz a homogén megoldás $\sin k_x x$ és $\sin k_y y$ típusú.

Összefoglalva: X és Y $\sin k_x x$ és $\sin k_y y$ típusú, vagyis a szorzat:

$$\underline{\underline{F(x,y) = X(x)\,Y(y) = M \sin k_x x \,\sin k_y y}}$$

Megjegyezzük, hogy elég egyetlen M konstant választani, mert, hogy külön X-hez és Y-hoz miért M konstans tartozik, az érdektelen, hiszen F a kérdés!

Most már felírhatjuk a térjellemzőket is.

$$\bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & F e^{-\gamma z} \end{vmatrix} = \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial y} F e^{-\gamma z} - \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial x} F e^{-\gamma z} =$$

$$= \bar{e}_x \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} - \bar{e}_y \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z}$$

vagyis $\bar{H}$-nak valóban nincs z irányú komponense, csak x és y, ez a TM-módus, mert $\bar{H}$-nak csak z-re, a terjedésre merőleges, azaz transzverzális komponensei vannak.

$$\boxed{\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} = k_y M \sin k_x x \cos k_y y \; e^{-\gamma z} \\ H_y &= -\frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z} = -k_x M \cos k_x x \sin k_y y \; e^{-\gamma z} \\ H_z &= \emptyset \end{aligned}}$$

$$E = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \begin{vmatrix} \grave{e}_x & \grave{e}_y & \grave{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \bar{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \grave{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \grave{e}_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma k_x M \cos k_x x \sin k_y y \, e^{-\gamma z} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = k_x^2 M \sin k_x x \sin k_y y \, e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = -\gamma k_y M \sin k_x x \cos k_y y \, e^{-\gamma z} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial y} = -k_y^2 M \sin k_x x \sin k_y y \, e^{-\gamma z}$$

Azaz:

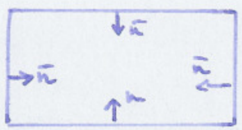
$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= j \frac{k_x \gamma}{\omega\varepsilon} M \cos k_x x \sin k_y y \, e^{-\gamma z} \\ E_y &= j \frac{k_y \gamma}{\omega\varepsilon} M \sin k_x x \cos k_y y \, e^{-\gamma z} \\ E_z &= -j \frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega\varepsilon} M \sin k_x x \sin k_y y \, e^{-\gamma z} \end{aligned}}$$

$\bar{E}$-nek tehát x, y és z komponense is van.

Nem esett szó még k_x, k_y értékéről. Tudjuk már, hogy $\bar{H}$ és $\bar{E}$ milyen jellegű, de részleteket nem.

Fontos, hogy a fémfalon $E_z = \emptyset$ kell legyen, továbbá $E_x = \emptyset$ az $x = 0$ és $x = a$, valamint $E_y = 0$ az $y = 0$ és az $y = b$ helyen.

Miért? Az elektromos térerősség tangenciális komponense a fémfalon nulla kell legyen!



Berajzoltuk a befelé mutató normálisokat.

Így már könnyű látni, hogy:

$x = 0$ és $x = a$:) $E_z = \emptyset$ és $E_y = \emptyset$

$y = 0$ és $y = b$:) $E_z = \emptyset$ és $E_x = \emptyset$

$$\Downarrow$$

$\sin k_x a = \emptyset$ E_y függvényéből, $x = \emptyset$-ban automatikusan nulla!

$k_x a = m\pi$

$\boxed{k_x = m\frac{\pi}{a}}$ ez biztosítja, E_z függvényéből hogy $E_z = \emptyset$ teljesül $x = a$ helyen; $m = 1, 2, \ldots$

$\sin k_y b = \emptyset$ E_x-ből kiindulva

$k_y b = n\pi$

$\boxed{k_y = n\frac{\pi}{b}}$ $n = 1, 2, \ldots$

Itt érdemes ezeket E_x, E_y és E_z függvényébe visszahelyettesíteni!

Nézzük k^2-et:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \rightarrow \boxed{k^2 = \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

k tehát csak ezen értékeket veheti fel!

$$k^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon \rightarrow \gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$$

meghatározzuk γ lehetséges értékeit is.

$$\gamma = \sqrt{\left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon},$$

ami vagy tisztán valós, vagy tisztán képzetes.

$\gamma = \alpha + j\beta$, ha γ tisztán valós, akkor $\gamma = \alpha$, azaz a hullám csillapodik az z irányba, ami itt nem cél.

ha γ tisztán képzetes, akkor $\gamma = j\beta$, azaz a hullám nem csillapodik (és ez a lényeg energiaszállítás szempontjából), de a fázisa változik.

Energiaszállítás szempontjából tehát az a jó, ha γ tisztán képzetes! Azaz:

$$\left(m\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 < \omega^2\mu\varepsilon$$

$$\omega^2\mu\varepsilon = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r = \mu_r\varepsilon_r\frac{\omega^2}{c^2} = \mu_r\varepsilon_r\frac{(2\pi)^2 f^2}{c^2} = \mu_r\varepsilon_r\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 < \mu_r\varepsilon_r\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2$$

$$\boxed{\lambda_{h,mn} = \frac{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}}$$

Ez a <u>határhullámhossz</u>, vagyis ezen hullámhossznál nagyobb hullámhosszúságú (kisebb frekvenciájú) jel nem vihető át.

Speciálisan, levegővel, vákuummal kitöltött csőtápvonalnál:

$$\boxed{\lambda_{h,mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}}$$

vagyis λ_h függ m, n értékétől is! a tápvonal a, b méretétől, s kitöltő közegétől, bár ez magától értetődő.

Vágási frekvencia: $\boxed{f_{h,mn} = c/\lambda_{h,mn}}$ (határfrekvencia, ami alatt nincs hullámterjedés a csőtápvonalon)

A fázisegyüttható tehát:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - \underbrace{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}_{4\mu_r\varepsilon_r/\lambda^2_{h,mn}}}\;\pi$$

$\gamma_{mn} = j\beta_{mn}$ alapján, s γ formulájából.

$$\beta_{mn} = 2\pi\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2_{h,mn}}}$$

Ebből a csőben mérhető hullámhossz $\beta = 2\pi/\Lambda$ alapján:

$$\cancel{\beta_{mn} =} \quad \boxed{\Lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2_{h,mn}}}}}$$

Levegő közeg mellett: $\boxed{\Lambda_{mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{h,mn}}\right)^2}}}$

Azaz a csőben mérhető hullámhossz nagyobb a szabadtérben mérhető $\lambda = c/f$ hullámhossznál.

TE- módusok:

Az elektromos vektorpotenciálból kiinduló analóg levezetés mellett kaphatjuk meg a transzverzális elektromos módusokat.

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= -k_y M \cos k_x x \sin k_y y \, e^{-\gamma z} \\ E_y &= k_x M \sin k_x x \cos k_y y \, e^{-\gamma z} \\ E_z &= 0 \end{aligned}}$$

$\bar{E}$-re itt is teljesülnek a peremfeltételek.

$$\boxed{\begin{aligned} H_x &= j \frac{k_x \gamma}{\omega\mu} M \sin k_x x \cos k_y y \, e^{-\gamma z} \\ H_y &= j \frac{k_y \gamma}{\omega\mu} M \cos k_x x \sin k_y y \, e^{-\gamma z} \\ H_z &= j \frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega\mu} M \cos k_x x \cos k_y y \, e^{-\gamma z} \end{aligned}}$$

Domináns módus: TE_{10} $\quad m = 1 \rightarrow k_x = \pi/a \quad n = \emptyset \rightarrow k_y = 0$

$$E_y = \underbrace{M \frac{\pi}{a}}_{\hat{E}_y} \sin \frac{\pi}{a} x \, e^{-\gamma z}$$

Módusképek: l. honlapon.

$$H_x = \underbrace{j \frac{k_x \gamma}{\omega\mu} M}_{\hat{H}_x} \sin \frac{\pi}{a} x \, e^{-\gamma z} \qquad (k_x = \pi/a)$$

$$H_z = j \frac{(\pi/a)^2}{\omega\mu} M \cos \frac{\pi}{a} x \, e^{-\gamma z}$$

A tápvonalon áramló teljesítmény.

Poynting - vektor : $\boxed{\bar{S} = \frac{1}{2}\,\bar{E} \times \bar{H}^*}$

$$\bar{E} \times \bar{H}^* = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x^* & H_y^* & H_z^* \end{vmatrix} = \bar{e}_x\left(E_y H_z^* - E_z H_y^*\right) + \bar{e}_y\left(E_z H_x^* - E_x H_z^*\right) + \bar{e}_z\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right)$$

általánosan !

- TM-módusnál $H_z = \varnothing$, azaz

$$S_{TM} = \frac{1}{2}\,\bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2}\Big[-\bar{e}_x \underbrace{E_z H_y^*}_{S_x} + \bar{e}_y \underbrace{E_z H_x^*}_{S_y} + \bar{e}_z \underbrace{\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right)}_{S_z}\Big]$$

$$S_x = -\frac{1}{2} E_z H_y^* = -j\,\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\omega\varepsilon}\,k_x M^2 \sin k_x x \cos k_x x \sin^2 k_y y\; e^{-2\alpha z}$$

$$S_y = \frac{1}{2} E_z H_x^* = -j\,\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\omega\varepsilon}\,k_y M^2 \sin^2 k_x x \sin k_y y \cos k_y y\; e^{-2\alpha z}$$

$$S_z = \frac{1}{2}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) = -j\,\frac{\gamma}{2\omega\varepsilon}\,M^2\left(k_x^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + k_y^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y\right) e^{-2\alpha z}$$

Látható, hogy S_x és S_y mindig tiszta képzetes, azaz x és y irányban csupán meddő teljesítmény halad. A z irányban, ha $\gamma = j\beta$, azaz γ tiszta képzetes, akkor S_z tiszta valós és pozitív. Ez azt jelenti, hogy valós teljesítmény áramlik a z tengely irányában. Az $e^{-\alpha z}$ tag utóbbi esetben kicsi /$\alpha = 0$/.

- TE módusnál $E_z = \emptyset$, azaz

$$S_{TE} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2} \Big[\underbrace{E_y H_z^*}_{S_x} \bar{e}_x \underbrace{- E_x H_z^*}_{S_y} \bar{e}_y + \underbrace{\left(E_x H_y^* - E_y H_x^* \right)}_{S_z} \Big]$$

$$\boxed{\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2} E_y H_z^* = -j \frac{k_x^2 + k_y^2}{2\omega\mu} k_x M^2 \cos k_x x \sin k_x x \cos^2 k_y y \, e^{-2\alpha z} \\
S_y &= -\frac{1}{2} E_x H_z^* = -j \frac{k_x^2 + k_y^2}{2\omega\mu} k_y M^2 \cos^2 k_x x \sin k_y y \cos k_y y \, e^{-2\alpha z} \\
S_z &= \frac{1}{2} \left(E_x H_y^* - E_y H_x^* \right) = j \frac{\gamma^*}{2\omega\mu} M^2 \left(k_y^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + k_x^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \right) e^{-2\alpha z}
\end{aligned}}$$

S_x és S_y itt is tisztán képzetes. S_z tisztán valós és pozitív, ha $\gamma = j\beta$, s ekkor a teljesítmény nem csökken, mert $\alpha = \emptyset$.

A hatásos teljesítmény: $(\gamma = j\beta)$

$$P_{TM} = \mathrm{Re} \int_A S_{z,TM} \, dA = \frac{\beta M^2}{2\omega\varepsilon} \int_0^a \int_0^b \left(k_x^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + k_y^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \right) dy \, dx =$$

$$= \frac{\beta M^2}{2\omega\varepsilon} \int_0^a k_x^2 \cos^2 k_x x \int_0^b \sin^2 k_y y \, dy \, dx + \frac{\beta M^2}{2\omega\varepsilon} \int_0^a k_y^2 \sin^2 k_x x \int_0^b \cos^2 k_y y \, dy \, dx$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \qquad \int \cos^2 ax = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int_0^b \sin^2 k_y y\, dy = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4k_y}\sin 2k_y b = \frac{1}{2}b - \underbrace{\frac{1}{4k_y}\sin 2n\frac{\pi}{b}b}_{\emptyset} = \frac{1}{2}b$$

$$\int_0^a \cos^2 k_x x\, dx = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4k_x}\sin 2k_x a = \frac{1}{2}a + \underbrace{\frac{1}{4k_x}\sin 2m\frac{\pi}{a}a}_{\emptyset} = \frac{1}{2}a$$

$$\int_0^b \cos^2 k_y y\, dy = \frac{1}{2}b + \underbrace{\frac{1}{4k_y}\sin 2k_y b}_{\emptyset} = \frac{1}{2}b$$

$$\int_0^a \sin^2 k_x x\, dx = \frac{1}{2}a \underbrace{-\frac{1}{4k_x}\sin 2k_x a}_{\emptyset} = \frac{1}{2}a$$

Azaz:

$$P_{TM} = \frac{\beta M^2}{2\omega\varepsilon}k_x^2\frac{1}{4}a\cdot b + \frac{\beta M^2}{2\omega\varepsilon}k_y^2\frac{1}{4}ab =$$

$$= \frac{\beta M^2 ab}{8\omega\varepsilon}\underbrace{(k_x^2 + k_y^2)}_{k^2 = -\beta^2 + \omega^2\mu\varepsilon}$$

$$\boxed{P_{TM} = \frac{\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2}{8\omega\varepsilon}\beta M^2 ab}$$

Analóg módon: $\boxed{P_{TE} = \frac{\omega^2\mu\varepsilon - \beta^2}{8\omega\mu}\beta M^2 ab}$

Az M konstans a teljesítményből számítható.

Hullámimpedancia:

$$\boxed{Z_0 = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon}}$$

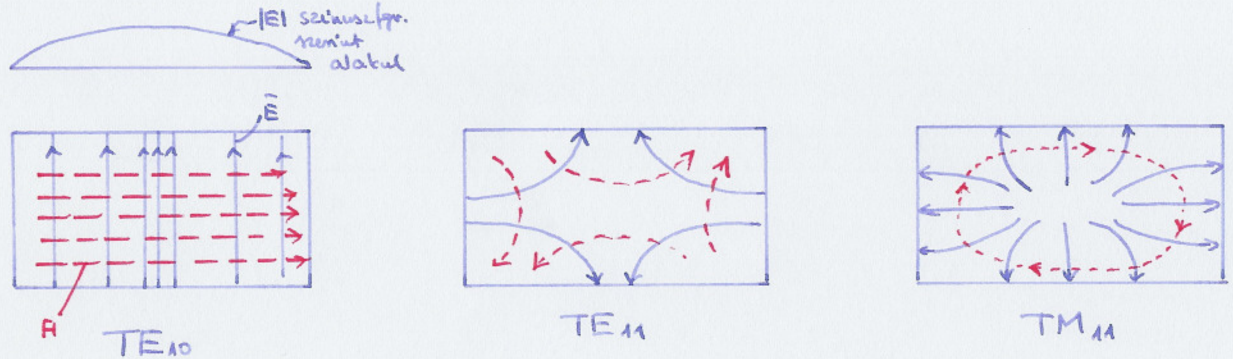
TM-módus esetén (behelyettesítés után kapjuk ezen alakot.)

$$\boxed{Z_0 = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega \mu}{\beta}}$$

TE-módus esetén

Erővonalképek: l. számítógépes szimulációk eredménye

- $\bar{H}$ vonalai zártak
- $\bar{E}$ vonalai vagy zártak, vagy a falon merőlegesen erednek s. végződnek
- $\bar{E}$ és $\bar{H}$ mindenütt merőlegesek egymásra, $\bar{E} \times \bar{H}$ befelé mutat.



Ez a három alapmódus!

Példák:

① Határozzuk meg a téglalap keresztmetszetű, légtöltésű csőtápvonal 'a' méretét úgy, hogy $f = 3\,GHz$ frekvenciáján a csőben a TE_{10} módus terjedhessen; $b = 0{,}5a$.

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \; ; \; m=1,\ n=\emptyset \text{ esetén: } \lambda = \frac{2}{\frac{m}{a}} = 2a \rightarrow \underline{\underline{a = 0{,}05\,m}}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^3} = 0{,}1\,m$$

② Egy igen hosszú, $a \times b$ méretű, légtöltésű csőtápvonalban TE_{10} módus terjed a pozitív z-tengely irányában. A $z = \emptyset$ helyen $E(x, z=\emptyset, t) = 10 \cdot \sin 15{,}71x \cdot \cos 25{,}13t$, ahol $[x] = m$, $[t] = ns$. Írjuk fel a villamos térerősség kifejezését $z > \emptyset$-ra.

$$15{,}71x = \frac{m\pi}{a}x = k_x x \rightarrow \underline{k_x = 15{,}71} \qquad \underline{\omega = 25{,}13 \frac{Grad}{s}}$$

$$\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2 = k_x^2 \rightarrow \gamma = \sqrt{k_x^2 - \omega^2\mu\varepsilon} = \sqrt{246{,}8 - 7026{,}42} = \underline{j\,82{,}34\,\frac{1}{m}} \rightarrow \beta = 82{,}34\,1/m$$

$$\underline{\underline{E(x,z,t) = 10 \sin 15{,}71x \cdot \cos(25{,}13t - 82{,}34z)\ \frac{V}{m}}}$$