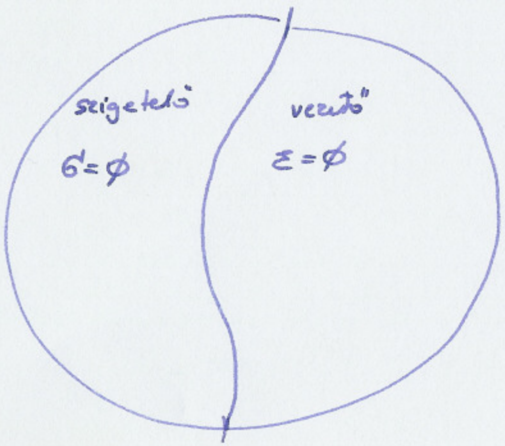
Síkhullámok:

A szabad térben terjedő hullámok közül a legegyszerűbb.
szabadon terjedő hullámok, s
így közelítés, ha a forrásoktól kellően távol vizsgáljuk a
kellően kicsi tartományban.

Fontos tudni, hogy az itt tárgyalt síkhullámok szuperpozíciójával tetszőleges síkhullám modellezhető.



$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\quad \mathrm{rot}\,\bar{H} = \sigma\bar{E} + \varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \\ &(2)\quad \mathrm{rot}\,\bar{E} = -\mu\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \\ &(3)\quad \mathrm{div}\,\bar{H} = 0 \\ &(4)\quad \mathrm{div}\,\bar{E} = 0 \end{aligned}}$$

μ, ε, σ konstans az egyes térfogatokban.

A síkhullámok alapegyenlete:

Képezzük (2) rotációját:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{E} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\bar{E}}_{=0,\ \text{l. } (4)} - \Delta\bar{E} = -\Delta\bar{E} =$$

$$-\mu\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\bar{H} \overset{(1)}{=} -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\bar{E} + \varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\right) = -\mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\bar{E} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Ennek speciális esetei:

- <u>hullámegyenlet</u> ideális szigetelőkben $(\sigma = 0)$: $\boxed{\Delta\bar{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = 0}$
- <u>diffúziós egyenlet</u> ideális vezetőkben $(\varepsilon = 0)$: $\boxed{\Delta\bar{E} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = 0}$

Ha a fentiek valamelyikéből $\bar{E}$-t kiszámítjuk $\partial\bar{H}/\partial t = -1/\mu\ \mathrm{rot}\,\bar{E}$ -ként számítható (2)-ből, azaz $\bar{H}$ egy helytől független konstanstól eltekintve egyértelmű.

Hasonló egyenlet kapható $\bar{H}$-ra, ha (1) rotációjából indulunk el:

$$\boxed{\Delta\bar{H} - \mu\sigma\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \cancel{\bar{E}}\,\bar{H}}{\partial t^2} = 0}$$

Síkhullámok alapegyenletei speciálisan, ha szinuszos a gerjesztés:

Vigyázat! Itt komplex csúcsot jelent az $\bar{E}$ és a $\bar{H}$.

$$\boxed{\begin{aligned} &(1) \quad \text{rot}\,\bar{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\bar{E} \\ &(2) \quad \text{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\,\bar{H} \\ &(3) \quad \text{div}\,\bar{H} = \emptyset \\ &(4) \quad \text{div}\,\bar{E} = \emptyset \end{aligned}}$$

(2)-ből: $\bar{H} = -\dfrac{1}{j\omega\mu}\,\text{rot}\,\bar{E}$

(1)-be: $-\text{rot}\,\dfrac{1}{j\omega\mu}\,\text{rot}\,\bar{E} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\bar{E} \quad / \, j\omega\mu$

$$-\text{rot}\,\text{rot}\,\bar{E} = \underbrace{j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)}\,\bar{E}$$

$\rightarrow$ Terjedési együttható: $\gamma^2 = j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)$; $\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)}}$

$$\boxed{\Delta\bar{E} - \gamma^2\bar{E} = \emptyset}$$

ami a Helmholtz-egyenlet, távvezetéknél a feszültségre és az áramra volt hasonló.

Ennek általános megoldása csak numerikusan lehetséges.

Itt a legegyszerűbb esetre, az 1D-s síkhullámra koncentrálunk / lineárisan polarizált síkhullám /.

$\bar{H}$-ra hasonló egyenlet vezethető le, de (1)-ből kell elindulni.

Lineárisan polarizált síkhullám

terjedés iránya $\longrightarrow z$

$\bar E = E_x(z)\,\bar e_x + E_y(z)\,\bar e_y + E_z(z)\,\bar e_z$, azaz csak z-től függenek a komponensek.

$\Delta \bar E - \gamma^2 \bar E = \emptyset$ alakja ekkor:

$$\boxed{\frac{d^2\bar E}{dz^2} - \gamma^2 \bar E = \emptyset \qquad \gamma = j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

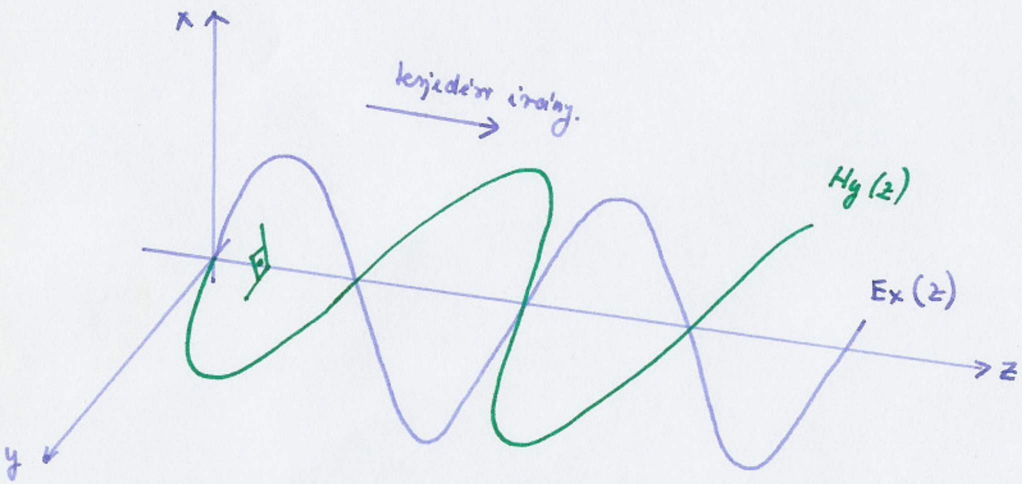
$$\bar H = -\frac{1}{j\omega\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar E = -\frac{1}{j\omega\mu}\begin{vmatrix} \bar e_x & \bar e_y & \bar e_z \\ 0 & 0 & d/dz \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{j\omega\mu}\left(-\bar e_x \frac{dE_y}{dz}\right) - \frac{1}{j\omega\mu}\left(\bar e_y \frac{dE_x}{dz}\right) =$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu}\left(\bar e_x \frac{dE_y}{dz} - \bar e_y \frac{dE_x}{dz}\right) = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{d}{dz}\left(\bar e_z \times \bar E\right)$$

$\bar H$ tehát merőleges $\bar E$-re és a $\bar z$ irányra, így $E_z = \emptyset$, $H_z = \emptyset$.

$$\cancel{\begin{vmatrix} \bar e_x & \bar e_y & \bar e_z \\ e_x & e_y & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \bar e_z\cdot(e_x E_y - e_y E_x)}$$

$$\begin{vmatrix} \bar e_x & \bar e_y & \bar e_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\bar e_x E_y + \bar e_y E_x$$



Legegyszerűbb esetben: E_x, H_y van csupán.

$\bar S = \frac{1}{2}\,\bar E \times \bar H^*$ iránya a z-tengely irányába mutat.

Összefoglalva:

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} - \gamma^2 E_x = 0 \qquad \gamma = \sqrt{j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$H_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\,\frac{dE_x}{dz}$$

A távvezeték analógiájának megfelelően E_x és H_y felírható két tag összegeként:

$$E_x(z) = E_1^+ e^{-\gamma z} + E_1^- e^{\gamma z}$$

$$H_y(z) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E_1^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$ a síkhullám hullámimpedanciája

A síkhullám feladatok tehát a távvezeték-feladatok mintájára oldhatók meg.

Ideális szigetelőben ($\sigma = \emptyset$) vizsgáljuk meg γ és Z_0 értékét!

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu \; j\omega\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \underline{\underline{j\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}} \qquad (*)$$

levegőben, vákuumban tehát $\gamma = j\frac{\omega}{c}$, ahol $\frac{\omega}{c}$ a fázisegyüttható.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

$$\sqrt{\frac{4\pi 10^{-7}}{8{,}854\cdot 10^{-12}}} = 37\cancel{7}6{,}734 \approx \underline{377\,\Omega} \quad (120\pi\,\Omega)$$

a szabadtér hullámimpedanciája

$(*)$ $\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \frac{\omega}{v} \longrightarrow \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}}$ a terjedési sebesség.

(sok esetben $\mu_r = 1$, mert a közeg nem ferromágneses).

Áramkiszorítás vezető közegekben.

Vezető közeg: az eltolási áramsűrűség elhanyagolható a vezetési áramsűrűség mellett.

szinuszos esetben: $\boxed{\sigma|\bar{E}| \gg |j\omega\varepsilon\bar{E}|}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma \gg \omega\varepsilon}$

fémekben az $\omega\varepsilon = \emptyset$ mindig feltételezhető

Távvezeték analógia szerint: $\omega\varepsilon = \emptyset$, azaz $\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$ és $Z_0 = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu}{\sigma}}$

Alakítsuk át γ-t és Z_0-t valós rész + képzetes rész (algebrai) alakra:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{(1+j)^2}{2}\omega\mu\sigma} = (1+j)\underbrace{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}_{1/\delta} = \frac{1}{\delta} + j\frac{1}{\delta} = \alpha + j\beta \qquad (\alpha = \beta = 1/\delta)$$

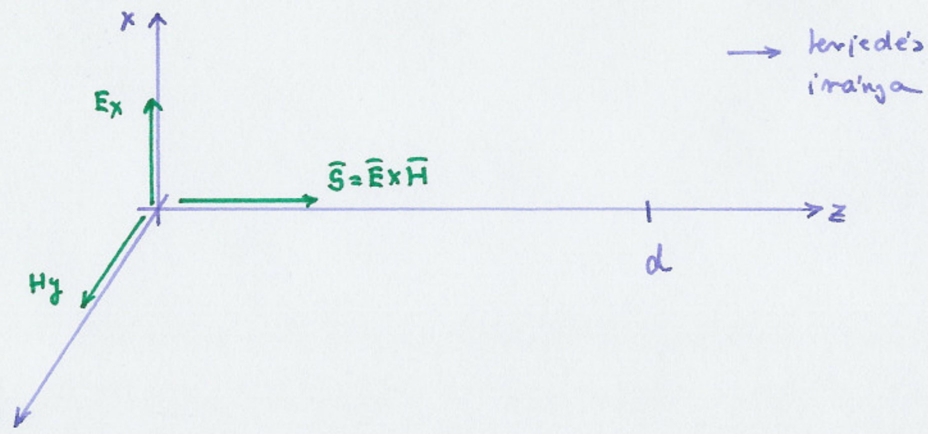
csillapítási együttható (α), fázisegyüttható (β)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2\sigma^2}} = \frac{1+j}{\sigma}\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

Itt δ a behatolási mélység, vagy skinmélység: $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}}}$

$$(*) \quad j = (1+j)^2/2 = \frac{1+2j-1}{2} = j$$

Végtelen féltér



Ha d a lezárás, melyet olyan nagynak választunk, hogy ott a $z = 0$ helyen beeső hullám már elhanyagolható mértékben csökken, azaz $\boxed{d > 5\delta}$

(δ olyan szerepet játszik, mint a τ időállandó.)

Ebben az esetben $E^- = 0$, azaz:

$$E_x(z) = E_1^+ e^{-\gamma z} = E_1^+ e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta} \rightarrow \underline{\underline{E_x(z,t) = E_1^+ e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)}}$$

$$H_y(z) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

$$J_x(z) = \sigma E_x(z)$$

emiatt tehát z növekedésével $|E_x(z)|$ exponenciálisan csökken, és $z > 5\delta$ felett gyakorlatilag elhanyagolható

Ez az áramkiszorítás jelensége.

Az 5δ-nál vékonyabb lemezek számítása kissé nehézkesebb, csakúgy, mint a kör keresztmetszetű vezetékek számítása. Ezekkel nem foglalkozunk részletesebben, de végeselemes szimulációkban utalunk rájuk.

Példák:

(1) Szabad térben terjedő síkhullám mágneses térerőssége ismert. Adjuk meg az elektromos térerősség kifejezését!

$H_x(z,t) = 5\cos(\omega t - \beta z)$ A/m.

$$Z_0 = \frac{E_y}{H_x} \mapsto E_y = Z_0 H_x = 377\cdot 5\cos(\omega t - \beta z) = \underline{\underline{1885\cos(\omega t - \beta z)\ \text{V/m}}}.$$

Vigyázat! H-nak csak x irányú rendezője van, E-nek pedig csak y irányú, azaz egymásra merőlegesek. A hullám terjedési iránya ekkor a -z tengely irányába mutat.

(2) Ismert egy síkhullám két ortogonális összetevője. Határozzuk meg a Poynting-vektor időfüggvényét!

$E_x = 35\, e^{j60^\circ}$ V/m

$H_y = j\, 4\cdot 10^{-3}$ A/m

$$S = \frac{1}{2} E_x H_y^* = \frac{1}{2}\, 35\, e^{j60^\circ}\cdot 4\cdot 10^{-3}\, e^{-j90^\circ} = 0{,}07\, e^{-j\cancel{150^\circ}\,30^\circ}\ \frac{W}{m^2}$$ ← E_x és H_y csúcsérték!

$$S(t) = \underline{\underline{0{,}07\cos(\omega t - \beta z \cancel{+150^\circ} - 30^\circ)\ \frac{W}{m^2}}}$$

(3) Határozzuk meg az előző feladat közegének hullámimpedanciáját.

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \frac{35 e^{j60^\circ}}{4 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ}} = \underline{\underline{8750 e^{-j30^\circ} \Omega.}}$$

(4) Szabadtéri síkhullám elektromos térerőssége ismert: $E_y(z,t) = 50 \cos(\omega t - \beta z)$ V/m. Határozzuk meg a z = const. síkban fekvő $R = 2{,}5$ m sugarú kör felületén áthaladó hatásos teljesítményt.

$$S = \frac{1}{2} E_y H_x^* = \frac{1}{2} E_y \frac{E_y^*}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{|E_y|^2}{Z_0} = \frac{1}{2} \frac{50^2}{377} = \underline{3{,}315 \frac{W}{m^2}}$$

$$A = R^2 \pi = 19{,}63 \ m^2$$

$$P = SA = \underline{\underline{65{,}08 \ W}}$$

(5.) Határozzuk meg a nem ferromágneses szigetelő anyag hullámimpedanciáját, ha $\varepsilon_r = 3$.

nem ferromágneses $\rightarrow \mu_r = 1$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{217{,}66 \Omega}}$$

6. Egy 200Ω hullámimpedanciájú ideális szigetelőben 220 MHz frekvenciájú síkhullám terjed a szigetelő határfelületére merőlegesen, melynek másik oldalán levegő van. Határozzuk meg a reflexiós tényezőt a határfelületen.

200Ω	377Ω
	Lezárás!

$$r = \frac{Z_0 - Z_{01}}{Z_0 + Z_{01}} = \frac{377-200}{377+200} = \underline{\underline{0{,}3068}}$$

7. Szabad térben terjedő síkhullám mágneses komponense $H_y(z,t) = 500\cos(\omega t - \beta z)$ mA/m. Határozzuk meg a $z =$ konst. síkban fekvő $a = 2{,}5$ m oldalú négyzet felületén áthaladó hatásos teljesítményt.

$$P = S\cdot A = \frac{1}{2} E_x H_y^* A = \frac{1}{2}|H_y|^2 Z_0\, a^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}5^2 \cdot 377 \cdot 2{,}5^2 = \underline{\underline{294{,}53\ \mathrm{W}}}$$

8. Veszteséges síkkondenzátorra $u(t) = \hat{U}\cos\omega t$ feszültséget kapcsolunk. Határozzuk meg a lemezek között az áramsűrűség időfüggvényét, ha a lemezek távolsága d, és a közeg vezetőképessége σ, relatív permittivitása ε_r.

$$J(t) = \sigma E(t) + \varepsilon \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \underline{\underline{\frac{\sigma \hat{U}}{d}\cos\omega t - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \hat{U}\omega}{d}\sin\omega t}}$$

$E = \frac{u}{d}$.

eltolási áramsűrűség

vezetési áramsűrűség

(9.) Egy végtelen hosszúnak tekinthető vezetőben szinuszos áram folyik, a vezető felületén az áramsűrűség $J(0) = 2A/mm^2$, a behatolási mélység 0,8 mm. Határozzuk meg az áramsűrűség amplitúdóját a felülettől 1.2 mm távolságban.

$$J = J(0)\, e^{-z/\delta} = 2\, e^{-1{,}2/0{,}8} = \underline{\underline{0{,}446\ \frac{A}{mm^2}}}$$

(10.) Egy kábel vezetőképessége $\sigma = 12 \cdot 10^6$ S/m, relatív permeabilitása $\mu_r = 200$. Határozzuk meg a behatolási mélységet $f = 50$ Hz frekvencián.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{7}}} = \underline{\underline{1{,}453\ mm}}$$

Ebből az anyagból készült $5 \cdot 1{,}453 = 7{,}26$ mm vastag hasáb már végtelen kiterjedésűnek tekinthető!