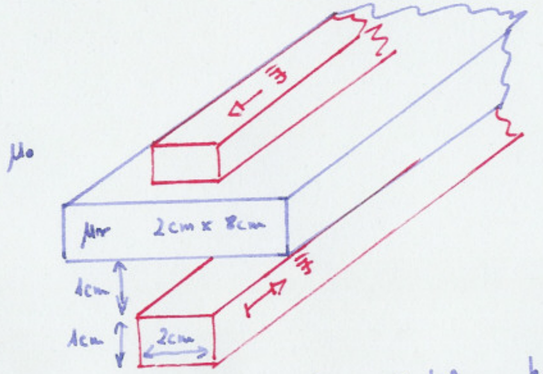
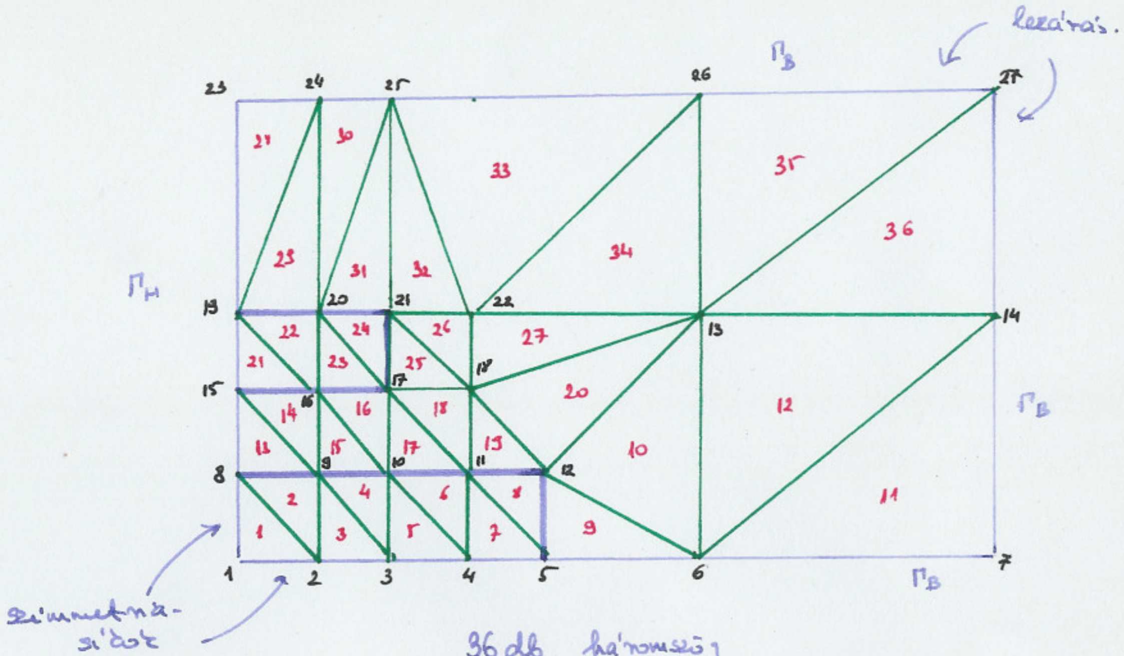
Kétdimenziós illusztratív példa



Két árammal átjárt, végtelen hosszúnak tekinthető sín között egy fémrúd található. Kérdés a kialakuló mágneses tér.



36 db háromszög
27 db csomópont

Connect: megadja, h. egy háromszög mely csomópontokat tartalmazza, sorszámozás lokálisan óramutató járásával ellentétes.

Nodes: megadja az egyes csomópontok koordinátáit

Dirichlet: a Dirichlet-perem feltétel csomópontjai

Neumann: a Neumann-perem feltétel csomópontjai

↑ Ezek megvalósítása k. fájlban.

A megoldandó PDE és peremfeltételek:

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} = \bar{J}$$

$$\bar{n} \times \bar{A} = \bar{\emptyset} \qquad \Gamma_B$$

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} \times \bar{n} = \bar{\emptyset} \qquad \Gamma_H$$

A feladat egy „stacionárius áramok mágneses tere" feladat, $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$ $\mathrm{div}\,\bar{B} = \emptyset$ $\bar{B} = \mu\bar{H}$ egyenletekből kiindulva a mágneses vektorpotenciállal levezethető (l. múlt előadás anyaga)

A súlyozott maradék előállítása:

$$\int_{\Omega} \bar{W} \cdot \mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}\,d\Omega + \int_{\Gamma_H} \bar{W} \cdot \left(\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A} \times \bar{n}\right) d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{W} \cdot \bar{J}\,d\Omega = \emptyset$$

$\bar{W}$ egy tetszőleges súlyfgv.

Sem a PDE-t, sem a peremfeltételeket nem tudjuk tökéletes pontossággal kielégíteni, de a fenti ún. súlyozott maradékot igen.

$\bar{n} \times \bar{W} = \emptyset$ a Γ_B peremen, ennek teljesülni kell.

A gyenge alak előállítása: (azonos átalakítások sora)

azonosság: $\operatorname{div}(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot \operatorname{rot} \bar{u} - \bar{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{v}$

$\downarrow$

$\bar{v} \cdot \operatorname{rot} \bar{u} = \bar{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{v} + \operatorname{div}(\bar{u} \times \bar{v})$

$\cancel{\bar{W} \cdot \frac{1}{\mu}}$

$$\underbrace{\bar{W}}_{\bar{v}} \cdot \operatorname{rot} \underbrace{\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A}}_{\bar{u}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{W} \cdot \operatorname{rot} \bar{A} + \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \times \bar{W}\right)$$

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{W} \cdot \operatorname{rot} \bar{A} \, d\Omega + \underbrace{\oint_\Gamma \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \times \bar{W}\right) \cdot \bar{n} \, d\Gamma}\; + \int_{\Gamma_H} \bar{W} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \times \bar{n}\right) d\Gamma - \int_\Omega \bar{W} \cdot \bar{J} \, d\Omega = 0$$

1.) $\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \times \bar{W}\right) \cdot \bar{n} = \left(\bar{n} \times \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A}\right) \cdot \bar{W} = -\bar{W} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \times \bar{n}\right)$ azaz a Γ_H peremen pont kiejti a felületi integrál.

2.) $\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \times \bar{W}\right) \cdot \bar{n} = (\bar{W} \times \bar{n}) \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} = 0$ a Γ_B peremen, mert $\bar{n} \times \bar{W} = \bar{0}$ feltétel.

Így a gyenge alak:

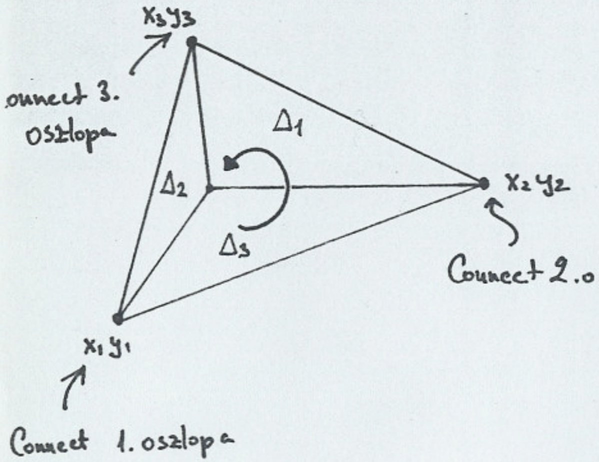
$$\int_\Omega \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{W} \cdot \operatorname{rot} \bar{A} \, d\Omega = \int_\Omega \bar{W} \cdot \bar{J} \, d\Omega$$

a stacionárius áramok által keltett mágneses tér ezen gyenge alak segítségével oldható meg.

Miért jó? a $\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A}$ kettős deriváltat tartalmaz, míg az $\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{W} \cdot \operatorname{rot} \bar{A}$ két egyszeres derivált szorzata, azaz a deriválás fokszáma csökkenthető.

A háromszög területe:

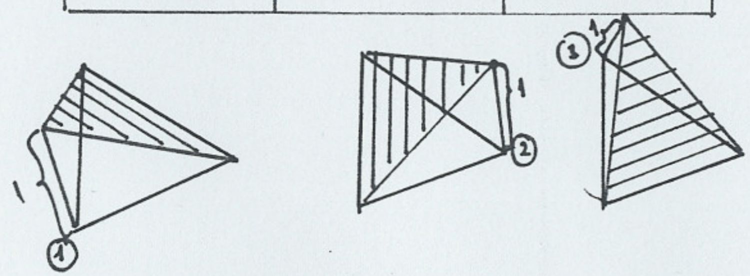
$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$



Itt N jelöli a súlyfüggvényt (a levezetésben W volt !)

Az N_1, N_2, N_3 függvények: $N_i = N_i(x,y)$ $i = 1,2,3.$

$N_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$	$N_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$	$N_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$



N_i az i. csomópontban 1, a másik kettőben Ø, s közben lineárisan alakul.

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\left[(x_2y_3 - x_3y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)\right] \longrightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}(y_2 - y_3)}{\Delta} \qquad \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(x_3 - x_2)}{\Delta}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\left[(xy_3 - yx_3) + x_1(y - y_3) + y_1(x_3 - x)\right] \longrightarrow \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}(y_3 - y_1)}{\Delta} \qquad \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(x_1 - x_3)}{\Delta}$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{2}\left[(x_2y - xy_2) + x_1(y_2 - y) + y_1(x - x_2)\right] \longrightarrow \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}(y_1 - y_2)}{\Delta} \qquad \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{\Delta}$$

Így ismerjük a háromszög felett értelmezett bázis függvények alakját és deriváltjait.

Részletek:

$$\mathrm{rot}\,\bar{A} = \begin{vmatrix} \grave{e}_x & \grave{e}_y & \grave{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \grave{e}_x \frac{\partial A}{\partial y} - \grave{e}_y \frac{\partial A}{\partial x}$$

$\bar{A}$-nak ($\bar{w}$-nek is) csak z irányú komponense van.

$$\mathrm{rot}\,\bar{w} \cdot \mathrm{rot}\,\bar{A} = \underline{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}}$$

$$A \cong \bar{A}_D + \sum_i \bar{w}_i A_i \; ; \quad \text{ahol: } A \cong \tilde{A} = A_D + \sum_i w_i A_i$$

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu} \mathrm{rot}\,\bar{w} \cdot \mathrm{rot}\,\bar{A} \, d\Omega = \int_\Omega \bar{w} \cdot \bar{J} \, d\Omega \longrightarrow \underline{\sum_i \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_e} \mathrm{rot}\,\bar{w}_j \cdot \mathrm{rot}\,\bar{w}_i \, d\Omega \, A_i = \int_{\Omega_e} \bar{w}_j \cdot \bar{J} \, d\Omega}$$

Ez az ún. elemegyenlet. Ezt kell a programban implementálni.

$$\int_{\Omega_e} \bar{w}_j \cdot \bar{J} \, d\Omega = J \int_{\Omega_e} w_j \, d\Omega = J \cdot \frac{\Delta}{3}$$

(További részletek l. programban.