Sztatikus elektromos tér (elektrosztatika):

Időben állandó (sztatikus) elektromos tér: nyugvó töltések által létrehozott sztatikus elektromos tér.

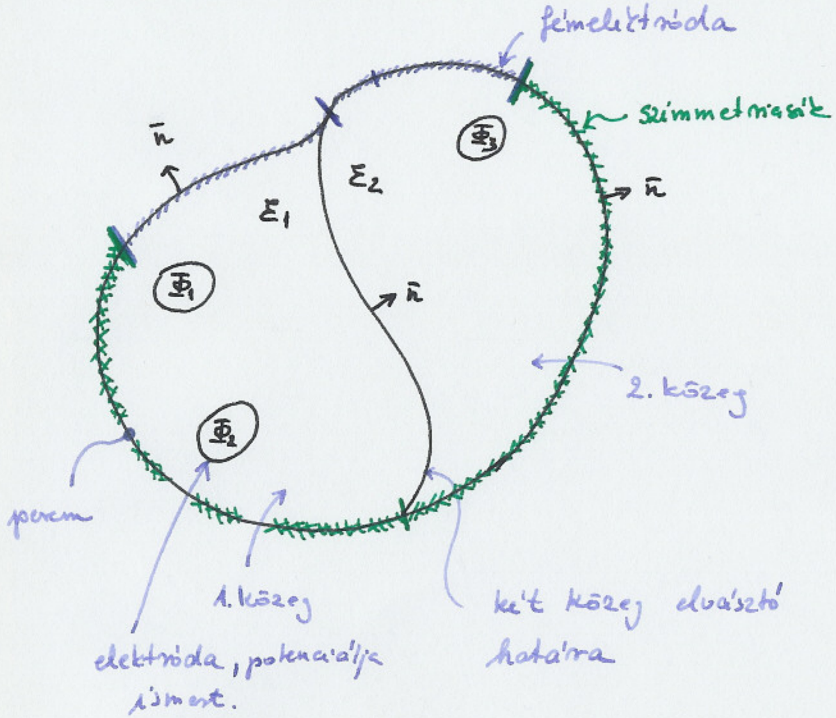
Itt a cél a problémakör matematikai alapjának meghatározása, amely alkalmazható a numerikus eljárások során. Az itt bemutatásra kerülő véges differenciák módszere és a végeselem-módszer széles körben alkalmazott technikák a mérnöki tervezésben, de sok más módszer létezik. Itt egyszerű példákat vizsgálunk.

Pár nagyon egyszerű, zárt alakra hozható feladat oldható csak meg papíron, ezeket is tárgyaljuk. Korábban láttuk, hogy lehet egyes térváltozókat és a kapacitást a Maxwell-egyenletek integrális alakjából kiindulva meghatározni; most a másik, a differenciális alak kerül előtérbe.

Ebben a témakörben tárgyaljuk a véges differenciák módszerét (rácsmódszer), mert az a legegyszerűbb. A módszer általánosítható! L. Fodor 128. o. és külön szkennelt anyag, továbbá pár egyszerű illusztratív példa.

A Maxwell-egyenletek differenciális alakjából indulunk ki:

Lineáris, izotróp és térrészenként homogén közeg esetén.



$$\left.\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\bar{E} &= 0 \\ \mathrm{div}\,\bar{D} &= \rho \\ \bar{D} &= \varepsilon \bar{E} \end{aligned}}\right\}$$ minden egyes térrészen (itt két térrész van)

- vezető felületen (fémeken): $\boxed{E_t = 0}$, azaz az elektromos tér mindig merőleges az elektródákra és egyéb fémek felületére
- két szigetelő határán: $\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$, azaz az elektromos tér tangenciális komponense folytonos, és $\boxed{D_{1n} = D_{2n}}$, az elektromos eltolás vektor normális komponense folytonos, ami így is írható: $\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}}$

A külső perem egyik részén lehet kapcsolódó elektróda, melynek potenciálja ismert, s rajta $E_t = 0$.

A külső perem másik, diszjunkt részén szimmetriasík lehet, ahol $D_n = 0$.

Nem minden esetben létezik mindkét peremrész!

Nem minden esetben létezik mindkét peremrész! Ennél bonyolultabb eset is lehetséges, de azzal itt nem foglalkozunk!

{Ismert az elrendezés geometriája és a peremfeltételek valamint a közegek anyagi jellemzői. Kérdés a kialakuló elektromos tér.}

Ez egy alap elektrosztatika feladat.

Bármely $\bar{E} = \bar{E}(\bar{r})$ vektor, amelynek rotációja zérus, felírható egy $\varphi = \varphi(\bar{r})$ skalárpotenciál negatív gradienseként:

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = \emptyset \quad \longmapsto \quad \boxed{\bar{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi}\,, \qquad \text{mert} \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi \equiv \emptyset$$

a negatív előjel azt jelzi, hogy a térerősség a legkisebb potenciálú pont felé mutat (a gradiens ugyanis pont ellenkezőleg, a legnagyobb potenciál felé).

Ha $\bar{E}$ ismert, az U feszültség számítható:

$$\underline{U} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{E}(\bar{r}) \cdot d\bar{\ell} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} [-\,\mathrm{grad}\,\varphi] \cdot d\bar{\ell} = [-\varphi]_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} = \underline{\varphi(\bar{r}_1) - \varphi(\bar{r}_2)}\,,$$

azaz a feszültség potenciálkülönbség!

gradiens definíciója (l. 3. anyag)

Helyettesítsük az $\bar{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$ egyenletet a $\mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho$ egyenletbe, s közben használjuk a $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ relációt:

$$\mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho$$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\bar{E} = \varrho$$

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\,(-\,\mathrm{grad}\,\varphi) = \varrho$$

Ez az elektrosztatika alapegyenlete általános esetben.

$$\boxed{-\,\mathrm{div}\,\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\varphi = \varrho}$$

Speciális eset, amikor ε konstans:

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Ez az ún. Laplace-Poisson-egyenlet.

Itt Δ a Laplace-operátor, jelentése:

$$\boxed{\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}$$

Descartes-koordinátarendszerben.

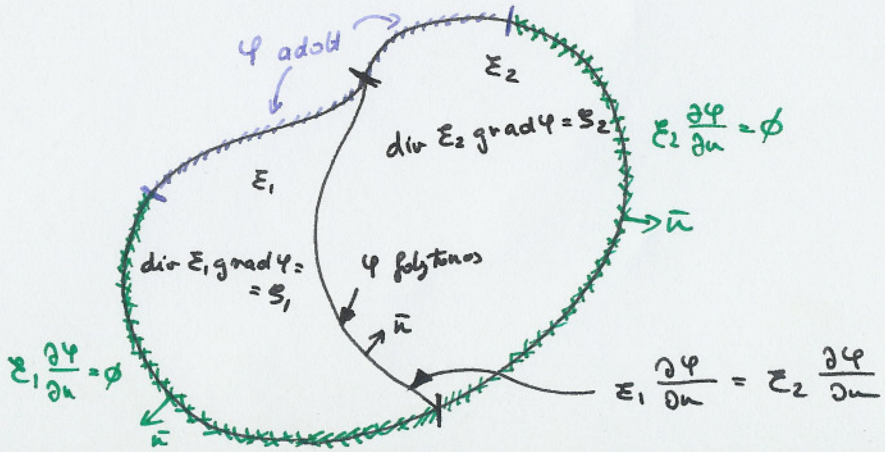
Speciálisan, ha $\rho = 0$, azaz a töltéssűrűség zérus: $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ a Laplace-egyenlet.

A φ potenciál értéke az elektródákon előírt.

A $\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ -ből kiindulva a $D_n = -\varepsilon \operatorname{grad}\varphi = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ írható.

Ha φ folytonos két közeg határán, akkor az elektromos tér tangenciálisa folytonos.

Összefoglalva:



Az elválasztó határon 2 feltétel van!

Ahol φ adott, Dirichlet-feltételről, ahol $\partial\varphi/\partial n$, Neumann-feltételről beszélünk.

Ha a $-\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = \rho$ egyenletet megoldjuk, akkor

$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, azaz az elektromos tér számítható,

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$, azaz az elektromos eltolás is számítható.

Vagyis két vektormennyiség meghatározását visszavezettük egyetlen skalármennyiség meghatározására, ami egyetlen ismeretlen, míg $\bar{E}$ és $\bar{D}$ hat ismeretlennel írható le (E_x, E_y, E_z, D_x, D_y, D_z, ami $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ miatt valójában három ismeretlen).

Ez a potenciál formulák egy nagy előnye.

Stacionárius áramlás:

Az időben állandó áram által létrehozott stacionárius elektromos tér.

$\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$

$\mathrm{div}\,\bar{J} = 0$

$\bar{J} = \sigma \bar{E}$

Közeghatár feltételei:

$E_{1t} = E_{2t}$ és $J_{1n} = J_{2n}$, azaz $\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$

Ideális vezető felület:

$E_t = 0$

Ideális szigetelő felület:

$E_n = 0$

A feladat az előző hőz nagyon hasonló, csak betűcsere van:

$\bar{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$; $\bar{J} = -\,\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi$; $\boxed{-\,\mathrm{div}\,\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0}$.

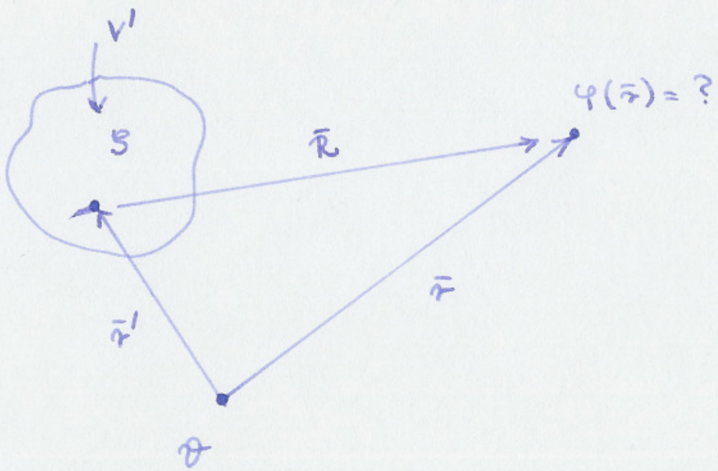
Ha σ konstans, akkor a $\Delta\varphi = 0$ Laplace-egyenlet érvényes.

A Laplace-Poisson-egyenlet általános megoldása:

A $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ egyenlet általános megoldása:

$$\boxed{\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\bar{r}')}{R}\, dV'}$$

$R = |\bar{r} - \bar{r}'|$ $\quad (\bar{r}' + \bar{R} = \bar{r} \rightarrow \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}')$



- A töltések a V' térfogatban vannak
- Keressük a φ potenciált az $\bar{r}$ helyen.
- Az r' helyen lévő töltés $dQ' = \rho(\bar{r}')\, dV'$, aminek potenciálja $d\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho(\bar{r}')\, dV'}{R}$,
- a fenti integrál ezt összegzi.

Példák:

① Síkkondenzátor fegyverzetei között ismert a ρ töltéssűrűség, a dielektrikum permittivitása ε. Az egyik fegyverzet földelt, a másik U feszültségre van kapcsolva. Határozzuk meg a potenciál eloszlását a fegyverzetek között! A fegyverzetek távolsága d.

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$ Laplace-Poisson-egyenletből indulhatunk, a feladat 1D-s:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad / \int$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\varepsilon}x + A \quad / \int$$

$$\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}x^2 + Ax + B$$ a megoldás tehát másodfokú függvény szerint alakul.

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 = B & \leftarrow \text{az egyik elektróda földpotenciálon van} \\ \varphi(d) = U = -\frac{\rho}{2\varepsilon}d^2 + Ad + B & \leftarrow \text{a másik elektróda potenciálja } U \end{cases}$$

$$U = -\frac{\rho}{2\varepsilon}d^2 + Ad$$

$$U + \frac{\rho}{2\varepsilon}d^2 = Ad$$

$$A = \frac{U}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon}d$$

A potenciáleloszlás tehát:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}x^2 + \left(\frac{U}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon}d\right)x$$

② Határozzuk meg az előző feladatban szereplő kondenzátorban az elektromos eltolást!

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_x = \underline{\underline{\left[+\frac{\rho}{\varepsilon}x - \left(\frac{U}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon}d\right)\right]}}\bar{e}_x$$

← - előjelre figyelni kell.

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E} = \underline{\underline{\left[\rho x - \left(\frac{U\varepsilon}{d} + \frac{\rho}{2}d\right)\right]}}\bar{e}_x$$

③ Oldjuk meg az 1-2 feladatokat, ha a dielektrikumban nincs töltéssűrűség!

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \emptyset$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A$$

$$\underline{\underline{\varphi = Ax + B}}$$

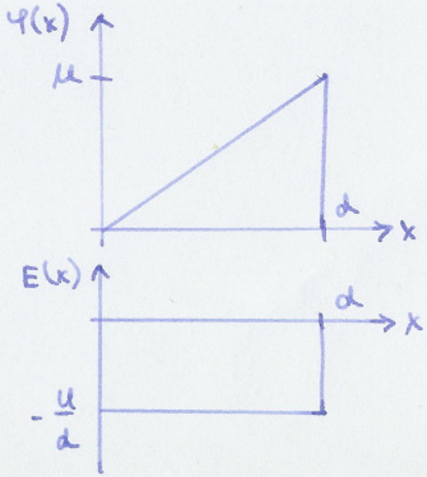
$$\varphi(0) = 0 = B$$

$$\varphi(d) = U = Ad \rightarrow \underline{A = \frac{U}{d}}$$

$$\underline{\underline{\varphi(x) = \frac{U}{d}x}}$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_x = \underline{\underline{-\frac{U}{d}\bar{e}_x}}$$

$$\underline{\underline{\bar{D} = -\varepsilon\frac{U}{d}\bar{e}_x}}$$



Lineáris függvény.

④ Igazoljuk, hogy a $\varphi(x,y) = U e^{-kx} \cos ky$ potenciálfüggvény kielégíti a Laplace-egyenletet!

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$; ennek kell teljesülni.

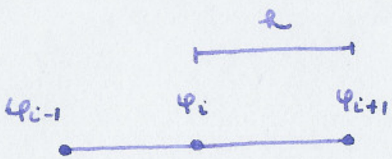
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -kU e^{-kx} \cos ky \longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = k^2 U e^{-kx} \cos ky$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -kU e^{-kx} \sin ky \longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -k^2 U e^{-kx} \cos ky$$

a kettő összege valóban zérus.

⑤ Írjuk fel az 1D-s Laplace-Poisson-egyenletre vonatkozó rácsmódszer egyenletét, ha a közeg homogén és lineáris!

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$



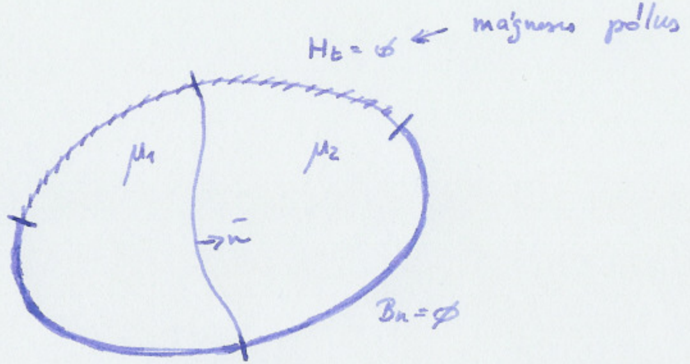
$$\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} = -\frac{\rho_i}{\varepsilon_i}$$

Stacionárius mágneses tér:

Az időben állandó áram által létrehozott mágneses tér.

Alapegyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{J} \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0 \\ \bar{B} &= \mu \bar{H} \end{aligned}}$$



Az elválasztó határon:

$\boxed{H_{1t} = H_{2t}}$ és $\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$ azaz $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$

A perem egy részén: $\boxed{H_t = 0}$,

egy másik diszjunkt részén $\boxed{B_n = 0}$

Utóbbiak szimmetriasíkok!

Ha $\text{rot}\,\bar{H} \neq \emptyset$, úgy skalárpotenciált nem alkalmazhatunk. A mágneses indukció viszont forrásmentes; s minden forrásmentes vektortér előállítható egy másik vektortér rotációjaként:

$$\text{div}\,\bar{B} = \emptyset \quad \mapsto \quad \boxed{\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}}, \quad \text{mivel} \quad \text{div rot}\,\bar{A} \equiv \emptyset.$$

Itt $\bar{A} = \bar{A}(\bar{r})$ az ún. mágneses vektorpotenciál.

Egy vektortér rotációja mellett meg kell adnunk annak divergenciáját is!
Itt $\boxed{\text{div}\,\bar{A} = \emptyset}$ választással élünk, s ezt Coulomb-mértéknek hívjuk.
A divergencia megválasztása szabadon megtehető, ez a mértékválasztás.

Helyettesítsük ezt a $\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$ egyenletbe, s közben használjuk a $\bar{B} = \mu\bar{H}$-t is:

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$$

$$\text{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\bar{B} = \bar{J}$$

$$\boxed{\text{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\,\bar{A} = \bar{J}}$$

a stacionáriis mágneses tér alapegyenlete általános esetben.

Speciális esetben μ konstans, ekkor:

$$\text{rot rot } \bar{A} = \mu \bar{J}$$

$\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \Delta \bar{A}$ azonosság szerint:

$$\text{grad } \underbrace{\text{div } \bar{A}}_{\emptyset} - \Delta \bar{A} = \mu \bar{J} \Rightarrow \boxed{\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J}}$$

a vektoriális Laplace-Poisson-egyenlet.

Ez a következőt jelenti:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z$$

azaz az A_x, A_y és A_z komponensekre külön-külön egyenlet vonatkozik, melyek függetlenek.

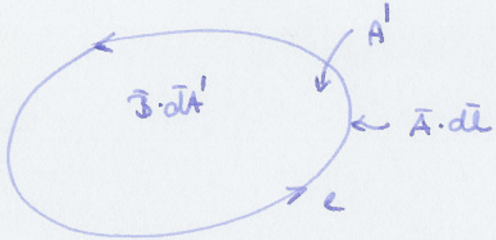
A vektorpotenciál a határoló tartományoknál folytonos.

Végeredményben a mágneses térerősség és a mágneses indukció számítását visszavezettük egyetlen vektor függvény meghatározására.

A fluxus meghatározása egyszerűsödik:

$$\Phi = \int_{A'} \bar{B}\cdot d\bar{A}' = \int_{A'} \mathrm{rot}\,\bar{A}\cdot d\bar{A}' = \oint_{l} \bar{A}\cdot d\bar{l}$$

Stokes-tétel



Tehát a $\bar{B}$ felületi integrálja helyett $\bar{A}$ vonalmenti integrálja meghatározható.

$$\boxed{\Phi = \oint_{l} \bar{A}\cdot d\bar{l}}$$

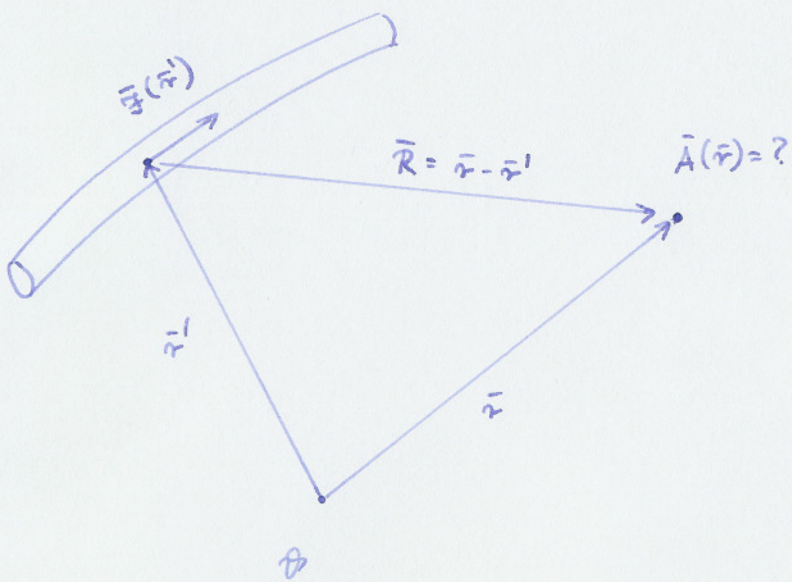
A vektoriális Laplace-Poisson-egyenlet megoldása:

A $\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J}$ megoldása.

A $\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho$ megoldása: $\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\bar{r}')}{R} dV'$, ennek analógiájára:

a $\Delta A_x = -\mu J_x$ megoldása: $A_x(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x(\bar{r}')}{R} dV'$.

Általánosan: $\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\bar{J}(\bar{r})}{R} dV'}$ $\quad R = |\bar{r} - \bar{r}'|$



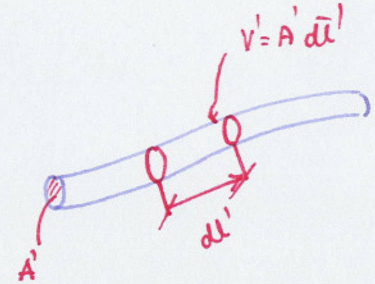
Vonalszerű vezető esetén a megoldás formulája:

A vonalszerű vezető gyakorlati szempontból is fontos.

Az integrandusz átalakítható:

$$\bar{J}\,dV' = \overbrace{\bar{J}\,A'}^{I}\,d\bar{l}' = I\,d\bar{l}'$$

$$A'\,d\bar{l}' = dV'$$



$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{I\,d\bar{l}'}{R}$$

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\, I \oint_l \frac{d\bar{l}'}{R}}$$

Az áram konstans a vezető mentén, ezért kiemelhető.

$\oint$ lesz, mivel az $\int_{V'}$-t a vezeték teljes térfogatára kell integrálni!

Ez az integrál kevés esetben számítható zárt alakban. Pár példát megvizsgálunk.

Általában numerikusan számítható.

A fenti formula átalakítható. Így kapjuk a Biot-Savart-törvényt.

Biot - Savart - törvény:

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} I \oint_l \frac{d\bar{l}'}{R}$$

$\bar{H} = \frac{1}{\mu}\bar{B} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}$, azaz a fent formula rotációját kell képezni:

$$\bar{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_l \mathrm{rot}\,\frac{d\bar{l}'}{R} = \frac{I}{4\pi}\oint_l \mathrm{rot}\Big(\underbrace{\frac{1}{R}}_{\varphi}\,\underbrace{d\bar{l}'}_{\bar{v}}\Big)$$

azonosság: $\mathrm{rot}(\varphi\bar{v}) = \mathrm{grad}\,\varphi \times \bar{v} + \varphi\,\mathrm{rot}\,\bar{v}$

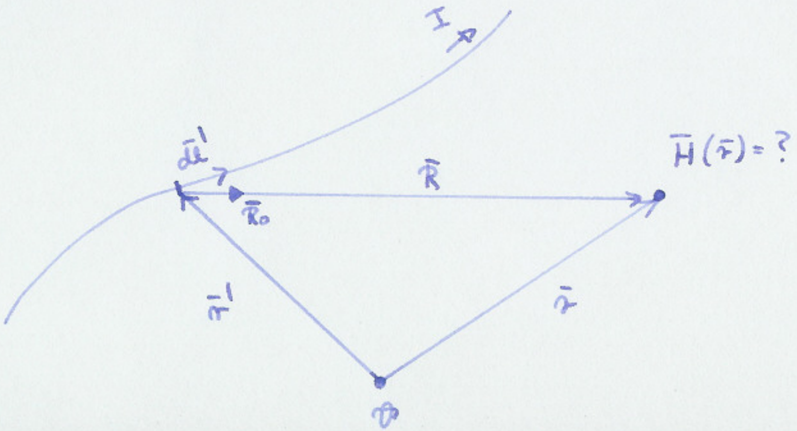
$\mathrm{rot}\,\bar{v} = \emptyset$, mert $\mathrm{rot}\,d\bar{l}' = \emptyset$,

$\mathrm{rot}\,\varphi\bar{v} = \mathrm{grad}\,\varphi \times \bar{v}$

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{R}\,d\bar{l}' = \mathrm{grad}\,\frac{1}{R} \times d\bar{l}' = -\frac{\bar{R}_0}{R^2} \times d\bar{l}' = \frac{d\bar{l}' \times \bar{R}_0}{R^2}$$

$$\boxed{\bar{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_l \frac{d\bar{l}\times\bar{R}_0}{R^2}}$$

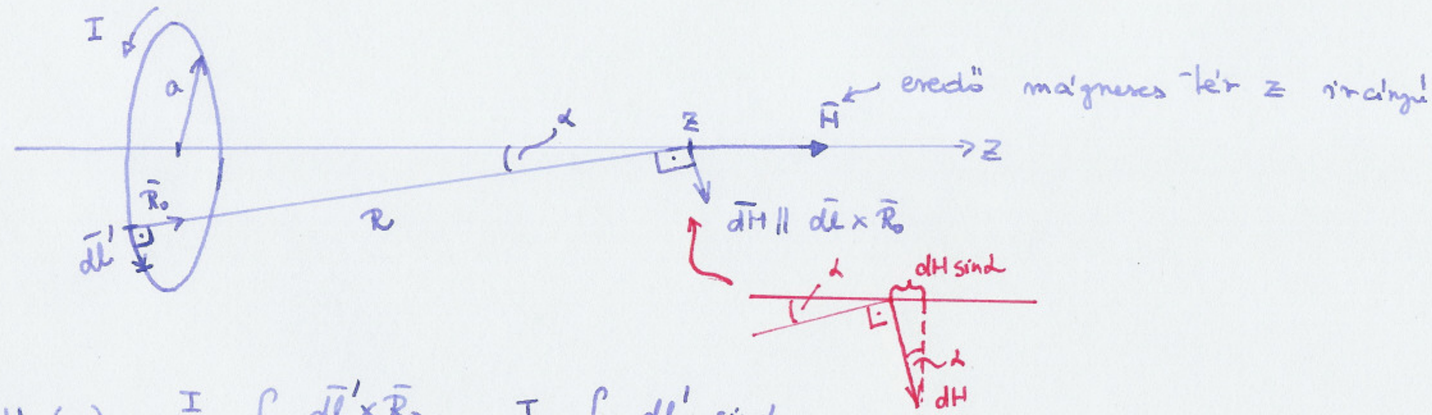
A mágneses térerősség tehát közvetlenül számítható. Ez az összefüggés a Biot - Savart - törvény.



Adott pontban a mágneses térerősség tehát kis elemi $d\bar{l}'$ szakaszok áramainak összege, szuperpozíciója.

Példák:

1. Határozzuk meg a köráram mágneses terét a Biot-Savart-törvény alapján a köráram síkjára merőlegesen, a tengely mentén!



$$H_z(z) = \frac{I}{4\pi} \oint_l \frac{\bar{dl}' \times \bar{R}_0}{R^2} = \frac{I}{4\pi} \oint_l \frac{dl' \sin\alpha}{R^2} =$$

$$= \frac{I \sin\alpha}{4\pi R^2} \oint_l dl' = \frac{I \overbrace{\sin\alpha}^{a/R}}{4\pi R^2} 2a\pi = \frac{I a^2 \pi}{2\pi R^3} = \frac{a^2}{2R^3} I$$

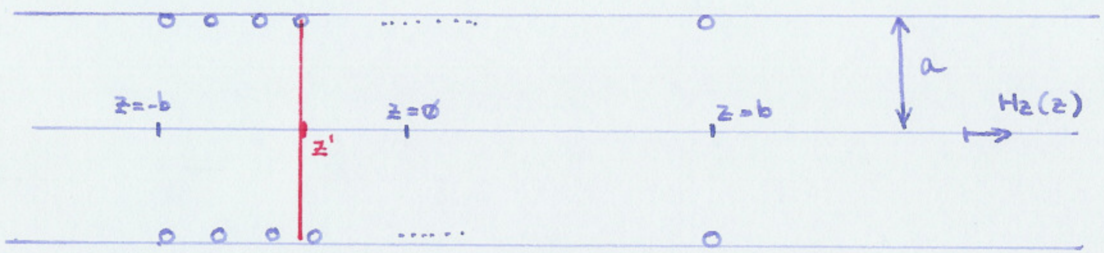
$$H_z(z) = \frac{a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} I \qquad R = \sqrt{a^2+z^2}.$$

Általában a levezetés nehézkesebb, tehát tetszőleges pontban. Ezzel itt nem foglalkozunk.

② Határozzuk meg az N menetű sűrűn tekercselt szolenoid mágneses terét a tengely mentén!

Ez N db egymenetű köráram szuperpozíciójaként is felfogható.

Egy köráram itt $\frac{NI}{2b}\,dz'$ árammal egyenértékű (átlag.)



$l = 2b$

Egyetlen menet mágneses tere ① alapján: $dH_z(z) = \frac{a^2}{2\,(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot\frac{NI}{2b}\,dz'$

Minden hurok el van tolva z' helyre: $dH_z(z) = \frac{a^2}{2\,(a^2+[z-z']^2)^{3/2}}\,\frac{NI}{2b}\,dz'$

Ezeket kell összegezni $-b \ldots b$ között:

$$H_z(z) = \int_{-b}^{b} \frac{a^2}{2}\,\frac{1}{(a^2+[z-z']^2)^{3/2}}\,\frac{NI}{2b}\,dz' = \frac{a^2 NI}{4b}\left[\frac{z'-z}{a^2\sqrt{(z'-z)^2+a^2}}\right]_{-b}^{b} =$$

$$= \frac{NI}{4b}\left[\frac{b-z}{\sqrt{(b-z)^2+a^2}} + \frac{b+z}{\sqrt{(b+z)^2+a^2}}\right]$$

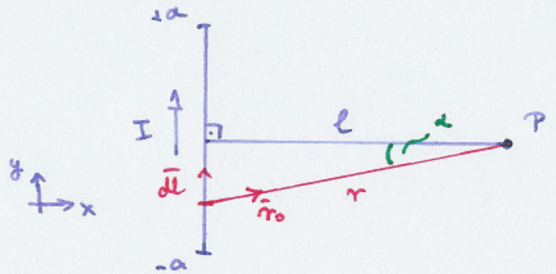
$$H_z(0) = \frac{NI}{4b}\,\frac{2b}{\sqrt{b^2+a^2}} \approx \frac{NI}{l}$$

jó közelítés, ha a tekercs hosszú, és a kicsi

$$H_z(b) = \frac{NI}{4b}\,\frac{2b}{\sqrt{4b^2+a^2}} \approx \frac{NI}{2l}$$

A szélén tehát kb a fele a $z=\emptyset$ helyhez képest!

③ Határozzuk meg a $2a$ hosszúságú áramelem mágneses terét a P pontban!



A mágneses térerősség a lap síkjára merőlegesen befelé hat!

A hozzávezetéseket elhanyagoljuk, oka: l. köv. feladatok!

$$\bar{H} = \frac{I}{4\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\bar{dl}'\times\bar{r}_0}{r^2} \overset{(*)}{=} \frac{I\ell}{4\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{dl}{r^3} = \frac{I\ell}{4\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{dy}{(\ell^2+y^2)^{3/2}} \overset{(1)}{=} \frac{I\ell}{4\pi}\left[\frac{y}{\ell^2\sqrt{\ell^2+y^2}}\right]_{-a}^{+a} =$$

$$= \frac{I\ell}{4\pi}\left[\frac{a}{\ell^2\sqrt{\ell^2+a^2}} - \frac{-a}{\ell^2\sqrt{\ell^2+a^2}}\right] = \frac{I\ell}{4\pi}\,\frac{2a}{\ell^2\sqrt{\ell^2+y^2}} = \underline{\underline{\frac{I}{4\pi}\,\frac{2a}{\ell r}}}$$

ezt fogjuk használni, mint elemi áramdarabok mágneses terét,

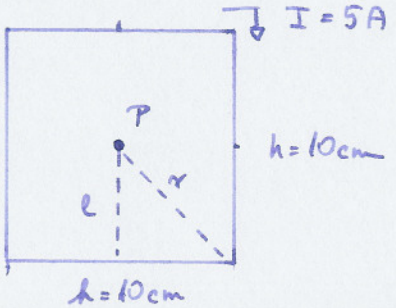
(1) $$\int\frac{dy}{(\ell^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y}{\ell^2\sqrt{\ell^2+y^2}}$$

(*) $$\bar{dl}\times\bar{r}_0 = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & dl & 0 \\ r_{0x} & r_{0y} & 0 \end{vmatrix} = -\bar{e}_z\, dl\, r_{0x} \;\rightarrow\; dl\cdot r_{0x} = dl\, r_0 \cos\alpha = dl\, r_0\,\frac{\ell}{r}$$

$r_0 = 1$

befelé mutat a $\bar{H}$, a negatív előjel ennyit jelent! elhagyjuk!

④ Határozzuk meg a következő áramhurok közepén a mágneses teret!



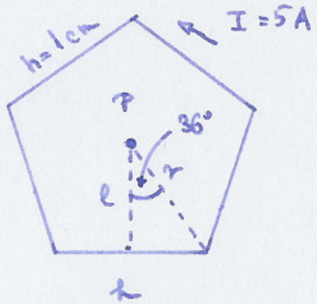
$\vec{H}$ iránya befelé mutat.

4db elemi vonal által szuperponált teret kell számolni.

$$H_1 = \frac{I}{4\pi}\,\frac{h}{l r} = \frac{5}{4\pi}\,\frac{0{,}1}{0{,}05 \cdot \sqrt{2} \cdot 0{,}05} = \underline{11{,}25\,\frac{A}{m}} \mapsto H(P) = 4H_1 = \underline{\underline{45\,\frac{A}{m}}}$$

befelé mutat.

⑤ Ötszög alakú áramkeret közepén a mágneses tér.



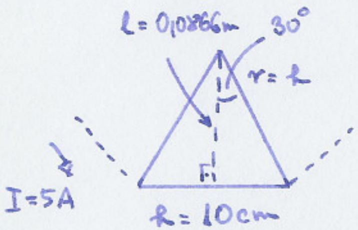
$$H_1 = \frac{I}{4\pi}\,\frac{h}{l r} = \frac{5}{4\pi} \cdot \frac{0{,}01}{0{,}0069 \cdot 0{,}0085} = \underline{67{,}84\ A/m} \rightarrow H(P) = 5H_1 = \underline{\underline{339{,}2\,\frac{A}{m}}}$$

Kifelé mutat.

$$l = r \cdot \cos 36^\circ = 0{,}0069\ m$$

$$r = \frac{h/2}{\sin 36^\circ} = 0{,}0085\ m$$

⑥ Hatszög alakú áramkeret közepén a mágn. tér.



$$H_1 = \frac{I}{4\pi}\,\frac{h}{l r} = \frac{5}{4\pi}\,\frac{0{,}1}{0{,}0866 \cdot 0{,}1} = \underline{4{,}59\,\frac{A}{m}} \mapsto H(P) = 6H_1 = \underline{\underline{27{,}56\ A/m}}$$

A mágneses térerősség kifelé mutat.

(7.) Határozzuk meg a következő elektromos skalárpotenciállal leírt elektrosztatikus tér elektromos térerősségét!

$\varphi(x,y) = 3(x^2 - 2y^3)$

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_y = \underline{\underline{-6x\,\bar{e}_x + 18y^2\,\bar{e}_y}}$$

(8.) Határozzuk meg az alábbi mágneses vektorpotenciálhoz tartozó mágneses indukciót!

$A_x = 0 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{x}{a}$

$$\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \bar{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \underset{=0}{\frac{\partial A_y}{\partial z}}\right) + \bar{e}_y\left(\underset{=0}{\frac{\partial A_x}{\partial z}} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \bar{e}_z\underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{=0}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \emptyset \qquad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu I}{2\pi}\,\frac{a}{x}\cdot\frac{1}{a} = \frac{\mu I}{2\pi}\,\frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{\bar{B} = \emptyset\,\bar{e}_x - \frac{\mu I}{2\pi x}\,\bar{e}_y + \emptyset\,\bar{e}_z}}$$