



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Fodor György

ELEKTROMÁGNESES TEREK



Műegyetemi Kiadó, 2005.

Lektor:

Dr. Veszely Gyula
egyetemi tanár

Szerző:

Dr. Fodor György

(Tizedik utánnnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: 55019

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar

megrendelése alapján kiadja a

Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu

Felclős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 19,12 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 014/04

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	9
1. ALAPTÖRVÉNYEK	12
1.1. A gerjesztő mennyiségek	13
1.1-1. Az elektromos töltés	13
1.1-2. Az elektromos áram	16
1.1-3. A töltés és az áram kapcsolata	17
1.2. A térintenzitások	20
1.2-1. Az elektromos térerősség és a mágneses indukció	20
1.2-2. Az elektromos feszültség és a mágneses fluxus	21
1.2-2.1. Definíciók	21
1.2-2.2. A feszültség energetikai tartalma	22
1.2-2.3. A fluxus energetikai tartalma	23
1.2-3. A térintenzitások kapcsolata	24
1.2-4. Az erőter szemléltetése	26
1.3. A gerjesztettség mennyiségek	27
1.3-1. A tapasztalati törvények	27
1.3-2. Az elektromos eltolás és a mágneses térerősség	28
1.3-3. A totális áramsűrűség	29
1.4. A közegek hatása	30
1.4-1. Általános összefüggések	30
1.4-2. Permittivitás és permeabilitás	31
1.4-3. Polarizáció és mágnesezettség	31
1.4-4. Konduktivitás	32
1.4-5. Komplex anyagjellemzők	34
1.5. Energia és teljesítmény	36
1.5-1. Az energiamérleg	36
1.5-2. Energiasűrűség, munkasűrűség	38
1.5-3. Teljesítménysűrűség	40
1.5-4. A Poynting vektor	40
1.5-5. Az energiamérleg komplex alakja	41

1.6. Az alaptörvények összefoglalása	43
1.6-1. A Maxwell egyenletek	43
1.6-2. A határfeltételek	44
1.6-3. A töréstörvények	47
1.6-4. Az elektrodinamika felosztása	49
1.6-5. A hálózategyenletek	51
1.7. Néhány egyszerű feladat megoldása	53
1.7-1. Elektrosztatika és stacionárius áramlás	53
1.7-1.1. A módszer elve és alkalmazása gömbszimmetrikus esetben	53
1.7-1.2. Síkelektrodák közötti erőter	57
1.7-1.3. Koaxiális hengeres elektrodák közötti erőter	60
1.7-1.4. Párhuzamos hengeres elektrodák közötti erőter	61
1.7-1.5. Részkapacitások és részkonduktivitások	64
1.7-1.6. Tükrözés sík felületen	66
1.7-2. Stacionárius és sztatikus mágneses tér	70
1.7-2.1. A módszer elve	70
1.7-2.2. Koaxiális kábel mágneses tere	71
1.7-2.3. Kettősvezeték mágneses tere	72
1.7-2.4. Toroidok és szolenoidok	74
1.7-2.5. Lineáris mágneses körök	77
1.7-2.6. Nemlineáris mágneses körök	81
1.7-2.7. Permanens mágnesek	84
1.7-3. Elektromágneses tér	86
1.7-3.1. Nyugalmi indukálás	86
1.7-3.2. Mozgási indukálás	88
1.7-3.3. Az eltolási áram	90
1.7-3.4. Stacionárius teljesítményáramlás	92
1.8. Energia és erő	94
1.8-1. Elektromos energia	94
1.8-2. Mágneses energia	95
1.8-3. Elektromos erőhatás	97
1.8-4. Mágneses erőhatás	99
1.8-5. Határfelületre ható erő	103
1.8-6. Erősűrűség	105

1.9. Feladatok	106
1.9-2. Sztatikus és stacionárius elektromos tér	106
1.9-3. Stacionárius mágneses tér	110
1.9-4. Elektromágneses tér	114
1.9-5. Energia és erő	115
2. SZTATIKUS ÉS STACIONÁRIUS TEREK	119
2.1. Sztatikus és stacionárius elektromos tér	119
2.1-1. Alapegyenletek	119
2.1-2. A Poisson egyenlet általános megoldása	122
2.1-3. Az általános megoldás alkalmazása	123
2.1-3.1. Visszavezetés egyszerű feladatokra	124
2.1-3.2. Az integrálegyenlet megfogalmazás alapgondolata	125
2.1-4. A Laplace egyenlet grafikus megoldása	126
2.1-5. A Laplace egyenlet megoldása rácsmódszerrel	128
2.1-5.1. A rácsmódszer elve	128
2.1-5.2. A rácsponti potenciálok számítása	129
2.1-5.3. Az eredmény felhasználása	131
2.1-5.4. A Monte Carlo módszer	132
2.1-6. A Laplace egyenlet variációs feladata	134
2.1-6.1. A variációs feladat	134
2.1-6.2. A variációs feladat egy illusztrációja	136
2.1-6.3. A variációs feladat homogén közeg esetére	138
2.1-6.4. Függvénysor előállítása	139
2.1-7. Elektrosztatikus energia	141
2.2. Stacionárius mágneses tér	143
2.2-1. Alapegyenletek	143
2.2-1.1. A mágneses vektorpotenciál	143
2.2-1.2. A mágneses skalárpotenciál	144
2.2-2. Az általános megoldás és alkalmazása	146
2.2-2.1. Az általános megoldás	146
2.2-2.2. Vonalszerű vezető	147
2.2-2.3. Alkalmazások	148

2.2-3. Induktivitások számítása	150
2.2-3.1. A Neumann képlet	150
2.2-3.2. Alkalmazások	152
2.2-4. Mágneses energia	156
2.2-5. Változó áram mágneses tere	157
2.3. Feladatok	159
2.3-1. Sztatikus és stacionárius elektromos tér	159
2.3-2. Stacionárius mágneses tér	160
3. TÁVVEZETÉKEK	163
3.1. Alapegyenletek	163
3.1-1. Elosztott paraméterű hálózatok	163
3.1-2. A táviró egyenletek	165
3.2. Szinuszos állapot vizsgálata	166
3.2-1. A Helmholtz egyenlet	166
3.2-2. Az általános megoldás	167
3.2-3. A megoldás értelmezése	168
3.2-4. A vezetékparaméterek	171
3.2-4.1. Ideális vezeték	171
3.2-4.2. Kisveszteségű vezeték	172
3.2-5. A reflexiós tényező	174
3.2-6. Feszültség- és áramelosztás ideális vezetéken	177
3.2-6.1. Lezárás hullámellenállással	177
3.2-6.2. Lezárás reaktanciával	177
3.2-6.3. Lezárás általános impedanciával	181
3.2-7. A távvezeték néhány alkalmazása	182
3.2-7.1. A távvezeték mint kétkapu	182
3.2-7.2. Összetett vezetékek	185
3.2-7.3. Az ideális vezetékszakasz mint reaktancia	186
3.2-7.4. Az ideális vezetékszakasz mint rezgőkör	188
3.2-7.5. A veszteséges vezetékszakasz mint rezgőkör	189

3.3. Átmeneti folyamatok vizsgálata	192
3.3-1. A frekvenciafüggetlen eset	192
3.3-1.1. Általános összefüggések	192
3.3-1.2. Illusztratív példa	194
3.3-1.3. A menetdiagram	196
3.3-1.4. Összetett vezetékek	198
3.3-2. Ideális távvezeték általános lezárásokkal	202
3.3-3. Az általános eset	206
3.3-3.1. A transzformált vezeték egyenletek	206
3.3-3.2. Kisveszteségű vezeték vizsgálata	209
3.3-3.3. Nem bekapcsolási folyamat	210
3.4. Feladatok	212
3.4-1. Szinuszos állapot távvezetéken	212
3.4-2. Átmeneti folyamat távvezetéken	215
4. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK	219
4.1. A tér meghatározása a gerjesztésekből	228
4.1-1. Az alapegyenletek	220
4.1-2. A retardált potenciálok	223
4.1-3. Az általánosított Biot - Savart törvény	224
4.1-4. A Hertz dipólus elektromágneses tere	226
4.1-4.1. A Hertz dipólus	226
4.1-4.2. A teljes erőtér	228
4.1-4.3. A távoli erőtér	230
4.2. Síkhullámok	234
4.2-1. Alapegyenletek	234
4.2-1.1. Általános összefüggések	234
4.2-1.2. Tetszőleges időbeli változás	235
4.2-1.3. Szinuszos időbeli változás	236
4.2-2. Lineárisan polarizált síkhullám	237
4.2-2.1. Általános összefüggések	237
4.2-2.2. A távvezeték analógia	238

4.2-3. Síkhullám szigetelőben	240
4.2-3.1. Polarizált síkhullám ideális szigetelőben	240
4.2-3.2. A Maxwell reláció	241
4.2-3.3. Síkhullám veszteséges szigetelőben	242
4.2-3.4. A TE és a TM típusú síkhullám	242
4.2-3.5. Síkhullámok visszaverődése és törése	245
4.2-4. Síkhullám vezetőben	250
4.2-4.1. Általános összfüggések	250
4.2-4.2. Síkhullám vastag hasámban	252
4.2-4.3. Síkhullám vékony hasámban	255
4.2-4.4. Körkeresztmetszetű vezető közelítése	257
4.2-4.5. Örvényáramok vékony lemezben	258
4.3. Vezetett hullámok	262
4.3-1. Csőtápvonalak	262
4.3-1.1. Alapegyenletek	262
4.3-1.2. TM módusok	264
4.3-1.3. TE módusok	268
4.3-1.4. A teljesítményáramlás	269
4.3-1.5. A csillapítatlan módusok	270
4.3-1.6. Erővonalkép	275
4.3-1.7. Üregrezonátorok	277
4.3-2. Szigetelő réteg hullámvezető	278
4.3-2.1. A feladat megfogalmazása	278
4.3-2.2. Az alapegyenletek	280
4.3-2.3. Az egymódusú terjedés feltételei	282
4.3-2.4. Az erőtér eloszlása a magban	283
4.4. Feladatok	284
4.4-1. A Hertz dipólus	284
4.4-2. Síkhullámok	286
4.4-3. Vezetett hullámok	292
IRODALOMJEGYZÉK	295
TÁRGYMUTATÓ	297

BEVEZETÉS

Az "Elektromágneses terek" tantárgy célja az elektromágneses teret leíró mennyiségek értelmezése, a rájuk vonatkozó törvények különféle matematikai alakjának megfogalmazása, az egyenletek megoldása egyszerű esetekben annak érdekében, hogy bizonyos elektromágneses jelenségeket leírassunk. Nem célja a tantárgynak akár a klasszikus, akár a számítógép felhasználását igénylő általános számítási módszerek bemutatása, erre választható tárgyak keretében van lehetőség. Ugyancsak nem célja a tárgynak azoknak az eljárásoknak a tárgyalása, amelyekkel a műszaki feladat úgy modellezhető, hogy az az elektromágneses térszámítás módszereivel leírható és megoldható legyen, sem a modellezés során elkövetett hibák becslése.

A jegyzet négy részre tagolva tárgyalja a tananyagot.

Az 1. részben az alaptörvényeket foglaljuk össze. Feltételezzük, hogy az olvasó a Fizika tárgy keretében az alapvető elektromos és mágneses mennyiségek fogalmával és a rájuk vonatkozó törvények integrális alakjával már megismerkedett, ezért ezeket csak összefoglaljuk és differenciális alakban újrafogalmazzuk. Néhány példát mutatunk arra, hogy miként oldhatók meg egyszerű feladatok az alaptörvények felhasználásával.

A 2. rész tárgya a sztatikus vagy stacionárius (időben állandó) elektromos és mágneses tér. Megmutatjuk, hogy bizonyos egyszerűsítő feltételek mellett az ilyen terek számítása ugyanannak a problémának, a Laplace-Poisson egyenletnek a perem- és folytonossági feltételeket kielégítő megoldására vezethető vissza.

A 3. részben a távvezetékek elméletével foglalkozunk. Vizsgáljuk mind a szinuszos állandósult állapotot, mind az átmeneti folyamatokat. A távvezetékek tekinthetők általánosított (elosztott paraméterű) hálózatoknak, de egyszerű elektromágneses hullámjelenségek hordozóinak

is, már itt megjelenik a hullámegyenlet és a Helmholtz egyenlet egydimenziós alakja.

A 4. részben az elektromágneses hullámok néhány típusát tárgyaljuk. Egyszerű esetekre megvizsgáljuk az adott gerjesztéshez tartozó elektromágneses tér tulajdonságait, a különböző közegekben terjedő síkhullámok viselkedését és a vezetett hullámok néhány alapvető jellegzetességét.

Kevés kivételtől eltekintve lineáris és izotrop közegekben kialakuló térre korlátozzuk vizsgálatainkat.

Az egyes részek fejezetekre oszlanak (pl. 1.4. fejezet). Az ábrák és képletek számozása fejezetenként előlről kezdődik. Az ábrákra és a képletekre a fejezeten belül csak a sorszámával hivatkozunk (pl. az 1.4-2. ábrára mint 2. ábrára). A fejezetek szakaszokra oszlanak (pl. 3.2-6. szakasz), a hosszabb szakaszok pontokra tagolódnak (pl. 3.2-6.2. pont).

A fontos összefüggések sorszámmal, a legfontosabbak bekeretezéssel vannak kiemelve.

Mindegyik rész feladatokkal zárul, amelyek tematikusan tagoltak. E feladatok megoldása elősegíti az elmélet megértését, a fogalmak elmélyítését és egyes esetekben egyszerű modellek megoldásának módját is megadja.

A vektorokat vastag betűvel jelöljük (pl. \mathbf{E}), a mennyiség komplex jellegét, időfüggő vagy az időtől független jellegét nem jelöljük külön.

A tárgy tematikáját és ennek megfelelően a jegyzet általános felépítését az Elméleti Villamosságtan Tanszék tanárai együtt alakították ki. Az elmélet feldolgozását, a kidolgozott példákat és a kitűzött feladatokat illetően sokat merítettem a tanszék tanárai által írt könyvekből, jegyzetekből, példatárakból. Külön kiemelem Simonyi Károly: *Elméleti villamosságtan* című klasszikusnak számító művét, amelyből valamennyien sokat tanultunk és amely alapvető forrás minden, a témakör iránt mélyebben érdeklődő hallgatónak és mérnöknek.

Az Előszó után az Olvasó kényelmére megadtunk néhány fontos univerzális állandót, továbbá a vektoranalízis néhány alapvető összefüggését.

E helyen is megköszönöm Dr. Veszely Gyula professzor gondolatébresztő és gondos lektori munkáját, Takács Sándor adjunktus értékes megjegyzéseit és alapos szövegkritikáját.

Budapest, 1993. május - szeptember.

Fodor György

A LEGFONTOSABB UNIVERZÁLIS ÁLLANDÓK

Három univerzális állandót célszerű megjegyezni. Ezek a fény terjedési sebessége vákuumban:

$$c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

a vákuum permeabilitása:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} ;$$

a vákuum permittivitása:

$$\epsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \approx \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 9} \frac{\text{F}}{\text{m}} .$$

Az első összefüggés a méter, a második az amper definíciójából következik, a harmadik az elektromágnességtan egy posztulátuma.

Az elektromágneses hullámok terjedésének vizsgálatánál gyakran szereplő további univerzális állandó

a vákuum hullámimpedanciája (hullámellenállása)

$$Z_{0,0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 \cdot c \approx 376,73 \, \Omega \approx (120 \cdot \pi) \, \Omega .$$

Az elektromágneses jelenségek olyan fontos további állandói, mint pl. az elemi töltés vagy a Planck állandó nem játszanak szerepet a fenomenologikus leírás során.

A $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skalár függvény, a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor függvény, a V térfogatot burkoló A zárt felület, ill. az A felületet határoló ℓ zárt görbe eleget tesznek - itt nem részletezett - simasági feltételeknek.

Gradiens tétel (a gradiens definíciója):

$$\int_{r_1}^{r_2} \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) ;$$

Gauss - Osztrogradszkij tétel (a divergencia definíciója):

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} \, dV = \oint_A \mathbf{v} \, d\mathbf{A} ;$$

Stokes tétel (a rotáció definíciója):

$$\int_A \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \oint_{\ell} \mathbf{v} \, d\mathbf{l} .$$

Ismételt műveletek:

$$\text{rot grad } \varphi = 0 ; \quad \text{div rot } \mathbf{v} = 0 ;$$

$$\Delta \varphi \equiv \text{div grad } \varphi ; \quad \Delta \mathbf{v} \equiv \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v} \quad (\text{Laplace operátor})$$

Vektoroperációk derékszögű Descartes koordinátákban:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z ;$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} ;$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \mathbf{e}_z ;$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} ;$$

$$\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} , \text{ és analóg } \Delta v_y , \Delta v_z \text{ értelmezése.}$$

1. ALAPTÖRVÉNYEK

Ebben a bevezető részben összefoglaljuk az elektromágneses teret létrehozó és az erőteret leíró mennyiségekre vonatkozó alapvető törvényeket integrális és differenciális alakban. Példákat mutatunk arra, hogy az integrális alak felhasználásával egyszerű esetekben meghatározható az elektromos vagy a mágneses erőter. A differenciális alakok alapján a 2. - 4. részekben lehetőségünk lesz általánosabb feladatok megoldására is.

1.1. A GERJESZTŐ MENNYISÉGEK

1.1-1. AZ ELEKTROMOS TÖLTÉS

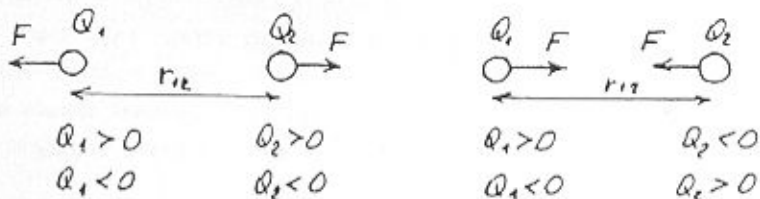
Az elektromágneses jelenségek oka az, hogy egyes elemi részecskéknek (elektronok, protonok) elektromos töltésük van. A továbbiakban csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor olyan nagyszámú töltött részecske hatását vizsgáljuk, hogy azok kvantáltsága és egyéb kvantumfizikai tulajdonságai figyelmen kívül hagyhatók. Ez a közelítés a legtöbb gyakorlati esetben megengedett, hiszen az elemi töltés nagysága $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, tehát még $Q = 1$ pC = 10^{-12} C töltés is 10^7 nagyságrendű elemi részecskét jelent.

Az elektromos töltések elvileg egymásra kifejtett erőhatásuk alapján hasonlíthatók össze. Két kisméretű (pontoszerűnek tekinthető) Q_1 és Q_2 elektromos töltésű test között fellépő F erő nagysága a tapasztalati Coulomb törvény értelmében (1. ábra)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1 Q_2|}{r_{12}^2} , \quad (1.1-1)$$

ahol r_{12} a töltött testek távolsága, és ϵ a teret kitöltő közegre jellemző mennyiség, a közeg permittivitása (dielektromos állandója), amelyet $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ alakban szokás megadni, ahol ϵ_0 a vákuum permittivitása (1. a Bevezetőt) és ϵ_r a relatív permittivitás, amely a

közegre jellemző pusztta szám ($\epsilon_r \approx 1$; 1. még az 1.4-1. szakaszt).



1.1-1. ábra. Az elektromos töltés értelmezése: Coulomb törvénye

Az elektromos töltés SI-egysége a coulomb, jele: C, kifejezése az alapegységekkel: $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$.

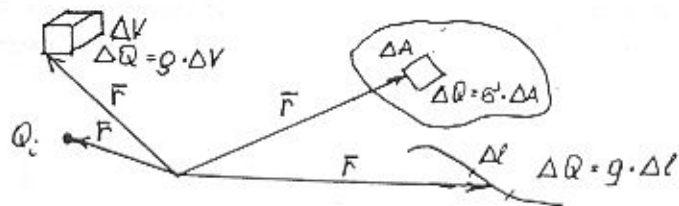
A tapasztalat szerint kétféle töltés van, amelyeket előjellel különböztetünk meg. Egyező előjelű töltések taszítják, ellenkező előjelűek vonzzák egymást. A proton töltése pozitív, az elektroné negatív.

A $Q = Q(t)$ töltés általánosan fogalmazva egy térfogatban oszlik el. A töltéeloszlást a $\rho = \rho(r,t)$ térfogati töltéssűrűséggel írjuk le, amelynek értelmezése (2. ábra)

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}; \quad [\rho] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \quad (1.1-2)$$

abban a pontban, amelyre a térfogatot zsugorítjuk. Noha matematikailag $\Delta V \rightarrow 0$, ténylegesen ΔV csak annyira csökkenthető, hogy benne még mindig kellően sok elemi töltés helyezkedjék el. Ez vonatkozik a továbbiakban előforduló hasonló határértékekre is.

Egy V térfogatban lévő Q töltés a (2) alapján a $dQ = \rho \, dV$ differenciális töltések összegezésével, vagyis a



1.1-2. ábra. A térfogati, a felületi és a vonalmenti töltéssűrűség értelmezése

$$Q = \int_V \rho \, dV \quad (1.1-3)$$

térfogati integrállal fejezhető ki.

Sok gyakorlati esetben a töltések egy felületen, vagyis elhanyagolható vastagságú térfogatban helyezkednek el. A töltéeloszlást ilyenkor a $\sigma = \sigma(r,t)$ felületi töltéssűrűséggel írjuk le, amelynek értelmezése (2. ábra)

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}; \quad [\sigma] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (1.1-4)$$

Egyes esetekben hasznos lehet a töltést egy elhanyagolhatóan kis keresztmetszetű vonalra koncentrálnak képzelni. A töltéeloszlást ilyenkor a $q = q(r,t)$ vonalmenti töltéssűrűséggel írjuk le, amelynek értelmezése (2. ábra)

$$q = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l}; \quad [q] = \frac{\text{C}}{\text{m}} \quad (1.1-5)$$

Ha a töltés által kitöltött térfogat minden mérete elhanyagolhatóan kicsi, akkor pontszerűnek tekintjük és az i -edik töltést Q_i értékével jellemezzük (2. ábra).

Valamennyi töltéeloszlás típusát figyelembe véve, a töltés kifejezése a (3) mintájára

$$Q = \int_V \rho \, dV + \int_A \sigma \, dA + \int_l q \, dl + \sum_i Q_i \quad (1.1-6)$$

Elméleti megfontolásoknál inkább a (3) alakot használjuk. Ilyenkor $\rho(r,t)$ olyan eloszlást jelent, amely Dirac impulzus összetevőt is tartalmazhat. Ha pl. az x,y síkban a felületi töltéssűrűség $\sigma(x,y)$, akkor a térfogati töltéssűrűség

$$\rho(x,y,z) = \sigma(x,y) \cdot \delta(z) \quad (1.1-7)$$

Ekkor a $\sigma(x,y)$ függvény matematikailag a következő módon értelmezhető:

$$\sigma(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y,z) \, dz \quad (1.1-8)$$

Hasonló az értelmezés görbült felület, ill. vonalmenti töltéssűrűség vagy pontszerű töltés esetén. Az ilyen típusú $\rho(r)$ függvényeket nem szokás ténylegesen felírni, csak fogalmilag lényeges, hogy alkalmas értelmezése mellett bármilyen töltéeloszlás kifejezhető $\rho(r,t)$ térfogati integráljaként.

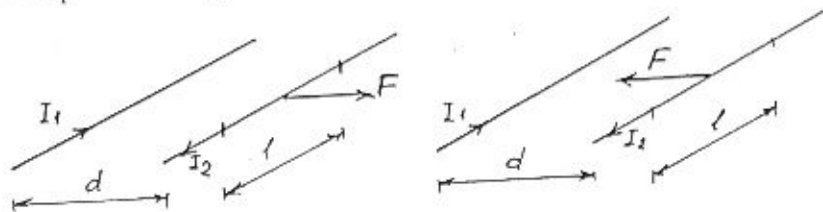
Térfogati töltéssűrűség szigetelőkhöz (tipikusan: gázokban) és félvezetőkben léphet fel. Felületi töltéssűrűség léphet fel két közeg határán (tipikusan: vezetők felületén). A vonalszerű és a pontszerű töltés közelítésként vagy a számítást könnyítő absztrakcióként fordulhat elő.

1.1-2. AZ ELEKTROMOS ÁRAM

A töltések mozgása áramot jelent. A technikai felfogás azonban az áramot a töltéstől független mennyiségként értelmezi. Az áramok egymásra kifejtett erőhatásuk alapján hasonlíthatók össze. Két, végtelen hosszúnak és elhanyagolhatóan kis keresztmetszetűnek tekinthető, párhuzamos egyenes vezetékben folyó áram esetén a tapasztalati Ampère törvény értelmében

$$F = \frac{\mu}{2\pi} \frac{|I_1 I_2| l}{d} \quad (1.1-9)$$

ahol d a két vezeték távolsága, l a vizsgált vezeték szakasz hossza és μ a vezeték közötti közegre jellemző (mágneses) permeabilitás, amit $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ alakban szokás megadni, ahol μ_0 a vákuum permeabilitása (l. a Bevezetést) és μ_r a relatív permeabilitás, amely a közegre jellemző szám ($\mu_r \approx 1$ vagy $\mu_r \gg 1$; l. még az 1.4-1. szakaszt).



1.1-3. ábra. Az elektromos áram értelmezése az erőhatás alapján

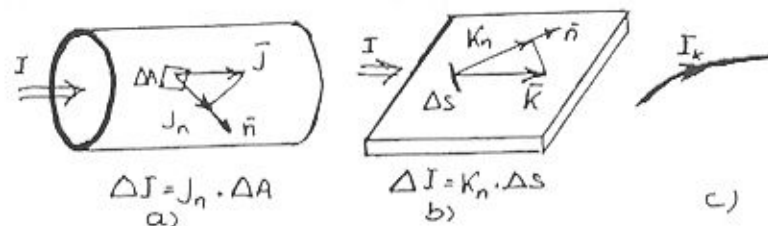
Az elektromos áram SI-egysége, az amper (jele: A) a (9)-hez kapcsolódóan van meghatározva és pedig úgy, hogy ha $I_1 = I_2 = 1$ A, továbbá $l = d = 1$ m, akkor vákuum esetén $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N. Ebből következik μ_0 már megadott értéke.

Valamely felületen átfolyó $I = I(t)$ áram eloszlását a $\mathbf{J} = \mathbf{J}(r, t)$ áramsűrűséggel írjuk le. E vektornak valamely \mathbf{n} irányú \mathbf{J}_n vetületét az \mathbf{n} normálvektorú ΔA felületen átfolyó ΔI áram határozza meg (4a ábra)

$$\mathbf{J}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} ; \quad [J] = \frac{A}{m^2} \quad (1.1-10)$$

Három - célszerűen egymásra merőleges - vetület ismeretében a \mathbf{J} vektor

meghatározható.



1.1-4. ábra. Az áramsűrűség és a felületi áramsűrűség értelmezése

Egy A felületen átfolyó I áram (10) alapján a $dI = \mathbf{J}_n \cdot d\mathbf{A} = J_n dA$ elemi áramok összegezésével, vagyis az A felület menti integrállal fejezhető ki:

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.1-11)$$

Egyes esetekben az áram olyan felületen át folyik, amelynek egyik mérete elhanyagolhatóan kicsi. Ekkor az áram eloszlását a $\mathbf{K} = \mathbf{K}(r, t)$ felületi áramsűrűséggel (vonalszerű vagy lineáris áramsűrűséggel) jellemezzük, amelynek értelmezése (4b ábra)

$$\mathbf{K}_n = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} ; \quad [K] = \frac{A}{m} \quad (1.1-12)$$

Az \mathbf{n} vektor a vonaldarab és az áramsűrűség által meghatározott síkban a vonaldarabra merőleges. További absztrakció az elhanyagolhatóan kis keresztmetszeten átfolyó I_k vonalszerű áram (4c ábra).

Valamennyi árameloszlás típusát együttesen figyelembe véve, az I áram kifejezése (11) mintájára

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \int_s \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \cdot ds + \sum_k I_k \quad (1.1-13)$$

Elméleti megfontolásoknál inkább a (11) alakot használjuk, amelyben a $\mathbf{J}(r)$ áramsűrűség Dirac impulzus összetevőt is tartalmazhat.

A felületi áramsűrűségnek elsősorban számítástechnikai egyszerűsítésként van jelentősége.

1.1-3. A TÖLTÉS ÉS AZ ÁRAM KAPCSOLATA

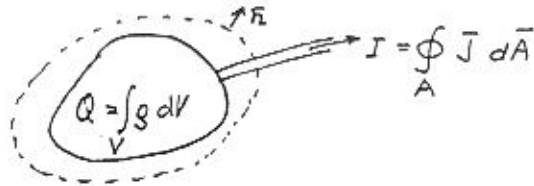
A töltés és az áram közötti egyik kapcsolatot a következő tapasztalati összefüggés fejezi ki. Ha egy V térfogatban Q töltés van felhalmozva és a térfogatot körülzáró A felületen összesen I áram folyik ki, akkor

$$I = - \frac{dQ}{dt} .$$

(1.1-14)

A hálózatelméletben ezt az összefüggést tekintjük a töltés definíciójának, csak ott a befelé folyó áramról van szó és ezért nem szerepel a negatív előjel. Fejezzük ki az áramot az áramsűrűség felületmenti integráljaként, a töltést a töltéssűrűség térfogati integráljaként, akkor a (14) nullára redukált alakja (5. ábra)

$$\oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = 0 .$$



1.1-5. Ábra. A térfogatban lévő töltés és a burkoló zárt felületen átfolyó áram

Az első tagra alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt, a második tagban cseréljük fel az idő szerinti differenciálás és a térbeli integrálás sorrendjét, miáltal mindkét tagot ugyanarra a térfogatra kell integrálni:

$$\int_V \left\{ \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} dV = 0 .$$

Mivel ennek bármely térfogatra teljesülnie kell, ezért az integrandusz maga is nulla:

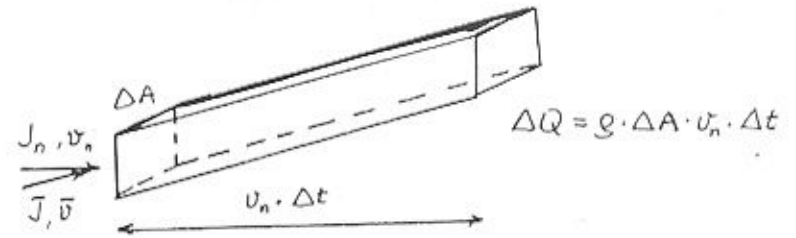
$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

(1.1-15)

Ez a folytonossági egyenlet, amelynek (14) az integrális alakja. Az egyenlet a töltés megmaradásának elvét fejezi ki és teljesen analóg pl. a tömeg megmaradását kifejező megfelelő egyenlettel.

Meghatározhatjuk a \mathbf{v} sebességgel mozgó töltések által létrehozott áramot is. Egy ΔA felületen Δt idő alatt átáramló töltés egy $\Delta A \cdot \mathbf{v}_n \cdot \Delta t$ térfogatú hasámban foglal helyet (6. ábra), így az áramsűrűségnek a felületre merőleges (normális) összetevője

$$J_n = \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{\Delta Q / \Delta t}{\Delta A} = \frac{\rho \cdot \Delta A \cdot \mathbf{v}_n \cdot \Delta t / \Delta t}{\Delta A} = \rho \mathbf{v}_n .$$



1.1-6. Ábra. Az áramsűrűség és a mozgó töltéssűrűség kapcsolata
Ebből következően az áramsűrűség vektorának kifejezése

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} .$$

(1.1-16)

Általános esetben az egyes töltések sebessége különböző. Ekkor \mathbf{v} egy alkalmas átlagsebességet jelent. Gyakran a töltés két összetevőből áll, többnyire egy ρ_- sűrűségű és \mathbf{v}_- átlagsebességű negatív összetevőből (elektronok fémekben és félvezetőkben, negatív ionok folyadékokban) és egy ρ_+ sűrűségű és \mathbf{v}_+ átlagsebességű pozitív összetevőből (lyukak félvezetőkben, pozitív ionok folyadékokban). Ilyenkor

$$\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- .$$

(1.1-17)

adja az áramsűrűség kifejezését. Értelem szerinti az általánosítás több összetevő esetére.

A mozgó töltések \mathbf{v} sebességét csak egy rögzített koordinátarendszerben lehet megadni. Egy ehhez képest \mathbf{u} sebességgel mozgó másik koordinátarendszerben ugyanazt a mozgó töltést \mathbf{v}' sebességgel jellemezzük. A fénysebességnél jóval kisebb sebességek esetén

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} ; \quad \mathbf{v}, \mathbf{u} \ll c .$$

(1.1-18)

Ha pl. együtt mozgunk a töltésekkel ($\mathbf{u} = \mathbf{v}$), akkor állónak érzékeljük őket ($\mathbf{v}' = 0$). A "vesszős" rendszerben a viszonyokat ugyanazzal a töltéssűrűséggel, de egy más áramsűrűséggel írhatjuk le:

$$\rho' = \rho , \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J} - \rho \mathbf{u} ; \quad \mathbf{u} \ll c .$$

(1.1-19)

Ha például együtt mozgunk a töltésekkel, akkor nem észlelünk áramsűrűséget. Ha az \mathbf{u} relatív sebesség megközelíti a fénysebességet, akkor a (18) és (19) helyére bonyolultabb, a relativisztikus hatásokat figyelembe vevő összefüggések írandók.

1.2. A TÉRINTENZITÁSOK

1.2-1. AZ ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG ÉS A MÁGNESES INDUKCIÓ

A töltések és az áramok egymásra gyakorolt hatása csak speciális feltételek mellett határozható meg az (1) Coulomb törvény és a (9) Ampère törvény alapján. A hatásokat általánosan az elektromomágneses erőter bevezetésével írhatjuk le. Az erőteret a töltések és az áramok hozzák létre, ill. az erőter az, amely erőt fejt ki a töltésre és az áramra. Az erőter helyett gyakran csak a "tér" kifejezést használjuk. Az elektromomágneses tér nem csak az erőhatást közvetíti, hanem az energia hordozója és a teljesítmény közvetítője is (1.5. fejezet).

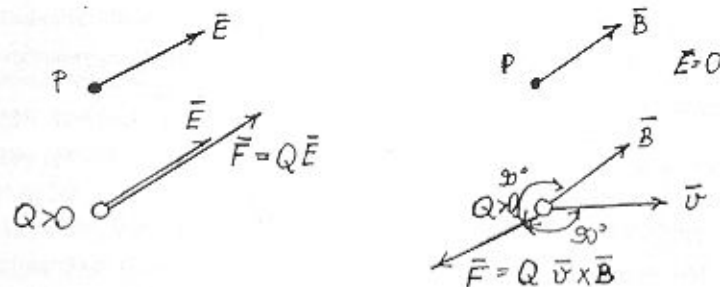
Az elektromomágneses teret alapvetően két vektormennyiséggel jellemezzük. Ezek az $E = E(r,t)$ elektromos térerősség és a $B = B(r,t)$ mágneses indukció (mágneses fluxussűrűség), más néven az elektromos, ill. a mágneses térintenzitás. Az elektromos térerősséget, ill. a mágneses indukciót egy kisméretű nyugvó, ill. v sebességgel mozgó Q elektromos töltésre ható erővel definiálhatjuk (1. ábra):

$$F = Q E, \quad F = Q v \times B. \quad (1.2-1)$$

Az elektromos térerősség SI-egysége volt per méter (jele: V/m), a mágneses indukció SI-egysége a tesla (jele: T), de gyakran weber per négyzetméter (jele: Wb/m²) alakban adják meg. Ha a vizsgált pontban mindkét erőter fellép, akkor az erő kifejezését az

$$F = Q (E + v \times B) \quad (1.2-2)$$

Lorentz törvény adja meg. Ennek alapján határozhatjuk meg az adott elektromomágneses térben mozgó m tömegű és Q töltésű test pályáját.



1.2-1. ábra. Az elektromos térerősség és a mágneses indukció definíciója a nyugvó és a mozgó töltésre ható erő alapján

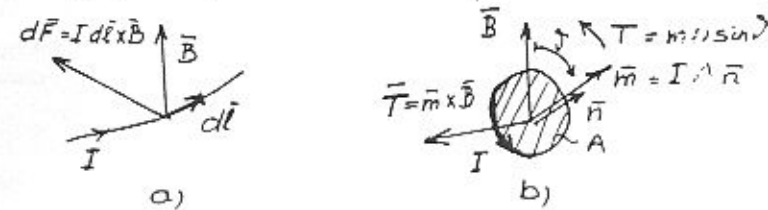
A mágneses indukció mérhető egy dl hosszúságú I dl áramelemre kifejtett erő ismeretében is (2a ábra; az iverem iránya az áram irányával egyező):

$$dF = I dl \times B, \quad (1.2-3)$$

vagy egy kisméretű, A felületű, $m = I A n$ momentumú köráramra ható erőnyomaték segítségével (2b ábra; a normális és a momentum iránya az áram irányához jobbszavar szabállyal van rendelve):

$$T = m \times B; \quad m = I A n. \quad (1.2-4)$$

Utóbbi esetben a köráram stabilis egyensúlyi helyzetében a normális iránya megadja a mágneses indukció irányát.



1.2-2. ábra. A mágneses indukció értelmezése az áramelemre ható erővel ill. a kisméretű köráramra ható erőnyomatékkal

A (3) könnyen belátható a (2) definíció alapján. Az áramelem

$$I dl = J \cdot \Delta A \cdot dl = \rho \cdot v \cdot \Delta A \cdot dl = \rho \cdot \Delta A \cdot dl \cdot v = Q \cdot v$$

alakban fejezhető ki, ahol ΔA a vezeték keresztmetszete. Felhasználtuk, hogy a vezetőkelem iránya a pozitív töltések áramlási sebességével egyirányú. Egyszerű mechanikai és geometriai megfontolásokkal belátható, hogy (3)-ból a (4) már következik, ha az áramhurok mentén B állandónak tekinthető.

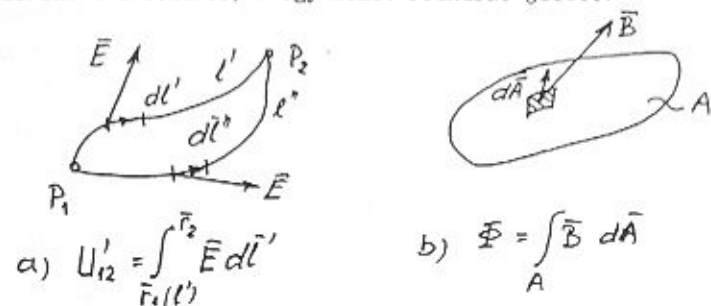
1.2-2. AZ ELEKTROMOS FESZÜLTÉG ÉS A MÁGNESES FLUXUS

1.2-2.1. Definíciók

Mindkét vektoriális térjellemezőhöz egy-egy, tartományra vonatkozó skaláris mennyiséget rendelünk. Az elektromos térerősség egy l görbe menti integrálja az $U = U(t)$ elektromos feszültség, a mágneses indukció egy A felület mentén vett integrálja a $\Phi = \Phi(t)$ mágneses fluxus (3. ábra):

$$U = \int_l E dl, \quad \Phi = \int_A B dA. \quad (1.2-5)$$

Az elektromos feszültség SI-egysége a volt (jele: V), a mágneses fluxus SI-egysége a weber (jele: Wb). Az alkalmazások szempontjából elsősorban egy vezeték által kifeszített felület fluxusának van jelentősége, amelyre a Ψ jelet fogjuk használni. Sokmenetű tekercsnél rendszerint Ψ a tekercs, Φ egy menet fluxusát jelöli.



1.2-3. Ábra. A görbéhez tartozó elektromos feszültség, ill. a felülethez tartozó mágneses fluxus értelmezése

1.2-2.2. A feszültség energetikai tartalma

Mind a feszültségnek, mind a fluxusnak energetikai tartalma is van. Ha egy Q töltés mozog egy l görbe mentén, akkor az elektromos tér által végzett munka (amely a töltött test energiáját növeli)

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F dl = \int_{r_1}^{r_2} Q E dl = Q \int_{r_1}^{r_2} E dl = Q \cdot U_{12} .$$

vagyis a munka arányos a töltéssel, az arányossági tényező az U_{12} elektromos feszültség:

$$W_{12} = Q U_{12} . \quad (1.2-6)$$

Általában az U_{12} feszültség nem csak a görbe végpontjainak r_1 és r_2 helyvektorától függ, hanem magától a görbétől is.

Nagyon fontos az a speciális eset, amikor a feszültség rögzített végpontok között bármely görbére ugyanakkora. Ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy bármely zárt l_0 görbére

$$\oint_{l_0} E dl = 0 \quad (1.2-7)$$

teljesüljön. Ekkor ugyanis a feszültség egy l' , ill. egy l'' görbe mentén megegyezik, mivel

$$U' - U'' = \int_{r_1(l')}^{r_2(l')} E dl' - \int_{r_1(l'')}^{r_2(l'')} E dl'' = \int_{r_1(l')}^{r_2(l')} E dl' + \int_{r_2(l'')}^{r_1(l'')} E dl'' = \oint_{l_0} E dl = 0 ,$$

vagyis $U' = U''$. Mint később látni fogjuk, a (7) teljesülésének feltétele az, hogy a megengedett l_0 zárt görbék ne fogjanak körül időben változó fluxust. Ez teljesül, ha abban a térrészben, ahol a két pont közötti feszültséget vizsgáljuk, a mágneses tér időben állandó, esetleg nincs is. Ilyenkor az elektromos tér munkavégzését a következőképpen is felfoghatjuk.

Válasszunk egy r_0 helyvektorú rögzített pontot, amelyben a töltés elektromos energiáját $W(r_0) = 0$ értékűnek tekintjük. A munka bármely r pontból az r_0 pontig végzett mozgás során

$$W(r) = \int_r^{r_0} Q E dl = Q \varphi(r) ,$$

ahol $\varphi = \varphi(r)$ az elektromos potenciál az r helyvektorú pontban:

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E dl ; \quad \text{ha } \oint_{l_0} E dl = 0 , \quad (1.2-8)$$

amely csak az r helyvektortól függ, de független az r és r_0 pontok közötti görbe alakjától. Az r_1 és r_2 pontok közötti feszültség kifejezése ekkor

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E dl = \int_{r_1}^{r_0} E dl + \int_{r_0}^{r_2} E dl = \int_{r_1}^{r_0} E dl - \int_{r_2}^{r_0} E dl$$

vagyis a két pont potenciáljának különbsége:

$$U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) ; \quad \text{ha } \oint_{l_0} E dl = 0 . \quad (1.2-9)$$

A feszültség ekkor csak a két pont helyétől függ, független a pontok közötti görbe alakjától és az r_0 megválasztásától.

1.2-2.3. A fluxus energetikai tartalma

A mágneses fluxus energetikai tartalmának megvilágításához tekintsünk egy mágneses térbe helyezett kisméretű áramhurkot (2b ábra). A hurokra ható erőnyomaték (4) értelmében

$$T_\theta = - I A B \sin \theta . \quad (1.2-10)$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy az erőnyomaték a θ szöveget csökkenteni igyekszik. A mágneses tér által végzett munka (amely a hurok energiáját növeli) a θ_1 szöghelyzetből a θ_2 szöghelyzetbe

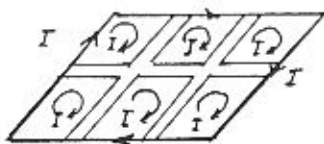
$$W_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T_{\theta} d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} I A B \sin \theta d\theta = I A B (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

Itt $A B \cos \theta = \Psi$, a hurok fluxusa θ helyzetben, tehát a végzett munka $W_{12} = I(\Psi_2 - \Psi_1)$ alakban is felírható. Legyen $\theta_2 = \pi/2$ a nulla energiájú rögzített véghelyzet, akkor a hurok mágneses energiája

$$W = - I \Psi; \quad \Psi = \Psi_{\max} \cos \theta, \quad (1.2-11)$$

ahol Ψ a hurok fluxusa θ szöghelyzetben. Az energia minimális a $\theta = 0$ helyzetben ($W_{\min} = - I \Psi_{\max}$, stabilis egyensúly) és maximális a $\theta = \pi$ helyzetben ($W_{\max} = I \Psi_{\max}$, labilis egyensúly). A munka $W_{12} = W_1 - W_2$ alakban az energiák különbségként is számítható.

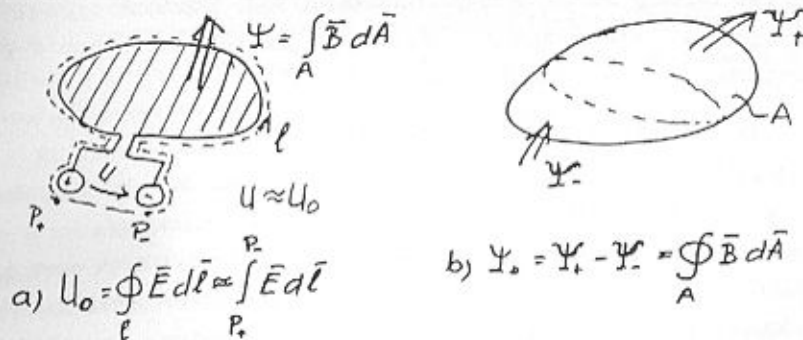
Noha (11)-et kisméretű áramhurokra láttuk be, az tetszőleges méretű és alakú hurokra is érvényes. Ennek belátásához tekintsük a 4. ábrán látható tetszőleges alakú (a könnyebb ábrázolás érdekében négy-szögletesnek tekintett) hurkot. Ez felfogható a belső hurkok eredőjének is, hiszen az ellentétes irányú áramok kompenzálják egymást. Az egyes áramhurkok energiája (11) értelmében $W_k = - I \Psi_k$. A teljes energia ezek összege, ami a közös áram miatt a (11) szerinti kifejezésre vezet.



1.2-4. ábra. Az áramhurok felbontása fiktív áramhurkokra

1.2-3. A TÉRINTENZITÁSOK KAPCSOLATA

Az elektromos feszültségre és a mágneses fluxusra vonatkozó tapasztalati törvények egyrészt Faraday indukció törvénye, amely szerint egy hurokban indukálódó U_0 feszültség egyenlő a hurok Ψ fluxusának idő szerinti deriváltjával (a jobbcavar szabállyal ellentétes előjellel; 5a ábra), másrészt a "fluxusmegmaradás" törvénye, amely



1.2-5. ábra. Zárt görbére vonatkozó elektromos feszültség, ill. zárt felületre vonatkozó mágneses fluxus szerint zárt felület Ψ_0 fluxusa nulla (5b ábra):

$$U_0 = - \frac{d\Psi}{dt}, \quad \Psi_0 = 0. \quad (1.2-12)$$

Az 5a ábra elrendezésében az U_0 feszültség a kivezetések között mérhető, mivel a megszakított vezetékben áram nem folyik, így a vezeték mentén az elektromos térerősség (és így integrálja, a feszültség is) nulla. Ha a mérővezeték nem helyezük el, akkor U_0 általánosan az elektromos térerősségnek valamely zárt l görbe menti integrálját jelenti és Ψ ezen görbe által kifeszített bármely A felület mágneses fluxusát. A (12) összefüggések a térintenzitásokkal tehát a következő alakban fogalmazhatók meg:

$$\oint_l E dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A B dA, \quad \oint_A B dA = 0.$$

Ebből egyébként következik ama korábbi állításunk, hogy (7) teljesül, ha B időben állandó. Az első egyenlet bal oldalát a Stokes tétel, a másodikét a Gauss-Ostrogradszkij tétel alapján átírva

$$\int_A \text{rot } E dA = - \int_A \frac{\partial B}{\partial t} dA, \quad \int_V \text{div } B dV = 0.$$

Mivel ez tetszőleges A felületre, ill. V térfogatra érvényes, ezért

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div } B = 0 \quad (1.2-13)$$

is érvényes. Ez a két összefüggés fejezi ki a térintenzitásokra vonat-

kozó alapvető összefüggéseket.

A két törvény között bizonyos kapcsolat van. Képezzük ugyanis az első egyenlet divergenciáját és használjuk fel a $\text{div rot } \mathbf{v} \equiv 0$ azonosságot, akkor azt kapjuk, hogy

$$0 = \text{div} \left(- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \equiv - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{B} .$$

Ebből következik, hogy $\text{div } \mathbf{B}$ időben állandó, csak a hely függvénye lehet. A $\text{div } \mathbf{B} = 0$ egyenlet ezt a helyfüggést konkretizálja.

Az elektromágneses teret leíró \mathbf{E} és \mathbf{B} térintenzitások csak egy rögzített mozgásállapotú koordináta-rendszerben értelmezettek. Egy ehhez képest \mathbf{u} sebességgel mozgó koordináta-rendszerben, az abban \mathbf{v}' sebességgel ($\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$) mozgó Q töltésre ható

$$\mathbf{F} = Q (\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') \quad (1.2-14)$$

erő ugyanazt az elektromágneses teret írja le az abban értelmezett \mathbf{E}' és \mathbf{B}' térintenzitásokkal. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ alakot behelyettesítve:

$$\mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}) .$$

Ebből látható, hogy a "mozgó" rendszerbeli térintenzitások kifejezése

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} , \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} ; \quad u \ll c . \quad (1.2-15)$$

Ezt úgy szokás szemléletesen kifejezni, hogy a mozgó megfigyelő $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ járulékos elektromos térerősséget észlel, amelyet a mozgási indukálás hoz létre. Ha az \mathbf{u} relatív sebesség összemérhető a fénysebességgel, akkor a kapcsolatok bonyolultabbak.

1.2-4. AZ ERŐTÉR SZEMLÉLTETÉSE

Az elektromos és a mágneses erőter szemléltetése nehéz feladat, hiszen egy $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ helytől és időtől függő vektormennyiségről van szó.

Az időfüggést rendszerint úgy vesszük figyelembe, hogy az ábra egy rögzített időpontra vonatkozik, szükség esetén több, egymást követő időpontra vonatkozó ábrát készítünk.

A vektorokat nyilakkal szokás ábrázolni. A nyíl hossza arányos a vektor nagyságával. A nyíl helyett egyenes körkúpokat is szokás alkalmazni, amelyek magassága arányos a vektor nagyságával. Jól kell kiválasztani azokat a pontokat, ahol a vektort ábrázoljuk, hogy kellő számú vektorunk legyen és az ábra mégse legyen túlságosan kusza.

A vektorok ábrázolásának egy másik módja az erővonalak megrajzolása. A vektor irányát az erővonal érintője jelöli ki,

nagyságát a vektorvonalak lokális sűrűsége. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a síkban bármely két erővonal közötti "csatorna" fluxusa ugyanakkora. Ez térben is igaz, csak ott az erővonalak által alkotott csatornát nehezebb felismerni.

Ha csak a vektor nagyságát akarjuk ábrázolni vagy ha egy skalár mennyiség (pl. potenciál) szemléltetése a feladat, akkor alkalmazhatjuk a térképeknél szokásos eljárásokat: az állandó értékű pontok által meghatározott felület (ekvipotenciális felület) megrajzolását vagy színezéssel történő megkülönböztetését.

Miután az ábrázolás síkban történik, ezért valamennyi ábrázolási módszer csak addig áttekinthető, amíg egy síkmetszet ábrázolása kielégítő információt jelent. Ez a helyzet például forgásszimmetrikus elrendezéseknél és igen hosszú elrendezéseknél a végektől távol (ún. síkprobléma), ha az erőter is ilyen tulajdonságú. Ilyen szimmetriával nem rendelkező erőterek ábrázolása és az ábrák értelmezése nehéz feladat.

Egyes esetekben az erőter ábrázolása a számítást megkönnyítő előzetes lépés. Más esetekben a számítás eredményének szemléltetése. Bizonyos feladatoknál grafikus módszerrel előállíthatjuk a feladat egy közelítő megoldását is (l. a 2.1-4. szakaszt).

1.3. A GERJESZTETTSÉGI MENNYISÉGEK

1.3-1. A TAPASZTALATI TÖRVÉNYEK

Alapvető kérdés, hogy milyen kapcsolat van az erőteret gerjesztő mennyiségek (a töltés és az áram) és az erőteret leíró térintenzitások (az elektromos térerősség és a mágneses indukció) között. A viszonyok akkor a legegyszerűbbek, ha a teret kitöltő közeg homogén és izotrop (nincsenek kitüntetett irányai), továbbá lineáris, vagyis ϵ permittivitása és μ permeabilitása a közegre jellemző (vagyis az erőterttől független). Ekkor az elektromos térerősségre érvényes Gauss törvénye, míg a mágneses indukcióra az általánosított gerjesztési törvény:

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon} Q ; \quad \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu (I + I_D) , \quad I_D = \epsilon \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} , \quad (1.3-1)$$

ahol Q az A felület által körülzárt összes töltés, míg I , ill. I_D az l

görbe által kifeszített A felület árama, ill. eltolási árama.

E tapasztalati törvények általánosíthatók arra az esetre is, amikor a közeg lineáris és izotrop, de nem homogén, vagyis amikor ϵ és μ a hely ismert függvénye. Ekkor (1) a következő alakban érvényes:

$$\oint_A \epsilon E dA = Q ; \quad \oint_l \frac{1}{\mu} B dl = I + I_D , \quad I_D = \int_A \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} dA . \quad (1.3-2)$$

Az 1.7. fejezetben megmutatjuk, hogy egyszerű geometriájú elrendezések esetén (2) felhasználásával meghatározható a töltés ismeretében az elektromos térerősség, az áram ismeretében a mágneses indukció.

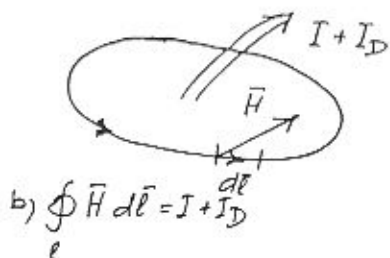
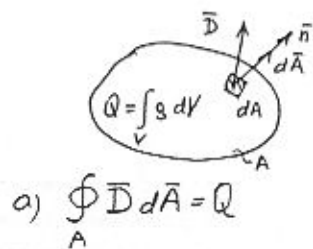
1.3-2. AZ ELEKTROMOS ELTOLÁS ÉS A MÁGNESES TÉRERŐSSÉG

A (2) tapasztalati törvények egyszerűbb alakra hozhatók a következő mennyiségek bevezetésével:

$$D = \epsilon E , \quad H = \frac{1}{\mu} B , \quad J_D = \frac{\partial D}{\partial t} , \quad (1.3-3)$$

ahol D az elektromos eltolás vagy elektromos fluxussűrűség (SI-egysége C/m^2), H a mágneses térerősség (SI-egysége A/m) és J_D az eltolási áramsűrűség (SI-egysége A/m^2). Ezekkel (2) így írható (1. ábra)

$$\oint_A D dA = Q ; \quad \oint_l H dl = I + I_D , \quad I_D = \int_A J_D dA . \quad (1.3-4)$$



1.3-1. ábra. A Gauss törvény és az általánosított gerjesztési törvény

Helyettesítsük ide a gerjesztő mennyiségek (1.1-3), ill. (1.1-11) integrális kifejezését a töltéssűrűséggel, ill. az áramsűrűséggel:

$$\oint_A D dA = \int_V \rho dV ; \quad \oint_l H dl = \int_A (J + \frac{\partial D}{\partial t}) dA .$$

A Gauss-Osztrogradszkij, ill. a Stokes tétel alkalmazásával:

$$\int_V \text{div } D dV = \int_V \rho dV ; \quad \int_A \text{rot } H dA = \int_A (J + \frac{\partial D}{\partial t}) dA .$$

Mivel ez tetszőleges térfogatra, ill. felületre igaz, ezért a (4) differenciális alakja

$$\text{div } D = \rho , \quad \text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t} . \quad (1.3-5)$$

A (4) vagy az (5) a D és H mennyiségek olyan definíciójának tekinthető, amely akkor is érvényes, amikor D és E, ill. H és B között bonyolultabb kapcsolat van, mint a (3) szerinti. Ezeket az 1.4. fejezetben tárgyaljuk.

A (4)-ből vagy az (5)-ből látható, hogy a D elektromos eltolás és a H mágneses térerősség szoros kapcsolatban áll a teret gerjesztő mennyiségekkel, ezért gerjesztettségi mennyiségeknek nevezzük őket. Ezek is jellemzik az elektromomágneses teret, de másodlagos szerepet játszanak az erőhatásra jellemző E és B térintenzitások mellett. Látni fogjuk (1.5. fejezet), hogy az energia és a teljesítmény szempontjából a kétféle mennyiség szerepe egyenrangú.

1.3-3. A TOTÁLIS ÁRAMSŐRŰSÉG

Az (5)-ből látható, hogy a mágneses tér gerjesztése szempontjából a $J_D = \partial D / \partial t$ eltolási áramsűrűség ugyanolyan szerepet játszik, mint a töltések mozgásából származó J (valódi) áramsűrűség. Fogalmilag tisztább lenne az (5) összefüggést

$$\text{rot } H - \frac{\partial D}{\partial t} = J , \quad \text{div } D = \rho$$

alakban felírni. Elterjedtebb azonban az a felfogás, amely szerint a mágneses teret voltaképpen a

$$J_T = J + J_D = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.3-6)$$

totális áramsűrűség gerjeszti. Ezzel az (5) a $\text{rot } H = J_T$ alakban is írható. Ebből következően a totális áramsűrűség forrásmentes:

$$\text{div } J_T = 0 . \quad (1.3-7)$$

Részletesebben felírva és $\text{div } D = \rho$ felhasználásával

$$\text{div } J + \text{div } \frac{\partial D}{\partial t} = \text{div } J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

Ez az (1.1-15) folytonossági egyenlet. Ebből egyrészt következik, hogy

az (5) két egyenlete ellentmondásmentes, másrészt az alapvető fontosságú folytonossági egyenletet formailag nem kell alapegyenletnek tekinteni, hiszen az más egyenletek következményeként is kiadódik.

1.4. A KÖZEGEK HATÁSA

1.4-1. ÁLTALÁNOS ÖSSZEFÜGGÉSEK

A közegek elektromágneses tulajdonságokkal bíró képződményekből (atomok, molekulák, mágneses domének, stb.) állnak. A töltések eloszlása, mozgása, az erőter kialakulása bonyolult kölcsönhatások eredménye. Fenomenologikusan a közegek hatása leírható, ha meg tudjuk adni, hogy a D elektromos eltolás és a J áramsűrűség miként függ az E elektromos térerősségtől, ill a H mágneses térerősség miként függ a B mágneses indukciótól. Történelmi okokból többnyire az utóbbi inverzét szokás megadni. A keresett összfüggések (az ún. konstitutív relációk) általános alakja ezek szerint

$$D = D(E), \quad B = B(H), \quad J = J(E). \quad (1.4-1)$$

A közegek többségére e kapcsolat olyan, hogy a két vektor párhuzamos. A függvénykapcsolat ilyenkor egy skaláris együtthatóval kifejezhető. A legtöbb közegre ez az együttható (a térerősség bizonyos nagyságáig) állandónak tekinthető, vagyis a két vektor egymással arányos. Sok fontos közegre (pl. a ferromágneses anyagok) azonban a kapcsolat ennél bonyolultabb, esetleg függvényként nem is írható le.

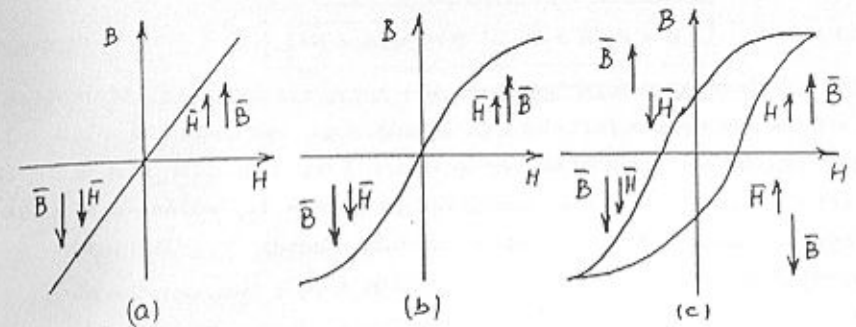
Az (1) kapcsolatok kísérleti meghatározásához olyan elrendezést célszerű létrehozni, amelynél D , H , ill. J elég pontosan számítható (pl. nagykiterjedésű síkkondenzátor, sűrűn tekercselt toroid). Az E és B mennyiségek mérhetők, így a kapcsolat feltárható. A tényleges mérés során természetesen sok technikai problémát kell még megoldani.

1.4-2. PERMITTIVITÁS ÉS PERMEABILITÁS

A $D(E)$, ill. a $B(H)$ függvénykapcsolat legegyszerűbb alakja

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad (1.4-2)$$

ahol $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ a közeg permittivitása, $\mu = \mu_0 \mu_r$ a közeg permeabilitása. Mindkettő független E és H nagyságától és irányától, vagyis anyagjellemző állandók. Ez a lineáris és izotrop közeg esete (1a ábra).



1.4-1. Ábra. A mágneses indukció és a mágneses térerősség kapcsolata három tipikus esetben, amikor vektoraik párhuzamosak

A (2) kapcsolat általánosítható arra az esetre, amikor a közeg izotrop, de nemlineáris. A $D = D(E)$, ill. a $B = B(H)$ függvény értelmezett, gyakran grafikusán adott (1b ábra). Értelmezhető egy

$$\epsilon(E) = \frac{D}{E}, \quad \mu(H) = \frac{B}{H} \quad \text{vagy} \quad \nu(B) = \frac{H}{B} \quad (1.4-3)$$

térerősségfüggő sztatikus permittivitás, ill. permeabilitás, vagy az utóbbi reciproka. Kis változások esetén használatosak a munkaponti dinamikus (relatív) értékek:

$$\epsilon_d(E) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dD}{dE}, \quad \mu_d = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}. \quad (1.4-4)$$

Számos további permittivitás, ill. permeabilitás is használatos. Ezek egyikét az 1.4-5. szakaszban tárgyaljuk.

A mennyiségek kapcsolata megadható grafikusán még akkor is, ha a vektorok párhuzamosak, de esetleg ellenkező irányúak és nagyságuk kapcsolata nem egyértékű (pl. ferromágneses anyag hiszterézisgörbéje, 1c ábra). A permittivitás, ill. a permeabilitás ilyenkor kevésbé használható mennyiség.

A (2) általánosítható arra az esetre is, amikor a közeg lineáris, de anizotrop. Ilyenkor ϵ , ill. μ nem skalár, hanem tenzor, amelyet 3-dimenziós kvadratikus mátrixa jellemez. Ezzel az esettel a továbbiakban nem foglalkozunk.

1.4-3. POLARIZÁCIÓ ÉS MÁGNESEZETTSÉG

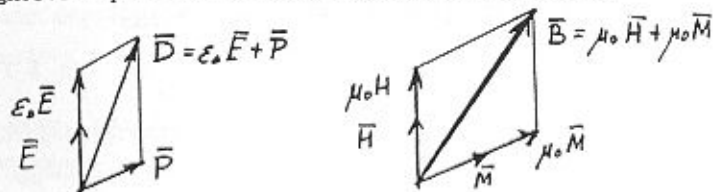
Általános esetben (kristályos közegek, kemény mágnesek) az E és D , ill. a B és H vektorok nem párhuzamosak. Kapcsolatukat ekkor a következő alakban szokás megadni (2. ábra):

$$\boxed{D = \epsilon_0 E + P, \quad B = \mu_0(H + M)} \quad (1.4-5)$$

ahol P az elektromos polarizáció és M a mágnesezettség. Utóbbi helyett a $J = \mu_0 M$ mágneses polarizáció is használatos, amellyel a $B = \mu_0 H + J$ alakot kapjuk. Ez formálisan azt jelenti, hogy a D , ill. a B vektort felbontjuk egy olyan tagra, amely vákuum esetén is fellép ($\epsilon_0 E$, $\mu_0 H$) és egy olyanra, amely a közeg hatását fejezi ki (P , $\mu_0 M$). Az összefüggés alkalmazásához ismernünk kell a

$$\boxed{P = P(E), \quad M = M(H)} \quad (1.4-6)$$

függvénykapcsolatokat. Ez a felbontás fizikai tartalommal is bír. Igazolható ugyanis, hogy P , ill. M a közeg elemi elektromos, ill. mágneses dipólusai momentumának térfogati sűrűsége.



1.4-2. ábra. Az elektromos polarizáció és a mágnesezettség értelmezése

E momentum-sűrűség a legegyszerűbb esetben párhuzamos és arányos a megfelelő térerősséggel:

$$P = \epsilon_0 \chi E, \quad (\chi \geq 0), \quad M = \kappa H, \quad (\kappa > 0 \text{ vagy } \kappa < 0), \quad (1.4-7)$$

ahol χ az elektromos, κ a mágneses szuszceptibilitás. Ilyenkor

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0(1 + \chi) E, \quad B = \mu_0(H + M) = \mu_0(1 + \kappa)H, \quad (1.4-8)$$

vagyis $\epsilon_r = 1 + \chi$ és $\mu_r = 1 + \kappa$. Ha a közeg nem ferromágneses, akkor $|\kappa| < 10^{-5}$ és így $\mu_r \approx 1$.

Az általánosítás két irányban lehetséges: a szuszceptibilitásokat tekinthetjük a térerősségtől független tenzornak (ekkor ϵ és μ is tenzor), vagy a térerősségtől függő skalárnak (amikor ϵ és μ is függ a térerősségtől). Az általános esetet az (5) és (6) alakok jelentik.

1.4-4. KONDUKTIVITÁS

Tekintsük most az áramsűrűségekre vonatkozó $J = J(E)$ kapcsolatot. A töltött részecskék a rájuk ható $Q \cdot E$ erő hatására mozognak. Izotrop közegben a töltések v egyensúlyi átlagsebessége és így a $\rho \cdot v$ áramsűrűség is arányos az E elektromos térerősséggel:

$$\boxed{J = \sigma E}, \quad (1.4-9)$$

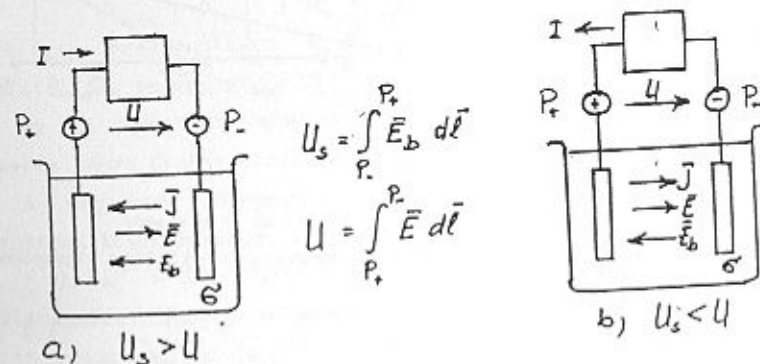
ahol σ a közegre jellemző konduktivitás (fajlagos vezetés, vezetőképesség; SI-egysége S/m). A σ jel mellett a γ és a κ is használatos. A gyakorlatban a $\rho = 1/\sigma$ rezisztivitás (fajlagos ellenállás; SI-egysége $\Omega \cdot m$) az elterjedtebb.

Nemlineáris közegben σ az E térerősség függvénye. Lineáris és anizotrop közegben J és E nem egyirányúak, ekkor σ 3-dimenziós tenzor.

A (9) még némi általánosítást igényel. A töltésekre a $Q \cdot E$ elektromos erőn kívül hathat egy F_b nem elektromos eredetű erő is. Ezeket egy E_b "beiktatott" elektromos térerősséggel írhatjuk le, ahol $E_b = F_b/Q$. Ilyen beiktatott elektromos térerősséget jelenthet például egy mágneses térben mozgó vezetőben fellépő $u \times B$ indukált elektromos térerősség. Ilyen módon írjuk le egy akkumulátor elektróda-elektrolit határfelületén fellépő elektrokémiai potenciálugrásokat is $\int E_b dl$ alakban. Az eredő erőt jelentő térerősség E és E_b összege, vagyis a (9) általánosabb alakja

$$J = \sigma(E + E_b). \quad (1.1-10)$$

Az E_b hatását a 3. ábra érzékelteti. Úgy tekintettük, mint ha a kémiai eredetű E_b (amely a pozitív töltéseket a negatív elektródától a pozitív felé mozgatja) az elektrolitban lépne fel. A 3a ábrán az akkumulátor kisülési állapota látható: az áram az E_b hatására folyik az E ellenében. A 3b ábrán a feltöltési állapot látható: Most $U > U_s$, így $E > E_b$: az áram az E hatására folyik az E_b ellenében.



1.4-3. ábra. A beiktatott térerősség értelmezése

Végeredményben az áramsűrűséget kétféleképpen adhatjuk meg: vagy $\rho \cdot v$ konvektív áramsűrűségként, vagy $\sigma(E + E_b)$ konduktív (vezetési) áramsűrűségként. Az előbbi felfogás az általánosabb, de közegekben többnyire az utóbbi a kényelmesebb. Formálisan az áramsűrűség általános kifejezése

$$J = \sigma(E + E_b) + \rho v. \quad (1.4-11)$$

A kétféle áramsűrűség nem szokott ugyanabban a pontban fellépni.

14-5. KOMPLEX ANYAGJELLEMZŐK

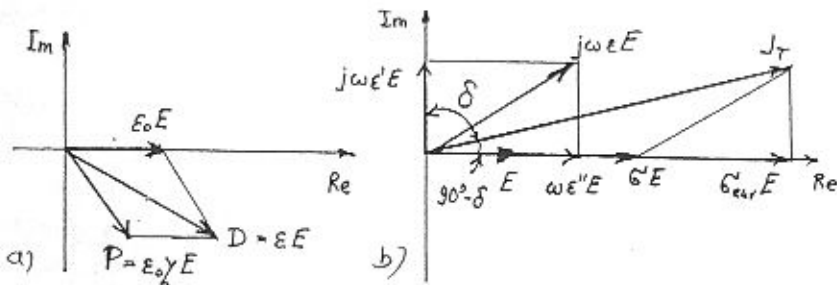
Rosszul vezető vagy rosszul szigetelő közegekben az E térerősség hatására D elektromos eltolás és J áramsűrűség egyaránt fellép. A totális áramsűrűség kifejezése olyan pontban, ahol sem beiktatott térerősség, sem konvektív áramsűrűség nincs

$$J_T = J + J_D = \sigma E + \frac{\partial D}{\partial t} = \sigma E + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E + P). \quad (1.4-12)$$

Szorítkozzunk szinuszos időbeli változásra és térjünk át a komplex írásmódra (a mennyiségek komplex jellegét nem jelöljük külön; pl. E a komplex csúcserőérték jelöli, mindhárom rendező komplex):

$$J_T = \sigma E + j \omega (\epsilon_0 E + P). \quad (1.4-13)$$

Az elemi dipólusok polarizáltságát leíró P elektromos polarizáció a tehetetlenség miatt fázisban késik az E térerősséghez képest (4a ábra, amelyen a fázorok vannak feltüntetve, a térbeli vektorok egyirányúak).



1.4-4. ábra. A komplex szuszceptibilitás és permittivitás értelmezése

Ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy a szuszceptibilitást komplexnek tekintjük

$$\chi = \chi' - j \chi'' \quad (1.4-14)$$

alakban, ahol χ' és χ'' egyaránt pozitív (ez indokolja az előjel választást). Ezzel (13) a következő alakot ölti

$$J_T = \sigma E + j \omega \epsilon_0 E + j \omega \epsilon_0 (\chi' - j \chi'') E = [\sigma + j \omega \epsilon_0 (1 + \chi' - j \chi'')] E.$$

Ezt úgy foghatjuk fel, hogy az ϵ permittivitás maga is komplex:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi') - j \epsilon_0 \chi'' = \epsilon' - j \epsilon''; \quad \epsilon' = \epsilon_0 (1 + \chi'), \quad \epsilon'' = \epsilon_0 \chi''. \quad (1.4-15)$$

A totális áramsűrűség a következőképpen fejezhető ki:

$$J_T = [(\sigma + \omega \epsilon'') + j \omega \epsilon'] E; \quad \epsilon = \epsilon' - j \epsilon''. \quad (1.4-16)$$

Ez úgy értelmezhető, hogy a közegnek egy $\sigma_{ekv} = \sigma + \omega \epsilon''$ ekvivalens konduktivitása és ϵ' permittivitása van. A totális áramsűrűség fázisban $90^\circ - \delta$ szöggel siet a térerősséghez képest, ahol a 4b ábra alapján a δ veszteségi szögre írható, hogy

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma + \omega \epsilon''}{\omega \epsilon'}. \quad (1.4-17)$$

Többnyire a $\operatorname{tg} \delta$ veszteségi tényezőt ismerjük, amely - a torzított ábrától eltérően - igen kis értékű (10^{-4} és 10^{-1} közötti értékek a tipikusak). Ennek alapján

$$J_T = (\sigma_{ekv} + j \omega \epsilon') E; \quad \sigma_{ekv} = \omega \epsilon' \operatorname{tg} \delta. \quad (1.4-18)$$

Stokásos a totális áramsűrűség (16) alakját a következőképpen is kifejezni:

$$J_T = j \omega \epsilon' \left(1 - j \frac{\sigma + \omega \epsilon''}{\omega \epsilon'} \right) E = j \omega \epsilon' (1 - j \operatorname{tg} \delta) E.$$

Ez úgy fogható fel, hogy a totális áramsűrűség egy eltolási áram, de a permittivitás egy ϵ_{ekv} komplex ekvivalens permittivitás:

$$J_T = j \omega \epsilon_{ekv} E; \quad \epsilon_{ekv} = \epsilon' (1 - j \operatorname{tg} \delta). \quad (1.4-19)$$

Mivel a (17) értelmében

$$\epsilon_{ekv} = \epsilon' - j \left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega} \right), \quad (1.4-20)$$

ezért nagy frekvenciákon, amikor $\epsilon'' \gg \sigma/\omega$, az ekvivalens komplex permittivitás megegyezik a (15) szerinti komplex permittivitással.

Az itt bevezetett komplex anyagjellemzőknek mind a valós, mind a képzetes része frekvenciafüggő.

A mágneses közegekben fellépő veszteség még bonyolultabb jelenségek következménye. Első közelítésben itt is egy $\mu = \mu' - j \mu''$ ($\mu' > 0$, $\mu'' > 0$) komplex permeabilitással vehetjük figyelembe a veszteségeket. Vezető mágneses közegben fellép még az örvényáramok okozta veszteség is (4.2-4. szakasz), a hiszterézisveszteség és más veszteségek is.

1.5-1. AZ ENERGIAMÉRLEG

Egy V térfogatban felhalmozott $W = W(t)$ elektromágneses energia két okból változhat az időben. Egyrészt a térfogatban felléphetnek olyan $P = P(t)$ teljesítményű folyamatok, amelyek $P > 0$ esetén a tér energiáját csökkentik (pl. egy feltöltött kondenzátor kiszül egy ellenálláson: az elektromos energia hővé válik), ill. $P < 0$ esetén a térenergiát növeli (pl. egy akkumulátor feltölt egy kondenzátort). Másrészt a térfogatot határoló A zárt felületen átáramló vagy átsugárzó $P_S = P_S(t)$ teljesítmény csökkenti a térenergiát, ha $P_S > 0$, ill. növeli azt, ha $P_S < 0$ (pl. egy vezetékpáron elvezetünk, ill. betáplálunk teljesítményt). Az energiamérleg ezek szerint a következő:

$$\frac{dW}{dt} + P + P_S = 0. \quad (1.5-1)$$

Írjuk le az itt szereplő három mennyiséget egy-egy sűrűség jellegű mennyiséggel. Ezek: a $w = w(r, t)$ energiasűrűség (SI-egysége: J/m^3):

$$W = \int_V w \, dV; \quad w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}, \quad (1.5-2)$$

a $p = p(r, t)$ teljesítménysűrűség (SI-egysége: W/m^3):

$$P = \int_V p \, dV; \quad p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}, \quad (1.5-3)$$

és az $S = S(r, t)$ teljesítményáram-sűrűség, az ún. Poynting vektor (SI-egysége: W/m^2):

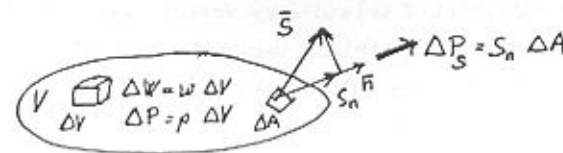
$$P_S = \oint_A S \, dA; \quad S_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_S}{\Delta A}, \quad (1.5-4)$$

Az energiamérleg ezekkel a következő alakban is írható (1. ábra):

$$\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + p \right) dV + \oint_A S \, dA = 0.$$

Az utolsó tag felírható $\text{div } S$ térfogati integráljaként is. A szokásos megfontolással az energiamérleg következő alakjához jutunk:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + p + \text{div } S = 0. \quad (1.5-5)$$



1.5-1. ábra. Az energiasűrűség, a teljesítménysűrűség és a Poynting vektor (a teljesítményáram-sűrűség) értelmezése

Alább igazoljuk, hogy e három mennyiség a következőképpen fejezhető ki az elektromágneses teret leíró mennyiségekkel:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.5-6)$$

$$p = E J, \quad (1.5-7)$$

$$S = E \times H. \quad (1.5-8)$$

Mind az energiasűrűség, mind a Poynting vektor kifejezésében intenzitás mennyiségek és gerjesztettség mennyiségek is szerepelnek. Az egyes mennyiségeket a következő szakaszokban értelmezzük.

A felírt összefüggések igazolásához induljunk ki a gerjesztési törvény (1.3-5) és az indukció törvény (1.2-13) alakjából:

$$\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Szorozzuk meg skalárisan az első egyenletet E -vel, a másodikat $-H$ -val és adjuk össze a két egyenletet:

$$E \text{ rot } H - H \text{ rot } E = E J + E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Mivel $\text{div } (E \times H) = H \text{ rot } E - E \text{ rot } H$, ezért az egyenlet nullára redukált alakja így is felírható:

$$\left(E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t} \right) + E J + \text{div } (E \times H) = 0.$$

A (6), (7) és (8) megfeleltetésekkel ebből éppen az energiamérleg (5) alakja adódik. Az egyes tagok formal egyezése még nem jelenti az egyértelmű bizonyítását annak, hogy éppen ez a megfeleltetés a helyes. Az ebből levonható további következtetéseket azonban a gyakorlat sokoldalúan alátámasztotta, így a megfeleltetések helyesnek tekinthetjük.

Megemlítjük, hogy az előző megfontolások alapján teljesítményáram-sűrűség vektornak tekinthetünk egy olyan $S' = (E \times H) + V$ vektort is,

ahol $\text{div } \mathbf{V} = 0$, de egyébként \mathbf{V} tetszőleges vektor. Az S' zárt felület menti integrálja ugyanazt a P_S teljesítményt adja, mint az S integrálja. Relativitáselméleti megfontolásokból azonban az következik, hogy $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ a helyes teljesítményáramlás-sűrűség vektor.

1.5-2. ENERGIASŰRŐSÉG, MUNKASŰRŐSÉG

Vizsgáljuk meg részletesebben az (1), ill. az (5) energiamérlegben szereplő egyes tagok jelentését.

Az energiasűrűség idő szerint deriváltjára vonatkozó (6) szerinti

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

összefüggés a következőket jelenti. Legyen valamely t_1 időpontban a térjellemzők értéke E_1 , D_1 , ill. H_1 , B_1 , míg egy t_2 időpontban E_2 , D_2 , ill. H_2 , B_2 . A t_1 -beli állapotból kiindulva a t_2 -beli állapot eléréséhez szükséges munka térfogati sűrűsége

$$\Delta w = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial w}{\partial t} dt = w(t_2) - w(t_1), \quad (1.5-9)$$

ahol $w(t_2) = w_2$, ill. $w(t_1) = w_1$ a munkasűrűség a t_2 , ill. a t_1 időpontban. A munkasűrűségek különbsége

$$w_2 - w_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dt.$$

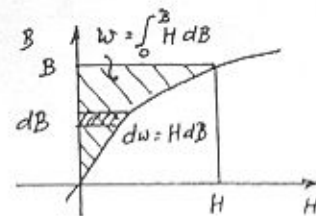
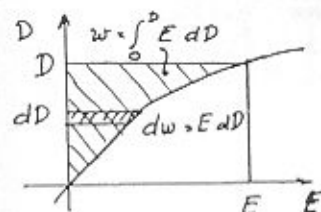
A láncszabály alkalmazásával a következő összefüggést kapjuk:

$$w_2 - w_1 = \int_{D_1}^{D_2} \mathbf{E} dD + \int_{B_1}^{B_2} \mathbf{H} dB. \quad (1.5-10)$$

Tekintsük először azt a speciális, de gyakorlatilag fontos esetet, amikor \mathbf{E} és \mathbf{D} , ill. \mathbf{H} és \mathbf{B} párhuzamosak, az $E(D)$, ill. a $H(B)$ függvénykapcsolat kölcsönösen egyértékű és a függvénygörbe átmegegyezik az origón (2. ábra). Legyen $E_1 = 0$, ill. $H_1 = 0$, rendeljük ehhez az állapothoz önkényesen, de logikusan a $w_1 = 0$ értéket. Ekkor a

$$w = \int_0^D E(D) dD + \int_0^B H(B) dB \quad (1.5-11)$$

munkasűrűség energiasűrűségnek is tekinthető, mert a befektetett munka energiaként tárolódik és maradéktalanul visszaalakítható.



1.5-2. ábra. Az elektromos és a mágneses energiasűrűség szemléltetése

Részletesebben kifejtve ez a következőket jelenti. Az egyszerűség kedvéért tekintsük az energiasűrűséget a V térfogatban állandónak. Ekkor egy E_1 , D_1 , ill. H_1 , B_1 állapothoz $W_1 = w_1 \cdot V$ energiát rendelhetünk (11) alapján és hasonló W_2 értelmezése. Ha $E_2 > E_1$ és $H_2 > H_1$, akkor az $1 \rightarrow 2$ átmenet során $W_2 - W_1$ munkát kell végeznünk, és ugyanennyivel nő a tárolt energia. A $2 \rightarrow 1$ átmenet során $W_1 - W_2 = -(W_2 - W_1)$ munka szabadul fel és az energia $W_2 - W_1$ értékkel csökken.

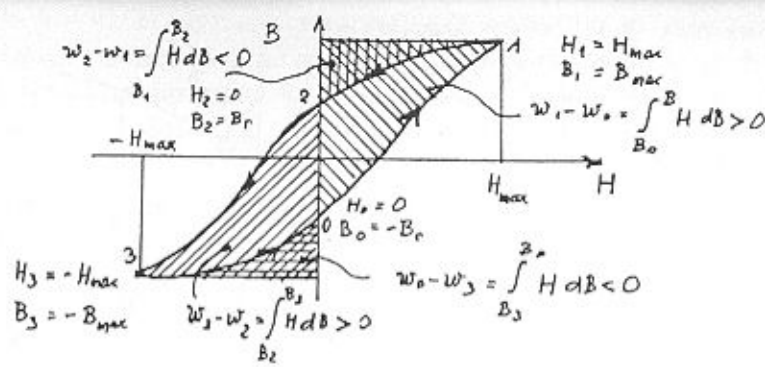
A legegyszerűbb esetben a közeg lineáris és izotrop, vagyis $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ és $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, ahol ϵ , ill. μ nem függ E -től, ill. H -től. Ekkor (11) a

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (1.5-12)$$

alakra egyszerűsödik.

Ha a karakterisztika nem egyértékű, akkor (10) csak a mu munkasűrűség megváltozásának tekinthető, amely nem azonosítható a tárolt energia megváltozásával. A folyamat ilyenkor nem reverzibilis. Ha egy állapotból elindulunk és ugyanoda visszatérünk, akkor a két állapotbeli energia (bárhogyan is értelmezzük azt) megegyezik, de közben a munkavégzés mégsem nulla.

Illusztrációként tekintsük a 3. ábrán vázolt mágneses histerézishurkot. Induljunk ki például a $H = 0$, $B = -B_r$ állapotból. A felmágnesezéshez ($0 \rightarrow 1$ szakasz) a $\backslash\backslash\backslash$ vonalkázott területtel arányos munkát kell befektetni. Ez a terület nem tekinthető tárolt energiának. A lemágnesezés során először valóban felszabadul munka ($1 \rightarrow 2$ szakasz, $|||$ vonalkázott terület), majd ismét munkát kell befektetni ($2 \rightarrow 3$ szakasz, $///$ vonalkázott terület), majd amikor visszajutunk a kiindulási állapotba, akkor ismét munka szabadul fel ($3 \rightarrow 0$ szakasz, $=$ vonalkázott terület). Végeredményben a histerézishurok által körülzárt területtel arányos munkát kell befektetnünk, amely hővé alakul (hisz-



1.5-3. ábra. A munkasűrűség változása irreverzibilis folyamat esetén (terézis-vesztés). Nincs sok értelme annak, hogy az egyes állapotokhoz energiát rendeljünk, mert az energiának most nincs egyértelmű "munkavégző képesség" jelentése.

1.5-3. TELJESÍTMÉNYSŰRŰSÉG

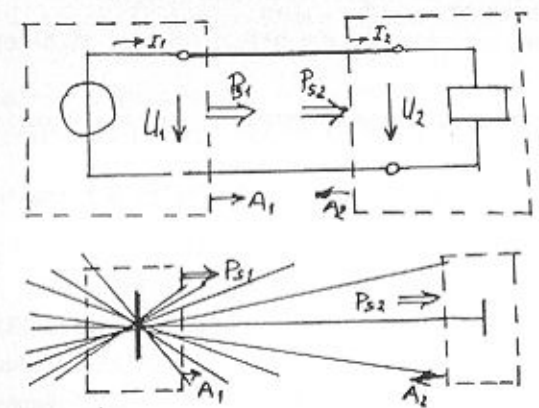
Tekintsük most a teljesítménysűrűség kifejezését konduktív áram esetén, amikor $J = \sigma(E + E_b)$, vagyis $E = J/\sigma - E_b$, így a $p = J E$ összefüggésből

$$p = \frac{J^2}{\sigma} - E_b J \quad (1.5-13)$$

A J^2/σ tag mindig pozitív: ez a hőfejlődés sűrűségét adja meg (az $R I^2$ vagy I^2/G Joule törvény differenciális alakja). A második tag negatív, ha E_b és J egyirányúak (az áram az E_b által kifejezett hatás miatt folyik, a belkutatott erő munkát végez; 1.4-3a ábra). A $-E_b J$ tag pozitív, ha E_b és J ellentétes irányúak, pontosabban ha az általuk bezárt szög 90° -nál nagyobb (ekkor a belkutatott erő fogyasztóként viselkedik, 1.4-3b ábra). A $-E_b J$ tag a feszültségforrás $U_s I$ teljesítményével analóg, az előjelbeli eltérés oka az, hogy U_s nem az E_b -hez, hanem az általa árammentes esetben létrehozott E -hez kapcsolódik.

1.5-4. A POYNTING VEKTOR

Tekintsük végül a teljesítményáram-sűrűséget megadó $S = E \times H$ Poynting vektort. Ez azt fejezi ki, hogy az elektromágneses tér nem csak az energia, hanem a teljesítmény áramlásának is a hordozója. Egy távvezeték esetén csak felfogás kérdése, hogy az energiaáramlást a töltésáramláshoz vagy az elektromágneses térhez rendeljük (4. ábra; az



$$P_{S1} = \int_{A_1} U_1 I_1 \bar{S} d\bar{A}$$

$$P_{S2} = \int_{A_2} U_2 I_2 \bar{S} d\bar{A}$$

$$P_{S1} = \int_{A_1} \bar{S} d\bar{A}$$

$$P_{S2} = \int_{A_2} \bar{S} d\bar{A}$$

1.5-4. ábra. A teljesítményáramlás távvezeték és antenna esetén

1.7-3.4. pontban majd látni fogjuk, hogy a kétféle felfogás valóban ugyanarra az eredményre vezet). Egy antenna esetén azonban nem lehet a leadott, ill. a felvett teljesítményt a $P_S = U \cdot I$ összefüggés alapján számítani, csak a Poynting vektor megfelelő felületre vett integráljaként (4b ábra; egy konkrét esetet a 4.1-4.2. pontban vizsgálunk).

1.5-5. AZ ENERGIAMÉRLEG KOMPLEX ALAKJA

Az időben változó folyamatok vizsgálatánál gyakran a szinuszos esetre szorítkozunk. Az így kapott eredményeket a Fourier transzformáció segítségével általánosíthatjuk. Vezessük le ezért újra az energiámérleget, amikor a mennyiségeket komplex amplitúdójukkal jellemezzük.

A kiinduló egyenletek komplex alakban

$$\text{rot } H = J + j \omega D, \quad \text{rot } E = -j \omega B \quad (1.5-14)$$

Képezzük az első egyenlet konjugáltját, szorozzuk meg E -vel és ebből vonjuk ki a második egyenlet H^* -szorosát (a^* a konjugáltat jelöli):

$$E \text{ rot } H^* - H^* \text{ rot } E = E J^* - j \omega E D^* + j \omega H^* B$$

A bal oldal $-\text{div}(E \times H^*)$ alakban is felírható. Egy V térfogatra való integrálás, a Gauss-Osztrogradszkij tétel alkalmazása és az egyenlet nullára redukálása után kapjuk, hogy

$$j \omega \int_V \frac{1}{2} (H^* B - E D^*) dV + \int_V \frac{1}{2} E J^* dV + \oint_A \frac{1}{2} (E \times H^*) d\bar{A} = 0 \quad (1.5-15)$$

Az $1/2$ tényezőket azért vezettük be, mert a térmennyiségeket a csúcstértékükkel (és nem az effektív értékükkel) szokás jellemezni.

Az utolsó tag a komplex sugárzó teljesítményt adja az S komplex

Poynting vektorral kifejezve:

$$P_S + j Q_S = \oint_A S \, dA, \quad S = \frac{1}{2} (E \times H^*) \quad (1.5-16)$$

A $P + j Q = U I^*$ összefüggés analóglábjára érthető a komplex Poynting vektor kapott kifejezése.

A (15) középső tagja a komplex átalakuló teljesítmény a p komplex teljesítménysűrűséggel kifejezve:

$$P + j Q = \int_V p \, dV, \quad p = \frac{1}{2} E J^* = \frac{1}{2} \frac{J J^*}{\sigma} - \frac{1}{2} E_b J^* \quad (1.5-17)$$

A hálózatokra vonatkozó analóg összefüggések: a disszipációt kifejező $J J^*/2\sigma$ összetevő valós (hatásos teljesítmény), míg a $-E_b J^*$ összetevőnek hatásos és meddő része egyaránt lehet.

Újszerű a (15) első tagja, amely a

$$w_L = \frac{1}{2} (H^* B - E D^*) \quad (1.5-18)$$

energiasűrűség dimenzójú mennyiség, az ún. Lagrange sűrűség térfogati integrálja. Ha a közegeket ϵ és μ anyagállandókkal jellemezhetjük, akkor a Lagrange sűrűség kifejezése

$$w_L = \frac{1}{2} \mu H H^* - \frac{1}{2} \epsilon E E^* \quad (1.5-19)$$

vagyis a mágneses és az elektromos energiasűrűség különbsége. A (15) első tagja tehát a tárolt energiához tartozó meddő teljesítményt jelenti:

$$j Q_W = j \omega \int_V (w_m - w_e) \, dV \quad (1.5-20)$$

A hálózatelmélet alapján érthető az előjel is: a mágneses energiához tartozó meddő teljesítmény pozitív, az elektromos energiához tartozó meddő teljesítmény negatív, mint a tekercs, ill. a kondenzátor esetén.

Tekintsük most azt az általánosabb esetet, amikor a közegek veszteségét a komplex permittivitással és permeabilitással vesszük figyelembe (1.4-5. szakasz):

$$D = \epsilon E, \quad \epsilon = \epsilon' - j \epsilon''; \quad B = \mu H, \quad \mu = \mu' - j \mu'' \quad (1.5-21)$$

A Lagrange sűrűség kifejezése ekkor

$$w_L = \frac{1}{2} (\mu' H H^* - \epsilon' E E^*) - j \frac{1}{2} (\mu'' H^* H + \epsilon'' E^* E) \quad (1.5-22)$$

A (15) első tagjának, a $j \omega w_L$ térfogati integráljának most van valós része is, amely pozitív (disszipált teljesítmény):

$$P_W + j Q_W = \int_V \left(\frac{1}{2} \omega \mu'' H^* H + \frac{1}{2} \omega \epsilon'' E^* E \right) dV + j \omega \int_V (w_m - w_e) dV \quad (1.5-23)$$

A hálózatelméletben P_W a tekercsek, ill. a kondenzátorok veszteségi ellenállásán fellépő teljesítménynek felel meg.

1.6. AZ ALAPTÖRVÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA

1.6-1. A MAXWELL EGYENLETEK

Az elektromágneses tér egyenletét először Maxwell állította össze, ezért ezek az δ nevét viselik. A Maxwell egyenletek szokásos alakja és sorrendje (az egyszerűség kedvéért lineáris izotrop közegre szorítkozva)

$$(I) \quad \text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t},$$

$$(II) \quad \text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$(III) \quad \text{div } B = 0,$$

$$(IV) \quad \text{div } D = \rho,$$

$$(V) \quad D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad J = \sigma(E + E_b),$$

$$(VI) \quad w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (1.6-1)$$

Az egyenletek és a bennük szereplő mennyiségek fizikai tartalma az előző fejezetekből ismert. A Maxwell egyenletek egyes, tapasztalati úton igazolható törvények absztraktabb megfogalmazásai, és pedig az (I) egyenlet az eltolási árammal kiegészített gerjesztési törvény, a (II) egyenlet Faraday indukció törvénye, a (III) egyenlet a fluxusmegmaradás törvénye, a (IV) egyenlet a Gauss törvény. Az (V) és a (VI) egyenlet általánosabb alakjait az 1.4. és az 1.5. fejezetben tárgyaltuk.

Bizonyítható, hogy a Maxwell egyenletek ellentmondásmentes rendszert alkotnak. Láttuk, hogy az (I) egyenlet divergenciája és a (IV) egyenlet a folytonossági egyenletet adja. A (II) egyenlet divergenciájából következik, hogy a (III) egyenlet jobb oldala nem függhet az időtől.

Az eddigi tapasztalat azt igazolta, hogy a Maxwell egyenletek

rendszere teljes is, azaz bármely elektromágneses probléma elvben megoldható a Maxwell egyenletek megoldásával.

A Maxwell egyenletek közvetlenül nyugvó testekre alkalmazhatók. Mozgó testek esetén a Lorentz transzformáció, ill. a relativisztikus elektrodinamika apparátusa alkalmazható. A fénysebességnél jóval kisebb sebességek esetén erre nincs szükség, mert elegendő a mozgási indukálásból adódó $u \times B$ járulékos elektromos térerősséget figyelembe venni.

A Maxwell egyenletek a fizika legátfogóbb törvényei közé tartoznak. Érvényesek időben állandó folyamatokra (elektrosztatika, magnetosztatika, egyenáram elektromos és mágneses tere, egyenáramú hálózatok), ún. lassan változó folyamatokra (hangfrekvenciás technika, erősáramú technika, villamos hálózatok), gyorsan változó folyamatokra (rádióhullámok, mikrohullámú technika), sőt ezen túl a hőhullámok, az optika és a röntgensugárzás tartományában is.

A Maxwell egyenletek érvényességének a kvantum hatások szabnak határt. A Maxwell egyenletek ugyanis statisztikus törvények (mint pl. a Boyle-Mariotte vagy a Gay-Lussac törvény), amelyek akkor érvényesek, ha a folyamatban részt vevő töltés jóval nagyobb az $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C elemi töltésnél és a fellépő energia jóval nagyobb az f frekvenciához tartozó $h \cdot f$ energiakvantumnál, ahol $h = 6,4 \cdot 10^{-36}$ J·s a Planck állandó. A kvantum hatások figyelembe vételéhez a kvantumelektrodinamika módszereire van szükség.

1.6-2. A HATÁRFELTÉTELEK

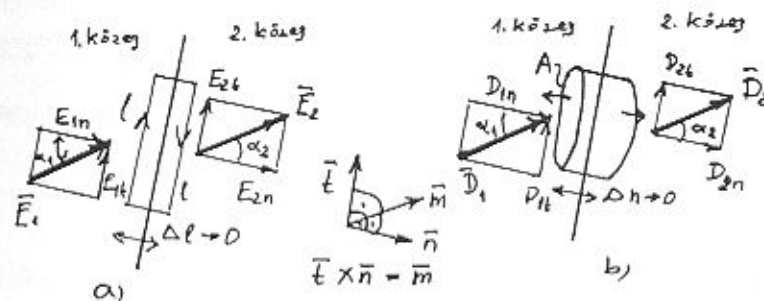
Az elektromágneses feladatok nagy részénél a közeg nem homogén (pl. vezető és szigetelő közegek). Ilyenkor rendszerint úgy járunk el, hogy az egyes közegekben külön-külön megoldjuk a Maxwell egyenleteket, majd gondoskodunk arról, hogy a közegeket elválasztó felületeken is ki legyenek elítelve az egyenletek. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a térjellemző vektoroknak két közeg határán bizonyos folytonossági feltételeknek kell eleget tenniük. Ezek meghatározásához a Maxwell egyenletek integrális alakját alkalmazzuk egy olyan zárt görbére vagy felületre, amely közvetlenül a határfelület két oldalán helyezkedik el. A határ jelentheti a vizsgált térrész peremét, amelyen túl az

erőteret nem akarjuk számítani. Az erre vonatkozó feltételek a peremfeltételek. A folytonossági feltételek és a peremfeltételek közös neve: határfeltételek. Az irodalomban másféle szóhasználat is előfordul.

Az elektromos térerősségre vonatkozó feltétel meghatározásához alkalmazzuk a II. Maxwell egyenlet integrális alakját, vagyis az

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

indukció törvényt az 1a ábrán látható zárt görbére. Legyen ennek mérete olyan kicsi, hogy megengedett az $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_t \cdot l$ közelítés és Δl tartson nullához. Az irányokat is figyelembe véve



1.6-1. Ábra. A tangenciális és a normális komponensek, valamint a mindkettőre merőleges irány két közeg határán

$$E_{1t} \cdot l - E_{2t} \cdot l = - \frac{\partial B_m}{\partial t} \cdot l \cdot \Delta l$$

Mivel $\frac{\partial B_m}{\partial t}$ korlátos, ezért a jobb oldal nullához tart, amivel

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (1.6-1)$$

adódik, vagyis az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonos két közeg határfelületén. Ha speciálisan az 1. közeg ideális vezető (a σ_1 konduktivitás végtelenül nagy), akkor $E_1 = J_1 / \sigma_1 = 0$, így a szigetelő közegben

$$E_t = 0 \text{ ideális vezető felületén,} \quad (1.6-2)$$

vagyis az elektromos térerősség merőleges az ideális vezető felületére. Az (1) egy folytonossági, a (2) egy peremfeltétel.

Az elektromos eltolásra vonatkozó határfeltétel előállításához alkalmazzuk a IV. Maxwell egyenlet integrális alakját, vagyis a

$$\oint_A D \, dA = Q$$

Gauss törvényt az 1b ábrán látható zárt felületre. Az előzővel analóg módon azt kapjuk, hogy

$$-D_{1n} \cdot A + D_{2n} \cdot A = \rho \cdot A \cdot \Delta n + \sigma \cdot A.$$

Ha $\Delta n \rightarrow 0$, akkor csak a felületi töltéssűrűség marad, tehát

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma \quad (1.6-3)$$

adódik. Ha az elválasztó felületen nincs felületi töltéssűrűség, akkor az elektromos eltolás normális komponense folytonos. Ha speciálisan az 1. közeg ideális vezető, akkor $E_1 = 0$, így $D_1 = 0$, tehát a 2. közegben ($\epsilon_2 = \epsilon$)

$$D_n = \sigma, \quad E_n = \frac{\sigma}{\epsilon} \text{ ideális vezető felületén.} \quad (1.6-5)$$

A mágneses indukcióra vonatkozó határfeltétel a III. Maxwell egyenlet integrális alakjából következik:

$$\oint_A B \, dA = 0.$$

A (3) mintájára ebből azt kapjuk, hogy B normális komponense folytonos

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (1.6-5)$$

A mágneses térerősségre vonatkozó határfeltétel előállításához alkalmazzuk az I. Maxwell egyenlet integrális alakját, vagyis az általánosított gerjesztési törvényt az 1a ábra szerinti zárt görbére:

$$\oint_l H \, dl = I + \int_A \frac{\partial D}{\partial t} \, dA.$$

A határfelületen esetleg fellépő K felületi áramsűrűséget is figyelembe véve

$$H_{1t} \cdot l - H_{2t} \cdot l = J_m \cdot l \cdot \Delta l + K_m \cdot l + \frac{\partial D_m}{\partial t} l \cdot \Delta l.$$

Mivel az eltolási áramsűrűség korlátos, ezért

$$H_{2t} = H_{1t} - K_m. \quad (1.6-6)$$

Ha felületi áramsűrűség nincs, akkor a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos. Ha az 1. közeg ferromágneses ($\mu_{r1} \gg 1$), akkor $H_1 = B_1/\mu_1 \approx 0$, így $K = 0$ esetén

$$H_t = 0 \text{ nagypermeabilitású közeg felületén,} \quad (1.6-7)$$

vagyis a mágneses térerősség és az indukció is merőleges a nagypermeabilitású közeg felületére.

Az áramsűrűsége vonatkozó határfeltétel az (I. és a IV. Maxwell egyenletből levezethető) folytonossági egyenlet integrális alakjából határozható meg:

$$\oint_A J \, dA = - \frac{dQ}{dt}.$$

A (3) analógiájára ebből adódik, hogy

$$J_{2n} = J_{1n} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (1.6-9)$$

Az áramsűrűség normális komponense tehát ugrásszerűen változik, ha a határfelületen időben változó felületi töltéssűrűség van. A (3) és a (8) együttesen azt fejezik ki, hogy a $J_T = J + \partial D/\partial t$ totális áramsűrűség normális komponense folytonos. Ha speciálisan az egyik közeg tökéletes szigetelő, akkor a másik közegben az időben állandó áramsűrűség normális komponense nulla.

Vektoriális alakban a folytonossági feltételek a következő alakban fogalmazhatók meg:

$$\begin{aligned} n \times (E_2 - E_1) &= 0, & n \cdot (D_2 - D_1) &= \sigma, \\ n \times (H_2 - H_1) &= K, & n \cdot (B_2 - B_1) &= 0, \\ & & n \cdot (J_2 - J_1) &= - \frac{\partial \sigma}{\partial t}; \end{aligned} \quad (1.6-10)$$

ahol n az 1. közegből a 2. közeg felé mutató felületi normális, a t, n és m egységvektorok ebben a sorrendben jobbsodrású ortogonális rendszert alkotnak (1. ábra).

Az ún. nyílt feladatoknál az erőteret a végtelenbe nyúló tartományban keressük. Ilyenkor a végtelenbeni viselkedés is peremfeltétel. Ez lehet pl. a korlátosság megkövetelése, vagy a térjellemzőknek meghatározott módon ($1/r$, $1/r^2$, stb.) nullához tartása.

1.6-3. A TÖRÉSTÖRVÉNYEK

Az előzők szerint két közeg határán az E és H vektornak a tangenciális, a D, B és J vektornak a normális komponensére vonatkozik folytonossági feltétel. A másik összetevőre vonatkozó feltétel a közegetől is függ. Az egyes vektorok viselkedésének szemléletes jellemzője az ún. töréstörvény, amely kifejezi a vektornak a felületi normállal bezárt α_1 és α_2 szöge tangensének a viszonyát. Az 1. ábrából

látható, hogy bármely v vektorra

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{v_{1t}/v_{1n}}{v_{2t}/v_{2n}} \equiv \frac{v_{1t}}{v_{1n}} \frac{v_{2n}}{v_{2t}}. \quad (1.6-10)$$

A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, amikor mindkét közeg állandó ϵ_1 és ϵ_2 permittivitással, μ_1 és μ_2 permeabilitással, σ_1 és σ_2 konduktivitással jellemezhető.

Az elektromos mennyiségekre vonatkozó határfeltételek

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad D_{2n} = D_{1n} + \sigma, \quad J_{2n} = J_{1n} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (1.6-11)$$

Tekintsük először azt az esetet, amikor mindkét közeg ideális szigetelő, áram bennük nem folyhat, tehát az elválasztó felületre töltés nem kerülhet. Ekkor $D_i = \epsilon_i E_i$ felhasználásával

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}; \quad \frac{1}{\epsilon_2} D_{2t} = \frac{1}{\epsilon_1} D_{1t}, \quad D_{2n} = D_{1n}. \quad (1.6-12)$$

A töréstörvény ebben az esetben

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}; \quad \begin{array}{l} \text{D-re és E-re,} \\ \text{ideális szigetelők,} \\ \sigma = 0. \end{array} \quad (1.6-13)$$

Ha $\epsilon_1 > \epsilon_2$, akkor $\operatorname{tg} \alpha_1 > \operatorname{tg} \alpha_2$, vagyis az E és a D vektor a kisebb permittivitású közegben kisebb szöget zár be a felületi normállal. Ha $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, akkor $\alpha_2 \rightarrow 90^\circ$, ami azt jelenti, hogy az ideális vezetőt formálisan végtelen permittivitású szigetelőnek tekinthetjük. Ez az eredmény azért is formális, mert a vezető felületén töltés van, tehát a (13) nem érvényes.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a közegek konduktivitása véges, de a mennyiségek időben állandók. Ekkor $J_i = \sigma_i E_i$ felhasználásával

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad \sigma_2 E_{2n} = \sigma_1 E_{1n}; \quad \frac{1}{\sigma_2} J_{2t} = \frac{1}{\sigma_1} J_{1t}, \quad J_{2n} = J_{1n}. \quad (1.6-14)$$

A töréstörvény ekkor

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \quad \begin{array}{l} \text{E-re és J-re,} \\ \text{időbeli változás nincs.} \end{array} \quad (1.6-15)$$

A két közeg határán σ felületi töltéssűrűség lép fel:

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n. \quad (1.6-16)$$

Ha az 1. közeg jó vezető, a 2. közeg rossz vezető (rossz szigetelő), vagyis ha $\sigma_1 \gg \sigma_2$, akkor $\alpha_2 \approx 0$, vagyis a rossz vezetőben a vektorok közel merőlegesek a jó vezető felületére.

Tekintsünk most szinuszos időbeli változást. A mennyiségek komplex amplitúdójára vonatkozó egyenletek (11) értelmében

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad D_{2n} = D_{1n} + \sigma, \quad J_{2n} = J_{1n} - J \omega \sigma. \quad (1.6-17)$$

A középső egyenletből σ kifejezését az utolsóba helyettesítve

$$\sigma_2 E_{2n} = \sigma_1 E_{1n} - J \omega (\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n}).$$

A töréstörvény (amely lineárisan polarizált hullám esetén érvényes)

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \left| \frac{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \right|; \quad \begin{array}{l} \text{E-re, D-re és J-re,} \\ e^{j\omega t} \text{ időbeli változás.} \end{array} \quad (1.6-18)$$

Ebből a (13), ill. a (15) következik $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, ill. $\omega = 0$ helyettesítéssel. Az 1.4-5. szakaszban tárgyaltak szerint σ helyett indokoltabb $\omega \epsilon'$ $\operatorname{tg} \delta$ alakban kifejezni a veszteséget. Ezzel

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \left| \frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_2} \frac{1 - j \operatorname{tg} \delta_1}{1 - j \operatorname{tg} \delta_2} \right| = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_2} \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1}. \quad (1.6-19)$$

Mivel többnyire $\operatorname{tg} \delta \ll 1$, ezért $\cos \delta \approx 1$. Időben változó folyamatok esetén tehát a határfeltételeket a veszteségek alig befolyásolják. Ez a magyarázata annak, hogy az elektrosztatikus modell alapján számított maximális térerősség vagy kapacitás időben változó esetre is többnyire elfogadható.

A mágneses mennyiségekre vonatkozó határfeltételek nulla felületi áramsűrűség esetén formálisan megegyeznek az elektromos mennyiségekre vonatkozókkal. A (13) analógiájára ezért közvetlenül felírható, hogy

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \quad \begin{array}{l} \text{H-ra és B-re,} \\ K = 0. \end{array} \quad (1.6-15)$$

Ha $\mu_1 \gg \mu_2$, akkor $\alpha_2 \approx 0$, vagyis a mágneses vektorok közel merőlegesek a nagypermeabilitású közegre, amint azt már megállapítottuk.

1.6-4. AZ ELEKTRODINAMIKA FELOSZTÁSA

A Maxwell egyenletek általános alakjának megoldása nagyon nehéz feladat. Különböző egyszerűsítő feltételezésekkel az egyenletek alakja nagymértékben egyszerűsödik. A következőkben néhány tipikus egyszerűsítési lehetőséget mutatunk be. Ezek alapján kijelölhetők az elektrodinamika fő részterületei is.

(I.) Tekintsük először azt az esetet, amikor időben minden állandónak tekinthető, a töltések sem mozognak, vagyis áram sem

folyik. Formálisan $\partial/\partial t = 0$ és $J = 0$ helyettesítéssel a Maxwell egyenletek ekkor két független egyenletcsoportra bomlanak, éspedig egyfelől az elektrosztatika egyenleteire:

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } D = \rho, \quad D = \epsilon_0 E + P; \quad (1.6-21)$$

másfelől a magnetosztatika egyenleteire:

$$\text{rot } H = 0, \quad \text{div } B = 0, \quad B = \mu_0(H + M). \quad (1.6-22)$$

Meg kell még adni a P elektromos polarizációnak az E elektromos térerősségtől való függését (a legegyszerűbb esetben $P = \epsilon_0 \chi E$ és ezért $D = \epsilon E$), ill. az M mágneszettségnek a H mágneses térerősségtől való függését (erre $M = \kappa H$ nem lehet mindenütt érvényes, mert akkor nincs mágneses erőter).

(II.) Tekintsük most azt az esetet, amikor időben minden állandó, de a töltések mozognak, vagyis állandó áram folyik. A Maxwell egyenletek egy csoportja ekkor a stacionárius áramlás egyenleteire vezet. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a töltéssűrűség és a konvektív áramsűrűség nulla. Az egyenletek ekkor

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } J = 0, \quad J = \sigma(E + E_b). \quad (1.6-23)$$

A második egyenlet az I. Maxwell egyenlet divergenciájából következik. A Maxwell egyenletek második csoportjából a stacionárius mágneses tér egyenletei adódnak:

$$\text{rot } H = J, \quad \text{div } B = 0, \quad B = \mu_0(H + M). \quad (1.6-24)$$

A legegyszerűbb esetben $B = \mu H$. A J áramsűrűséget adott mennyiségnek tekintjük. Az áramsűrűséget esetleg a (23) egyenletek megoldásával határozzuk meg.

(III.) Vegyük most már figyelembe az időbeli változást, de feltételezzük, hogy az eltolási áramsűrűség elhanyagolható a vezetési áramsűrűség mellett, vagyis $|\partial D/\partial t| \ll |J|$. Ebben a kvázistacionárius közelítésben az egyenletek már szorosan kapcsolódnak. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk arra az esetre, amikor az ϵ , μ , σ anyagjellemzők értelmezettek és konvektív áram nincs. Ekkor az egyenletek:

$$\text{rot } H = J, \quad \text{div } B = 0, \quad B = \mu H, \quad (1.6-25)$$

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div } D = \rho, \quad D = \epsilon E, \quad J = \sigma(E + E_b).$$

Ha az áramsűrűség adottnak tekinthető, akkor az első sorban álló

egyenletek formailag a (22) egyenletekkel megegyeznek, csak most J , B és H az időtől is függ. Ez indokolja a "kvázistacionárius" elnevezést. Ha azonban az áramsűrűséget az elektromos térerősségből kell meghatározni, akkor az (az indukció törvény értelmében) maga is függ a mágneses erőterétől, ill. annak idő szerinti deriváltjától.

A kvázistacionárius közelítés jogosságát esetenként meg kell vizsgálni. Mivel szinuszos időbeli változás esetén $\partial D/\partial t = j \omega \epsilon E$ és $J = \sigma E$, ezért az eltolási áram akkor elhanyagolható, ha

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \text{vagy} \quad f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon}. \quad (1.6-26)$$

Ez fém belsejében biztosan teljesül, mert pl. rézre $\sigma = 57 \cdot 10^6$ S/m, így $f \ll (10^{18}/\epsilon_r)$ Hz adódik, ami bármilyen ésszerű ϵ_r esetén teljesül. (A vezető permittivitása nehezen értelmezhető. Az előzőleg említett $\epsilon = \infty$ csak formailag érvényes és itt nem alkalmazható!)

(IV.) Az eltolási áram figyelembe vételével az általános esethez jutunk, az elektromomágneses hullámok egyenleteihez. Ha ϵ , μ és σ értelmezett, akkor az egyenletek a következő alakúak:

$$\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \text{div } B = 0, \quad B = \mu H, \quad (1.6-27)$$

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div } D = \rho, \quad D = \epsilon E, \quad J = \sigma(E + E_b) + \rho v.$$

Ebben az esetben már igen szoros kölcsönhatás lép fel az elektromos és a mágneses tér között: nem csak a mágneses tér időbeli változása indukál elektromos teret, hanem az elektromos tér időbeli változása - eltolási áramként - mágneses teret gerjeszt.

Tisztában kell lennünk azzal, hogy az időbeli változatlanúság feltételezése csak közelítés. Miután nincsenek tökéletes szigetelőanyagok, ezért a töltés nem lehet időben állandó. A permanens mágnesek által létrehozott időben állandó mágneses tér háttérében is van mozgás (a rendezett spinű elektronok). Ha azonban adott mélységű megismerési szintig és pontosságig akarunk csak eljutni, akkor a különböző közelítések nem csak megengedettek, hanem cél- szerűek is.

1.6-5. A HÁLÓZATEGYENLETEK

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a hálózat egyenletek is levezethetők a Maxwell egyenletekből. Mivel a hálózat egyenletek tapasztalati úton igazolhatók, ezért illymódon a Maxwell egyenletek helyességének

egy további közvetett igazolásához jutunk.

Alkalmazzuk az I. és IV. Maxwell egyenletből következő

$$\oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{dQ}{dt}$$

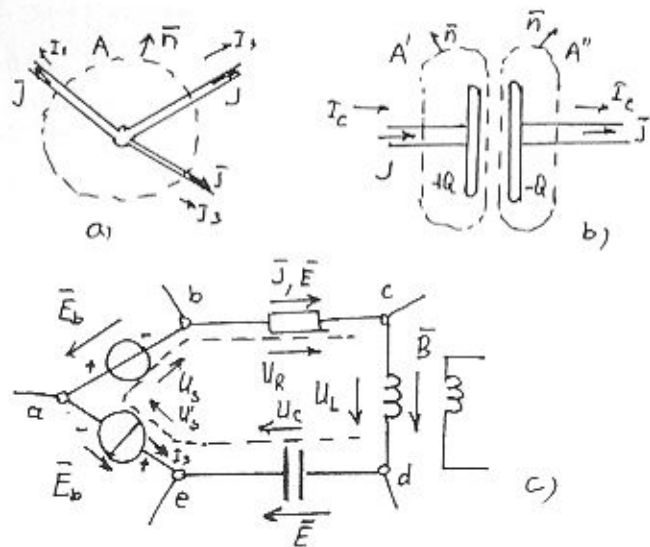
folytonossági egyenletet a 2a ábrán látható A felületre, amely egy csomópontot vesz körül, ahol töltés nem halmozódhat fel. Az egyes vezetékek A_k keresztmetszetére J felületmenti integrálja az I_k áramot adja, így

$$\sum_k I_k = 0 \quad \text{zárt felületre} \quad (1.6-28)$$

adódik, vagyis Kirchhoff áramtörvénye. Másrészt a folytonossági egyenletet a 2b ábra bármelyik felületére alkalmazva

$$I_C = \frac{dQ}{dt} \quad (1.6-29)$$

adódik, vagyis a kondenzátor áramának és töltésének kapcsolata.



1.6-2. Ábra. A hálózategyenletek előállítás a Maxwell egyenletekből

Alkalmazzuk most a II. Maxwell egyenletből következő

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\psi}{dt}$$

indukció törvényét a 2c ábrán jelölt zárt görbére. Az ideális vezetőknek tekintett összekötő vezetékekre és az ideális tekercsre (c,d szakasz)

$\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = 0$, míg a többi kétpólusra vezessük be az

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_S, \quad \int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_R, \quad \int_d^e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_C, \quad \int_e^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U'_S \quad (1.6-30)$$

Jelöléseket. A forrásokra $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_b$ (1.4-4. szakasz). Jelölje az indukált feszültséget

$$U_L = \frac{d\psi}{dt} \quad (1.6-31)$$

Ezeket az indukció törvény integrális alakjába helyettesítve

$$U_S + U_R + U_C + U'_S = -U_L$$

Nullára redukálva és tetszőleges számú kétpólusra általánosítva

$$\sum_k U_k = 0 \quad \text{zárt görbe mentén,} \quad (1.6-32)$$

vagyis kiadódott Kirchhoff feszültségtörvénye.

Az elektromágneses térelmélet egyik feladata az ellenállásra U és I, a tekercsre ψ és I, a kondenzátorra Q és U kapcsolatának feltárása, vagyis lineáris esetben az R rezisztencia, az L induktivitás és a C kapacitás meghatározása.

1.7. NÉHÁNY EGYSZERŐ FELADAT MEGOLDÁSA

Egyszerű geometriájú elrendezések esetén reményünk lehet arra, hogy a Maxwell egyenletek integrális alakjából meg tudjuk határozni az elektromos vagy a mágneses teret. Ez nem csak a fogalmak és a törvények jobb megértését segíti elő, de bonyolultabb elrendezések számításához is adhat támpontot. A példák egy része a Fizika tárgyból már ismert lehet.

1.7-1. ELEKTROSZTATIKA ÉS STACIONÁRIUS ÁRAMLÁS

1.7-1.1. A módszer elve és alkalmazása gömbszimmetrikus esetben

Az elektrosztatikus feladatok és a stacionárius áramlási feladatok analógok, így célszerű együtt tárgyalni őket. A számítási módszert a koncentrikus gömbalakú elektródák közötti erőter számításával illusztráljuk.

Elektrosztatikus feladatnál legyenek adottak az ideális vezetőknek tekintett elektródák alakja és töltése, továbbá az ideálisnak tekintett szigetelők (dielektrikumok) permittivitása. Stacionárius

áramlási feladatnál legyenek adottak az ideális vezetőnek tekintett elektródák alakja és árama, továbbá a rossz vezetőnek vagy rossz szigetelőnek tekintett közegek konduktivitása (1. ábra).

Tételezzük fel, hogy kvalitatív megfontolások alapján sikerül olyan zárt felületeket találnunk, amelyek mentén a D elektromos eltolás, ill. a J áramsűrűség vagy állandó, vagy a felület egy A részén állandó, a felület többi részén pedig nullának tekinthető, továbbá a D , ill. a J vektor a felületre merőleges. Ekkor a Gauss törvény, ill. az áramsűrűség és az áram kapcsolata a következő alakra egyszerűsödik:

$$Q = \oint_A D \, dA = D \cdot A, \quad I = \int_A J \, dA = J \cdot A, \quad (1.7-1)$$

ahol Q az A felület által körülzárt töltés, ill. I az (eredő) áram. Ennek alapján D , ill. J kifejezhető az adottnak tekintett Q töltéssel ill. I árammal. Az 1. ábrán vázolt elrendezésben a gömbi szimmetria miatt (a hozzávezetés által okozott kis aszimmetriát elhanyagolva) a koncentrikus gömbök a megfelelő felületek, így (1) alapján

$$D_r(r) = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad J_r(r) = \frac{I}{A} = \frac{I}{4\pi r^2}. \quad (1.7-2)$$

A $D = \epsilon E$, ill. a $J = \sigma E$ összefüggés felhasználásával kifejezhető az elektromos térerősség. Az 1. ábrán vázolt elrendezésben

$$E_r(r) = \frac{1}{\epsilon} D_r(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}, \quad E_r(r) = \frac{1}{\sigma} J_r(r) = \frac{I}{4\pi \sigma r^2}. \quad (1.7-3)$$

Ennek alapján meghatározható egy r_0 helyvektorú pontra vonatkoztatott potenciálfüggvény:

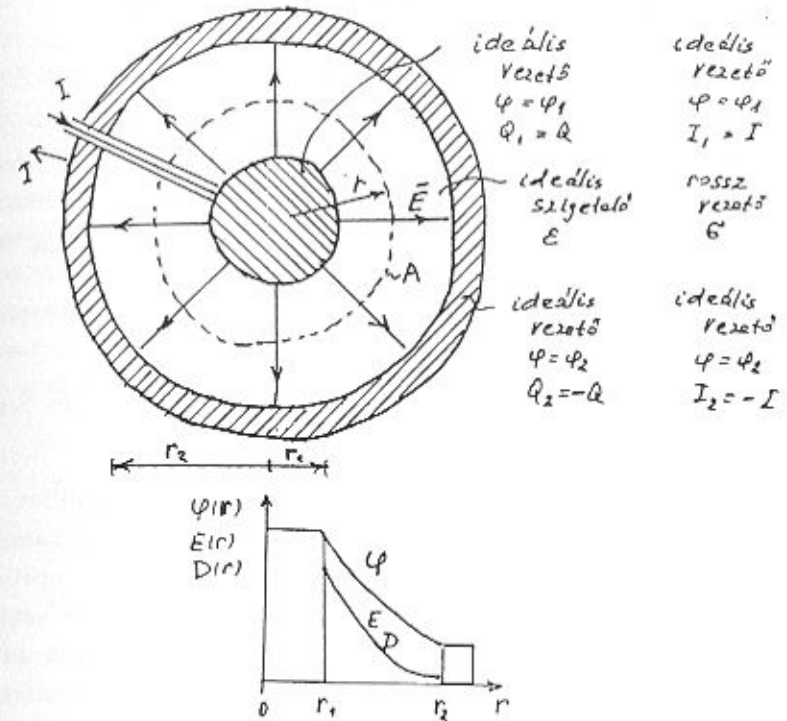
$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E \, dl, \quad (1.7-4)$$

vagy két pont közötti feszültség:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E \, dl = \varphi(r_1) - \varphi(r_2). \quad (1.7-5)$$

Mivel elektrosztatikus és stacionárius áramlási térben E bármely zárt görbe menti integrálja nulla, ezért a potenciál és a feszültség nem függ az integrációs görbétől, csak a végpontok helyétől.

Az 1. ábrán vázolt példában válasszuk a végtelen távoli pontot nulla potenciálúnak. A potenciálnak a sugártól való függése ekkor



1.7-1. ábra. Koncentrikus fémgömbök között kialakuló elektromos tér

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} E_r(r) \, dr = \int_r^{r_1} \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \, dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}, \quad \text{ill. } \varphi(r) = \frac{1}{4\pi \sigma r}. \quad (1.7-6)$$

A két elektróda közötti feszültség

$$U = U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad \text{ill. } U = \frac{I}{4\pi \sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.7-7)$$

Eredményeink akkor is érvényesek, ha a külső gömb töltése $Q_2 \neq -Q$, ill. árama $I_2 \neq -I$. Ilyenkor a külső gömbön kívül is van erőter.

Az erőter a két gömb között megegyezik azzal az erőterrel, amelyet a középpontban lévő Q pontszerű töltés, ill. I pontszerű áram hoz létre (helyettesítő töltés, ill. áram).

Gyakran nem az elektródák töltése, ill. árama, hanem potenciálja az adott. Ilyenkor ismeretlen Q_1, Q_2, \dots töltésekkel, ill. I_1, I_2, \dots áramokkal végezzük el a számítást, felírjuk az elektródák potenciáljának kifejezését és az így előálló lineáris egyenletrendszerből ki-

fejezzük az ismeretlen töltéseket, ill. áramokat. Példánkban adott U feszültség esetén

$$Q = 4 \pi \epsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1} U, \text{ ill. } I = 4 \pi \sigma \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1} U. \quad (1.7-8)$$

Abban az egyszerű esetben, amikor csak két elektródának van +Q, -Q töltése, ill. +I, -I árama, a többi elektróda töltése, ill. árama nulla, akkor a két elektróda közötti U feszültség meghatározásával kifejezhető az elektródapár C kapacitása, ill. G konduktanciája vagy R = 1/G rezisztenciája:

$$C = \frac{Q}{U}, \text{ ill. } G = \frac{I}{U}. \quad (1.7-9)$$

Példánkban (amelyikben csak két elektróda szerepel)

$$C = 4 \pi \epsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}, \text{ ill. } G = 4 \pi \sigma \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}. \quad (1.7-10)$$

Az általánosabb esettel az 1.7-1.5. pontban foglalkozunk.

A kvalitatív kép kialakítását megkönnyíti, ha felvázoljuk az erővonalakat és az ekvipotenciális felületeket. Az erővonalak (konkrétan az E-, D-, ill. J-vonalak) olyan irányított görbék, amelyek érintője megadja az ábrázolt vektor irányát, sűrűségük pedig a vektor nagyságával arányos. A D-vonalak a pozitív töltéseken erednek és a negatív töltéseken végződnek, a J-vonalak irányát az áramirány határozza meg. Példánkban az erővonalak gömbszimmetrikus eloszlásúak, radiálisan kifelé irányulnak (1. ábra). Az ekvipotenciális felületek mentén a potenciál állandó. Az ideális vezetőnek tekintett elektródák ekvipotenciális felületek. Az erővonalak az ekvipotenciális felületekre merőlegesek. Ha ugyanis E-nek van egy felülettel párhuzamos összetevője, akkor a felület mentén változik a potenciál. Példánkban az ekvipotenciális felületek koncentrikus gömbök, de ezeket nem ábrázoltuk. A 2.1-4. szakaszban ezeken az elveken alapuló szerkesztési eljárást fogunk bemutatni.

Mind az általános megfontolásokból, mind a vizsgált példából látható, hogy a megegyező elrendezésű elektrosztatikus és stacionárius áramlási feladatok matematikailag azonosak. Ha az egyik feladatot megoldottuk, akkor a betűcserével megkapjuk a másik feladat megoldását is. Az analóg mennyiségek:

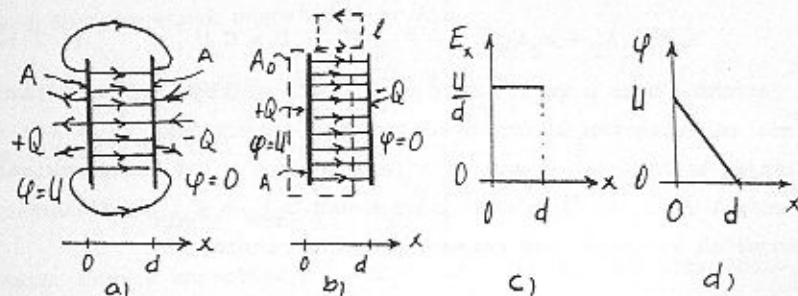
elektrosztatika: Q φ U ε D E C

stacionárius áramlás: I φ U σ J E G

A továbbiakban elsősorban az elektrosztatikus feladattal foglalkozunk.

1.7-1.2. Síkelektrodák közötti erőter

Vizsgáljuk az elektromos teret két nagyméretű, egyforma alakú párhuzamos síklap alakú vezető között, amelyeken +Q, ill. -Q töltés helyezkedik el (2a ábra). Az erővonalakat felvázolva látható, hogy azok döntő többsége a két elektróda között helyezkedik el, ott párhuzamosak és közelítőleg állandó sűrűségűek (homogén erőter). Ha a lemezek d távolsága jóval kisebb a lemezek A felületének keresztirányú méreténél, akkor az erővonalak a 2b ábrán láthatóval közelíthetők. A "szórt" külső tér elhanyagolásával kapott erővonalak elvileg helytelen, mert a 2b ábrán bejelölt zárt görbére E vonalmenti integrálja nem nulla.



1.7-2. ábra. Párhuzamos síklemezek között kialakuló elektromos tér

A közelítő erővonalak alapján $Q = D \cdot A$, ahol A az elektródák egyik oldalának felülete. Ebből következik, hogy

$$E_x(x) = \frac{Q}{\epsilon A}, \quad \varphi(x) = \int_x^d \frac{Q}{\epsilon A} dx' = \frac{Q}{\epsilon A} (d - x), \quad U = \frac{Q}{\epsilon A} d, \quad (1.7-11)$$

ahol ε az elektródák közötti közeg permittivitása. A télerősség változását a 2c, a potenciálét a 2d ábra mutatja. A síkkondenzátor kapacitásának közelítő kifejezése

$$C = \frac{\epsilon A}{d}. \quad (1.7-12)$$

Ezek az eredmények a homogén erőterrel történő közelítés alapján megkaphatók akár a $\sigma = D$ (ahol $\sigma = Q/A$), akár az $U = E \cdot d$ összefüggésből kiindulva is. Ha ismert az E_{\max} legnagyobb megengedett télerősség, akkor az $U_{\max} = E_{\max} \cdot d$ legnagyobb megengedett feszültség könnyen számítható.

A 2a ábra erővonalképéből látható, hogy adott Q esetén a homogén

térrészben kisebb az erővonalsűrűség, mint amit a szórt tér elhanyagolásával számítottunk. Ezért D , E és U valóságos értéke valamivel kisebb, C valóságos értéke nagyobb, mint a közelítőleg számított.

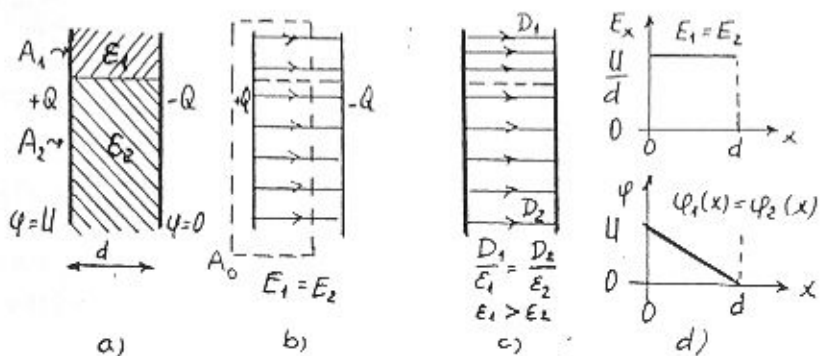
Az erőtér akkor is számítható, ha a síkelektrodák között kétféle szigetelő van, melyek elválasztó felülete az erővonalakkal párhuzamos. Ez a hosszirányban rétegzett szigetelő esete (3a ábra). A szórt erőtér elhanyagolásával az elektromos tér mindkét közegben homogén és ugyanakkora (3b és 3d ábra). Az $E_{1x} = E_1$, stb. egyszerűbb jelöléssel:

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d} \quad (1.7-13)$$

Az elektromos eltolás és így a felületi töltéssűrűség viszont különböző: $\sigma_1 = \epsilon_1 U/d$, $\sigma_2 = \epsilon_2 U/d$ (3c ábra). A teljes töltés

$$Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = \frac{\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2}{d} U = C U \quad (1.7-14)$$

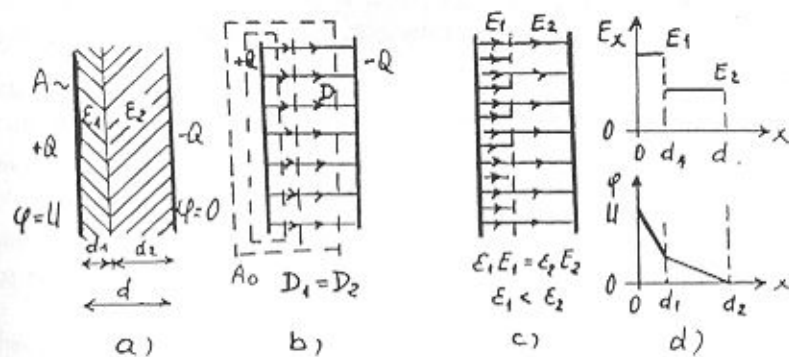
Ebből látható, hogy a kapacitás $C = C_1 + C_2$ alakban úgy számítható, mint két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor kapacitása. Ez a fizikai kép alapján érthető is. A maximális feszültséget a két közeg maximális térerősségei közül a kisebbik szabja meg $U_{\max} = E_{\max} \cdot d$ alakban. Az általánosítás kettőnél több rétegre nem okoz nehézséget.



1.7-3. Ábra. Párhuzamos síkvezetők között kialakuló elektromos tér hosszirányú rétegzés esetén

Tekintsük most a keresztirányban rétegzett szigetelés esetét, amikor a kétféle szigetelőanyag elválasztó felülete az erővonalakra merőleges (4a ábra). A Gauss törvény értelmében most az elektromos eltolás ugyanakkora a két közegben (4b ábra; $D_{1x} = D_1$, stb.):

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{A} \quad (1.7-15)$$



1.7-4. Ábra. Párhuzamos síkvezetők között kialakuló elektromos tér keresztirányú rétegzés esetén

A térerősségek ennek megfelelően

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_1 A}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_2 A} \quad (1.7-16)$$

Az elektrodák közötti feszültség

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left(\frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} \right) Q = \frac{1}{C} U \quad (1.7-17)$$

Látható, hogy a kapacitás $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$ alakban úgy számítható, mint két sorosan kapcsolt kondenzátor eredő kapacitása, ami a fizikai kép alapján érthető is. A megengedett feszültséget az szabja meg, hogy $\epsilon_1 E_{1,\max}$ és $\epsilon_2 E_{2,\max}$ közül melyik a kisebb. Ha pl. az utóbbi, akkor (16) és (17) alapján $E_1 = E_{2,\max} \epsilon_2 / \epsilon_1$ és ezért

$$U_{\max} = \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2 \right) E_{2,\max} \quad \text{ha } \epsilon_2 E_{2,\max} < \epsilon_1 E_{1,\max} \quad (1.7-18)$$

Gyakorlati szempontból ez a légrétegek veszélyére figyelmeztet. Ha nincs légréteg, akkor $U_{\max} = E_{1,\max} d_1$, míg d_2 vastagságú légréteg jelenlétében ($\epsilon_2 = \epsilon_0$, $d_2 \ll d_1$) a maximális feszültség

$$U'_{\max} = \frac{d_1}{\epsilon_{1r}} E_{2,\max} = \frac{E_{2,\max}}{\epsilon_{1r} E_{1,\max}} U_{\max}$$

Mivel jó szigetelőanyagra a maximális térerősség sokszorosa a levegőre megengedettnek (amely kb. 10 kV/cm) és $\epsilon_{1r} > 1$, ezért a légrés hatására a megengedett feszültség lényegesen lecsökken.

A keresztirányú rétegzés számítása kettőnél több réteg esetén sem okoz nehézséget.

Az analóg áramlási feladatnál a megengedett feszültség kifejezése

$$U_{\max} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} d_1 + d_2 \right) E_{2,\max}, \text{ ha } \sigma_2 E_{2,\max} < \sigma_1 E_{1,\max}. \quad (1.7-19)$$

Egyenfeszültség esetén ez az összefüggés érvényes, kivéve, ha az egyik közeg tökéletes szigetelő. Időben gyorsan változó feszültség esetén is (1.1-6. szakasz) az elektrosztatikus közelítésben számított (18) adja meg a megengedett feszültséget!

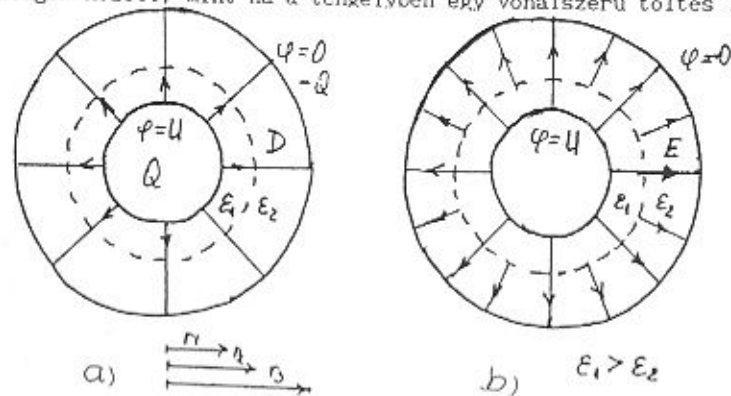
A síkelektrodák közötti erőtér számítása lényegesen bonyolultabb, ha az elektrodák nem egy lapos korong alap- és fedőlapját alkotják, pl. ha különböző méretűek vagy ha távolságuk nem nagyon kicsi.

1.7-1.3. Koaxiális hengeres elektrodák közötti erőtér

A koaxiális körhenger alakú elektrodák közötti elektromos teret mindjárt keresztirányban rétegezett szigetelés esetére tárgyaljuk (5a ábra). Arra az esetre szorítkozunk, amikor a hengerek l hossza jóval nagyobb a külső sugárnál. A szélektől eltekintve a töltés eloszlása ekkor egyenletesnek tekinthető és a $q = Q/l$ vonalmenti töltéssűrűséggel jellemezhető. A hengeres szimetriából nyilvánvaló, hogy az erővonalak radiálisak és bármely r sugarú hengerfelületen a térerősség állandó nagyságú. Alkalmazzuk a Gauss törvényt egy l hosszúságú és r sugarú hengerfelületre. Mivel az erővonalak az alap- és a fedőlappal párhuzamosak, ezért kapjuk, hogy

$$D_r(r) \cdot 2r\pi \cdot l = q \cdot l.$$

Ez az összefüggés és minden belőle a továbbiakban származtatott következtetés a hengerek szélénél nem érvényes. Az erőtér ugyanolyan a két henger között, mint ha a tengelyben egy vonalszerű töltés lenne.



1.7-5. ábra. Koaxiális hengeres elektrodák közötti elektromos tér keresztirányban rétegezett szigetelés esetén

Az elektromos térerősség a két közegben

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{q}{2\pi\epsilon_1 r}, & r_1 < r < r_2, \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_2 r}, & r_2 < r < r_3. \end{cases} \quad (1.7-20)$$

A feszültség a két hengeres elektróda között

$$U = \int_{r_1}^{r_3} E_r(r) dr = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right). \quad (1.7-21)$$

Az U_{\max} megengedett feszültséget az szabja meg, hogy $\epsilon_1 r_1 E_{1,\max}$ és $\epsilon_2 r_2 E_{2,\max}$ közül melyik a kisebb. Ha pl. az utóbbi, akkor ennek alapján $q_{\max} = 2\pi\epsilon_2 r_2 E_{2,\max}$ kifejezhető, majd (21)-ből

$$U_{\max} = \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_3}{r_2} \right) r_2 E_{2,\max}, \text{ ha } \epsilon_2 r_2 E_{2,\max} < \epsilon_1 r_1 E_{1,\max}.$$

Homogén szigetelés esetén eredményeink egyszerűsödnek ($r_3 = r_2$

helyettesítéssel és $\epsilon_1 = \epsilon$ jelöléssel):

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (1.7-23)$$

$$E_r(r) = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}, \quad r_1 < r < r_2; \quad E_{\max} = \frac{U}{r_1 \ln(r_2/r_1)}.$$

Szélőértékszámítással belátható, hogy adott U és r_2 esetén E_{\max} akkor minimális, ha $r_1 = r_2/e$. Adott E_{\max} esetén ekkor a legnagyobb U_{\max} .

Eredményeink koaxiális kábel szigetelési rezisztenciájának számítására $\epsilon \rightarrow \sigma$, $C \rightarrow G = 1/R$ betűcserével alkalmazhatók.

1.7-1.4. Párhuzamos hengeres elektrodák közötti erőtér

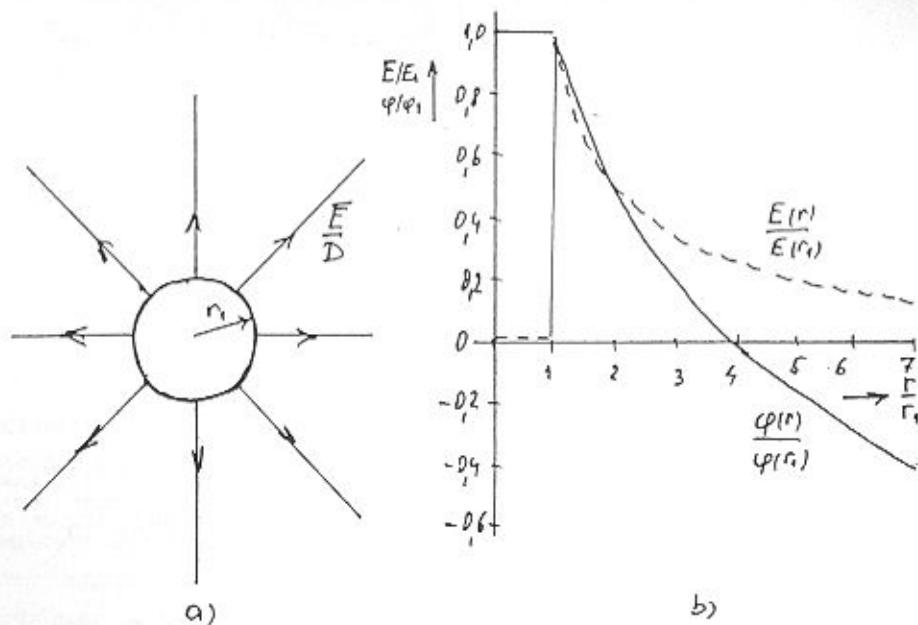
Tekintsünk egy ϵ permittivitású szigetelőben lévő, végtelenül hosszúnak tekinthető, q vonalmenti töltéssűrűséggel bíró körhenger alakú elektródát (6. ábra). A térerősség radiális és (20) értelmében

$$E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon r}, \quad r_1 < r < \infty. \quad (1.7-24)$$

A potenciálfüggvény $\varphi(r_0) = 0$ választással

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r(r) dr = \int_r^{r_0} \frac{q}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}, \quad r_1 \leq r < \infty. \quad (1.7-25)$$

Az r_0 megválasztható, pl. a 6b ábrán $r_0 = 4r_1$. Mivel a potenciál nulla pontjának nincs jelentősége, szokásos az $r_0 = 1$ választás (pl. $r_0 = 1$ m), így a potenciálfüggvényt többnyire



1.7-6. ábra. Hengeres vezető erőtere, térerősségének és potenciáljának változása

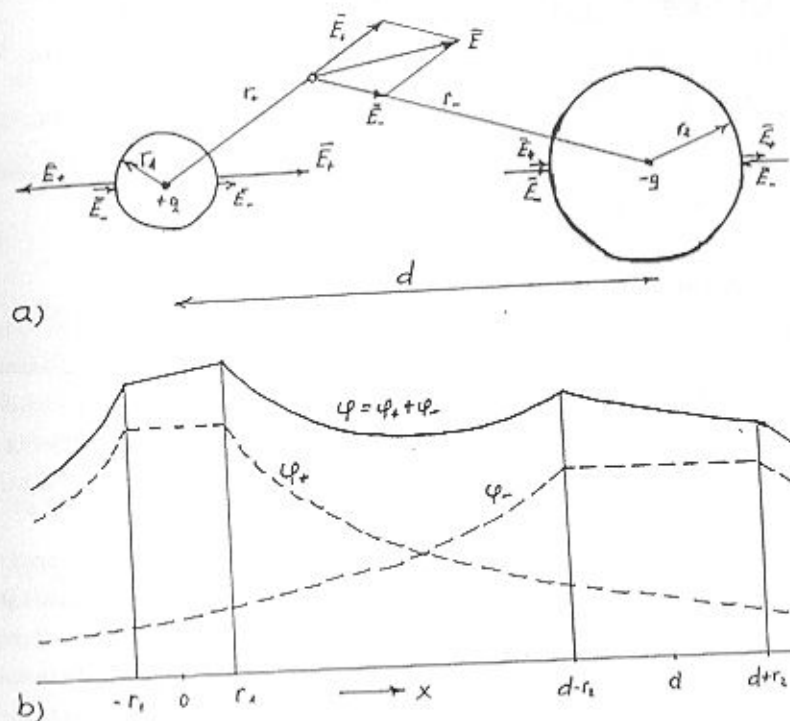
$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r} \quad ; \quad r_1 \leq r < \infty \quad (1.7-26)$$

alakúnak tekintjük. A feszültség, vagyis a potenciálkülönbség kifejezésében r_0 amúgy sem szerepel, ezért értéke közömbös. A magában álló töltött végtelen hosszú henger nagyon absztrakt modell, de jól használható több párhuzamos henger terének számításakor.

Tekintsünk most két, körhenger alakú, végtelen hosszúnak tekinthető elektródát, amelyek tengelye párhuzamos, sugaruk kicsi a távolságukhoz képest, vonalmenti töltéssűrűségük $+q$, ill. $-q$ (7a ábra). A létrehozott potenciálfüggvényt (26) felhasználásával

$$\begin{aligned} \varphi_+(r_+) &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r_+} \quad ; \quad r_1 < r_+ < \infty ; \\ \varphi_-(r_-) &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r_-} \quad ; \quad r_2 < r_- < \infty . \end{aligned} \quad (1.7-27)$$

A 7b ábrán feltüntettük a két potenciálfüggvényt, valamint eredőjét, a $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ függvényt a középpontokat összekötő egyenes mentén. Amint látjuk, az eredő potenciálfüggvény nem helyes, mert nem állandó a hengerek belsejében. Ha azonban r_1 és r_2 elég kicsi, akkor e potenciálváltozás elhanyagolható (a hibabecslést l. alább). A potenciálfüggvény tehát közelítőleg



1.7-7. ábra. Párhuzamos hengeres elektródák közötti elektromos tér közelítő számítása

$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_-}{r_+} \quad ; \quad r_1 < r_+ \quad , \quad r_2 < r_- \quad . \quad (1.7-28)$$

A feszültség a két elektróda között ($r_- = d$, $r_+ = r_1$, ill. $r_- = r_2$, $r_+ = d$ helyettesítéssel)

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_1} - \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{d} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d^2}{r_1 r_2} \quad . \quad (1.7-29)$$

A kapacitás kifejezése ebből

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(d^2/r_1 r_2)} \quad . \quad (1.7-30)$$

A legnagyobb térerősségek a hengerek felületén lépnek fel:

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{d-r_1} \right) \quad , \quad E_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{d-r_2} \right) \quad , \quad (1.7-31)$$

ahol $q/2\pi\epsilon$ a (29) alapján kifejezhető az U feszültséggel.

Adjunk becslést az elkövetett hibára. Legyen az egyszerűség kedvéért $r_1 = r_2 = r_0$. Ekkor a potenciálkülönbség a másik henger

palástja és tengelye között

$$\varphi_+(d - r_0) - \varphi(d) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{d-r_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{1-(r_0/d)} \approx \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{r_0}{d}$$

Ennek viszonya a két elektróda közötti feszültséghez a relatív hiba:

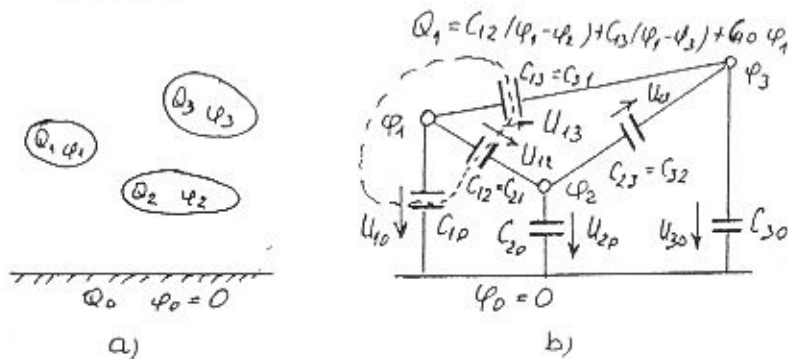
$$h = \frac{\varphi_+(d-r_0) - \varphi_+(d)}{U} = \frac{r_0/d}{2 \ln(d/r_0)}$$

Ha $r_0/d < 1/20$, akkor $h < 1\%$. Eredményeink felhasználhatók kettős-vezeték terének és kapacitásának számítására.

1.7-1.5. Részkapacitások és részkonduktanciák

Eddig olyan feladatokkal foglalkoztunk, amelyeknél két elektróda szerepelt, amelyek összes töltése vagy árama nulla. A legfontosabb eredmény az elrendezés kapacitása vagy konduktanciája. Az általánosabb feladatok tárgyalása előtt ezek fogalmi általánosítására van szükség. A továbbiakban feltételezzük, hogy a permittivitás és a konduktivitás a térerősségtől független, de a helytől függhet.

Tekintsük a 8a ábrát, amelyen három elektróda és a nulla potenciálú elektróda, a "föld" látható. Az elektródák potenciálját jelölje $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, töltésüket jelölje Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Az összes töltés nulla, ezért a föld töltése $Q_0 = -(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)$. Egyes feladatoknál a végtelen játssza a föld szerepét. A földelt elektróda általában nem sík felület.



1.7-8. Ábra. Három elektróda és részkapacitások

Mivel a permittivitás a térerősségtől független, ezért a feladat lineáris. Bármelyik elektróda potenciálja kifejezhető az egyes töltések által létrehozott és velük arányos részpotenciálok szuperpozíciójaként. A p_{ik} potenciál-együtthatók bevezetésével:

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n p_{ik} Q_k ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.7-32)$$

Az 1.8-1. szakaszban igazolni fogjuk, hogy $p_{ik} = p_{ki}$ (reciprocitás). Egyszerű elrendezésekre a potenciál-együtthatók közvetlenül meghatározhatók (l. a következő pontot).

Oldjuk meg a (32) lineáris egyenletrendszert a töltésekre:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_k ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17-33)$$

A Cramer szabályból is következik, hogy mivel $p_{ik} = p_{ki}$, ezért érvényes $c_{ik} = c_{ki}$ is. Alakítsuk át (33) jobb oldalát a következő módon:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} (\varphi_k + \varphi_i - \varphi_i) = \sum_{k=1}^n -c_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_i$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $C_{ik} = -c_{ik}$, $C_{i0} = \sum_{k=1}^n c_{ik}$. A

töltés kifejezése ezek után

$$Q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + C_{i0} \varphi_i ; \quad i = 1, 2, \dots, n ; \quad C_{ik} = C_{ki} \quad (1.7-34)$$

Ez a 8b ábrán látható módon úgy értelmezhető, hogy az i -edik és k -adik elektróda közé egy C_{ik} kapacitású kondenzátor van kapcsolva, amelynek töltése $C_{ik}(\varphi_i - \varphi_k) = C_{ik} U_{ik}$, az i -edik elektróda és a föld közé egy C_{i0} kapacitású kondenzátor van kapcsolva, amelynek töltése $C_{i0} \varphi_i = C_{i0} U_{i0}$. A Q_i töltés az i -edik elektródához kapcsolódó kondenzátor lemezek töltésének összege. A (34)-ben szereplő C mennyiségek a részkapacitások, és pedig C_{ik} az i -edik és k -adik elektróda közötti főkapacitás, C_{i0} az i -edik elektróda földkapacitása.

Tekintsük azt az esetet, amikor $n = 2$. Rövid számolással adódik:

$$C_{12} = \frac{P_{12}}{D}, \quad C_{10} = \frac{P_{22} - P_{12}}{D}, \quad C_{i0} = \frac{P_{11} - P_{12}}{D}, \quad D = P_{11}P_{22} - P_{12}^2 \quad (1.7-35)$$

Tekintsük most az az esetet, amikor $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$, a többi elektróda pedig töltetlen. Ekkor (32) a következő alakot ölti:

$$\varphi_1 = (P_{11} - P_{12})Q, \quad \varphi_2 = (P_{21} - P_{22})Q, \quad \varphi_3 = (P_{31} - P_{32})Q, \dots \quad (1.7-36)$$

Az 1. és a 2. elektróda ekkor kondenzátort alkot, amelynek kapacitása

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} \quad (1.7-37)$$

Ennek kifejezése a részkapacitásokkal nehezen áttekinthető. Ha azonban csak két elektróda van, akkor (35) felhasználásával könnyen belátható, hogy $C = C_{12} + (C_{10} \times C_{20})$, ami a szemlélet alapján helyes eredmény.

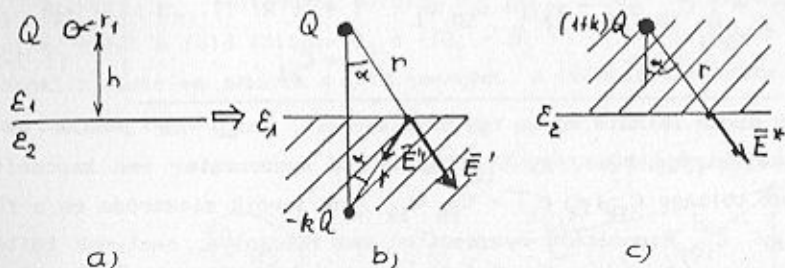
Analóg módon értelmezhetők n számú elektróda esetén az

$$I_1 = \sum_{k=1}^n G_{1k} (\varphi_1 - \varphi_k) + G_{10} \varphi_1; \quad 1 = 1, 2, \dots, n \quad (1.7-38)$$

egyenletben szereplő $G_{ik} = G_{ki}$ részkonduktanciák.

1.7-1.6. Tükrözés sík felületen

Tekintsük a 9a ábrán vázolt következő feladatot. A teret egy sík két részre osztja: az egyik oldalán ϵ_1 , másik oldalán ϵ_2 permittivitású közeg helyezkedik el. Az 1. térrészben egy, az elválasztó felülettel párhuzamos tengelyű, végtelen hosszúnak tekinthető kissugarú ($r_1 \ll h$) hengeres elektróda vagy kissugarú gömbalakú elektróda helyezkedik el. Az elektróda potenciálja vagy töltése adott.



1.7-9. abra. Pontszerű vagy vonalszerű töltés sík határfelületű inhomogén közegben

Igazolni fogjuk, hogy az 1. közegben az erőtér úgy számítható, mintha az eredeti töltésen kívül jelen lenne a tükröképébe helyezett $-k \cdot Q$ nagyságú töltés is (a permittivitás mindenütt ϵ_1), a 2. közegben az erőtér úgy számítható, mintha az eredeti töltés helyén $(1+k) \cdot Q$ nagyságú töltés helyezkedne el (a permittivitás mindenütt ϵ_2), ahol

$$k = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \quad (1.7-39)$$

Eredményünk $Q + I$, $\epsilon + \sigma$ betűcserével vonalszerű, ill. pontszerű áram-

forrás esetén is alkalmazható. A $k = 1$, ha $\epsilon_2 = \infty$ vagy $\sigma_2 = \infty$ (a 2. közeg ideális vezető) és $k = -1$, ha $\sigma_2 = 0$ (a 2. közeg ideális szigetelő, az 1. közeg rossz szigetelő). Ezek a speciális esetek szimmetria megfontolásokkal közvetlenül beláthatók.

Mivel az elektródák erőtere kielégíti a Maxwell egyenleteket, csak azt kell belátnunk, hogy a folytonossági feltételek ki vannak elégítve. A térerősség tangenciális, ill. az elektromos eltolás normális összetevője a határfelületen hengeres elektróda esetén a 9b ábra alapján

$$E_t' + E_t'' = \frac{q \cos \alpha}{2 \pi \epsilon_1 r} - \frac{k q \cos \alpha}{2 \pi \epsilon_1 r}, \quad E_t^* = \frac{(1+k) q \cos \alpha}{2 \pi \epsilon_2 r};$$

$$D_n' + D_n'' = \frac{q \sin \alpha}{2 \pi r} + \frac{k q \sin \alpha}{2 \pi r}, \quad D_n^* = \frac{(1+k) q \sin \alpha}{2 \pi r}.$$

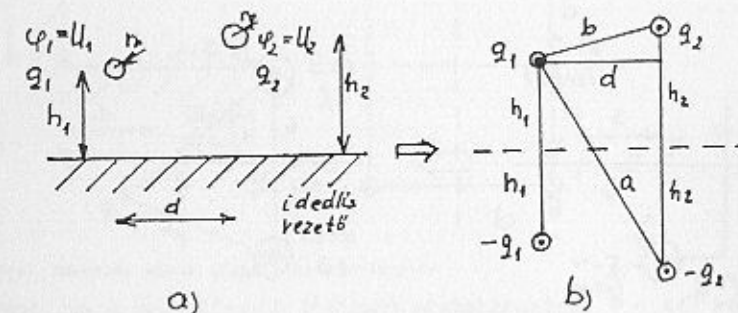
A D_n folytonossága biztosított, az E_t folytonossága pedig akkor, ha

$$\frac{1-k}{\epsilon_1} = \frac{1+k}{\epsilon_2},$$

ami éppen a (39)-re vezet. Kissugarú gömbök esetén ez csak annyiban módosul, hogy $q/2r$ helyére $Q/4r^2$ írandó. A (39) eredmény változatlanul érvényes.

Példaként határozzuk meg két párhuzamos hengeres elektróda részkapacitásait. Az elrendezés a 10a ábrán, a tükrözött töltések a 10b ábrán láthatók, amelyen

$$a = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2}, \quad b = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2} \quad (1.7-40)$$



1.7-10. abra. Sík földdel párhuzamos kettősvezeték elektromos terének számítása tükrözéssel

Az 1. elektróda potenciálja négy részpotenciál összege:

$$U_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{1}{2h_1} \right) + \frac{q}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{1}{b} - \ln \frac{1}{a} \right).$$

Hasonló U_2 kifejezése is. Ebből kiolvashatók a potenciál-együtthatók:

$$P_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h_1}{r_0}, \quad P_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h_2}{r_0}, \quad P_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{a}{b} \quad (1.7-41)$$

A (35) felhasználásával némi számolással kapjuk a részkapacitások következő kifejezését:

$$C_{12} = C_0 \ln \frac{a}{b}, \quad C_{10} = C_0 \ln \frac{2h_2 b}{ar_0}, \quad C_{20} = C_0 \ln \frac{2h_1 b}{ar_0};$$

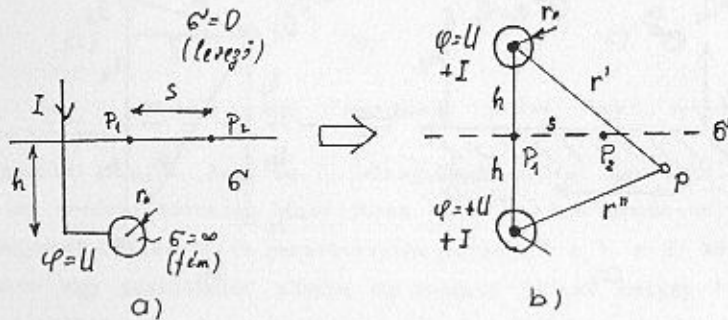
$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2h_1}{r_0} \cdot \ln \frac{2h_2}{r_0} - \left(\ln \frac{a}{b}\right)^2} \quad (1.7-42)$$

Mivel $r_0 \ll h_1, h_2, a, b$, ezért általában $C_{10}, C_{20} \approx C_{12}$. Az elrendezés kapacitása (37) értelmében

$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left(\sqrt{h_1 h_2} \frac{b}{ar_0} \right)} \quad (1.7-43)$$

Ha $h_1 = h_2 = h$ és $h \rightarrow \infty$, akkor a (30) szerinti kapacitás adódik.

Vizsgáljuk most a 11a ábrán vázolt elrendezést: egy ideális vezetőknek tekinthető gömbalakú elektróda h mélységben a σ konduktivitású közegbe van süllyesztve (földelő elektróda a talajban). Az elektródába bevezetett és onnan elfolyó áram I . Határozzuk meg az elektródának a végtelenhez viszonyított U potenciálját, továbbá a föld felszínén a P_1 és P_2 pontok között fellépő U_s feszültséget (az ún. lépésfeszültség, amely egy ember két lába között fellép; $s \approx 75$ cm).



1.7-11. Ábra. Földelő gömb erőterének számítása tükrözéssel

A helyettesítő áramrendszer a 11b ábrán látható. Elhanyagolva a hozzávezetések okozta aszimmetriát és feltételezve, hogy $r_0 \ll h$, a potenciálfüggvény a P pontban (6) felhasználásával

$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r'} + \frac{I}{4\pi\sigma r''}$$

A gömb potenciálja $r' = r_0, r'' = 2h$ helyettesítéssel adódik:

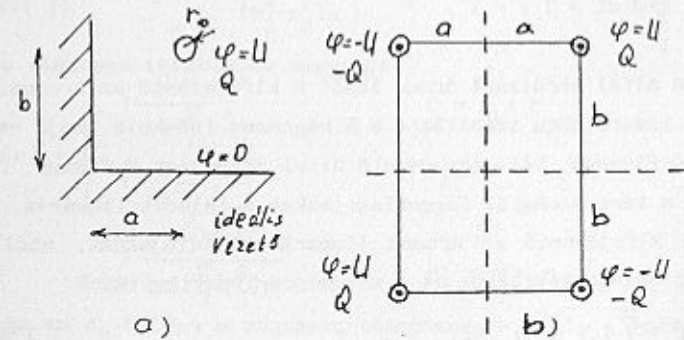
$$U = \frac{I}{4\pi\sigma r_0} \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right)$$

A keresett lépésfeszültség ($r'_1 = r''_1 = h, r'_2 = r''_2 = \sqrt{h^2 + s^2}$):

$$U_s = \frac{I}{4\pi\sigma h} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) \quad (1.7-44)$$

Az r_0 véges értékének hatását a hibára hasonló módon becsülhetjük, mint az 1.7-1.3. pontban. A relatív hiba 1%-nál kisebb, ha $r_0 < 0,1h$.

A síkon való tükrözés módszere alkalmazható olyan esetekben is, amikor a nulla potenciálú felületek $\theta = \pi/n$ szöget bezáró síkok ($n=1, 2, 3, \dots$). Az $n=1$ esetet az előzőekben vizsgáltuk. Az $n=2$ eset a 12. ábrán látható egy henger vagy gömb alakú elektróda esetére. A szimmetriából következik, hogy a 12b ábrán jelölt két sík nulla potenciálú, tehát a négy töltés együttes tere kielégíti a peremfeltételt, ha $r_0 \ll a, b$. Az Olvasóra bizzuk az elektróda potenciáljának kifejezését töltésének ismeretében. Nem jelent elvi nehézséget két vagy több hengeres vagy gömb alakú elektróda figyelembe vétele sem.



1.7-12. Ábra. Tükrözés sarok alakú vezető felületén

Javasoljuk a helyettesítő töltések meghatározását $\theta = \pi/3$ esetén. Arra kell ügyelni, hogy a töltéseket nem csak az eredeti fűlsíkokon, hanem meghosszabbításukon is tükrözni kell, amint ez a 12b ábrán is látható. Ha $\theta = \pi/n$, akkor minden valódi töltéshez $n-1$ tükrözött töltés tartozik. Ha n nem egész szám, akkor a feladat nem oldható meg tükrözéssel, mert a vizsgált térrészben is megjelennek fiktív töltések.

A tükrözés módszere általánosítható henger és gömb alakú határfelületre is, de ezt nem tárgyaljuk. Megjegyezzük azonban, hogy míg két párhuzamos tengelyű és tetszőleges sugarú hengeres elektróda tere számítható két vonalszerű töltés tereként, két gömb alakú elektróda tere nem számítható két pontszerű töltés tereként.

1.7-2. STACIONÁRIUS ÉS SZTATIKUS MÁGNESES TÉR

1.7-2.1. A módszer elve

Ebben a szakaszban bemutatjuk néhány egyszerű mágneses feladat megoldását. Gyakorlati fontossága miatt kitérünk néhány egyszerű nemlineáris probléma tárgyalására is.

A stacionárius mágneses tér számításánál adottnak tekintjük az áramsűrűség eloszlását. Többnyire kis keresztmetszetű vezetékben folyó áramról van szó, amelynek az eloszlása egyenletesnek tekinthető, sőt a vezetőt rendszerint vonalszerűként kezelhetjük.

Tételezzük fel, hogy kvalitatív megfontolások alapján sikerül olyan zárt görbéket találnunk, amelyek mentén a H mágneses térerősség érintőleges és nagysága állandó (vagy a görbe egy l részén állandó, többi részén pedig elhanyagolható). Ekkor a gerjesztési törvény a következő alakra egyszerűsödik:

$$\oint_l H \, dl \approx H \cdot l = I, \quad (1.7-45)$$

ahol I a görbe által körülzárt áram. Ebből H kifejezhető az árammal. A permeabilitás ismeretében számítható a B mágneses indukció, majd valamely felület Φ fluxusa, ill. egy vezető által körülzárt Ψ fluxus. Ha a permeabilitás a térerősségtől független, akkor a feladat lineáris, így minden fluxus kifejezhető az áramok lineárkombinációjaként, ahol az együtthatók az öninduktivitások és a kölcsönös induktivitások:

$$\Psi_1 = \sum_{k=1}^n L_{1k} I_k; \quad L_{1k} = L_{k1}. \quad (1.7-46)$$

A fluxusok számításával ilymódon meghatározhatók az induktivitások.

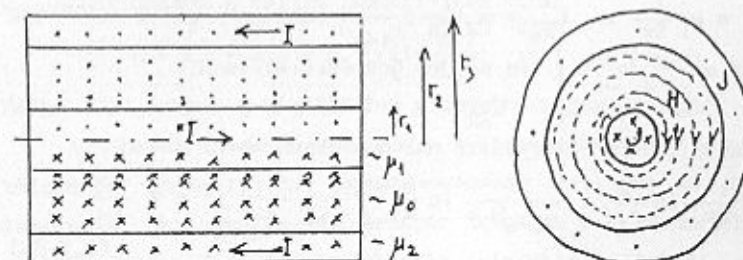
Egyes feladatok akkor is megoldhatók, ha a mágneses térerősség érintőleges és csak szakaszonként állandó. Ekkor a gerjesztési törvény

$$\sum_k H_k l_k = I \quad (1.7-47)$$

alakot ölti. A fluxusmegmaradás törvénye alapján kell a H_k térerősségek kapcsolatára összefüggéseket találnunk.

1.7-2.2. Koaxiális kábel mágneses tere

Tekintsük a 13. ábrán látható koaxiális kábelt, amelynek érében, ill. köpenyében I áram folyik az egyik, ill. a másik irányban egyenletes eloszlásban. A hengerszimmetria miatt a mágneses erővonalak körök. A szigetelőanyag permeabilitása μ_0 , az ér, ill. a köpeny μ_1 , ill. μ_2 , többnyire $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$.



1.7-13. ábra. Koaxiális kábelben kialakuló mágneses tér számítása

A gerjesztési törvényt egy r sugarú erővonalra alkalmazva és a körülfogott áramot az állandónak tekintett áramsűrűséggel kifejezve

$$H(r) \cdot 2\pi r = \begin{cases} (I/r_1^2 \pi) \cdot r^2 \pi, & 0 \leq r_1 \leq r \\ I, & r_1 \leq r \leq r_2 \\ I - \frac{1}{(r_3^2 - r_2^2) \pi} (r^2 - r_2^2) \pi, & r_2 \leq r \leq r_3 \end{cases}$$

Ebből a mágneses térerősség nagysága

$$H(r) = \begin{cases} I \frac{r}{2\pi r_1^2}, & 0 \leq r_1 \leq r \\ I \frac{1}{2\pi r}, & r_1 \leq r \leq r_2 \\ I \frac{r_3^2 - r^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)r}, & r_2 \leq r \leq r_3 \end{cases} \quad (1.7-48)$$

Az r_1 és az r_2 helyen a mágneses térerősség - amely a határfelülettel párhuzamos - folytonos.

Az ér és a köpeny l hosszúságú szakasza által körülzárt fluxus

$$\Phi = \int_A B \, dA = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \frac{I}{2\pi r} l \, dr = I \cdot \mu_0 \frac{l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = L_K \cdot I. \quad (1.7-49)$$

Az áram szorzótényezője a kábel ún. külső öninduktivitása, amely nem veszi figyelembe a vezetékön belül kialakuló mágneses teret. Utóbbihoz tartozó ún. belső öninduktivitásokat nem is lehet a fluxusokkal megha-

tározni, mert ezt a fluxust nem veszi körül az egész áram. A belső öninduktivitasokat a mágneses energia segítségével fejezhetjük ki:

$$\frac{1}{2} L_{B1} I^2 = \int_{V_1} \frac{1}{2} \mu H^2 dV, \quad \frac{1}{2} L_{B2} I^2 = \int_{V_2} \frac{1}{2} \mu H^2 dV. \quad (1.7-50)$$

Az L_K külső öninduktivitás is számítható az energiából, de erre egyszerűbb (49) alkalmazása. Az (50) és a (48) alapján némi számolással

$$L_{B1} = \mu_1 \frac{1}{8\pi}, \quad L_{B2} = \mu_2 \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{3-\alpha^2}{4} \right) \quad (1.7-51)$$

adódik, ahol $\alpha = r_2/r_3 < 1$. A teljes öninduktivitás

$$L = L_K + L_{B1} + L_{B2}. \quad (1.7-52)$$

Ha egyik vezető sem ferromágneses, ami a tipikus eset, akkor

$$L = \mu_0 \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{(1-\alpha^2)^2} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2(1-\alpha^2)} \right]; \quad \alpha = \frac{r}{r_3}. \quad (1.7-53)$$

A második és a harmadik tag által leírt belső öninduktivitás többnyire jóval kisebb a külsőnél. A 4.2-4. szakaszban látni fogjuk, hogy váltakozó áram esetén L_B értéke az itt számítottnál kisebb, azért gyakran csak a külső öninduktivitást vesszük figyelembe. Ha például $r_2/r_1 = 4$ és $r_3/r_2 = 1,25$, akkor egyenáramon $L_K = 0,81 L$.

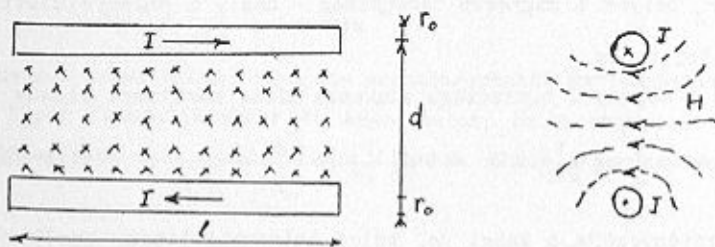
1.7-2.3. Kettősvezeték mágneses tere

Tekintsük a 14. ábrán látható kettősvezetékét. Bármelyik áram által létrehozott mágneses térerősség a vezetéken kívül (48) értelmében

$$H'(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad r_0 \leq r. \quad (1.7-54)$$

Az l hosszúságú szakasz fluxusa

$$\Phi' = \int_{r_0}^{d-r_0} \mu_0 \frac{I}{2\pi r} l dr = I \cdot \mu_0 \frac{l}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}. \quad (1.7-55)$$



1.7-14. ábra. A kettősvezeték által létrehozott mágneses tér számítása

Az irányokat figyelembe véve látható, hogy a teljes fluxus $2\Phi'$. A kettősvezeték teljes külső inductívitasáa tehát

$$L = \mu_0 \frac{1}{\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}. \quad (1.7-56)$$

Ha $d \gg r_0$, akkor a vezetékön belül a másik áram által létrehozott mágneses tér elhanyagolható, így a belső inductívitasra az (51) szerinti L_{B1} elfogadható. A teljes inductívitas tehát

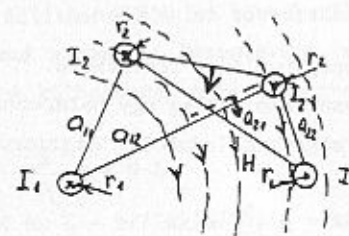
$$L = L_K + 2L_B = \mu_0 \frac{1}{\pi} \left[\ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu_r}{4} \right]; \quad d \gg r_0. \quad (1.7-57)$$

Ha $\mu_r = 1$, akkor a második tag többnyire elhanyagolható.

A 15. ábrán két párhuzamos kettősvezeték metszete látható. A kölcsönös inductívitas meghatározásához pl. azt a fluxust kell ismernünk, amely az I_1 jelű áram hatására a 2. hurok által kifeszített felületen fellép. Ez nehezebb feladat az előzőnél, mert az erővonalak nem merőlegesek a felületre. Mivel azonban a bal oldali I_1 áramhoz tartozó erővonalak körök, ezért az általa létrehozott fluxus megegyezik az ábrán szaggatott vonallal rajzolt felület fluxusával, amely az előző számítás értelmében (ha $r_1, r_2 \ll a_{1k}$)

$$\Psi'_{21} = I_1 \cdot \mu_0 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_{12}}{a_{11}}. \quad (1.7-58)$$

Értelem szerint számítható a másik áram által létrehozott fluxus is. Ezek összeadódnak, ezért az eredő kölcsönös inductívitas



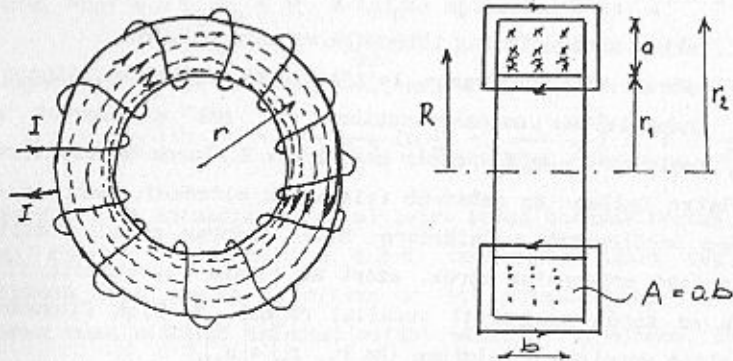
1.7-15. ábra. Párhuzamos kettősvezeték kölcsönös inductívitasának számítása

$$L_{21} = \mu_0 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}}. \quad (1.7-59)$$

Ebből következik, hogy ha $a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22}$, akkor $L_{21} = 0$, vagyis ekkor a két vezetékpaár között nincs induktív csatolás. A feltétel biztosan ki van elégítve, ha a két vezetékpaár síkja egymásra merőleges és legalább az egyik sík a másiknak szimmetriasíkja.

1.7-2.4. Toroidok és szolenoidok

Vizsgáljunk egy egyenletesen és sűrűn tekercselt toroidot (gyűrű alakú tekercset). A 16. ábrán az áttekinthetőség kedvéért ritka tekercselést rajzoltunk. A tényleges kivitelnél a meneteket csak a szigetelés választja el és szorosan felfekszenek a csévetestre. A tekercselés többrétegű is lehet. A teljes menetszámot jelölje N .



1.7-16. Gyűrű alakú tekercs (toroid) és az erővonalak

A forgási szimmetriából következik, hogy az erővonalak körök. A gerjesztési törvényt egy erővonatra alkalmazva, a körülzárt áram $N \cdot I$, így a mágneses térerősség kifejezése

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r} \quad \text{a tekercs belsejében.} \quad (1.7-60)$$

A tekercsen kívül a térerősség nullának tekinthető.

A keresztmetszet fluxusa közelítőleg úgy határozható meg, hogy az R közepes sugáron fellépő mágneses indukciót megszorozzuk a keresztmetszet A területével:

$$\Phi \approx \mu H(R) A = \mu \frac{NI}{2\pi R} A. \quad (1.7-61)$$

Mivel minden menet fluxusa Φ , ezért a tekercs teljes fluxusa $\Psi = N \cdot \Phi$, így $L = \Psi/I$ öninduktivitása

$$L \approx \frac{\mu N^2 A}{2\pi R}. \quad (1.7-61)$$

ahol μ a csévetest (nem a vezeték!) permeabilitása. A belső induktivitást elhanyagoltuk.

Egyszerű keresztmetszetekre a fluxus pontosan is számítható. Például a 16. ábrán látható téglalap keresztmetszet esetén

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \mu \frac{NI}{2\pi r} b \, dr = \mu \frac{NI}{2\pi} b \ln \frac{R+(a/2)}{R-(a/2)}. \quad (1.7-63)$$

Ennek alapján megbecsülhetjük a (62) közelítés hibáját:

$$b \ln \frac{R+(a/2)}{R-(a/2)} = b \ln \frac{1 + a/2R}{1 - a/2R} \approx b \cdot 2 \left[\frac{a}{2R} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2R} \right)^3 + \dots \right].$$

Egytagú közelítésben $b \cdot a/R = A/R$ adódik, vagyis a (63)-ból a (61). A (62) relatív hibája 1%-nál kisebb, ha $a/R < 0,34$.

A toroid számítása akkor is elvégezhető, ha a csévetest anyaga az erővonalakkal párhuzamosan (hosszirányban) vagy azokra merőlegesen (keresztirányban) rétegezve van.

Hosszirányú rétegzés esetén a mágneses térerősség (60) kifejezése változatlan marad. A fluxus számításánál kell figyelembe vennünk, hogy a mágneses indukció a keresztmetszet egyik részében $\mu_1 H(r)$, másik részében $\mu_2 H(r)$. Első közelítésben (61) és (62) elfogadható, ha $\mu \cdot A$ helyére a $\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$ mennyiséget írjuk.

Keresztirányú rétegzés esetén rendszerint egy nagypermeabilitású vasmagban lévő rövid légréstről van szó. Ilyenkor a tekercselésnek nem kell egyenletesnek és sűrűnek lennie. Az erővonalak közepes hosszát jelölje $l_1 = l = 2\pi R$, ill. $l_2 = \delta \ll l$. A keresztmetszet fluxusa és így bármelyik r sugarú erővonal mentén a B indukció ugyanakkora a két közegben. (Utóbbi állítás abból is következik, hogy az indukciónak a keresztmetszetre csak merőleges összetevője van, amelyik folytonos.) A térerősségek viszont különbözőek a két közegben. A gerjesztési törvény értelmében

$$\frac{B}{\mu_1} \cdot l + \frac{B}{\mu_0} \cdot \delta = N \cdot I.$$

Ebből B kifejezhető és $L = \Psi/I$ számítható. Az öninduktivitás

$$L \approx \mu_0 \frac{N^2 A}{\delta + l/\mu_r}. \quad (1.7-64)$$

Többnyire l/μ_r sokkal kisebb mint δ . Ha a légrése nem sokkal kisebb a keresztirányú méreteknél, akkor a (64) hibája jelentékeny lehet.

Határozzuk meg két szorosan tekercselt toroid kölcsönös induktivitását. A külső tekercsben folyó I_2 áram hatására $H(r) = N_2 I_2 / 2\pi r$ térerősség keletkezik a tekercsek belsejében. A belső tekercs egy menetének fluxusa közelítőleg $\mu H(r_1) A_1$, a teljes fluxus ennek

N_1 -szerese. A kölcsönös induktivitás $L_{12} = \Psi_{12}/I_2$, vagyis

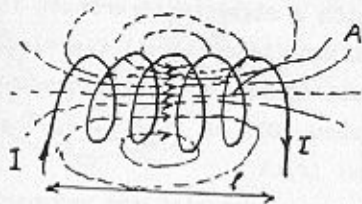
$$L_{12} = \mu \frac{N_1 N_2 A_1}{2\pi R_1}, \quad A_1 < A_2. \quad (1.7-65)$$

A két toroid öninduktivitása (62) értelmében pl. $L_1 = \mu N_1^2 A_1 / 2\pi R_1$. A k csatolási tényező

$$k = \sqrt{\frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{R_2 A_1}{R_1 A_2}} < 1. \quad (1.7-66)$$

Ha a tekercseket szorosan egymásra csévéljük, akkor $R_1 \approx R_2$, $A_1 \approx A_2$, és ekkor $k \approx 1$, vagyis a csatolás szoros.

Vizsgáljunk most egy egyenletesen és sűrűn tekercselt szolenoidot (egyenes tekercset). A 17. ábrán felrajzoltuk a kvalitatív erővonal-képet. Az áttekinthetőség kedvéért a meneteket nem rajzoltuk sűrűn.



1.7-17. ábra. Egyenes tekercs (szolenoid) és mágneses erővonalai

A mágneses teret a gerjesztési törvény alapján csak nagyon durva közelítésben tudjuk számolni. Mivel a tekercsen belül az erővonalak sűrűsége jóval nagyobb mint kívül, ezért tekintsük az erőteret belül homogénnek, kívül elhanyagolhatóan kicsinek. Ebben a közelítésben a mágneses térerősség integrálja a $H \cdot l$ szorzattal közelíthető, és így

$$H \approx \frac{NI}{l} \text{ a hosszú tekercs belsejében.} \quad (1.7-67)$$

Később (2.2-2.3. pont) látni fogjuk, hogy a tekercs végeinél a térerősség még hosszú tekercs esetén is csak fele ennek az értéknek. A fenti közelítést elfogadva, egy menet fluxusa $\phi \approx \mu_0 H A$, a teljes fluxus közelítőleg $\Psi \approx N \phi$. A szolenoid öninduktivitása közelítőleg

$$L \approx \mu_0 \frac{N^2 A}{l}. \quad (1.7-68)$$

Megfontolásainkból következik hogy L tényleges értéke ennél kisebb. Ha a szolenoid nem jóval hosszabb átmérőjénél vagy ha benne nyitott vasmag helyezkedik el, akkor a tér számítása nagyon nehéz feladat.

Határozzuk meg egy hosszú szolenoid és egy benne nagyjából szimmetrikusan elhelyezkedő rövidebb szolenoid kölcsönös induktivitását.

Minél rövidebb és minél kisebb átmérőjű a belső szolenoid, annál jobb közelítést jelent az, hogy benne a nagyobbban folyó I_1 áram által létrehozott mágneses térerősség $H = N_1 I_1 / l_1$ és fluxusa $\Psi_{21} = N_2 \mu_0 H \cdot A_2$. A kölcsönös induktivitás tehát

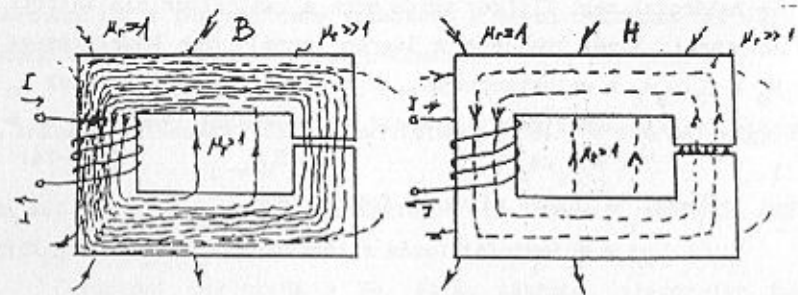
$$L_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l_1}, \quad l_2 < l_1, \quad A_2 < A_1. \quad (1.2-69)$$

Az L_{12} számítása nehezebb lenne. Ha $l_2 > l_1$, akkor az összefüggés nem érvényes és ekkor L_{21} számítása ismét nehezebb.

1.7-2.5. Lineáris mágneses körök

A gyakorlatban sokszor használnak vasmagos tekercseket. Vasmag alkalmazásával növelhető az azonos méretű tekercsek ön- és kölcsönös induktivitása, csatolási tényezője. Néha a vasmag célja a mágneses tér "terelése" vagy előírt eloszlásának biztosítása. A telítődés felhasználásával különleges hatások hozhatók létre. A vasmagot - az örvényáramok okozta veszteség csökkentése érdekében - többnyire lemezekből alakítják ki vagy ún. porvasmagot alkalmaznak.

A vasmagos elrendezések számítása azon alapul, hogy az indukcióvonalaknak csak kis része lép ki a vasból, vagyis a vasmag fluxusa közel állandó (ún. fluxuscsonát alkot). A 18. ábrán láthatjuk egy légréses vasmagra az indukcióvonalak és a térerősségvonalak kvalitatív eloszlását. A B -vonalak zártak. A H -vonalak sűrűségét az szabja meg, hogy H zárt görbe menti integrálja a körülzárt összes árammal egyenlő. A levegőben - a légrés kivételével - a H sokkal kisebb, mint a vasban és ez fokozottan igaz a B indukcióra. A légrésben viszont a B indukció közel ugyanakkora mint a vasban, a légrésben a H térerősség sokkal nagyobb mint a vasban. A valóságban az arányok még nagyobbak,



1.7-18. ábra. A mágneses erővonalak egy légréses vasmagos tekercsben

mint amit a 18. ábra mutat. A μ_r értéke porvasmagra 100 körüli, dinamólemezekre vagy transzformátorlemezekre 3000 körüli, speciális anyagokra milliós nagyságrendű is lehet, de erősen függ a télerősségtől is.

A következőkben feltételezzük, hogy a vas $B = B(H)$ karakterisztikájának lineáris szakaszát használjuk, tehát értelmezhető egy állandó $\mu = B/H$ permeabilitás. (Az általánosabb esetet l. a következő pontban)

Tekintsünk egy fluxuscatornát, amely például egy vastestben alakul ki. Az U mágneses feszültség a mágneses télerősség integrálja a csatorna hossza mentén, az a és b pontok között (az U SI-egysége: A):

$$U_{ab} = \int_a^b H \, dl \quad (1.7-70)$$

Tételezzük fel, hogy a fluxuscatorna bármely, az erővonalakra merőleges keresztmetszetében az indukció eloszlása egyenletes, tehát $B = \Phi/A$, ahol Φ állandó, az A felület esetleg változik. Az integrálást egy erővonal mentén végezve a vektor jelleg érdektelen, tehát

$$U_{ab} = \int_a^b H \, dl = \int_a^b \frac{B}{\mu} \, dl = \int_a^b \frac{\Phi}{\mu A} \, dl = \Phi \int_a^b \frac{dl}{\mu A} \quad (1.7-71)$$

Végeredményben a mágneses feszültség és a fluxus kapcsolatát a mágneses Ohm törvény fejezi ki:

$$U_{ab} = R_{ab} \Phi \quad \text{vagy} \quad \Phi = \Lambda_{ab} U_{ab} \quad (1.7-72)$$

ahol R_{ab} a fluxuscatorna vizsgált szakaszának reluktanciája (mágneses ellenállása SI-egysége: H^{-1}), reciproka a Λ_{ab} permeancia (mágneses vezetés, SI-egysége: H). Állandó keresztmetszet esetén (71)-ből

$$R = \frac{l}{\mu A}, \quad \Lambda = \frac{\mu A}{l} \quad (1.7-73)$$

Nehezebb a reluktancia számítása, ha a fluxuscatorna alakját a vastest nem határozza meg. Tipikus példa erre a vastestben kialakított légrés (19. ábra). Minél rövidebb a légrés, annál jobb közelítéssel adja meg $R_0 = l_0/\mu_0 A_0$ a reluktanciáját. Az ábrából látható, hogy az A_0 keresztmetszet Φ_0 fluxusa kisebb a vasbeli Φ_1 fluxusnál. Vezessük be a

$$\tau = \Phi_1/\Phi_0 > 1 \quad (1.7-74)$$

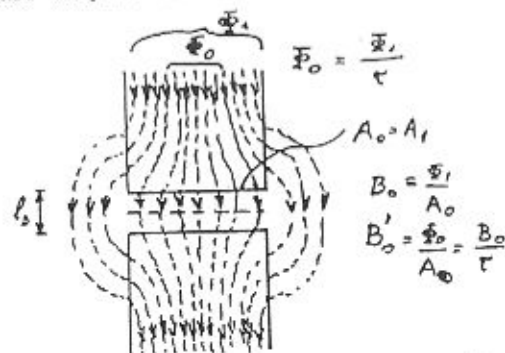
ún. szórási tényezőt. A légrés mágneses feszültsége

$$U_0 = R_0' \Phi_1 \quad (1.7-75)$$

ahol a légrés korrigált reluktanciája

$$R_0' = \frac{l_0}{\mu_0 A_0 \tau} = \frac{R_0}{\tau} \quad (1.7-76)$$

A τ szórási tényező számítása nehéz feladat.



1.7-19. ábra. A szórási tényező értelmezése légrés esetén

Tekintsük ismertnek egy mágneses kör egyes szakaszainak reluktanciáját és az egyes gerjesztőtekercsek

$$\Theta_1 = N_1 I_1 \quad (1.7-76)$$

ún. mágneses gerjesztését. A gerjesztési törvény, a fluxus megmaradásának törvénye és a mágneses Ohm törvény szerint egy mágneses körre a

$$\sum_k U_k = \Theta, \quad \sum_j \Phi_j = 0, \quad U_k = R_k \Phi_k \quad (1.7-77)$$

összefüggések vonatkoznak, ahol Θ azon mágneses gerjesztések összegét jelenti, amelyet az a zárt görbe zár körül, melyre a mágneses feszültségek összegét képezzük. A gyakorlatban a számítást a rezisztív hálózatokkal való nyilvánvaló analógia alapján végezzük (l. a példát).

Ha a mágneses körnek csak egyetlen gerjesztőtekercse van, akkor a sorosan és párhuzamosan kapcsolt reluktanciák eredőjét képezve meghatározhatjuk a gerjesztésre vonatkozó R eredő reluktanciát vagy Λ permeanciát. A gerjesztett oszlop fluxusa

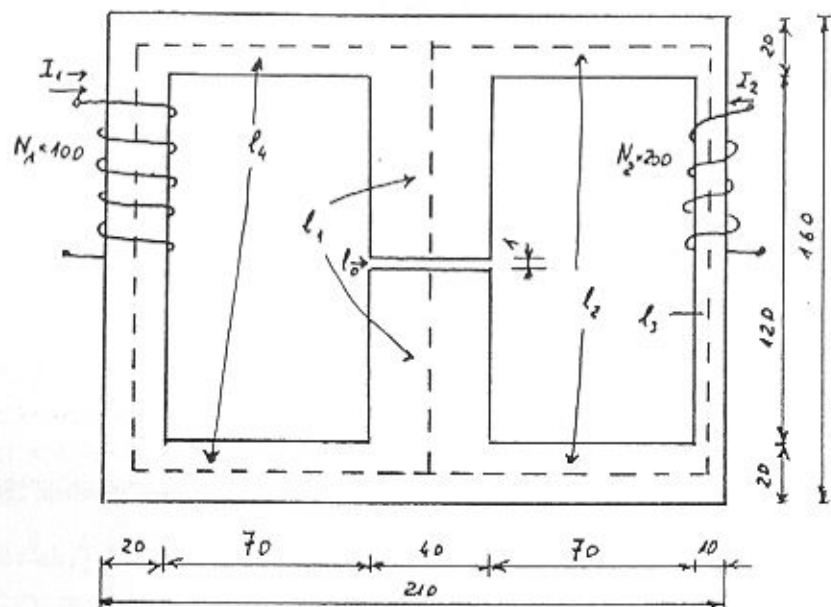
$$\Phi = \frac{1}{R} N I = \Lambda N I \quad (1.7-78)$$

A tekercs öninduktivitása közelítőleg $L = N\Phi/I = N^2\Phi/N I$, vagyis

$$L = N^2 \Lambda \quad (1.7-79)$$

Ha két tekercs ugyanazon az oszlopon van, akkor $L_1 = N_1^2 \Lambda$, $L_2 = N_2^2 \Lambda$ és $L_{12} = N_1 N_2 \Lambda$, így ezekkel a közelítésekkel $k = 1$.

Példaként tekintsük a 20. ábrán látható, viszonylag bonyolult mágneses kört. A vasmagra $\mu_r = 3700$. Határozzuk meg a két tekercs



1.7-20. Ábra. A példában szereplő lineáris mágneses kör kölcsönös induktivitását, továbbá azt az I_1 áramot, amellyel $I_2 = 0$ esetén $B_0 = 0,01$ T légrésindukció hozható létre. A mélységrányú méret mindenütt 20 mm.

Az egyes szakaszok jellemző adatai (a szórást egyelőre figyelmen kívül hagyva):

szakasz:	0	1	2	3	4	
$l_i =$	0,001	0,14	0,19	0,14	0,34	m
$A_i =$	800	800	400	200	400	10^{-6} m^2
$\mu_{r,i} =$	1	3700	3700	3700	3700	
$R_i =$	995	38	102	151	183	10^3 H^{-1}

Az 1. tekercsre vonatkozó eredő reluktancia

$$R = R_4 + (R_1 + R_0) \times (R_2 + R_3) = 386 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

Az egyes fluxusok $R_a = R_0 + R_1$ és $R_b = R_2 + R_3$ jelöléssel:

$$\Phi_4 = \frac{\Theta_1}{R} \cdot \Phi_0 = \Phi_1 = \frac{R_b}{R_a + R_b} \Phi_4 \cdot \Phi_2 = \Phi_3 = \frac{R_a}{R_a + R_b} \Phi_4$$

A kölcsönös induktivitás

$$L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_2}{\Theta_1 / N_1} = N_1 N_2 \frac{R_a}{R_a + R_b} \frac{1}{R} = 41,6 \text{ mH}$$

A $\Phi_0 = B_0 A_0$ fluxus gerjesztéséhez szükséges áram

$$I_1 = \frac{R_a + R_b}{R_b} \frac{R}{N_1} B_0 A_0 = 0,157 \text{ A}$$

Ellenőrzésként megállapítható, hogy $B_{\max} = B_3 = 0,15$ T, ami a mágneses jelleggörbe lineáris szakaszára esik (l. alább a 21. ábrát)

Tételezzük fel, hogy a szórási tényező $\tau = 1,2$. Ekkor a korrigált reluktancia $R'_0 = R_0 / \tau = 829 \cdot 10^{-3} \text{ H}^{-1}$. A számítás az előző mintájára végezhető, csak $B_0 A_0$ helyére $\tau \cdot B_0 A_0$ irandó és a reluktanciák korrigált értékei. Számszerűen $L'_{12} = 37,8 \text{ mH} = 0,98 L_{12}$, $I'_1 = 0,163 \text{ A} = 1,03 I_1$ adódik. A szórás alig befolyásolja az eredményeket, tehát τ pontos ismeretére ebben az esetben nincs szükség.

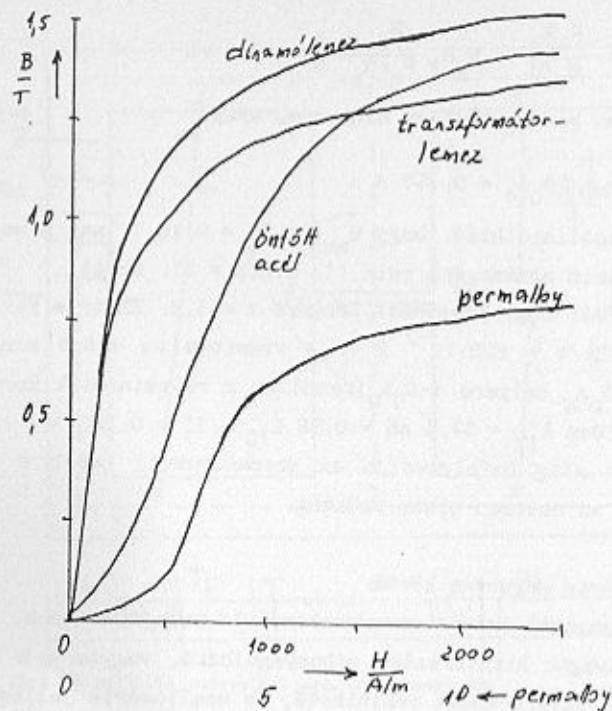
1.7-2.6. Nemlineáris mágneses körök

A ferromágneses anyagok ismeretesen nemlineáris tulajdonságúak. Az ún. lágy mágneses anyagok hiszterézise elhanyagolható, vagyis a $B = B(H)$ mágnesezési görbe egyértékűnek tekinthető, de nemlineáris jellegét figyelembe kell venni. A 21. ábrából látható, hogy egyes anyagokra (pl. dinamólemez, transzformátorlemez) a mágnesezési görbe középső szakasza lineárisnak tekinthető. Ekkor használható az előző pontbeli számítási eljárás. Más anyagoknál (pl. permalloy) a $B = \mu H$ közelítés nem megengedhető, legfeljebb egy $\mu = \mu(H)$ permeabilitás-függvény értelmezhető.

A nemlineáris mágneses kör számítását a következő módon végezzük. Osszuk fel a kört olyan szakaszokra, amelyekre a H_k mágneses térerősség, a B_k mágneses indukció és a Φ_k mágneses fluxus állandónak tekinthető. A (77)-hez hasonlóan felírható kellő számú

$$\sum_k H_k l_k = \Theta, \quad \sum_j \Phi_j = 0, \quad B_k = B_k(H_k) \quad (1.7-80)$$

típusú egyenlet, amelyet numerikusan vagy grafikusan megoldunk. Egyszerűbb esetekben néhány próbálgatással célhoz érhetünk. A mellékelt táblázatos karakterisztika alapján lineáris interpolációval is elfogadható eredményt kaphatunk. Ne felejtsük el, hogy a számítás nagyon sok közelítést tartalmaz (pl. a szórás elhanyagolása, a mágnesezési görbe bizonytalanságai, stb.).



1.7-21. ábra. Néhány ferromágneses anyag mágnesezési görbéje

H A/m	B ^{din} T	B ^{tr} T	H A/m	B ^{din} T	B ^{tr} T
0	0,00	0,00	1000	1,35	1,21
100	0,47	0,42	2000	1,49	1,31
200	0,77	0,69	3000	1,57	1,63
300	0,97	0,84	4000	1,63	1,41
400	1,08	0,94	5000	1,66	1,45
500	1,16	1,01	6000	1,70	1,48
600	1,22	1,07	7000	1,73	1,51
700	1,26	1,12	8000	1,76	1,54
800	1,30	1,33	9000	1,78	1,57
900	1,33	1,18	10000	1,80	1,59
1000	1,35	1,21			

A mágneses körre vonatkozó egyenletek gépi úton is előállíthatók és megoldhatók.

Példaként határozzuk meg a 20. ábrán (1. előbb) látható, dinamólemezről készült mágneses körben a $K = \Phi_2/\Phi_1$ fluxusviszonyt az I_1 gerjesztőáram függvényében, ha $I_2 = 0$.

Lineáris közelítésben a fluxusviszony független a gerjesztőáramtól. Az előző pont példája alapján a lineáris közelítés eredménye

$$K = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{R_a}{R_b} = 4,08.$$

Kis gerjesztőáramra ez az érték elfogadható. Az áram növelésekor nagyobb térerősségek és indukciók lépnek fel, a B/H viszony csökken, ezért különösen R_3 növekedni fog, míg R_0 állandó marad. Ebből következik, hogy K csökkenni fog az áram növelésekor.

Válasszunk egy Φ_2 fluxust, pl. $\Phi_2 = 50 \mu\text{Wb}$. Ebből számítható, ill. a mágnesezési görbéről vagy a táblázatból kiolvasható, hogy $B_2 = \Phi_2/A_2 = 0,125 \text{ T}$, ill. $H_2 = 26,6 \text{ A/m}$ és $B_3 = \Phi_3/A_3 = \Phi_2/A_3 = 0,250 \text{ T}$, ill. $H_3 = 53,2 \text{ A/m}$. A gerjesztési törvény értelmében

$$H_2 l_2 + H_3 l_3 - H_0 l_0 - H_1 l_1 = \Theta_2 = 0, \text{ mivel } I_2 = 0.$$

Ebből az egyik ismeretlen térerősség kifejezhető. A továbbiakban a számértékek SI-egységekben értendők. A H_0 kifejezése

$$H_0 = \frac{H_2 l_2 + H_3 l_3}{l_0} - H_1 \frac{l_1}{l_0} = 12502 - 140 H_1.$$

A $B_0 = \mu_0 H_0$ és a $B_1 = B_1(H_1)$ indukciónak (a szórás elhanyagolásával) meg kell egyeznie. Iteratív számítással először $H_1 = 0$ választással:

- $H_0 = 12502$ $B_0 = 0,0157$ $H_1 = 3,34$
- $H_0 = 12034$ $B_0 = 0,0151$ $H_1 = 3,22$
- $H_0 = 12052$ $B_0 = 0,0151$ $H_1 = 3,22$

Az utolsó értéket elfogadhatjuk. Ezzel $\Phi_0 = \Phi_1 = B_0 A_0 = 12,1 \mu\text{Wb}$, majd $\Phi_4 = \Phi_1 + \Phi_2 = 62,1 \mu\text{Wb}$, $B_4 = \Phi_4/A_4 = 0,1552 \text{ T}$, ebből $H_4 = 33,03 \text{ A/m}$. A gerjesztési törvény értelmében

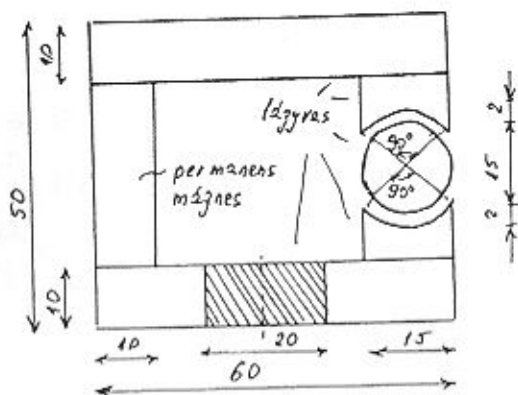
$$\Theta_1 = H_4 l_4 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = 23,7 \text{ A}, \quad I_1 = 0,237 \text{ A}.$$

A fluxusviszony $K = \Phi_2/\Phi_1 = 4,13$, ami alig tér el a lineáris közelítésben számítottól.

Válasszunk most $\Phi_2 = 250 \mu\text{Wb}$ fluxust. Az előző számítást megismételve most $\Phi_1 = 138 \mu\text{Wb}$ és így $K = 1,81$, továbbá $I_1 = 2,444 \text{ A}$ adódik. Az 5-ször nagyobb Φ_2 létrehozásához 10,3-szoros áram szükséges, a fluxusviszony várakozásunknak megfelelően csökkent.

1.7-2.7. Permanens mágnesek

A permanens (állandó) mágneses test által létrehozott mágneses tér meghatározása nagyon nehéz feladat. Itt csak egy igen egyszerű, de gyakorlati szempontból fontos, elemi úton is számítható esetet tárgyalunk. Feltételezzük, hogy a permanens mágnes a csatlakozó lágyvas sarokkal és kis légrésekkel mágneses kört alkot, amelynek fluxusa állandónak tekinthető. A permanens mágnesanyagok rendszerint nehezen megmunkálhatók, ezért többnyire egyszerű alakúra képezik ki őket, és a lágyvas sarok alakítja ki a megfelelő mágneses teret. Egy ilyen elrendezés látható a 22. ábrán (Deprez műszer egyszerű modellje).



1.7-22. ábra. Permanens mágneset tartalmazó egyszerű mágneses kör

A fellépő mágneses térerősség és indukció között egyrészt az teremt kapcsolatot, hogy a mágnesezési görbe egy pontját adják. A görbének csak a remanens indukció ($B = B_r$, $H = 0$) és a koercitív térerősség ($B = 0$, $H = -H_c$) közötti szakasza az érdekes (l. alább a 23. ábrát). A gerjesztési törvény által adódó másik kapcsolat egy egyenes a B, H síkon. Ennek metszéspontja a mágnesezési görbével adja a fellépő B és H értéket, vagyis a munkapontot.

Jelölje H , B , ill. l a permanens mágnesre vonatkozó mágneses térerősséget, indukciót, ill. közepes erővonalhosszat, H_v , B_v , ill. l_v a lágyvasra, H_0 , B_0 , ill. l_0 a légrésekre vonatkozó értéket. Mivel gerjesztőáram nincs, ezért a gerjesztési törvény a következő alakot ölti:

$$H l + H_v l_v + H_0 l_0 = 0 \quad (1.7-81)$$

A lágyvas szakaszok mágneses feszültségét a továbbiakban elhanyagol-

juk. A légréseben a mágneses térerősség

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 A_0} = \frac{\Phi/\tau}{\mu_0 A_0}$$

ahol $\Phi = BA$ a permanens mágnes fluxusa és τ a szórási tényező. Ezt a gerjesztési törvénybe helyettesítve a munkaegyenes egyenlete

$$B = -\mu_0 \tau \frac{l A_0}{l_0 A} H \quad (1.7-82)$$

A B , H munkaponti értékek ismeretében már könnyen számíthatók

$$\Phi = BA, \quad \Phi_0 = \frac{\Phi}{\tau}, \quad B_0 = \frac{\Phi_0}{A_0}, \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (1.7-83)$$

Tekintsük előírtak a légrés Φ_0 fluxusát, A_0 keresztmetszetét és l_0 hosszát. Fejezzük ki ezekkel a permanens mágnes $V = A \cdot l$ térfogatát. A (82)-ből

$$l = \frac{BA}{\tau} \frac{l_0}{\mu_0 A_0} \frac{1}{|H|} = \frac{\Phi_0 l_0}{\mu_0 A_0 |H|} \quad (1.7-84)$$

Másrészt $A = \Phi/B = \tau \Phi_0/B$, ezért

$$V = \frac{\tau l_0 \Phi_0^2}{\mu_0 A_0 |BH|} \quad (1.7-85)$$

Az első tényező adott, így a szükséges mágnesanyag térfogata és tömege akkor a legkisebb, ha a $|BH|$ szorzat maximális. Ez a mágnesezési görbe egy megszerkeszthető pontja.

Példaként legyen a 22. ábra elrendezésében a permanens mágnesanyag alnico XII, amelynek mágnesezési görbéje a 23. ábrán látható. A 22. ábra alapján $l = 30$ mm, $A = 200$ mm², $A_0 = 20 \cdot 17 \cdot \pi/4$ mm² = 267 mm² és $l_0 = 2 \cdot 2$ mm = 4 mm. A munkaegyenes egyenlete $\tau_a = 1,2$, ill. $\tau_b = 1,4$ esetén (SI-egységekben)

$$(a) B = -17,6 \cdot 10^{-6} \text{ T}; \quad (b) B = -15,1 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

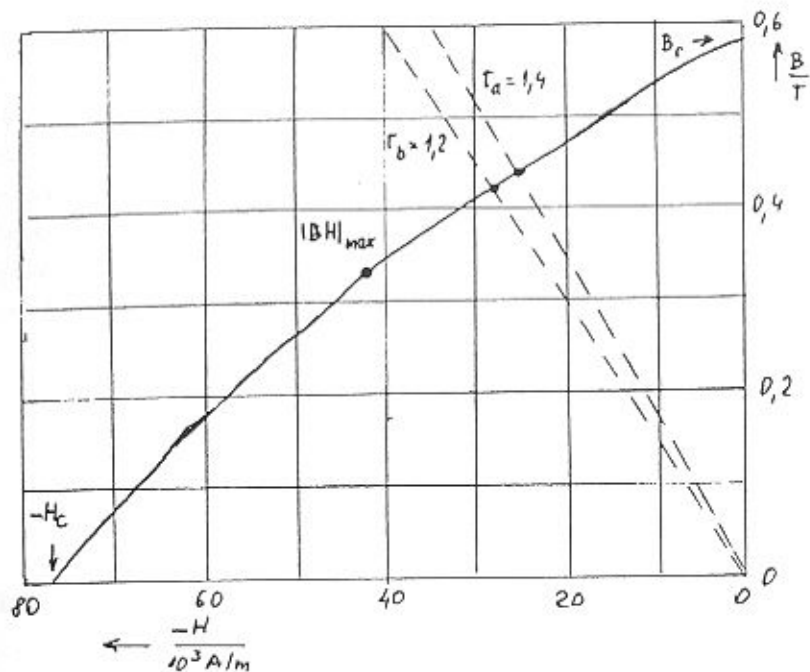
Az ábrán látható munkapontok alapján

$$(a) B = 0,440 \text{ T}, \quad \Phi = 88,0 \text{ } \mu\text{Wb}, \quad \Phi_0 = 62,9 \text{ } \mu\text{Wb}, \quad B_0 = 0,235 \text{ T};$$

$$(b) B = 0,442 \text{ T}, \quad \Phi = 84,4 \text{ } \mu\text{Wb}, \quad \Phi_0 = 70,3 \text{ } \mu\text{Wb}, \quad B_0 = 0,263 \text{ T}$$

A szórási tényező által okozott bizonytalanság mintegy 10%.

A megadott méretekkel a mágneses anyag térfogata $V = 6$ cm³. Minimális térfogat biztosítható a $B = 0,32$ T, $H = -42 \cdot 10^3$ A/m munkapont beállításával. A $\tau = 1,4$ értékhez tartozó adatokkal számolva a vastest méretei $A = \Phi/B = \tau \Phi_0/B = 2,75$ cm², $l = l_0 B_0/\mu_0 |H| = 1,78$ cm, tehát $V = 4,90$ cm³ = 0,92 V. A kisebb hossz miatt a lágyvas csatlakozásokat másként kell kialakítani.



1.7-23. ábra..Az alnico XII magnesezési görbéjének lényeges része

1.7-3. ELEKTROMÁGNESES TÉR

Az időben változó folyamatokkal kapcsolatban itt csak az alaptörvények megvilágítására mutatunk néhány példát.

1.7-3.1. Nyugalmi indukálás

Egy vezető gyűrű (sugara r_0 , rezisztenciája R_0) által körülzárt Ψ_0 mágneses fluxus az idő ismert függvénye. Ez a fluxus egy külső hatás következménye, a gyűrűben folyó áram hatását elhanyagoljuk. Határozzuk meg a gyűrű két pontja közötti U feszültséget. Ez megegyezik a két pont közé kapcsolt R rezisztenciájú ellenálláson fellépő U feszültséggel, ha $R \ll R_0$.

A feltett kérdésre a válasz attól függ, hogy a két pont között a az I áramot vivő vezeték hogyan helyezkedik el. Ez másként úgy fogalmazható meg, hogy a gyűrű P és O pontjához nem lehet olyan φ_P és φ_O elektromos potenciált rendelni, amelynek ismeretében $U = \varphi_P - \varphi_O$ egyértelműen kifejezhető. Ennek az az oka, hogy az indukció törvény

értelmében

$$\oint_l E dl = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (1.7-86)$$

és ennek következtében a P és O pontok közötti

$$U = \int_P^O E dl \quad (1.7-87)$$

feszültség függ az integrációs úttól. Esetünkben a hengerszimmetria miatt a vezető felületén fellépő elektromos térerősség a (86)-ból ki is fejezhető:

$$E = - \frac{1}{2\pi r_0} \frac{d\Psi_0}{dt}$$

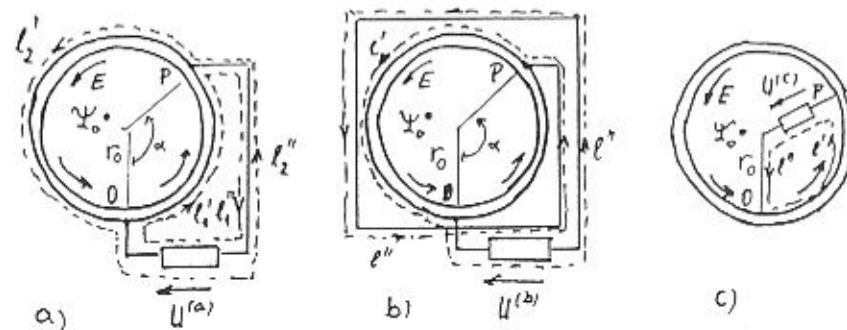
Íránya a Ψ_0 irányához a jobbszavar szabály szerint van rendelve.

Tekintsük először a 24a ábrán vázolt elrendezést. A (86)-ot az l_1 zárt görbére alkalmazva (amely nem vesz körül fluxust)

$$\oint_{l_1} E dl = \int_{l_1'} E dl + \int_{l_1''} E dl = E \cdot r_0 \alpha + U^{(a)} = 0$$

Ebből a keresett feszültség kifejezése

$$U^{(a)} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{d\Psi_0}{dt}$$



1.7-24. ábra. Két pont közötti feszültség néhány értelmezése nem potenciális erőterben

Alkalmazhatjuk a (86)-ot az l_2 görbére is, amely körülveszi a teljes Ψ_0 fluxust:

$$\oint_{l_2} E dl = \int_{l_2'} E dl + \int_{l_2''} E dl = E \cdot r_0 (2\pi - \alpha) - U^{(a)} = - \frac{d\Psi_0}{dt}$$

Ebből $U^{(a)}$ -ra ugyancsak a fenti kifejezés adódik.

Tekintsük most a 24b ábra szerinti elrendezést. A zárt görbe most kétszer veszi körül a Ψ_0 fluxust, egyébként a részintegrálok ugyanazok,

mint előbb az l_2 görbére, ezért

$$U^{(b)} = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{d\psi_0}{dt}$$

Most is választhatunk olyan zárt görbét, amely nem vesz körül fluxust. Ez teljesen körül fogja a gyűrűt és az OP szakaszt még egyszer. Erre is az előző $U^{(b)}$ feszültség adódik.

A 24c ábrán látható elrendezésben forgás-szimmetrikus (pl. homogén) mágneses tér esetén

$$E \cdot r_0 \alpha + U^{(c)} = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{d\psi_0}{dt}$$

Ebből $U^{(c)} = 0$ következik. Ez az eredmény még egyszerűbben úgy adódik, hogy mivel a vezeték mindenütt merőleges E-re (amelynek erővonalai körök), ezért E integrálja a vezeték mentén nulla.

Az Olvasóra bizzuk U számítását, ha a vezeték az OP húron helyezkedik el.

Ha kikötjük, hogy a vezeték csak a 24a ábrán látható módon helyezkedhet el (többnyire ez a helyzet), akkor

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{d\psi_0}{dt}$$

alakban mégis értelmezhetünk egy olyan potenciált, amelyből a feszültség különbségképzéssel, tehát a megszokott módon számítható.

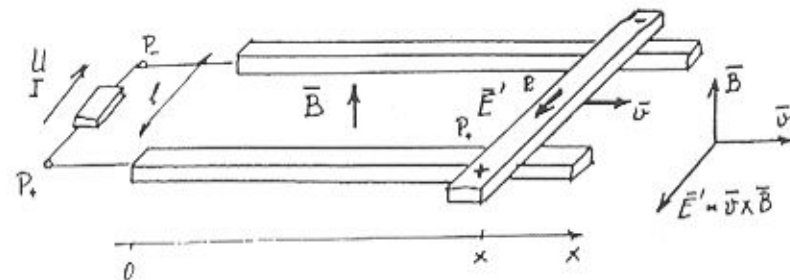
1.2-3.2. Mozgási indukálás

Tekintsük a 25. ábrán vázolt elrendezést. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a mágneses tér homogén, a rögzített sínek és a mozgó rúd rezisztenciája, valamint a kialakult hurok öninduktivitása elhanyagolható, továbbá $v \ll c$.

A mágneses térben mozgó rúdhoz rögzített koordinátarendszerben a $B' = B$ mágneses indukción kívül fellép $E' = v \times B$ elektromos térerősség is. Ennek hatására a töltések szétválnak és fellép egy

$$U' = \int_{P_+}^{P_-} E' \cdot dl = v B l \quad (1.7-88)$$

elektromos feszültség. Ez a vezető sínek révén fellép a lezáró két-pólus kivezetései között is: $U = U'$. Ha a lezárás egy R rezisztenciával jellemezhető, akkor árama $I = U/R$. A (88) akkor is érvényes, ha a v sebesség az x hely vagy a t idő függvénye, vagy ha a B indukció az x hely függvénye.



1.7-25. Ábra. Mozgási indukálás révén keletkező elektromos térerősség és feszültség

Ha azonban a B indukció az idő függvénye is, akkor fellép egy U^* nyugalmi indukált feszültség is, amely $v = 0$ esetén is jelentkezik. Mivel U iránya most balcsavar szabállyal van a mágneses tér irányához rendelve, ezért homogén mágneses tér esetén

$$U^* = \frac{d\psi}{dt} = \int_0^x \frac{\partial B}{\partial t} l \, dx = A \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.7-89)$$

ahol $A = l \cdot x$ a hurok területe. A teljes feszültség

$$U = U' + U^* = A \frac{\partial B}{\partial t} + v B l \quad (1.7-90)$$

Legyen például

$$B = B_0 \sin \Omega t, \quad v = v_0 \sin \omega t, \quad \text{tehát } x = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t).$$

A fellépő feszültség ekkor

$$U = l \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \Omega B_0 \cos \Omega t + v_0 \sin \omega t \cdot B_0 \sin \Omega t \cdot l = v_0 B_0 l \left(\frac{\Omega}{\omega} \cos \Omega t - \frac{\Omega}{\omega} \cos \omega t \cdot \cos \Omega t + \sin \omega t \cdot \sin \Omega t \right).$$

Érdekes módon a teljes feszültség kifejezhető a nyugalmi indukálás

$$U = \frac{d}{dt} \int_A B \, dA \quad (1.7-91)$$

formulájával is, ha figyelembe vesszük a fluxusnak mind az indukció időbeli változásából, mind a felület időbeli változásából adódó változását. Ezt (91)-ben az fejezi ki, hogy az integrálnak az idő szerinti teljes (és nem parciális) deriváltját kell képezni. Homogén mágneses tér esetén

$$U = \frac{d(BA)}{dt} = A \frac{dB}{dt} + B \frac{dA}{dt} \quad (1.7-92)$$

Esetünkben $A = l \cdot x$, ezért

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d(lx)}{dt} = l \frac{dx}{dt} = l \cdot v,$$

tehát a (92) valóban a (90)-re vezet.

Igy például az előbb megadott időbeli változások esetén

$$\Psi = B l x = B_0 \sin \Omega t \cdot l \cdot \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t),$$

$$U = \frac{d\Psi}{dt} = B_0 l v_0 \left(\frac{\Omega}{\omega} \cos \Omega t - \frac{\Omega}{\omega} \cos \Omega t \cdot \cos \omega t + \sin \Omega t \cdot \sin \omega t \right),$$

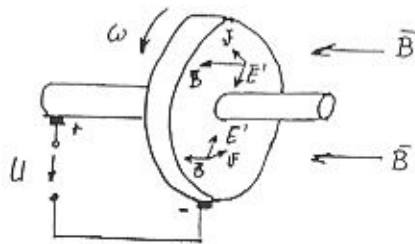
előző számításunk eredményével egyezésben.

A (91)-et egyesített indukció törvénynek nevezik. Alkalmazása sok feladtnál igen kényelmes. Fizikai tartalma azonban kétséges, mivel a nyugalmi és a mozgási indukálás különböző jelenség.

Tekintsük például a 26. ábrán látható ún. unipoláris generátort. A fémtárcsa rá merőleges homogén mágneses térben forog ω szögsebességgel. A tárcsához rögzített rendszerben $E' = v \times B$ radiális elektromos térerősség lép fel. A kivezetések között fellépő feszültség

$$U = \int_0^{r_0} r \omega B dr = \frac{1}{2} r_0^2 \omega B.$$

Ha $B = 1 \text{ T}$, $r_0 = 1 \text{ m}$ és $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ rad/s}$, akkor $U = 157 \text{ V}$. Ezt a feszültséget az egyesített indukció törvénnyel nem lehet egyszerűen magyarázni, hiszen B időben állandó és nem világos, hogy milyen felület időbeli változását kellene vizsgálni.

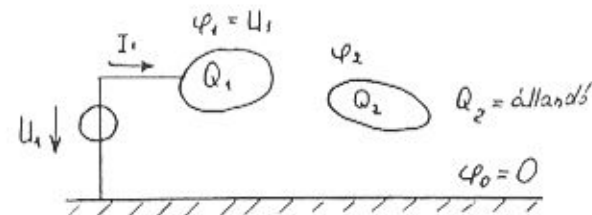


1.7-26. ábra. Az unipoláris generátor vázlatja

1.7-2.3. Az eltolási áram

Elektródarendszerek esetén az eltolási áram a hálózatelmélet kapacitív áramával azonosítható. Ez a síkkondenzátor vizsgálatával egyszerűen belátható. Tekintsük most a 27. ábra kissé általánosabb elrendezését. E szerint az 1. elektróda feszültségforrásra van kapcsolva, így $\varphi_1 = U_1$ potenciálja ismert. A 2. elektróda szigetelt, így Q_2 töltése állandó, legyen $Q_2 = 0$. A feladat az I_1 áram és a φ_2 potenciál

meghatározása.



1.7-27. ábra. Ket elektródból és a földből álló rendszer

Tekintsük ismertnek a töltések és a potenciálok kapcsolatát kifejező (34) szerinti

$Q_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$, $Q_2 = C_{20}\varphi_2 + C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1)$, $C_{21} = C_{12}$ egyenletekben a C_{ik} részkapacitásokat. Az egyenletrendszer megoldása $\varphi_1 = U_1$ és $Q_2 = 0$ felhasználásával

$$Q_1 = \frac{C_{12}(C_{10} + C_{20}) + C_{12}C_{20}}{C_{12} + C_{20}} U_1, \quad \varphi_2 = \frac{C_{12}}{C_{12} + C_{20}} U_1.$$

Ebből a bejelölt $I_1 = dQ_1/dt$ áram könnyen kifejezhető. Hasonló módon oldhatók meg azok a feladatok, amelyeknél az n számú elektródára n számú előírás (potenciál és töltés) van.

A részkapacitások nagyon egyszerű elrendezésekben elemi módszerekkel számíthatók, mint pl. az 1.7-10. ábra szerinti elrendezésben. Ilyenkor meg tudjuk határozni az elektródák felületén az E térerősséget és a $D = \epsilon E$ elektromos eltolást, majd ennek ismeretében az

$$I_D = \oint_A \frac{\partial D}{\partial t} dA$$

eltolási áramot is, amely - a Gauss törvény felhasználásával -

$$I_D = \frac{dQ}{dt}$$

alakban is kifejezhető. A folytonossági egyenlet értelmében

$$\frac{dQ}{dt} = -I,$$

ahol I az A felület által burkolt elektródából kifolyó áram. Végeredményben más megfontolásokkal ugyanazokat az egyenleteket kapjuk, mint előzőleg a részkapacitásokkal. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az 1. elektródába befolyó I_1 áram onnan I_{D1} eltolási áramként "kifolyik" részben a 2. elektródába, részben a földre. A 2. elektródára a helyzet hasonló, csak nincs vezetési áram, így az eredő eltolási áram nulla, amiből következik, hogy Q_2 állandó.

1.7-3.4. Stacionárius teljesítményáramlás

Vizsgáljuk a 28. ábrán látható koaxiális kábelt, amelynek bal oldali végénél van a generátor, jobb oldali végénél a fogyasztó.

Tekintsük egyelőre a szigetelőanyagot ideálisnak ($\sigma_b = 0$), az ért és a köpenyt ideális vezetőnek ($\sigma_a = \sigma_c = \infty$). Az elektromos és a mágneses térerősség kifejezése a szigetelőben (1.7-1.3. és 1.7-2.2. pont)

$$E_r(r) = \frac{U}{\ln(r_b/r_a)} \frac{1}{r}, \quad H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad r_a \leq r \leq r_b.$$

A Poynting vektor ennek következtében z-irányú:

$$S_z(r) = E_r(r) \cdot H_\varphi(r) = \frac{U I}{2\pi \ln(r_b/r_a)} \frac{1}{r^2}, \quad r_a \leq r \leq r_b.$$

Másutt $S = 0$. A generátorból kiáramló teljesítmény

$$P_{S1} = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \int_{r_a}^{r_b} S_z(r) \cdot 2\pi r \, dr = \frac{U I}{\ln(r_b/r_a)} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = U \cdot I.$$

A V_1 térfogatban $P_1 = -P_{S1} = -UI$ a fogyasztott, tehát UI a termelt teljesítmény. A V_2 térfogatot határoló A_2 felületre elvégezve a számítást, S és n ellentétes irányát figyelembe véve $P_{S2} = -UI$ átáramló, és így $P_2 = UI$ fogyasztott teljesítmény adódik. Végül a V_3 térfogatra azt kapjuk, hogy $P_{S3} = 0$ és $P_3 = 0$, ami azt fejezi ki, hogy az ideális kábelben nem lép fel veszteség.

Vegyük most figyelembe az ér, ill a köpeny σ_a , ill. σ_c koduktivitását. Az árameloszlás egyenletes, ezért

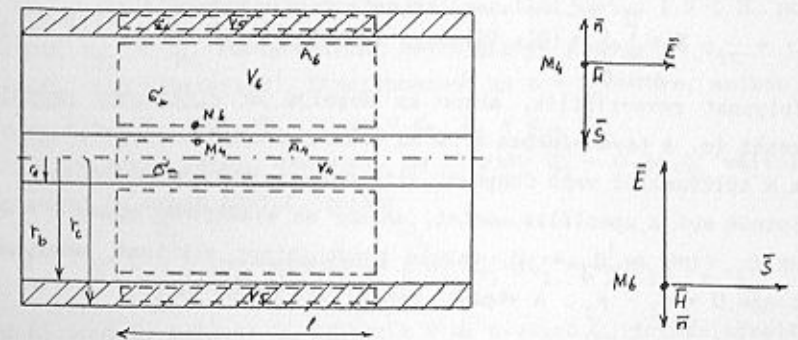
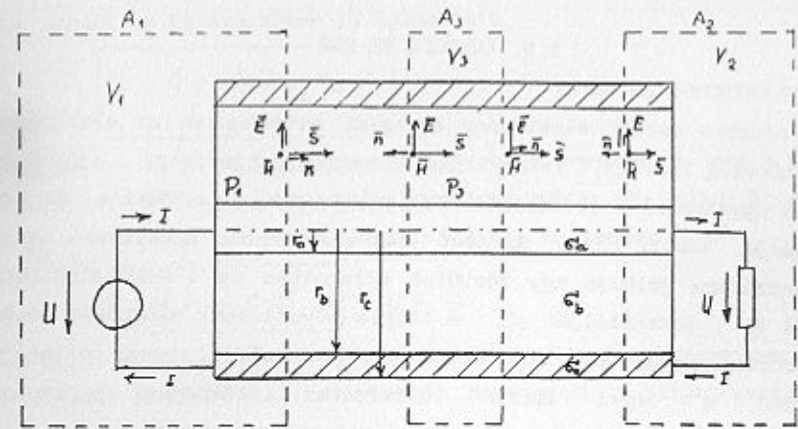
$$E_z(r) = \frac{I}{\sigma_a r_a^2 \pi}, \quad H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r_a^2} r, \quad 0 \leq r \leq r_a;$$

$$E_z(r) = \frac{-I}{\sigma_c (r_c^2 - r_b^2) \pi}, \quad H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi (r_c^2 - r_b^2)} \frac{r_c^2 - r^2}{r}, \quad r_b \leq r \leq r_c.$$

A kábel erét körülvevő A_4 felületre (28. ábra)

$$P_{S4} = \oint_{A_4} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = -E(r_a) H(r_a) 2\pi r_a l = -\frac{1}{\sigma_a r_a^2 \pi} I^2 = -R_a \cdot I^2,$$

ahol R_a az ér rezisztenciája. Ezek szerint $P_4 = R_a I^2$ helyesen kiadódik. Analóg módon adódik $P_5 = R_c I^2$ a köpenyre. A szigetelőanyag V_6 térfogatára - a vezetőkön fellépő, az U feszültségnél sokkal kisebb feszültségeket elhanyagolva - $P_{S6} = 0$ és $P_6 = 0$ adódik.



1.7-28. ábra. Teljesítményáramlás koaxiális kábelben veszteségmentes, ill veszteséges esetben

Ha figyelembe akarjuk venni a szigetelőanyag véges σ_b koduktivitását, akkor az átáramló teljesítmény számításához először meg kellene határoznunk a radiális szivárgási áramhoz tartozó mágneses térerősséget. Egyszerűbb ezért P_6 számítása a $p = J^2/\sigma_b = \sigma_b E^2$ teljesítménysűrűség térfogatra vett integrálásával:

$$P_6 = \int_{V_6} \sigma_b E^2 \, dV = \int_{r_a}^{r_b} \sigma_b \frac{U^2}{\ln^2(r_b/r_a)} \frac{1}{r^2} 2\pi r \, l \, dr = \frac{2\pi \sigma_b l}{\ln(r_b/r_a)} U^2,$$

ahol G_b az l hosszúságú szigetelő réteg koduktanciája.

Az előbb számított P_{S1} és P_{S2} teljesítmények most is helyesek, csak figyelembe kell vennünk, hogy az U feszültség (a vezetékeken fellépő feszültségek miatt) és az I áram (a szivárgás miatt) nem állandó.

Ennek következtében P_{S3} most nem nulla, hanem $P_{S3} + P_4 + P_5 + P_6 = 0$ érvényes. A részletes számítást az Olvasóra bizzuk.

1.8. ENERGIA ÉS ERŐ

1.8-1. ELEKTROMOS ENERGIA

Egy térrészben tárolt elektromos energiát általánosan az elektromos energiasűrűség térfogati integráljaként határozhatjuk meg.

Sok gyakorlati feladatnál az elektródák Q_i töltése és φ_i potenciálja adott. Ezen állapot létrehozásához szükséges munka meghatározására jelölje egy közbülső állapotban az i -edik elektróda töltését Q'_i , potenciálját φ'_i . A töltés növeléséhez szükséges munka (a potenciál fogalmából következően) $dW'_i = \varphi'_i \cdot dQ'_i$. A töltetlen állapotból a végső állapot eléréséhez szükséges munka n számú elektróda esetén

$$W = \sum_{i=1}^n \int_0^{Q_i} \varphi_i(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n) dQ'_i \quad (1.8-1)$$

Ha a folyamat reverzibilis, akkor ez megadja az elektromos energia kifejezését is. A továbbiakban erre az esetre szorítkozunk. A potenciálok a töltésektől való függését általánosan nehéz meghatározni.

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az elektródák száma $n = 2$, töltésük $Q_1 = +Q$ és $Q_2 = -Q$, vagyis kondenzátort alkotnak, amelyek feszültsége $U = \varphi_1 - \varphi_2$. A végzett munka kifejezése ekkor

$$W = \int_0^Q \varphi_1(Q', -Q') dQ' + \int_0^{-Q} \varphi_2(Q', -Q') d(-Q')$$

Bevezetve az $U(Q) = \varphi_1(Q, -Q) - \varphi_2(Q, -Q)$ jelölést a feszültségre,

$$W = \int_0^Q U(Q') dQ' \quad (1.8-2)$$

adódik a nemlineáris kondenzátor energiájának kifejezésre. A dinamikus kapacitás bevezetésével

$$W = \int_0^Q C(U') U' dU' ; \quad C(U) = \frac{dQ(U)}{dU} \quad (1.8-3)$$

Ha a szigetelő közeg lineáris, akkor ezek az összefüggések egyszerűsödnek. Növeljük valamennyi töltést egyenletesen, tehát legyen $Q'_i = \lambda Q_i$, ahol λ nulláról 1-re növekszik. A linearitás következtében $\varphi_i(\lambda Q_1, \lambda Q_2, \dots, \lambda Q_n) = \lambda \cdot \varphi_i$, tehát

$$W = \sum_{i=1}^n \int_0^{Q_i} \lambda \varphi_i Q_i d\lambda = \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_i \int_0^1 \lambda d\lambda$$

Ebből adódik az egyszerűbben is igazolható

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_i \quad (1.8-4)$$

összefüggés a tárolt elektromos energia kifejezésére (1. még a 2.1-6. szakaszt is). Ha két elektróda kondenzátort alkot ($Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$, $\varphi_1 - \varphi_2 = U$), akkor akár ebből, akár (3)-ból az ismert

$$W = \frac{1}{2} C U^2, \quad C = \frac{Q}{U} \quad (1.8-5)$$

összefüggés adódik. Több elektróda esetén az energia a részkapacitások segítségével fejezhető ki. Az energia megegyezik a helyettesítő kondenzátorok által tárolt energiák összegével (vö. 1.7-8. ábra).

Energetikai megfontolások alapján igazolhatjuk az 1.7-1.5. pontban állított $p_{1k} = p_{k1}$ reciprocitási összefüggést (amelyből $c_{1k} = c_{k1}$ és $C_{1k} = C_{k1}$ már következik). Szorítkozunk az $n = 2$ esetre, amikor

$$\varphi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2, \quad \varphi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

Határozzuk meg a tárolt energiát, ha először $Q'_2 = 0$ és Q'_1 változik 0 és a végső Q_1 érték között, amikor

$$W' = \int_0^{Q_1} \varphi_1(Q'_1, Q'_2) dQ'_1 = \int_0^{Q_1} p_{11} Q'_1 dQ'_1 = \frac{1}{2} p_{11} Q_1^2$$

majd állandó Q_1 mellett Q'_2 változik 0 és a végső Q_2 értéke között:

$$W'' = \int_0^{Q_2} \varphi_2(Q_1, Q'_2) dQ'_2 = \int_0^{Q_2} (p_{21} Q_1 + p_{22} Q'_2) dQ'_2 = p_{21} Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} p_{22} Q_2^2$$

A teljes energia e két részmunka összege, vagyis

$$W = \frac{1}{2} p_{11} Q_1^2 + \frac{1}{2} p_{22} Q_2^2 + p_{21} Q_1 Q_2$$

Ha Q_1 és Q_2 szerepét megcseréljük, akkor ugyanehhez a kifejezéshez jutunk, csak p_{21} helyett p_{12} szerepel. Mivel az energia nem függ az állapot kialakulásától, ezért $p_{12} = p_{21}$, amit igazolni akartunk.

1.8-2. MÁGNESES ENERGIA

Egy térrészben tárolt mágneses energiát általánosan a mágneses energiasűrűségnek a térfogatra vett integráljaként határozhatjuk meg.

Sok gyakorlati feladatnál az áramhurkok (toroid, szolenoid, más-

féle tekercs) Ψ_k fluxusa és I_k árama adott. Ezen állapot létrehozásához szükséges munka meghatározásához jelölje egy közbülső állapotban a k-adik hurok fluxusát Ψ'_k , áramát I'_k . A megváltozáshoz szükséges munka (az indukált feszültség kifejezését is felhasználva)

$$dW_k = -I'_k U'_k dt = +I'_k \cdot d\Psi'_k.$$

A negatív előjel az 1.2-5. ábra referenciáirányából következik: ha zárjuk a hurkot, akkor az áram kívül a + pólustól a - pólus felé, tehát a hurokban a - pólustól a + felé folyik. A fluxusmentes állapotból a végső állapot eléréséhez szükséges munka n számú hurok esetén

$$W = \sum_{k=1}^n \int_0^{\Psi_k} I_k(\Psi'_1, \Psi'_2, \dots, \Psi'_n) d\Psi'_k. \quad (1.8-6)$$

Ha a folyamat reverzibilis, akkor ez tekinthető a mágneses energia kifejezésének. Nem elhanyagolható hiszterézisű közegekre ez a feltételezés nem jogos, de a továbbiakban erre az esetre szorítkozunk. Az áramoknak a fluxusoktól való függését általában nehéz meghatározni.

Speciálisan egyetlen hurok (tekercs) esetén

$$W = \int_0^{\Psi} I(\Psi') d\Psi' \quad (1.8-7)$$

vagy a dinamikus öninduktivitás bevezetésével

$$W = \int_0^{\Psi} L(I') I' dI'; \quad L(I) = \frac{d\Psi(I)}{dI} \quad (1.8-8)$$

adja a mágneses energia kifejezését.

Ha minden közeg lineárisnak tekinthető, akkor az előző szakaszban bemutatott gondolatmenet mintájára a mágneses energia kifejezésére

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k \quad (1.8-9)$$

adódik. Egyetlen hurok esetén

$$W = \frac{1}{2} L I^2; \quad L = \frac{\Psi}{I} \quad (1.8-10)$$

Ezt az 1.7-2.2. pontban fel is használtuk a belső öninduktivitás számítására. Hurokrendszer energiája az ön- és kölcsönös induktivitások segítségével fejezhető ki. Az $L_{ik} = L_{ki}$ reciprocitási összefüggés ugyancsak az előző pontban látott mintára igazolható.

1.8-3. ELEKTROMOS ERŐHATÁS

Egy kisméretű, Q töltésű testre ható erőt meghatározhatjuk az elektromos térerősség definíciója alapján. Tekintsük ismertnek azt az E_p elektromos térerősséget, amely az elektródák töltésének hatására a P pontban létrejön. Helyezzünk egy Q töltésű testet ebbe a pontba. Ha a test mérete elég kicsi, akkor az általa elfoglalt térrész bármely pontjában az E_p térerősség és a φ_p potenciál ugyanakkorának tekinthető. Ha a test Q töltése elég kicsi és távolsága az elektródáktól elég nagy, akkor jelenléte nem befolyásolja az elektródák töltéseloszlását és potenciálját. Ekkor a töltött testre ható erő (1.2-1. ábra)

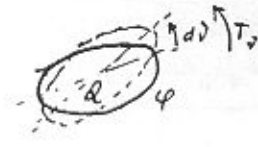
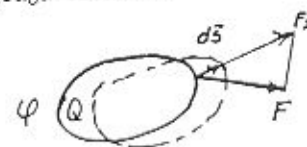
$$F = Q E_p. \quad (1.8-11)$$

Ez az összefüggés elsősorban töltött elemi részecskékre (elektronok, protonok) ható erő és ezen keresztül pályájuk számítására alkalmas.

Vizsgáljuk most a következő általánosabb problémát. Adott a Q_1, Q_2, \dots, Q_n töltésű elektródák rendszere. Ezek valamelyikére ható erőt, III. erőnyomatékot jelölje F, III. T. Mozdítsuk el a vizsgált elektródát kis ds eltolással vagy forgassuk el kis $d\theta$ szöggel (1. ábra). A mechanikai munkavégzés ekkor

$$dW_{\text{mech}} = F ds = F_s ds, \quad dW_{\text{mech}} = T_\theta d\theta, \quad (1.8-12)$$

ahol F_s az erő vetülete az eltolás irányában, míg T_θ az erőnyomaték vetülete az elfordulás síkjára. Általános esetben az erő, III. az erőnyomaték három, célszerűen egymásra merőleges összetevőjét kell meghatározunk. Egyszerűbb esetekben az irány előre ismert lehet. Az irányításra általános szabály, hogy magára hagyott elektrosztatikus rendszerben olyan elmozdulások jönnek létre, amelyek hatására a térerősi energiája csökken.



1.8-1. Ábra. Testre ható F erő, III. T erőnyomaték meghatározása

A mechanikai munkavégzést most kapcsolatba hozzuk a W térenergia megváltozásával. A térenergia kifejezhető pl. az elektromos energia-sűrűséggel

$$W = \int_V w dV, \quad w = \int_0^D E dD, \quad \text{III. } w = \frac{1}{2} \epsilon E^2.$$

Az utolsó összefüggés akkor érvényes, ha az ϵ permittivitás nem függ az E térerősségtől (ezt a továbbiakban $\epsilon = \text{áll.}$ fejezi ki).

Tekintsük először azt az esetet, amikor az elmozdulás vagy elfordulás során az elektródák töltése állandó marad (a potenciálok változnak meg). A mechanikai munkavégzés ekkor a térenergia rovására jön létre. Az energia megmaradásának elve értelmében

$$dW + dW_{\text{mech}} = 0, \quad Q_k = \text{áll.} \quad (1.8-13)$$

A (12) felhasználásával ebből

$$F_s = -\frac{\partial W}{\partial s}, \quad T_\theta = -\frac{\partial W}{\partial \theta}; \quad Q_k = \text{áll.} \quad (1.8-14)$$

Az erő, ill. az erőnyomaték számításához ismernünk kell a térenergiát mint az s méret, ill. a θ szög függvényét. A differenciáhányadost gyakran differenciáhányadossal közelítjük.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az elmozdulás során az elektródák φ_k potenciálja marad állandó. Ezt úgy biztosíthatjuk, hogy minden elektróda és a nulla potenciálú föld közé egy φ_k forrásfeszültségű feszültségforrást képzelünk. Az elmozdulás során minden elektróda töltése megváltozik valamilyen dQ_k értékkel. Az egyes források által végzett munka $\varphi_k \cdot dQ_k$. E munka részben a térenergiát növeli, részben mechanikai munkavégzésre fordítódik:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k dQ_k = dW + dW_{\text{mech}}, \quad \varphi_k = \text{áll.} \quad (1.8-15)$$

Szorítkozzunk lineáris közegekre. Ekkor a térenergia kifejezése (4) értelmében, ill. annak megváltozása $\varphi_k = \text{áll.}$ esetén

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k Q_k, \quad dW = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dQ_k.$$

A források által végzett munka tehát ekkor $2 dW$, így a (15) felírható $dW = dW_{\text{mech}}$ alakban is. A (12) felhasználásával ebből

$$F_s = \frac{\partial W}{\partial s}, \quad T_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta}; \quad \varphi_k = \text{áll.}, \quad \epsilon = \text{áll.} \quad (1.8-16)$$

Mivel sztatikus erőhatásról van szó és valójában nincs elmozdulás, ezért a (16) - ha alkalmazható - ugyanazt az eredményt adja, mint a (14), noha a képletekben előjeleltérés van.

Sok gyakorlati esetben csak két elektróda van, amelyek kondenzátort alkotnak ($Q_1 = Q, Q_2 = -Q$). A C kapacitásnak az s mérettől, ill. a

θ szögtől való függésének ismeretében, $W = C U^2/2$ felhasználásával

$$F_s = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial s}, \quad T_\theta = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial \theta}. \quad (1.8-17)$$

Ugyanehhez az eredményhez (14) alapján is eljuthatunk:

$$F_s = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial(1/C)}{\partial s} = +\frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial s},$$

ahol $Q/C = U$, vagyis ez valóban a (17)-tel megegyezik.

Példaként határozzuk meg egy A felületű és d elektródatávolságú sikkondenzátor elektródájára ható erőt, ha d sokkal kisebb az elektródák keresztirányú méreteinél. A kapacitás kifejezése ekkor jó közelítéssel $C = \epsilon A/d$. Az elektródák felületére merőleges erő

$$F_d = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial}{\partial d} \frac{\epsilon A}{d} = -\frac{\epsilon A U^2}{2 d^2}.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy F_d a d méret csökkenése irányában mutat, vagyis vonzóerő lép fel, amint az fizikailag nyilvánvaló is. Mivel $U/d = E$ és $\epsilon E = \sigma$ a felületi töltéssűrűség, ezért a vonzóerő $F = \frac{1}{2} \sigma E \cdot A$. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a vezető felületén elhelyezkedő töltésre a vezetőkívül fellépő E térerősség és a vezetőkívül fellépő 0 térerősség számtani középértéke hat. Levegőben $E = 10 \text{ kV/cm}$ vagyis $E = 10^6 \text{ V/m}$ tekinthető maximálisan megengedhető térerősségnek, így legfeljebb $F/A = \epsilon_0 E^2/2 \approx 10 \text{ N/m}^2$ felületi erőssűrűség (nyomás) léphet fel, ami viszonylag kis érték.

1.8-4. MÁGNESES ERŐHATÁS

A mágneses indukció definíciója alapján meg tudjuk határozni azt az erőnyomatékot, amely egy kisméretű, I A n momentumú áramhurokra hat. Tekintsük ismertnek azt a B_p mágneses indukciót, amely az áramok és a permanens mágnesek hatására egy P pontban fellép. Helyezzünk egy áramhurokot ebbe a pontba. Ha a hurok mérete elég kicsi, akkor bármelyik pontjában az indukció B_p -nek tekinthető. Az erőnyomaték (1.2-2. ábra)

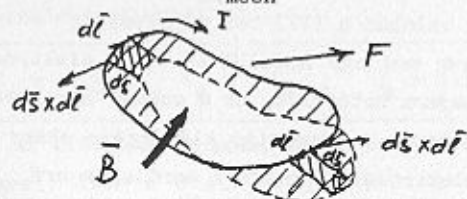
$$T = I A n \times B_p. \quad (1.8-18)$$

Általános esetben ismét a mechanikai munka és a mágneses energia kapcsolata alapján határozhatjuk meg az erőt vagy az erőnyomatékot. Egy külső mágneses térbe helyezett áramhurok energiája (1.2-11) értelmében $W = -I \Psi$, ahol Ψ a külső tér által létrehozott fluxus. A hurok elfordulásakor fellépő dW energiatranszformáció és a $dW_{\text{mech}} = T_\theta d\theta$

mechanikai munka kapcsolata $dW + dW_{\text{mech}} = 0$. Az erőnyomaték kifejezése ebből

$$T_\theta = I \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (1.8-19)$$

Tekintsünk most egy I árammal átjárt vezető hurkot. A B mágneses indukció a vezeték minden pontjában legyen ismert. Mozdítsuk el a hurkot ds -sel (2. ábra). A $dW_{\text{mech}} = -dW$ alapján $F ds = I \cdot d\Psi$. A $d\Psi$



1.8-2. ábra. Mágneses térbe helyezett áramhurokra ható erő fluxusváltozás a 2. ábrán a vonalkézott felület fluxusa. A bal oldali felületrészhez tartozó "eltűnt" fluxust negatívnak, a jobb oldali "járulékos" fluxust pozitívnak kell tekintenünk. Az irányított felület-elemet ehhez $dA' = ds \times dl$ alakban írjuk fel. Az elemi fluxusváltozás

$$d\Psi' = B dA = B(ds \times dl) = (dl \times B) ds.$$

A $d\Psi$ fluxusváltozást a $d\Psi'$ fluxusoknak a hurok körüljárásával való összegezésével, vagyis az l görbe menti integrálásával kapjuk:

$$F ds = I d\Psi = I \oint_l (dl \times B) ds.$$

Mivel ds tetszőleges, ezért az áram által átfolyt vezetékre ható erő

$$F = I \oint_l dl \times B \quad (1.8-20)$$

alakban fejezhető ki. Ezt formálisan úgy értelmezhetjük, hogy a vezeték minden ívelemére

$$dF = I dl \times B \quad (1.8-21)$$

elemi erő hat (1.2-2. ábra) és a teljes erő ezek eredője. Mint már említettük, ez is tekinthető a mágneses indukció definíciójának.

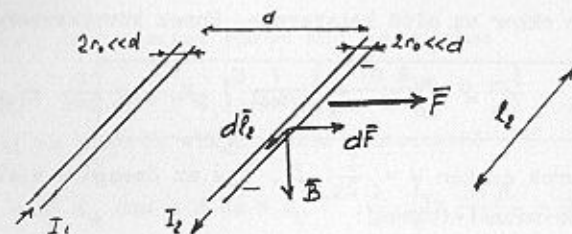
Példaként tekintsünk két igen hosszú, egyenes, egymással párhuzamos kissugarú vezetékkel, amelyekben I_1 , ill. I_2 áram folyik (3. ábra). Az I_1 áram által létrehozott mágneses indukció a másik vezeték mentén állandó, éspedig vákuumban vagy levegőben

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi d}.$$

Az indukció a vezetékre merőleges, így (20) alapján az l_2 hosszúságú szakaszra ható, az ábrán jelölt irányú erő

$$F = I_2 l_2 B = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l_2}{2\pi d}.$$

Az amper definíciója szerint: ha a vázolt elrendezésben $I_1 = I_2 = 1$ A és $d = l_2 = 1$ m, akkor $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N. Ezeket behelyettesítve



1.8-3. ábra Árammal átjárt párhuzamos vezeték esetén fellépő erő

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ N} = \mu_0 \frac{1}{2\pi} \text{ A}, \text{ amiből } \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}.$$

A μ_0 értéke az amper definíciójának következménye.

Tekintsük most azt az esetet, amikor I_1, I_2, \dots, I_n áramú áramhurok rendszere adott. Tekintsük ismertnek a mágneses térenergiát, amelyet pl. a mágneses energiasűrűség ismeretében határozhatunk meg:

$$W = \int_V w dV; \quad w = \int_0^B H dB \quad \text{vagy} \quad w = \frac{1}{2} \mu H^2,$$

ahol az utolsó összefüggés akkor érvényes, ha a μ permeabilitás nem függ a H térerősségtől, amit a következőkben $\mu = \text{áll.}$ fejez ki.

Valamelyik áramhurok elmozdulásakor, ill. elfordulásakor a mechanikai munkavégzés $dW_{\text{mech}} = F_s ds$, ill. $T_\theta d\theta$ (vö. 1. ábra).

A térenergia megváltozásának vizsgálatához tételezzük fel, hogy minden áramhurokban egy I_k forrásáramú áramforrás van. Az elmozdulás során megváltoznak a fluxusok: $d\Psi_k = U_k dt$. A k -adik áramforrás által végzett munka $I_k d\Psi_k$. E munkák összege részben a térenergiát növeli, részben mechanikai munkavégzésre fordítódik, tehát

$$\sum_{k=1}^n I_k d\Psi_k = dW + dW_{\text{mech}}.$$

Az erő, ill az erőnyomaték kifejezése ebből (1.8-22)

$$F_s = - \frac{\partial W}{\partial s} + \sum_{k=1}^n I_k \frac{\partial \psi_k}{\partial s}, \quad T_\theta = - \frac{\partial W}{\partial \theta} + \sum_{k=1}^n I_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \theta}; \quad I_k = \text{áll.}$$

A két összefüggés jelentősen egyszerűsödik, ha a permeabilitások a térerősségtől függetlennek tekinthetők. Ekkor ugyanis (9) értelmében

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k, \quad dW = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k d\psi_k, \quad \text{ha } I_k = \text{áll.}$$

A (22) második tagja ekkor az első kétszerese. Ennek következtében

$$F_s = \frac{\partial W}{\partial s}, \quad T_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta}; \quad I_k = \text{áll.}, \quad \mu = \text{áll.} \quad (1.8-23)$$

Egyetlen áramhurok esetén $W = \frac{1}{2} L I^2$, így az önmagára kifejtett erő kifejezhető az öninduktivitással:

$$F_s = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial s}. \quad (1.8-24)$$

Két áramhurok esetén a mágneses energia kifejezése

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2.$$

Ha az áramhurok merev testként mozdul, ill. fordul el, akkor csak az M kölcsönös induktivitás változik. Ekkor

$$F_s = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial s}, \quad T_\theta = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \theta}. \quad (1.8-25)$$

Vasmagos elrendezésekben (pl. emelőmágnes) lineáris közelítésben a (23) is alkalmazható. Ha azonban pl. nagyon kis légrésméret esetén a nemlineáris hatást is figyelembe kell venni, akkor csak az általánosabb (22) használható.

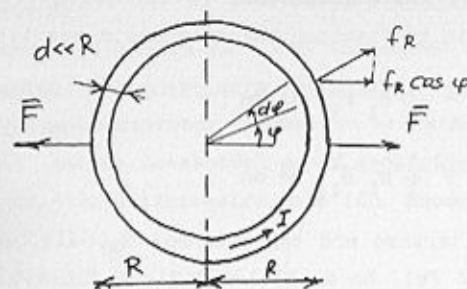
Példaként tekintsünk egy árammal átjárt, kör alakú, kis keresztmetszetű, nem ferromágneses anyagú vezetőt (4. ábra). Igazolható, hogy ennek öninduktivitása jó közelítéssel

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{16R}{d} - 1,75 \right), \quad d \ll R.$$

A radiális irányú erő (24) felhasználásával

$$F_R = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial R} = \frac{1}{2} I^2 \mu_0 \left(\ln \frac{16R}{d} - 1,75 + R \frac{1}{R} \right).$$

A kerületre vonatkoztatott vonalmenti erőssűrűség



1.8-4. ábra. Árammal átjárt gyűrűre ható erő számítása

$$f_R = \frac{1}{2\pi R} F_R = \mu_0 I^2 \frac{1}{4\pi R} \left(\ln \frac{16R}{d} - 0,75 \right).$$

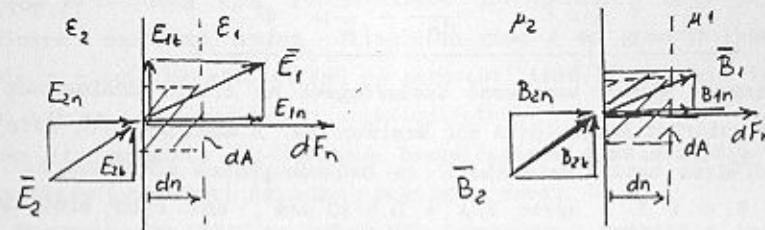
A gyűrűt az átmérős síkja mentén szétszakító erő

$$F = 2 \int_0^{\pi/2} f_R \cos \varphi R d\varphi = \mu_0 I^2 \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{16R}{d} - 0,75 \right).$$

A másik félgűrűre ugyanekkora erő hat.

1.8-5. HATÁRFELÜLETRE HATÓ ERŐ

A testre ható elektromos és mágneses erő sokszor számítható a test felületére ható erőként is. Tekintsük az 5. ábrán vázolt elrendezésben két közeg határát. Feltételezzük, hogy mindkét közeg a térerősségektől független ϵ_1 és ϵ_2 permittivitással, ill. μ_1 és μ_2 permeabilitással jellemezhető, a határfelület két oldalán az E_1 és E_2 elektromos térerősség, ill. a B_1 és B_2 mágneses indukció ismert, a határfelületen nincs felületi töltéssűrűség, ill. vonalmenti áramsűrűség.



1.8-5. ábra. Két közeg határfelületére ható erő meghatározása

Bontsuk fel a térintenzitásokat tangenciális és normális összetevőkre. A folytonossági feltételek értelmében

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}; \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t}.$$

Jelölje dn a határfelület kis elmozdulását rá merőleges irányban. Az ábrán vonalkázottan jelölt térfogatban tárolt energia megváltozása

$$dW = \left(\frac{1}{2} \epsilon_2 E_2^2 - \frac{1}{2} \epsilon_1 E_1^2 \right) dA \, dn ,$$

$$dW = \left(\frac{1}{2} \mu_2 H_2^2 - \frac{1}{2} \mu_1 H_1^2 \right) dA \, dn .$$

A normális komponenshez tartozó erő számításánál D_n , ill. B_n folytonossága akkor használható fel, ha a töltést, ill. a fluxust tekintjük állandónak, ezért a (14), ill. a (28) értelmében $F_n \, dn = -dW$, vagyis

$$\frac{dF'_n}{dA} = \frac{1}{2} (\epsilon_1^{-1} - \epsilon_2^{-1}) D_n^2 ; \quad \frac{dF'_n}{dA} = \frac{1}{2} (\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1}) B_n^2 . \quad (1.8-25)$$

A tangenciális komponenshez tartozó erő számításánál E_t , ill. H_t folytonossága akkor használható fel, ha a feszültséget, ill. az áramot tekintjük állandónak, ezért a (16), ill. a (23) értelmében $F_n \, dn = dW$, vagyis

$$\frac{dF''_n}{dA} = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_t^2 ; \quad \frac{dF''_n}{dA} = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) H_t^2 . \quad (1.8-26)$$

Az erő a kisebb permittivitású, ill. kisebb permeabilitású közeg (tipikusan: a levegő) felé irányul. Általános esetben a (25) és a (26) szerinti erőket össze kell adni, hiszen mindkettő normális irányú.

Gyakorlatilag a legfontosabb eset az, amikor a 2. jelű közeg vezető ($E_2 = 0$), ill. nagypermeabilitású anyag ($H_2 \approx 0$). Ekkor a térerősség merőleges a felületre és

$$\frac{dF_n}{dA} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 ; \quad \frac{dF_n}{dA} = \frac{1}{2} \mu^{-1} B^2 . \quad (1.8-27)$$

Az elektromos esetre vonatkozó összefüggést az 1.8-3. szakaszban, a sikkondenzátorhoz kapcsolódva már megismertük. A mágneses erőt kifejező összefüggés használható emelő- és behúzó mágnesek számításánál. Ha például $B = 1 \text{ T}$, akkor $F/A \approx 0,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, ami több mint négy nagyságrenddel nagyobb a tipikus elektromos erőnél. Ez az oka annak, hogy erő kifejtésére szolgáló berendezések szinte kizárólag mágneses elvűek, az elektromos eredetű erőknek csak ritkán van szerepe.

1.8-6. ERŐSŰRŐSÉG

Az eddigiekben a testekre ható erő kifejezést határoztuk meg. Gyakorlati szempontból többnyire erre van szükség. Az elektromágneses tér-elmélet fogalomrendszeréhez azonban az erőhatás leírásának az a módja áll közelebb, amikor bevezetünk egy f erősrőrséget, amelynek térfogati integrálja az illető térfogatra ható (ún. ponderomotoros) erő:

$$F = \int_V f \, dV . \quad (1.8-28)$$

A meglehetősen hosszadalmas igazolás mellőzésével megadjuk, hogy ha az ϵ és μ anyagjellemzők az elektromos és a mágneses térerősségtől függetlenek, akkor az erősrőség kifejezése

$$f = \rho E + J \times B - \frac{1}{2} E^2 \text{ grad } \epsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{ grad } \mu . \quad (1.8-29)$$

Az első két tag az E elektromos térerősséget, ill. a B mágneses indukciót definiáló $F = Q (E + v \times B)$ összefüggés egy más alakja. Egy kis ΔV térfogatra ugyanis $Q = \rho \Delta V$, így e térfogatra ható erő

$$f \, \Delta V = \rho \, \Delta V (E + v \times B) = (\rho E + \rho v \times B) \, \Delta V ,$$

ahol $\rho v = J$ az áramsűrűség. A (29) harmadik és negyedik tagja a határfelületre ható erő általánosítása. Ez az előző szakaszban követett gondolatmenet mintájára látható be annak feltételezésével, hogy a dn távolságon belül ϵ és μ folytonosan változik.

Az erősrőség (29) kifejezéséből jól látható, hogy a határfelületre ható erő iránya ellentétes $\text{grad } \epsilon$ és $\text{grad } \mu$ irányával, vagyis a kisebb permittivitású és permeabilitású közeg felé irányul, amint azt az előző pontban is megállapítottuk.

Az itt megadott általánosabb összefüggések alkalmazására ritkán van szükség gyakorlati feladatok megoldása során.

Megjegyezzük, hogy az erősrőség kapcsolatba hozható a (mechanikal) feszültség tenzorral. Ennek a relativisztikus általánosítás szempontjából van jelentősége (energia-impulzus tenzor). A részletes tárgyalás azonban meghaladja kereteinket.

1.9. FELADATOK

1.9-1. SZTATIKUS ÉS STACIONÁRIUS ELEKTROMOS TÉR

1.9-1.1. Nagy kiterjedésű síklap σ felületi töltéssűrűsége állandó.

Határozza meg az elektromos térerősséget a síklap közelében. Határozza meg egy síkkondenzátorban fellépő elektromos térerősség és a töltés kapcsolatát két ilyen síklap terének szuperponálásával.

1.9-1.2. Síkkondenzátor lemezei között levegő van. A rákapcsolt feszültség hatására átütés következne be.

Meggátolható-e az átütés, ha az elektródák közé egy nagyobb térerősséget is elviselő, a lemezek közötti távolságnál kisebb vastagságú szigetelő réteget helyezünk el, ha

- (a) a feszültség adott?
- (b) a töltés adott?

1.9-1.3. Keresztirányban rétegezett síkkondenzátor felületének méretei $A = 15 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$, az egyes rétegek adatai

- $d_1 = 6 \text{ mm}$, $\epsilon_{1r} = 4$, $\sigma_1 = 10^{-10} \text{ S/m}$,
- (a) $d_2 = 2 \text{ mm}$, $\epsilon_{2r} = 2$, $\sigma_2 = 0$,
- (b) $d_2 = 6 \text{ mm}$, $\epsilon_{2r} = 2$, $\sigma_1 = 10^{-11} \text{ S/m}$.

A kondenzátorra kapcsolt feszültség $U = 40 \text{ kV}$.

Határozza meg az egyes rétegekben az elektromos térerősséget, az elektromos eltolást, az áramsűrűséget és a feszültséget. Vázolja fel a potenciálfüggvényt. Határozza meg az elválasztó felületen a felületi töltéssűrűséget.

1.9-1.4. Hosszirányban rétegezett síkkondenzátor lemezeinek távolsága $d = 2,5 \text{ mm}$, a feszültség $U = 80 \text{ kV}$, az egyes rétegek adatai

- $A_1 = 150 \text{ mm}^2$, $\epsilon_{1r} = 1$, $\sigma_1 = 0$;
- $A_2 = 150 \text{ mm}^2$, $\epsilon_{2r} = 3$, $\sigma_2 = 10^{-11} \text{ S/m}$.

Határozza meg az elektromos térerősséget, az elektromos eltolást és az áramsűrűséget az egyes rétegekben, valamint a szivárgási áramot. Mi változik, ha a 2. közeget is ideális szigetelőnek tekintjük?

1.9-1.5. Koaxiális kábel szigetelése keresztirányban rétegezett. Az egyes rétegek adatai

$$r_1 = 5 \text{ mm}, \quad r_2 = 10 \text{ mm}, \quad \epsilon_{1r} = 4, \quad \sigma_1 = 10^{-11} \text{ S/m},$$

$$r_2 = 10 \text{ mm}, \quad r_3 = 20 \text{ mm}, \quad \epsilon_{2r} = 2, \quad \sigma_2 = 10^{-10} \text{ S/m}.$$

Határozza meg a térerősség és a potenciál eloszlását,

- (a) az egyik szigetelőt ideálisnak tekintve.
- (b) a megadott konduktivitások esetén.

1.9-1.6. Hengeres kondenzátor belső sugara r_1 , külső sugara r_2 . A külső henger potenciálja 0, a belsőé U . A két henger közé egy harmadik, U' potenciálú fémhengert helyezünk.

Határozza meg az r_3 sugarat és az U' feszültséget úgy, hogy a szigetelő mindkét rétegében ugyanakkora legyen a legnagyobb és a legkisebb elektromos térerősség (és így ezek aránya is).

1.9-1.7. Oldja meg az előző feladatot gömbkondenzátorra.

1.9-1.8. Hengeres kondenzátor r_2 külső sugara és U feszültsége adott.

Határozza meg az r_1 belső sugarat úgy, hogy a legnagyobb elektromos térerősség minimális legyen.

1.9-1.9. Oldja meg az előző feladatot gömbkondenzátorra.

1.9-1.10. Hengeres kondenzátor szigetelőanyagának permittivitása az r hengerkoordináta folytonos függvénye.

Határozza meg azt az $c(r)$ függvényt, amely mellett az elektromos térerősség nagysága a kondenzátorban állandó. Határozza meg ekkor a kondenzátor h hosszúságú szakaszának kapacitását.

1.9-1.11. Hengeres kondenzátorban az elektródák között térfogati töltéssűrűség van. Adott az elektródák közötti feszültség.

Határozza meg

- (a) a térerősség és a potenciál változását, ha a töltéssűrűség állandó
- (b) a $\rho(r)$ függvényt, ha a térerősség radiális és nagysága a sugártól független.

1.9-1.12. Gyűrű alakú vezető belső sugara r_1 , külső sugara $r_2 = r_1 + a$, téglalap alakú keresztmetszetének szélessége b , homogén anyagának konduktivitása σ .

Határozza meg a gyűrű rezisztenciáját körkörösén folyó, egyenletesen eloszló áram esetén. Adjon közelítő összefüggést a « r_1 » esetére. Milyen feladatok megoldásánál használható ez az eredmény?

1.9-1.13. Két elektródából és a földből álló rendszer C_{12} , C_{10} és C_{20} részkapacitásai adottak. Eredetileg mindkét elektróda töltésmentes.

Fejezze ki mindkét elektróda töltését és potenciálját, ha

(a) az 1. elektróda és a föld közé U_1 feszültséget kapcsolunk, a 2. elektróda szigetelt.

(b) a két elektróda közé U feszültséget kapcsolunk.

(c) az 1. elektróda és a föld közé U_1 feszültséget kapcsolunk, a 2. elektródára Q_2 töltést viszünk.

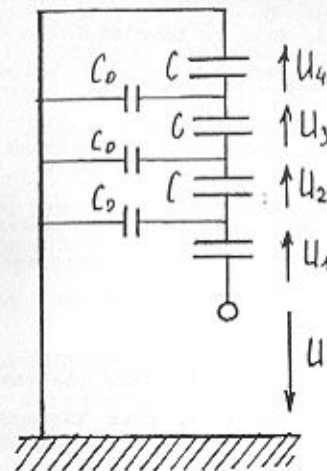
1.9-1.14. Három elektródából és a földből álló rendszer részkapacitásai adottak. Az 1. elektródának a földhöz viszonyított U_1 feszültsége adott, a 3. elektróda töltetlen.

Mekkora U_2 feszültséget kell a 2. elektróda és a föld közé kapcsolni ahhoz, hogy $U_3 = 0$ legyen?

1.9-1.15. Négy vezeték közti kapacitások (C_{12} , C_{13} , ..., C_{34}) adottak, a földkapacitások figyelmen kívül hagyhatók. Az 1. és a 2. vezeték közötti U_{12} feszültség adott, a 3. és a 4. vezeték töltetlen.

Fejezze ki a 3. és a 4. vezeték között fellépő U_{34} feszültséget. Lehet-e ez a feszültség nulla? Létrehozható-e ez valamilyen szimmetrikus elrendezéssel?

1.9-1.16. Egy négytagú szigetelőlánc a földhöz képest U feszültségű vezetőket hordoz. A lánc egy tagjának nyilván $U/4$ feszültséget kell elviselnie. Modellezzük az egyes szigetelőket egy-egy C kapacitású kondenzátorral. Vegyük figyelembe a földkapacitást olyan módon, hogy minden kondenzátor és a földelt tartóoszlop közé egy $C' = 0,2 C$ kapacitású kondenzátort kapcsolunk (1. ábra).



1.9-1. ábra. Négytagú szigetelőlánc helyettesítő kondenzátorai

Mekkora feszültséget kell elviselnie egy szigetelőnek ennek figyelembe vételével?

1.9-1.17. Földelt fémsíktól h távolságban r_0 sugarú gömbön Q töltés helyezkedik el ($r_0 \ll h$).

Határozza meg a fémsíkon a felületi töltéssűrűség helyfüggését és a töltés merőleges vetületétől r távolságon belül elhelyezkedő összes töltést.

1.9-1.18. Síknak tekinthető földtől $h_1 = h$ távolságban $r_1 = a$ sugarú, $h_2 = 2h$ távolságban $r_2 = 3a$ sugarú vezető gömb helyezkedik el, a középpontok vetületének távolsága $d = 4h$, ($a \ll h$).

Határozza meg a két gömb közötti kapacitást és az elrendezés részkapacitásait.

1.9-1.19. Két, ideális vezetőnek tekinthető fémlap derékszöget alkot. Az egyik fémlaptól a , a másiktól b távolságban a derékszögön belül egy r_0 sugarú fémgömb helyezkedik el; $r_0 \ll a, b$. A gömb és a fémlapok közötti feszültség U .

Határozza meg a gömb töltését, a gömbre ható erő nagyságát és irányát. Miért nem oldható meg egyszerűen a feladat, ha a gömb a domború szögű részben helyezkedik el?

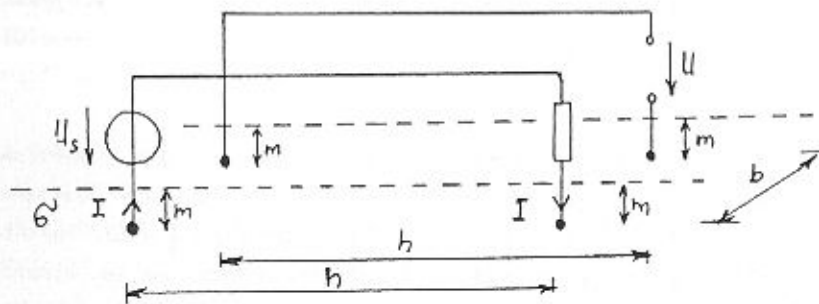
1.9-1.20. Két vezető félsík hajlásszöge 60° . A felezősíkban, a hegyesszögű részben, a saroktól a, ill. $2a$ távolságban a síkokkal párhuzamos, r_0 sugarú, nagyon hosszú hengeres vezetők helyezkednek el, ahol $r_0 \ll a$.

Határozza meg a két vezeték h hosszúságú szakaszának kapacitását.

1.9-1.21. Egy sík fölött levegő, alatta σ konduktivitású homogén közeg (pl. a talaj) helyezkedik el. Utóbbiban h mélységben r_0 sugarú ($r_0 \ll h$) vezető gömb helyezkedik el, amelyből kifolyó I áram adott. Az áramhosszávezetés hatása elhanyagolható.

Határozza meg a potenciál és az áramsűrűség változását a határfelületen és a határfelületre merőleges, a gömb középpontján átmenő egyenes mentén.

1.9-1.22. Egy generátort a fogyasztóval egy vezeték köt össze, visszavezetésként a σ konduktivitású földet használjuk. A földelő elektródák távolsága h , mélységük m . A vezetékkel párhuzamosan b távolságban egy ugyancsak mindkét végén földelt másik vezeték helyezkedik el a 2. ábra szerinti szimmetrikus elrendezésben.



1.9-2. Ábra. Földelési Áramok által létrehozott feszültség számítása

Határozza meg a második vezeték végei között az I áram hatására fellépő feszültséget

- ha az m mélység nagyon nagy.
- általános esetben.

Mit jelent "az I áram hatására" kikötés? Jelent-e lényeges nehézséget, ha a földelő elektródák helyzetét nem tekintjük szimmetrikusnak?

1.9-1.23. Az $x < 0$, $y < 0$ tartományt σ konduktivitású közeg (pl. a talaj) tölti ki, amelyben az $x = -a$, $y = -b$ helyen egy r_0 sugarú, I áramú elektróda helyezkedik el ($r_0 \ll a, b$). Az áramhosszávezetés hatása elhanyagolható. A tér többi részét ideális szigetelő (pl. levegő) tölti ki.

Határozza meg a gömbnek a végtelenhez viszonyított potenciálját, továbbá a potenciál és az elektromos térerősség helyfüggését a határfelületen.

1.9-2. STACIONÁRIUS MÁGNESES TÉR

1.9-2.1. Két párhuzamos, igen hosszú, egymástól d távolságban levegőben elhelyezkedő vezetékben egyező irányú és nagyságú I áram folyik.

Határozza meg a mágneses térerősség nagyságát és irányát az egyik vezetőtől $d/2$ távolságban

- a két vezeték által kifeszített síkban a vezeték között.
- a két vezeték által kifeszített síkban a vezetékön kívül.
- e síkra merőleges, az egyik vezetékön átmenő síkban.

1.9-2.2. Téglalap (méretei: a és b) alakú vezető hurok b hosszúságú élével párhuzamos egy igen hosszú egyenes vezeték.

Határozza meg a kölcsönös induktivitást, ha az egyenes vezeték

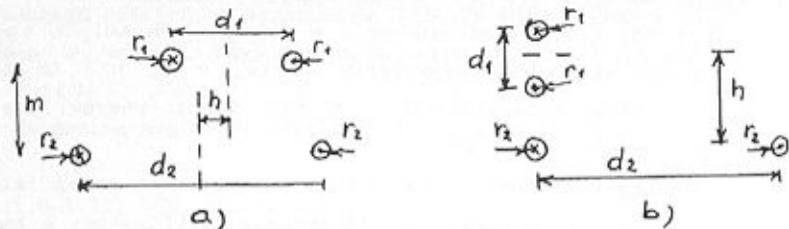
- a hurok síkjában helyezkedik el a hozzá közelebbi oldaltól d távolságban.
- a hurok síkjától h távolságban helyezkedik el, vetülete a síkra a közelebbi oldaltól d távolságra van.

Mi határozza meg a kölcsönös induktivitás előjelét?

1.9-2.3. Két párhuzamos kettősvezeték vezetékpárjainak távolsága d_1 , ill. d_2 , a vezetékek sugara r_1 , ill. r_2 ($r_1, r_2 \ll d_1, d_2$). A vezetékek levegőben helyezkednek el.

Határozza meg a két kettősvezeték h hosszúságú szakaszának kölcsönös induktivitását

- a 3a ábra elrendezésében, ha $m = 0$, $h \neq 0$.
- a 3a ábra elrendezésében, ha $m = 0$, $h \neq 0$. Többféle elrendezés lehetséges h nagyságától függően!



1.9-3. Ábra. Két párhuzamos kettősvezeték metszete

(c) a 3a ábra elrendezésében, ha $m \neq 0$, $h = 0$.

(d) a 3b ábra elrendezésében, ha $h > d_1/2$, ill. ha $h < d_1/2$.

1.9-2.4. Egy kettősvezeték két vezetéke az $x = 0$, $y = 0$ helyen és az $x = a$, $y = 0$ helyen van. Egy másik kettősvezeték egyik vezetéke az $x = 0$, $y = b$ helyen van.

Határozza meg a második kettősvezeték második vezetékének azon helyei által kijelölt görbét, ahol a két kettősvezeték kölcsönös induktivitása nulla.

1.9-2.5. Nagyterjedésű, az x, y síkban fekvő lemezben a vonalmenti áramsűrűség y irányú és állandó K értékű.

Adja meg a lemez közelében a $z = a$ és a $z = -a$ helyen a mágneses térerősség és a mágneses indukció nagyságát és irányát.

1.9-2.6. Egy x irányban d vastagságú, y irányban b szélességű egyenes vezetőkben egyenletes eloszlásban I áram folyik.

Határozza meg a mágneses térerősség nagyságát és irányát x függvényében a vezetők belül és kívül az $|x| \ll b$ tartományra szorítkozva.

1.9-2.7. Egy körkeresztmetszetű hengeres vezető sugara a , a vezetőkben hengeres furat van, amelynek sugara b , tengelyének távolsága a vezető tengelyétől c ($c + b < a$). A furatos vezetőkben egyenletes eloszlásban I áram folyik.

Határozza meg a furatban a mágneses térerősség derékszögű rendszert. (Ötmutatás. A furat hatása úgy is kezelhető, mint ha ott ellenkező irányú áram folyana.)

1.9-2.8. Gyűrű alakú magra egyenletesen N számú menet van tekercselve (toroid). A gyűrű belső sugara r_1 , külső sugara r_2 , téglalap alakú keresztmetszetének szélessége b . A keresztmetszet r_1 és r_0 közötti részét $\mu_0 \mu_r$ permeabilitású közeg, r_0 és r_2 közötti részét nem ferromágneses közeg tölti ki.

Határozza meg a mágneses térerősséget és a mágneses indukciót a sugár függvényeként. Fejezze ki a tekercs öninduktivitását. Hogyan változik ez, ha a két közeg helyét felcseréljük? Milyen feltételek mellett maradnak érvényesek eredményeink, ha a tekercselés nem egyenletes, hanem a gyűrű egy rövid szakaszára koncentrálódik?

1.9-2.9. Hosszú egyenes vezetőt koaxiálisan téglalap keresztmetszetű, nagypermeabilitású gyűrű vesz körül, sugarai r_1 és r_2 , magassága h . A gyűrűre N számú menet van tekercselve.

Határozza meg az egyenes vezető és a tekercs kölcsönös induktivitását. Hogyan változik ez, ha az egyenes vezető a gyűrű belsejében, de nem annak tengelyében (excentrikusan, ferdén) helyezkedik el?

1.9-2.10. Egyenes tekercs átmérője $d = 20$ mm, hossza $l = 200$ mm, meneteinek száma $N = 50$.

Határozza meg közelítőleg a tekercs L öninduktivitását, ha nincs jelen ferromágneses közeg. Miért nem oldható meg a feladat elemi úton, ha a tekercs d átmérőjű és l hosszúságú, μ_r permeabilitású egyenes vasmagra van csévélve? Milyen elrendezésű vasmag esetén határozható meg az induktivitás elfogadható közelítésben?

1.9-2.11. Téglalap alakú vasmag középvonalának méretei $a = 100$ mm és $b = 200$ mm, a keresztmetszete $A = 8$ mm \times 10 mm, az állandónak tekinthető relatív permeabilitás $\mu_r = 4000$. A vasmagra szorosan tekercseltek menetek száma $N = 500$.

Határozza meg a vasmagban a mágneses térerősséget, a mágneses indukciót és a fluxust, továbbá a tekercs öninduktivitását. Befolyásolja-e az eredményeket, ha nem feltételezzük, hogy a tekercselés szoros, ill. hogy egyenletes? Érvényesek-e eredményeink, ha a vasmag keresztmetszete $A = 2$ mm \times 40 mm?

1.9-2.12. Az előző feladatban szereplő vasmagon egy $N_1 = 500$ és egy $N_2 = 400$ menetszámú tekercs helyezkedik el.

Határozza meg mindkét tekercs öninduktivitását és a kölcsönös induktivitást (mi szabja meg utóbbi előjelét?) és a csatolási tényezőt. Befolyásolja-e az eredmények valamelyikét a két tekercs helyzete (pl. a vasmag ugyanazon a részén vagy viszonylag távoli részein helyezkednek el)?

1.9-2.13. Az előző példában szereplő vasmagban egy $\delta = 2$ mm hosszúságú légrés van.

Oldja meg az előző két feladatot. Befolyásolja-e az eredmény pontosságát a keresztmetszet oldalviszonya? Alkalmazható-e az egyszerű számítási módszer, ha a légrés mérete $\delta' = 10$ mm vagy még nagyobb?

1.9-2.14. A vasmag adatai megegyeznek az előző példákban szereplőkkel (légrés nélkül vagy légréssel).

Gondolja meg az előző feladatok megoldásának menetét, ha a vas permeabilitása nem tekinthető állandónak, hanem B és H kölcsönösen egyértékű nemlineáris kapcsolata grafikusan adott. Mi a teendő, ha a vasanyag $B = B(H)$ alakú vagy $H = H(B)$ alakú explicit függvénykapcsolata adott? Mi az eljárás, ha a $\mu = \mu(H) = B(H)/H$ vagy pedig a $\nu = \nu(B) = H(B)/B$ explicit függvény adott?

1.9-2.15. Egy két ablakos (három oszlopos) vasmag jobb oldali oszlopában rövid légrés van. Adottak a vasban a közepes erővonalhosszak, a keresztmetszetek és az állandónak tekinthető permeabilitás. Előírt a légrésben létrehozandó mágneses indukció.

Határozza meg a szükséges áramerősséget, ha

(a) csak az egyik oszlopon van egy N menetszámú tekercs; ez 3 lehetőség, közülük 2 hasonló.

(b) két oszlopon van N_1 , ill. N_2 menetszámú tekercs, amelyek sorosan vannak kapcsolva; ez 3 lehetőség, közülük 2 hasonló, meggondolandók a tekercselési irányok is!

(c) mindhárom oszlopon van N_1 , N_2 , ill. N_3 menetszámú tekercs, amelyek sorosan vannak kapcsolva; meggondolandók a tekercselési irányok is!

1.9-2.16. Gondolja meg az előző feladat megoldásának menetét, ha a vasmag az 1.9-2.14. feladatban leírt módokon jellemzett.

1.9-3. ELEKTROMÁGNESES TÉR

1.9-3.1. Homogén mágneses térben egy téglalap alakú vezető keret (méretei: a és b) forog az indukcióvektorra merőleges tengely körül állandó ω szögsebességgel.

Fejezze ki az indukálás révén a keret végei között fellépő feszültséget, ha

(a) a mágneses tér időben állandó és ha a $t = 0$ időpontban a keret síkja merőleges az indukció vektorra, ill. ha párhuzamos azzal.

(b) a mágneses indukció $B = B_m \cos \omega t$ szerint változik és ha a $t = 0$ időpontban a keret síkja merőleges az indukció vektorra, ill. ha párhuzamos azzal.

(c) a mágneses indukció $B = B_m \cos 4\omega t$ szerint változik és ha a $t = 0$ időpontban a keret síkja merőleges az indukció vektorra, ill. ha párhuzamos azzal.

1.9-3.2. Egy végtelen hosszúnak tekinthető egyenes vezető és egy vonalszerű vezetőből álló, téglalap alakú, majdnem zárt hurok közös síkban helyezkednek el, a téglalap a , ill. b hosszúságú oldala az egyenes vezetővel párhuzamos, ill. arra merőleges. A vezetők nem keresztezik egymást. Az egyenes vezetőben állandó I áram folyik.

Határozza meg a hurok nyitott végei között fellépő feszültség időfüggvényét és polaritását, ha

(a) a hurok állandó v sebességgel mozog saját síkjában, az egyenes vezetőre merőlegesen, attól távolodva.

(b) a hurok állandó v sebességgel mozog saját síkjában az egyenes vezetővel párhuzamosan.

(c) a hurok állandó ω szögsebességgel forog az egyenes vezető mint tengely körül.

(d) a hurok állandó ω szögsebességgel forog az egyenes vezetővel párhuzamos szimmetriaegyenest mint tengely körül.

(e) a hurok állandó ω szögsebességgel forog az egyenes vezetővel párhuzamos egyik oldala mint tengely körül.

1.9-3.3. Tekintse az előző feladat szerinti elrendezést.

Határozza meg a keret végei között fellépő feszültséget, ha az áram ω_1 körfrekvenciával szinuszosan változik, a keret

(a) nyugszik, síkjának szöge adott.

(b) ω_2 szögsebességgel forog az egyenes vezetőkkel párhuzamos szimmetriaegyenes mint tengely körül. Vizsgálja a kezdfázis és a kezdeti helyzet, valamint az ω_1/ω_2 viszony hatását.

1.9-4. ENERGIA ÉS ERŐ

1.9-4.1. Síkkondenzátor elektródái közötti távolság $d = 2$ mm, az elektródák felülete $A = 20$ mm \times 20 mm, az elektródák közötti feszültség $U = 4$ kV.

Határozza meg az egyik elektródára ható erőt, ha

(a) a szigetelőanyag levegő.

(b) a szigetelőanyag porcelán ($\epsilon_r = 6$).

(c) a szigetelőanyag porcelán ($\epsilon_r = 6$), de a porcelán és az elektróda között egy $d_1 = 0,1$ mm, ill. $d_2 = 0,2$ mm vastagságú légrés van.

1.9-4.2. Oldja meg az előző feladat (b) és (c) részét, ha a porcelánt a feltöltött, majd a feszültségforrástól leválasztott elektródák közé helyezük.

1.9-4.3. Gömbkondenzátor r_2 külső sugara adott.

Határozza meg az r_1 belső sugár azon értékét, amely mellett előírt E_M maximális elektromos térerősség esetén

(a) a kondenzátorra maximális feszültség kapcsolható.

(b) a kondenzátorban maximális energia tárolható.

1.9-4.4. Gömbkondenzátor permittivitása az r gömbkoordináta függvénye.

Határozza meg azt az $\epsilon(r)$ függvényt, amely mellett az energiasűrűség a r -től független. Határozza meg ekkor a kapacitást, ha a kondenzátor belső és külső sugara adott.

1.9-4.5. Oldja meg az előző feladatot hengeres kondenzátorra, ill. annak h hosszúságú szakaszára.

1.9-4.6. A térfogati töltéssűrűség egy r_0 sugarú gömbön belül állandó ρ_0 értékű, azon kívül nulla.

Határozza meg az elektromos térerősséget és az elektromos potenciált az r gömbkoordináta függvényeként, a végtelen távoli pont potenciálját nullának választva. Határozza meg a tárolt energiát az energisűrűséggel és a potenciállal is.

1.9-4.7. Oldja meg az előző feladatot, ha a gömbön belül a töltéssűrűség $\rho(r) = \rho_0 \cdot r/r_0$ szerint változik.

1.9-4.8. Koaxiális kábel érének sugara r_1 , köpenyének belső, ill. külső sugara r_2 , ill. r_3 . Az ér és a köpeny nem ferromágneses, konduktivitásuk σ_1 , ill. σ_2 . Az ér r_0 sugarú, μ_r relatív permeabilitású, σ_0 konduktivitású réteg burkolja ($r_1 < r_0 < r_2$). Az érben és a burkoló rétegben egyenletes eloszlásban összesen I áram folyik, a köpenyben egyenletes eloszlásban, ellenkező irányban ugyancsak I áram folyik.

Határozza meg a mágneses térerősséget és a mágneses indukciót az r hengerkoordináta függvényében. Határozza meg a kábel h hosszúságú szakaszában tárolt mágneses energiát. Van-e olyan μ_r , amely mellett a ferromágneses rétegben tárolt energia a teljes energia fele? (Útmutatás. Az érben és burkolatában az áramsűrűség nem ugyanakkora!)

1.9-4.9. Egy koaxiális kábel ideális vezetőknek tekinthető érének, ill. köpenyének méretei $r_1 = 4$ mm, ill. $r_2 = 10$ mm és $r_3 = 12$ mm. A szigetelőanyag jellemzői $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$. A kábel feszültsége, ill. árama $U = 300$ V, $I = 20$ A.

Határozza meg és vázolja az elektromos és a mágneses térerősséget és a Poynting vektort a szigetelőben.

1.9-4.10. Végtelen hosszúnak tekinthető egyenes vezetőkben I_1 áram folyik. Ettől d távolságban helyezkedik el egy négyszögletes keret tengelye, amelyben I_2 áram folyik. A keret tengelyirányú mérete b , erre merőleges mérete a ($d > a/2$). A keret síkja a vezető és a tengely által meghatározott síkkal φ szöget zár be. A kitöltő közeg levegő.

Határozza meg a keretre ható erőnyomatékokat a φ szög függvényében. Milyen helyzetben van a keret stabilis vagy labilis egyensúlyban? Milyen helyzetben van az erőnyomaték nagyságának maximuma, függ-e ez a méretviszonyoktól?

1.9-4.11. Egy lemez alakú hosszú vezető keresztmetszeti méretei a és b , ahol $a \ll b$. Két ilyen vezető tengelye párhuzamos, középpontjaik távolsága d ($d > b$), áramuk egyező nagyságú és ellenkező irányú. Mindkét áram eloszlása egyenletes. (Ha a lemezek közel vannak egymáshoz, akkor ennek feltételezése nem teljesen jogos.)

Határozza meg a fellépő erőt, ha

- (a) a lemezek hosszabb oldalai páronként egy síkban vannak.
- (b) a lemezek rövidebb oldalai páronként egy síkban vannak.
- (c) az egyik lemez hosszabb oldalával párhuzamos szimmetrisíkja egybeesik a másik lemez rövidebb oldalával párhuzamos szimmetriasíkkal.

2. SZTATIKUS ÉS STACIONÁRIUS TEREK

Noha a valódi folyamatok mindig változnak az időben, sok gyakorlati feladat kielégítő pontossággal modellezhető sztatikus, ill. stacionárius, azaz időben állandó elektromos vagy mágneses térként. Az ily módon számított kapacitás, konduktivitás vagy induktivitás változatlanul vagy némi korrekcióval felhasználható időben változó folyamatok vizsgálatára is.

Ebben a részben elsősorban a feladat matematikai alakjának megfogalmazásával foglalkozunk, a megoldást csak speciális feltételek mellett tárgyaljuk. Néhány elemien megoldható feladatot az 1.7. fejezetben már vizsgáltunk, a számítógépes módszerek bemutatása pedig kívül esik kereteinken.

2.1. SZTATIKUS ÉS STACIONÁRIUS ELEKTROMOS TÉR

2.1-1. ALAPEGYENLETEK

A nyugvó töltések által létrehozott sztatikus elektromos teret leíró egyenletek lineáris, izotrop és térrészenként homogén közegben (vö. 1.6-4. szakasz):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.1-1)$$

ahol ϵ a közeg permittivitása, amely feltételezésünk szerint térrészenként állandó skalár. A vizsgált teljes térrész peremét vezető testek határolják. A szigetelő közegeket ideálisnak tekintjük, ezért felületi töltéssűrűség csak a vezetők felületén lehet. A folytonossági ill. a peremfeltételek ennek következtében

$$\begin{aligned} \text{két szigetelő határán} \quad E_{2t} &= E_{1t}, \quad \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}, \\ \text{vezető felületén} \quad E_{1t} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1-2)$$

Az időben állandó áram által létrehozott stacionárius elektromos tereket leíró egyenletek olyan lineáris, izotrop közegben, amelyben beiktatott elektromos térerősség nincs (1.6-4. szakasz):

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.1-3)$$

ahol σ a közeg konduktivitása, amelyről feltételezzük, hogy térrészenként állandó skalár. A vizsgált teljes térrész peremét ideális vezető vagy ideális szigetelő közeg határolja. A folytonossági, ill. a peremfeltételek tehát

$$\begin{aligned} \text{nem ideális közegek határán} \quad E_{2t} &= E_{1t}, \quad \sigma_2 E_{2n} = \sigma_1 E_{1n}, \\ \text{ideális vezető felületén} \quad E_{it} &= 0, \\ \text{ideális szigetelő felületén} \quad E_{in} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1-4)$$

Látható, hogy a két feladatkör matematikailag egy általánosabb feladat két speciális esetének tekinthető, ezért célszerű együtt tárgyalni őket.

A vektoranalízisből ismeretes, hogy bármely olyan $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektor, amely kielégíti a $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ egyenletet, felírható egy $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skalár potenciál (negatív) gradienseként:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.1-5)$$

Ez nyilván szükséges, mert $\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot grad } \varphi \equiv 0$, de igazolhatóan elegendő is, azaz bármely örvénymentes \mathbf{E} -hez tartozik alkalmas φ . A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a térerősség a kisebb potenciál-értékű pont felé mutat. Ez a potenciál megegyezik az 1.2-2. szakaszban használttal, mert két pont közötti feszültség a gradiens tétel értelmében

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} (-\text{grad } \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \left[-\varphi(\mathbf{r}) \right]_{r_1}^{r_2} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2),$$

vagyis megegyezik a potenciálok különbségével és független az integrációs úttól. Ezzel az \mathbf{E} vektorfüggvény meghatározásának feladatát visszavezettük a φ skalárfüggvény meghatározásának feladatára. A skalár potenciálra vonatkozó egyenletet a $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, ill. a $\text{div } \mathbf{J} = 0$ egyenlet szolgáltatja:

$$\text{div } \mathbf{D} = \text{div } (\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \text{div } \mathbf{E} = \epsilon \text{div } (-\text{grad } \varphi) = -\epsilon \Delta \varphi,$$

ahol $\Delta \equiv \text{div grad}$ a Laplace operátor. Ennek Descartes koordinátákban

részletesen felírt alakja

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.1-6)$$

A skalár potenciálnak tehát a $-\epsilon \Delta \varphi = \rho$ Poisson egyenletet (Laplace-Poisson egyenletet) kell kielégítenie minden közegben. Az 1-edik és a j-edik közeg A_{1j} határfelületén $E_{1t} = E_{jt}$ biztosan teljesül, ha ott $\varphi_1 = \varphi_j$ teljesül, míg $D_n = \epsilon E_n$ kifejezhető φ felületi normális szerinti deriváltjával. Az ideális vezető A_k felületén E_t akkor és csak akkor nulla, ha φ a felületen állandó. Összefoglalva a megoldandó differenciálegyenletet és a határfeltételeket:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_i &= -\frac{1}{\epsilon_i} \rho_i, & \mathbf{r} \in V_i, \\ \varphi_1 &= \varphi_j, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1j}} = \epsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_{1j}}, & \mathbf{r} \in A_{1j}, \\ \varphi_i &= \Phi_k, & \mathbf{r} \in A_k, \end{aligned} \quad (2.1-6)$$

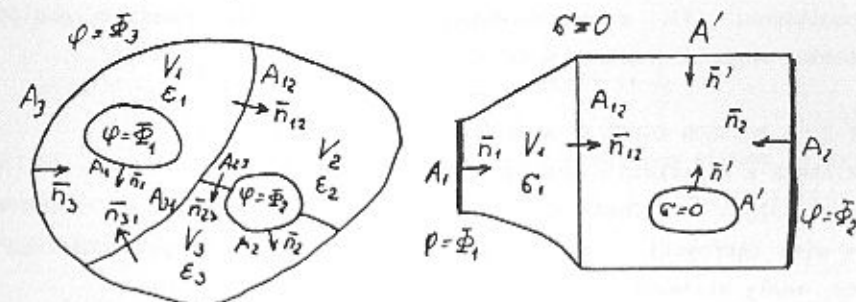
ahol (1. az 1. ábrát)

V_i az ϵ_i permittivitású közeg által elfoglalt térfogat,

A_{1j} a V_i és a V_j térfogat közös határfelülete,

A_k a k-adik elektróda határfelülete;

adott a $\rho_i = \rho_i(\mathbf{r})$ térfogati töltéssűrűség és az elektródák Φ_k potenciálja, meghatározandó minden $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{r})$ potenciálfüggvény. A legtöbb gyakorlati esetben térfogati töltéssűrűség nincs, tehát $\rho(\mathbf{r}) = 0$. Az így adódó $\Delta \varphi = 0$ egyenlet neve Laplace egyenlet.



2.1-1. ábra. Térrészenként állandó permittivitású, ill. konduktivitású közeg térrészel és határal

A stacionárius elektromos tér alapegyenletei ezzel teljesen analógok, csak az ϵ_i permittivitás helyére a σ_i konduktivitás irandó. Lehet továbbá olyan - esetleg nem összefüggő - A' peremfelület, ahol a közeg ideális szigetelő határolja. Itt az áramsűrűség normális kom-

ponense nulla. Összefoglalva az egyenletet és a határfeltételeket:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= 0, & r \in V_1; \\ \varphi_1 &= \varphi_J, & \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1J}} = \sigma_J \frac{\partial \varphi_J}{\partial n_{1J}}, & r \in A_{1J}; \\ \varphi_1 &= \varphi_k, & r \in A_k; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n'} &= 0, & r \in A'. \end{aligned} \quad (2.1-8)$$

Az olyan peremfeltételt, amelyiknél a potenciál, ill. annak normális szerinti deriváltja előírt egy felületen Dirichlet, ill. Neumann típusú peremfeltételnek nevezik. Elektrosztatikus feladatoknál is előfordulhat homogén Neumann típusú peremfeltétel, ha szimmetriamegfontolások alapján tudjuk, hogy egy felület az erővonalakkal párhuzamos.

Előfordul, hogy egyes A_k felületek állandó φ_k potenciálja nem ismert, viszont adott a zárt felület teljes Q_k töltése, ill. I_k árama. Ez a feladat az előzőre visszavezethető, de megoldása rendszerint körülményesebb.

Ha már ismerjük a feladat megoldását jelentő $\varphi(r)$ potenciált, akkor az $E(r)$ térerősség gradiens képzéssel egyszerűen számítható. Ennek ismeretében meghatározható az elektródák $c E(r)$ felületi töltéssűrűsége, ill. $\sigma E(r)$ áramsűrűsége. Felületmenti integrálással számítható az egyes elektródák töltése, ill. árama. Ezek után már meghatározható a kapacitás, ill. a konduktancia, általánosabban a részkapacitások, ill. a részkonduktanciák. Numerikus számítás esetén utóbbiak meghatározásához a feladatot többször meg kell oldani.

2.1-2. A POISSON EGYENLET ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSA

Tekintsük a következő elektrosztatikus feladatot.

A teljes V térfogatban a homogén közeg permittivitása ϵ . Adott a $\rho = \rho(r)$ térfogati töltéssűrűség. Keresett a $\varphi = \varphi(r)$ potenciálfüggvény, amely kielégíti a

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (2.1-9)$$

Poisson egyenletet. Peremfeltételként a potenciálnak a végtelenben nullához kell tartania.

Fizikai megfontolás alapján a megoldás a következőképpen állítható

elő. Az r' helyen levő dV' térfogatban helyet foglaló $dQ' = \rho(r') dV'$ pontszerűnek tekinthető töltés az r helyen (1.7-6) értelmében

$$d\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho(r') dV'}{|r' - r|}$$

potenciált hoz létre (2. ábra). A teljes potenciál ezek szuperpozíciójával, azaz térfogati integrálással adódik:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{R} dV', \quad R = |r' - r|. \quad (2.1-10)$$

Célszerű lehet külön választani a felületi töltéssűrűségként fellépő töltést. Ekkor a potenciál kifejezése (amelyben ρ a valóban térfogati töltéssűrűséget jelenti, amely rendszerint nulla)

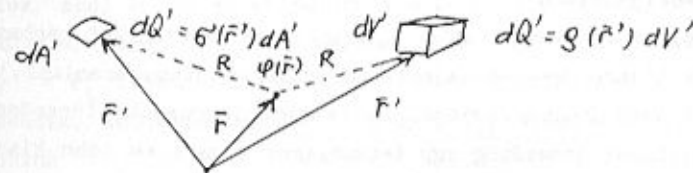
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_A \frac{\sigma(r')}{R} dA'. \quad (2.1-11)$$

A potenciálfüggvény kifejezését szokásos a kettősrétegek által létrehozott harmadik taggal is kiegészíteni. A fizikai megfontolással előállított megoldás a Green tétel felhasználásával matematikai úton is előállítható, ezt azonban nem tárgyaljuk.

Sok elrendezés síkproblémának tekinthető, ami azt jelenti, hogy egy kitüntetett irányban (válasszuk ezt z -tengelynek) nincs változás, vagyis a töltéseloszlás nem függ a z koordinátától. Ez a közelítés természetesen nem alkalmazható abban a környezetben, ahol a végtelen hosszúnak tekintett elrendezésnek "eleje" és "vége" van. A potenciál kifejezése ilyenkor (1.7-16) értelmében

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_A \rho(r') \ln \frac{1}{R} dA' + \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_l \sigma(r') \ln \frac{1}{R} dl', \quad (2.1-12)$$

ahol r' , r és $R = |r' - r|$ most a z -tengelyre merőleges síkban helyezkednek el. Az A a szigetelő közeg keresztmetszete, l a vezető kontúrja ebben a síkban.



2.1-2. Ábra. A Poisson egyenlet általános megoldásához

2.1-3. AZ ÁLTALÁNOS MEGOLDÁS ALKALMAZÁSA

A Poisson egyenlet általános megoldása közvetlenül ritkán alkalmazható, mert a töltés eloszlása nem ismert. Ebben a szakaszban bemutatjuk két közvetett alkalmazását. Ezek közös jellegzetessége, hogy a végeredmény egy, a Laplace egyenletet kielégítő potenciálfüggvény, amelynek fizikai tartalma nem is lényeges. Ennek következtében alkalmazható stacionárius elektromos tér meghatározására is.

2.1-3.1. Visszavezetés egyszerű feladatokra

Válasszunk egy önkényes töltéseloszlást. Határozzuk meg (10) alapján az ehhez tartozó $\varphi(r)$ potenciálfüggvényt, majd a $\varphi(r) = \Phi_1$ ekvipotenciális felületeket. Ezzel rendelkezésünkre áll egy olyan, a Laplace egyenletet kielégítő potenciálfüggvény, amely ismert felületeken állandó. Kellő számú ilyen megoldást összegyűjtve reményünk lehet arra, hogy adott alakú elektródák esetén van olyan potenciálfüggvényünk, amely az elektródákön állandó, vagyis az elektrosztatikus vagy stacionárius elektromos probléma megoldását adja.

Ezt a módszert már alkalmaztuk az 1.7-1. szakaszban. A pontszerű, ill. a vonalszerű töltés ekvipotenciális felületei koncentrikus gömbök, ill. koaxiális hengerek. Ennek felhasználásával számítottuk a gömbkondenzátor, ill. a koaxiális kábel vagy a hengeres kondenzátor erőterét, kapacitását, konduktivitását. A tükrözés is ilyen módszernek tekinthető.

Némi számítással igazolható, hogy az ekvipotenciális felületek

- véges hosszúságú vonaltöltés esetén konfokális forgási ellipszoidok;
- egyik irányban végtelen vonaltöltés esetén konfokális forgási paraboloidok;
- egy egyenesbe eső, egyik irányban végtelen, $+q$ ill. $-q$ vonalmenti töltéssűrűségű vonaltöltés esetén konfokális forgási hiperboloidok;
- két párhuzamos, végtelen hosszúságú, $+q$ ill. $-q$ vonalmenti töltéssűrűségű vonaltöltés esetén körhengerek (metszetük Apollóniosz féle körsort alkot).

Az utolsónak említett példa alapján számíthatjuk két párhuzamos, tetszőleges sugarú hengeres elektróda sztatikus vagy áramlási terét, kapacitását vagy konduktanciáját, a fellépő legnagyobb térerősséget. Másik alkalmazási lehetőség egy tetszőleges sugarú és több kússugarú

párhuzamos hengeres elektróda elektromos terének számítása (tükrözés hengeren). Elemi módon tárgyalható egy tetszőleges sugarú és több kússugarú gömbalakú elektróda tere is. Két tetszőleges sugarú gömbalakú elektróda tere viszont nem írható le véges számú pontszerű töltés terének szuperpozíciójával.

A felsorolt példákból látható, hogy a leírt eljárás alkalmazási lehetőségei szűkek, ezért nem tárgyaljuk részletesebben.

2.1-3.2. Az integrálegyenlet megfogalmazás alap gondolata

A Laplace egyenletet homogén közegben kielégítő $\varphi(r)$ potenciálfüggvény elvileg könnyen előállítható, ha ismerjük az elektródákön a $\sigma(r)$ felületi töltéssűrűséget. A (11) értelmében

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_A \frac{\sigma(r')}{|r'-r|} dA' . \quad (2.1-13)$$

Értelem szerinti a síkproblémára a (12) alapján felírható alak.

Valójában $\sigma(r)$ nem ismert, de előírt $\varphi(r)$ minden elektródán. Fejezzük ki (13) alapján minden elektróda egy tetszőleges pontjára az adott potenciált, akkor a $\sigma(r)$ függvényre lineáris integrálegyenletek rendszerét kapjuk. Ennek megoldása zárt alakban csak ritkán lehetséges, de felhasználható közelítő számításra a következő módon.

Osszuk fel az elektródák felületét olyan ΔA_1 felületelemekre, amelyekre a σ_1 felületi töltéssűrűség állandónak tekinthető, tehát az integráljel alól kiemelhető. Az integrál most már geometriai jellegű, így számításának nincs elvi akadálya, habár többnyire csak numerikusan végezhető el. Írjuk fel minden ΔA_1 felületelem középpontjára adott φ_1 potenciáljának kifejezését. Ezzel egy lineáris egyenletrendszert kapunk a σ_1 felületi töltéssűrűségekre. Az együtthatók a

$$T_{k1} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Delta A_1} \frac{1}{|r'-r_k|} dA_1 \quad (1.2-14)$$

Integrálok, ahol r_k az adott potenciálú pont helyvektora, r' pedig a ΔA_1 felületen mozog. A k -adik felületelemtől és szomszédaitól eltekintve $r' = r_1$ állandónak tekinthető, tehát az integrálás szorzással egyszerűsödik. Külön megfontolást igényel T_{kk} számítása, de ezt nem részletezzük.

A lineáris egyenletrendszer megoldásával az ismeretlen felületi

töltéssűrűségek meghatározhatók. Ezután a (13) alapján bármely pontbeli potenciál, ill. hasonló módon bármely pontbeli térerősség elvileg egyszerűen számítható.

Az integrálegyenletek módszere általánosítható arra az esetre is, amikor a perem egy részén Neumann típusú feltétel van előírva, vagy amikor a közeg nem homogén. Numerikus okból célszerűbb lehet a vezető felületén fellépő térerősségre vonatkozó, valamivel bonyolultabb alakú integrálegyenlet előállítását és közelítő megoldását.

A diszkretizálással elkövetett hiba annál kisebb, minél finomabb felosztást alkalmazunk (vagyis minél több ismeretlen vezetünk be) és minél inkább síknak tekinthetők a ΔA_i felületelemek. A viszonylag egyszerűbben kezelhető kétdimenziós feladatok (síkkérdés, forgásszimmetrikus elrendezés) megoldásánál jelentkező kisebb módosításokat nem tárgyaljuk.

2.1-4. A LAPLACE EGYENLET GRAFIKUS MEGOLDÁSA

A számítógépek elterjedése előtt a grafikus és a modellezési eljárások voltak az egyedüliek, amelyekkel általános (pl. szabálytalan peremű) feladatok megoldhatók voltak. Ma már jelentőségük jóval kisebb, de egyszerűségük miatt mégis hatékonyak. A grafikus eljárás alkalmas első tájékozódásra és a végeredmény szemléltetésére is.

A grafikus eljárás az ekvipotenciális felületek és az erővonalak szerkesztését jelenti. Gyakorlatilag csak kétdimenziós feladatok megoldására alkalmas. Csak a homogén közeg és a síkkérdés esetét tárgyaljuk. Az eljárás forgásszimmetrikus esetre is általánosítható.

Tételezzük fel, hogy a 3. ábrán látható síkkérdés ekvipotenciális görbél és erővonalai helyesen vannak megrajzolva. Ez azt jelenti, hogy a szomszédos ekvipotenciális felületek között ugyanakkora a $\Delta\varphi$ potenciálkülönbség, az erővonalak az ekvipotenciális felületekre merőlegesek, sűrűségük arányos a térerősséggel. Ekkor két erővonal között ugyanakkora a $\Delta\Psi = E \cdot l \cdot \Delta s$ elektromos fluxus. A térerősség ezért bármelyik pontban kétféleképpen is kifejezhető:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta n}, \quad E = \frac{\Delta\Psi}{l \cdot \Delta s}.$$

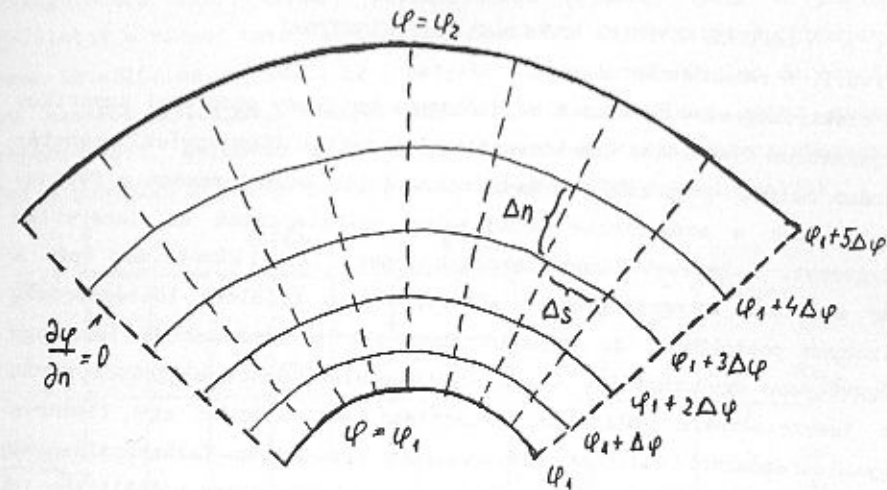
Ezek szerint a $\Delta n/\Delta s$ viszony állandó. Célszerű ezt egynek választani.

Az ábra akkor van helyesen megszerkesztve, ha az ekvipotenciális görbék és az erővonalak mindenütt merőlegesek egymásra, továbbá

$$\Delta n = \Delta s,$$

(2.1-15)

vagyis a kis idomok közelítőleg négyzetek.



2.1-3. Ábra. Az ekvipotenciális görbék és az erővonalak rendszere síkkérdés esetén

Az ábra többszöri próbálgatással szerkeszthető meg. Az adott potenciálú elektródák környezetében az ekvipotenciális görbék az elektródák alakjához hasonlítanak. A szigetelő határ közelében az erővonalak alakja becsülhető jól. Célszerű lehet először durva hálót készíteni, majd az így kapott görbéket helyesnek elfogadva az ábrát a lényeges részeken finomítani.

A helyesen megszerkesztett ábrából a térerősség egy pontban

$$E \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta n}, \quad (2.1-16)$$

iránya az ábrából kiolvasható (a kisebb potenciál felé mutat).

Egy elektróda töltését az l burkoló bármely ekvipotenciális felület mentén számíthatjuk:

$$Q = \int_s \epsilon E l ds \approx \sum_{i=1}^{N_E} \epsilon \frac{\Delta\varphi}{\Delta n_i} l \Delta s_i = \epsilon \Delta\varphi l \sum_{i=1}^{N_E} \frac{\Delta s_i}{\Delta n_i},$$

ahol N_E az erővonalak száma. Mivel $\Delta s_i = \Delta n_i$ mindenütt, ezért az l hosszúságú szakasz Q töltésének, ill. I áramának kifejezése

$$Q = \epsilon l N_E \Delta\varphi, \quad I = \sigma l N_E \Delta\varphi. \quad (2.1-17)$$

Ezek után számítható a kapacitás, ill. a konduktancia, több elektróda esetén a részkapacitások, ill. a részkonduktanciák.

2.1-5. A LAPLACE EGYENLET MEGOLDÁSA RÁCSMÓDSZERREL

2.1-5.1. A rácsmódszer elve

Az elektromágneses feladatok megoldásának hatékony módszerei numerikus eljárásokon alapulnak. Ennek során az ismeretlen függvény(ek) meghatározása helyett nagyszámú ismeretlen számérték meghatározása a feladatunk. Ezek a számértékek közelítőleg meghatározzák az ismeretlen függvényt. A keresett számértékeknek lehet fizikai tartalmuk (pl. a már említett integrálegyenlet módszernél: a felületi töltéssűrűség bizonyos pontokban), de lehetnek absztrakt jelentésűek is (pl. egy függvénysor együtthatói). A gyakorlatban alkalmazott eljárások során az ismeretlenekre valamilyen közelítési elv alapján egy lineáris egyenletrendszert állítunk elő, amelyet számítógép felhasználásával oldunk meg. Fejlettebb módszereknél az egyenletrendszer előállítására részben vagy egészben a számítógép feladata.

A sokféle módszerről még felületes áttekintést sem könnyű adni. Ebben a szakaszban a Laplace egyenlet megoldására egy olyan módszer legegyszerűbb változatát mutatjuk be, amelyet egyszerű megérteni és alkalmazni. A gyakorlatban ennél hatékonyabb módszereket alkalmaznak (pl. a végelemek, az élelemek vagy a peremelemek módszere). Ezek tárgyalása azonban meghaladja kereteinket.

Tekintsük feladatunknak azon $\varphi = \varphi(r)$ függvény meghatározását, amely (homogén közegre szorítkozunk) kielégíti a

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, & r \in V, \\ \varphi &= \Phi, & r \in A, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0, & r \in A' \end{aligned} \quad (2.1-18)$$

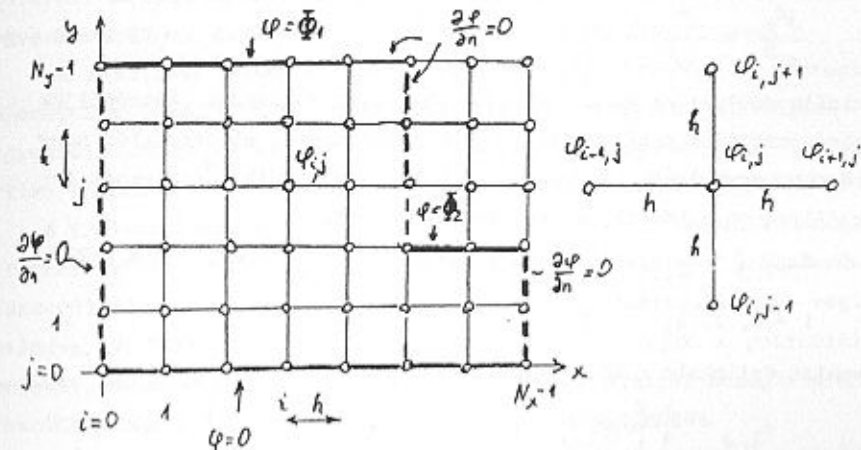
Laplace egyenletet, továbbá a Dirichlet és a homogén Neumann típusú peremfeltételt. A $\Phi = \Phi(r)$ függvény az A felületen adott, az n az A' felületre normális irány.

Feladatunkat közvetítőleg megoldottnak tekintjük, ha elég sűrűn választott r_1, r_2, \dots, r_N pontokban legalább közelítőleg meg tudjuk határozni a

$$\varphi_k = \varphi(r_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.1-19)$$

rácsmenti potenciálértékeket.

A rácsmentek és az általuk kifeszített rács sokféleképpen megválasztható. A következőkben a legegyszerűbb esetre, a négyzetes rács vizsgálatára szorítkozunk. Feltételezzük továbbá, hogy a peremfelületek a rácsot csak rácsmentekben metszik. Ez a feltétel többnyire csak közelítőleg teljesül. Ez a helyzet, ha a peremfelületet derékszögű hasábok alkotják, amelyek méretei a rácsávolság egész számú többszöröse, amint ez a 4. ábrán látható. A perem szomszédságában fekvő pontokat külön kell kezelni, de ennek módját nem tárgyaljuk.



2.1-4. ábra. Négyzetes rács és annak egy részlete: egy rácsment és négy szomszédos pontja

2.1-5.2. A rácsmenti potenciálok számítása

Szorítkozunk síkprobléma vizsgálatára, vagyis tekintsük az elrendezést a z-tengely irányában végtelenül hosszúnak. Az általánosítás egyébként kézenfekvő eredményre vezet. Az x, y síkban a négyzetes rács egy pontja egy i, j számpárral jellemezhető:

$$\varphi_{i,j} = \varphi(x=i \cdot h, y=j \cdot h), \quad (2.1-20)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1,$$

ahol a h a rácsávolság. Feladatunk a $\varphi_{i,j}$ értékek meghatározása.

Tekintsük az i, j indexpárú pontot és a vele szomszédos négy pontot (ezeket a 4. ábrán külön feltüntettük). Fejezzük ki a szomszédos pontok potenciálját az $x = ih, y = jh$ pontban képzett másodfokú Taylor polinommal, és írjuk fel a Laplace egyenletet is:

$$\varphi_{i+1,j} \approx \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{h^2}{2},$$

$$\varphi_{i,j+1} \approx \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{h^2}{2},$$

$$\varphi_{i-1,j} \approx \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{h^2}{2},$$

$$\varphi_{i,j-1} \approx \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{h^2}{2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

(2.1-21)

A parciális deriváltak az $x = ih$, $y = jh$ helyen képzendők. Kiszöböljük ki a négy parciális deriváltat. Ez esetünkben úgy is elvégezhető, hogy az első négy egyenletet összeadjuk és ebből a negyedik h^2 -szeresét levonjuk. Ily módon a következő egyenlethez jutunk:

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0, \quad (2.1-22)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1.$$

Az egyenlet felírható a következő alakban is:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} [\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1}], \quad (2.1-23)$$

ami azt jelenti, hogy minden pont potenciálja egyenlő a négy szomszédos pont potenciáljának számtani közepével. A (22) és a (23) még akkor is érvényes, ha (21)-ben a harmadfokú tagokat is figyelembe vesszük. Ez az állítás nem érvényes, ha a rácstávolságok nem egyenlők (a peremmel szomszédos pontok kezelése).

A (22) vagy a (23) nem alkalmazható a peremen fekvő pontra. Ilyenre a következőképpen kell eljárni.

Ha a peremen fekvő pont potenciálja adott (Dirichlet feltétel), akkor erre a pontra nem írunk fel egyenletet. A peremmel szomszédos pontban valamelyik φ ismert, így az erre vonatkozó (22) egyenlet az átrendezés után már nem homogén. Például a 4. ábrán $j = N_y - 2$ esetén $\varphi_{i,j} = \varphi_1$, ha $i = 0, 1, 2, \dots$ (az ekvipotenciális felület széléig).

Ha a peremen fekvő pontra φ normális szerinti deriváltjának nullának kell lennie (homogén Neumann feltétel), akkor a peremmel szomszédos pont potenciálja a tükörképével egyenlőnek tekinthető. Pl. a 4. ábrán $i = 0$ esetén (bal oldali perem) $\varphi_{-1,j} = \varphi_{1,j}$. Ezt (22)-ben

figyelembe véve $\varphi_{1,j}$ kétszer szerepel. Másként ez (21) alapján is belátható, ahol a harmadik egyenlet ekkor nem értelmezett, viszont az első egyenletben $\partial \varphi / \partial x = 0$. Általánosan a (22) a szigetelt peremen fekvő pontra így módosul:

$$x = ih, \quad 2\varphi_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0,$$

$$y = jh, \quad \varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} - 4\varphi_{i,j} = 0. \quad (2.1-24)$$

Végeredményben annyi (22) és (24) típusú egyenletet tudunk felírni, amennyi az ismeretlen rácsponti potenciálok száma. A lineáris egyenletrendszer megoldása után minden $\varphi_{i,j}$ érték ismert lesz.

A számítási munka természetesen igen nagy. Kielégítő pontosság eléréséhez néhány ezer, sőt több tízezer rácspont szükséges. Az egyenletrendszer direkt megoldását megkönnyíti, hogy mátrixa nem csak ritka, hanem a (22)-ből láthatóan szabályos szerkezetű (sávmátrix).

A (23) és a hasonló alakra hozott (24) alapján az egyenletrendszer iterációval is megoldható. Ehhez felveszünk tetszőleges (célszerűen: ésszerű) rácsponti potenciálokat. A pontokon szisztematikusan végighaladva, a "számtani közép" elve alapján korrigáljuk a potenciálok értékét. Ha minden ponton végighaladtunk, akkor előlről kezdjük a korrekciót mindaddig, amíg a korrekciók már elhanyagolhatók.

A számítástechnikai részleteket nem tárgyaljuk. Megemlítjük azonban, hogy az egyenleteket is gépi úton célszerű előállítani.

2.1-5.3. Az eredmény felhasználása

A rácsponti potenciálok ismeretében könnyen számíthatók az elektromos térerősség rendezői a rácspontokban:

$$E_x \Big|_{i,j} \approx - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i+1,j}}{2h},$$

$$E_y \Big|_{i,j} \approx - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j+1}}{2h}. \quad (2.1-25)$$

A peremen fekvő pontokra az egyik irányban csak egy szomszédos pont potenciálját ismerjük. Ilyenkor a megfelelő potenciálkülönbséget h -val osztjuk. Adhatók a (25)-nél pontosabb közelítések is.

Az elektróda töltésének vagy áramának számításához szükségünk van az elektromos térerősség felületmenti integráljára. Az 5. ábrán

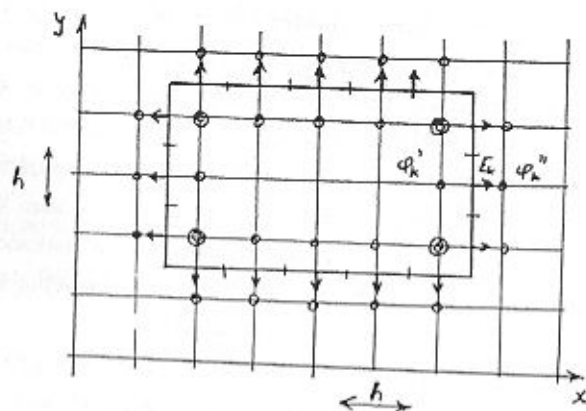
látható, az elektródát burkoló felületre

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \approx \sum_k (\mathbf{E}_k)_n \cdot h \cdot l = \sum_k \frac{\varphi_k' - \varphi_k''}{h} \cdot h \cdot l,$$

ahol l az elektróda z -irányú mérete. Végeredményben

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \approx \left(\sum_k \varphi_k' - \sum_k \varphi_k'' \right) \cdot l, \quad (2.1-26)$$

ahol $\sum \varphi_k'$, ill. $\sum \varphi_k''$ a görbével belülről, ill. kívülről szomszédos rácspontok potenciáljának összege. A belső sarokpontokat kétszer kell figyelembe venni, a külső sarokpontokat figyelmen kívül kell hagyni.



2.1-5. Ábra. Az elektromos térerősség zárt görbe menti integráljának közelítő számítása a rácsponti potenciálok ismeretében

A töltés vagy az áram ismeretében számíthatók a (rész)kapacitások, ill. a (rész)konduktanciák.

2.1-5.4. A Monte Carlo módszer

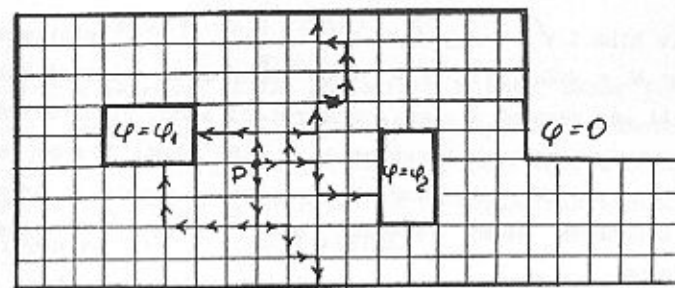
A rácsponti potenciálok meghatározása visszavezethető a valószínűség-számítás bolyongási problémájára. Ilyenkor a rácsponti potenciálokat egyenként határozzuk meg. A módszer ezért akkor lehet előnyös, ha csak bizonyos pontokban akarjuk ismerni a potenciált (pl. a maximális térerősség vagy a kapacitás, ill. a konduktivitás számításakor).

Tekintsük a 6. ábrán vázolt elrendezést. Az r helyvektorú P pontbeli $\varphi(r)$ potenciál - a feladat linearitása következtében - az n számú elektróda φ_i potenciáljának lineárkombinációjaként vagy

súlyozott középértékeként fejezhető ki:

$$\varphi(r) = \sum_{i=0}^n w_i(r) \varphi_i, \quad \sum_{i=0}^n w_i(r) = 1. \quad (2.1-27)$$

Ha meg tudjuk határozni a $w(r)$ súlyokat, akkor a $\varphi(r)$ potenciál meghatározható a φ_i potenciálok bármely előírt értékére. (Az előzőleg tárgyalt numerikus módszernél bármelyik elektróda potenciáljának megváltoztatása a feladat újbóli megoldását igényli!)



2.1-6. Ábra. A rácsponti potenciálok meghatározása bolyongással

Egy $w(r)$ súly elvileg a következőképpen határozható meg. Induljunk el a P pontból egy rácsvonal mentén a szomszédos rácspontig véletlenszerűen választva a "fel-le-jobbra-balra" irányok közül. A véletlen választás elemi úton két különböző pénzérme dobásával ("fej vagy írás"), számítógéppel véletlen számok generálásával biztosítható. Az elért pontban ismét véletlenszerűen választjuk meg a következő lépést. Véletlen bolyongásunk egy "játzmája" akkor ér véget, amikor adott potenciálú ponthoz (elektródához) érünk. Igazolható, hogy végtelenül finom háló esetén a (27)-ben szereplő w_i súlyok egyenlők annak p_i valószínűségével, hogy bolyongásunk során a választott P pontból a φ_i potenciálú elektródához jussunk.

Állításunkat a következőkkel támaszthatjuk alá. A (23) értelmében bármely rácspont potenciálja egyenlő a szomszédos négy rácspont potenciáljának számtani közepével. Ez úgy is értelmezhető, hogy a potenciál kialakításában a szomszédos pontok $1/4$ súllyal vesznek részt. A véletlen bolyongás során éppen $1/4$ a valószínűsége annak, hogy valamely pontba egy meghatározott szomszédos pontjából jutunk.

A p_i valószínűségeket általában nem tudjuk kiszámítani. Ha azonban kellően sok "játzsma" kimenetelét ismerjük, akkor az empirikusan meghatározható relatív gyakoriságok várhatóan kevéssé térnek el a valószínűségektől. Jelölje N_i azon játzsma számát, amelyek a φ_i potenciálú elektrodákon végződnek ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) és $N = \sum N_i$ a játzsma számának összegét. Ekkor $p_i \approx N_i/N$, tehát (27)-ben

$$w_i \approx \frac{N_i}{N}, \quad N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n. \quad (2.1-28)$$

A játzsma szükséges N számát a pontossági követelmények szabják meg. A relatív hiba $1/\sqrt{N}$ nagyságrendű, így 5%, ill. 1% statisztikus hibát mintegy $N = 400$, ill. $N = 10000$ játzsmaival biztosíthatunk. Figyelembe kell még vennünk a véges rácsméretből adódó diszkretizálási hibát, amely azonban nehezen becsülhető. E hiba annál kisebb, minél több rácspontunk van, de ezek számának növelésével növekszik az egyes játzsma-hoz szükséges elemi lépések száma, amellyel a számítás időigénye arányos.

A módszer háromdimenziós derékszögű rácsra elvi nehézség nélkül általánosítható. Természetesen a játzsma hosszabbak és a "könyvelés" bonyolultabbá válik.

2.1-6. A LAPLACE EGYENLET VARIÁCIÓS FELADATA

2.1-6.1. A variációs feladat

Mind elvi mind számítástechnikai szempontból előnyös lehet, ha egy fizikai feladatot többféle matematikai alakban meg tudunk fogalmazni. A kísérletileg igazolható integrális alakok helyett többnyire célszerűbbek a parciális differenciálegyenlet alakú megfogalmazások. Láttuk, hogy az elektrosztatika feladata visszavezethető integrálegyenlet megoldására is (2.1-3.2. pont). Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a Laplace egyenletnek a Dirichlet és Neumann típusú peremfeltételeknek is eleget tevő megoldásának meghatározása egyenértékű egy variációs feladat megoldásával. Ebben a pontban a variációs feladatot világítjuk meg, kapcsolatát az elektromos feladattal e szakasz további pontjaiban tárgyaljuk.

Legyen $u = u(r)$ egy ismeretlen helyfüggő skalár, amely egy U függvényosztály egy eleme: $u \in U$.

Az U jelentheti például a kétszer differenciálható függvények osztályát, vagy ezen belül azokat, amelyek adott felületeken előírt értéket vesznek fel.

Jelöljön $W[u]$ egy funkcionált, vagyis egy olyan utasítást, amely bármely U -beli u -hoz egy skaláris értéket rendel.

Ilyen funkcionál például a következő pontban még részletesebben vizsgálandó

$$W[u] = \frac{1}{2} \int_V (\text{grad } u)^2 dV.$$

Ha $u = \varphi$ az elektromos skalár potenciált jelenti, akkor $(-\text{grad } u)$ az elektromos térerősség. Ekkor ez a $W[u]$ homogén közeg esetén arányos a tárolt elektromos energiával (elektrosztatika) vagy a disszipált teljesítménnyel (stationárius áramlás). A funkcionálnak azonban általában nincs ilyen egyszerű fizikai tartalma.

A variációs számítás feladata azon $u \in U$ függvény meghatározása, amely mellett $W[u]$ extrémális (minimális vagy maximális).

A variációs számítás feladata tehát hasonlít a szélsőértékszámítás feladatához. Míg utóbbinál egy tartomány azon pontjait keressük, ahol egy adott függvény extrémális, előbbinél egy függvényosztály azon elemeit keressük, amelyek mellett egy adott funkcionál extrémális.

A variációs feladat megoldását jelentő u függvényre a következő gondolatmenettel állítható elő egy szükséges feltétel. Legyen $u \in U$ és $u' = u + \alpha \cdot v \in U$ egy-egy rögzített függvény (α v nem feltétlenül eleme az U -nak). Ekkor az $f(\alpha) = W[u + \alpha v]$ egyváltozós függvény jellemzi W viselkedését a választott u "környezetében". Ha u olyan, hogy $W[u]$ éppen extrémális, akkor bármilyen v mellett $f(\alpha)$ az $\alpha = 0$ pont környezetében nem változik, vagyis az $f(\alpha)$ első deriváltja az $\alpha = 0$ helyen nulla. Ebből következik az alábbi definíció haszna és a tétel helyes volta.

A $W[u]$ funkcionál első variációjának jele $\delta W[u]$, értelmezése

$$\delta W[u] = \left. \frac{\partial W[u + \alpha v]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = 0}, \quad (2.1-29)$$

ahol $u, u + \alpha v \in U$.

A $W[u]$ funkcionálnak azon u függvényre lehet extrémuma, amelyre

$$\delta W[u] = 0 \quad (2.1-30)$$

teljesül (szükséges feltétel).

A (30) az extrémumnak azért nem elegendő feltétele, mert az előzőleg értelmezett $f(\alpha)$ függvénynek az $\alpha = 0$ helyen inflexiós pontja is lehet. Mint látni fogjuk az alkalmazás során nem is lényeges, hogy a (30)-nak eleget tevő u biztosítja-e W extrémumát vagy csak a stacionaritását (vagyis az első variáció eltűnését).

2.1-6.2. A variációs feladat egy illusztrációja

A parciális differenciálegyenletével és peremfeltételeivel jellemzett feladathoz nagyon nehéz megtalálni egy alkalmas funkcionált, amelynek első variációja a feladat megoldásánál tűnik el. Valamivel egyszerűbb a fordított út: választunk egy funkcionált, majd megvizsgáljuk, hogy variációs feladatának megoldása milyen peremértékfeladat megoldása. A funkcionál módosításával keressük az általánosabb feladat variációs megfelelőjét. A tipikus peremértékfeladatoknak sokféle variációs megfogalmazása ismert, így ezt nem kell mérnöki feladatnak tekinteni.

E gondolat illusztrálására határozzuk meg a már említett

$$W[u] = \frac{1}{2} \int_V (\text{grad } u)^2 dV$$

funkcionál első variációját, ha U a V térfogatban a kétszer differenciálható függvények osztályát jelenti.

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} W[u + \alpha v] &= \frac{1}{2} \int_V (\text{grad } (u + \alpha v))^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \{ (\text{grad } u)^2 + 2\alpha (\text{grad } u)(\text{grad } v) + \alpha^2 (\text{grad } v)^2 \} dV. \end{aligned}$$

Az első variációt α szerinti differenciálással, majd $\alpha = 0$ helyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta W[u] &= \frac{1}{2} \int_V \{ 2 (\text{grad } u)(\text{grad } v) + 2\alpha (\text{grad } v)^2 \} dV \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_V (\text{grad } u)(\text{grad } v) dV. \end{aligned}$$

Az integrál átalakítható a következő azonosság felhasználásával

$$\text{div } (v \text{ grad } u) = v \text{ div grad } u + (\text{grad } u)(\text{grad } v).$$

Ebből következően

$$\delta W[u] = - \int_V v \Delta u dV + \int_V \text{div } (v \text{ grad } u) dV.$$

A Gauss - Osztrogradszkij tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\delta W[u] = - \int_V v \Delta u dV + \oint_{A_0} v \text{ grad } u dA,$$

ahol A_0 a vizsgált V térfogatot burkoló zárt felület.

Vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett lesz $\delta W[u] = 0$ bármilyen v mellett. Az első integrál nulla, ha $\Delta u = 0$, vagyis ha u megoldása a Laplace egyenletnek. A második integrál nulla, ha az A_0 peremfelületen $\partial u / \partial n = 0$, vagyis ha u homogén Neumann feltételt elégíti ki. Ez a választott funkcionálú variációs feladat ún. természetes peremfeltétele. Ennek az esetnek nincs gyakorlati jelentősége, mert ekkor $u = 0$ a teljes V térfogatban.

A második integrál azonban akkor is nullává tehető, ha az A_0 peremfelület egy A' részén homogén Neumann feltételt írunk elő, míg további A részén $u = \Phi$ előírt, vagyis Dirichlet feltételt kell kielégíteni. Ehhez azonban az kell, hogy U azt a függvényosztályt jelentse, amelynek elemei V -ben kétszer differenciálhatók (különbön Δu nem értelmezett) és a perem A részén $u = \Phi$ teljesül. Ilyen u függvényeket nem könnyű találni, habár előállításukra léteznek mind pontos, mind közelítő módszerek.

Tételezzük fel, hogy sikerül az előzőekben leírt függvényeket előállítanunk. Ha ezek közül bármilyen módszerrel kiválasztjuk azt, amely eleget tesz a $\delta W[u] = 0$ feltételnek, akkor megkapjuk a feladat megoldásának legjobb közelítését az u függvények vizsgált halmazából. Ha az U halmazba tartozó függvények a V térfogatban teljes rendszert alkotnak, akkor megkaptuk a Laplace egyenletnek a peremfeltételeket is kielégítő megoldását.

A következő pontokban bemutatunk egy másik funkcionált, továbbá a variációs elv alkalmazásának egy számítástechnikáját. E rendkívül hatékony eljárás további részletezése kívül esik kereteinken.

2.1-6.3. A variációs feladat homogén közeg esetére

Tekintsük a sztatikus és a stacionárius elektromos teret leíró φ skalár potenciálra vonatkozó feladatot, amely homogén közeg esetén a

$$\Delta\varphi = 0, \quad r \in V, \\ \varphi = \Phi, \quad r \in A, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad r \in A' \quad (2.1-31)$$

Laplace egyenlet és Dirichlet, ill. homogén Neumann feltétel kielégítését igényli (2.1-1. szakasz). Igazolni fogjuk, hogy ennek megoldására egy alkalmas funkcionál

$$W[u] = \int_V \frac{1}{2} (\text{grad } u)^2 dV - \int_A (u - \Phi) \frac{\partial u}{\partial n} dA, \quad (2.1-32)$$

ahol $u \in U$ és U a V -ben kétszer differenciálható, egyébként tetszőleges függvények halmaza, n az A burkoló normálisát jelöli.

Ennek belátásához képezzük először a funkcionál második tagjának megváltozását:

$$W''[u+\alpha v] = - \int_A (u + \alpha v - \Phi) \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \frac{\partial v}{\partial n} \right) dA.$$

Az α szerint differenciálva és az $\alpha = 0$ értéket helyettesítve

$$\delta W''[u] = - \int_A \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} + (u - \Phi) \frac{\partial v}{\partial n} \right\} dA.$$

A funkcionál első tagjának variációját az előző pontban már meghatároztuk. A $(\text{grad } u) dA = (\partial u / \partial n) dA$ összefüggést is felhasználva

$$\delta W[u] = - \int_V v \Delta u dV - \int_A \frac{\partial v}{\partial n} (u - \Phi) dA - \int_{A'} v \frac{\partial u}{\partial n} dA'$$

adódik. Ez akkor nulla bármely v mellett, ha u kielégíti a Laplace egyenletet, a perem A részén Φ értékű, A' részén $\partial u / \partial n = 0$, vagyis ha u a (31) feladat megoldása. Nincs biztosíték a $\delta W[u] = 0$ feladat megoldásának egyértelműségére, de ez a gyakorlatban nem szokott nehézséget okozni.

Nem jelent lényeges nehézséget a funkcionál általánosítása a Poisson egyenletre, nem homogén Neumann feladatra és csak térrészenként homogén lineáris izotrop közegre. Az általánosítás azonban nem magától értetődő.

2.1-6.4. Függvénysor előállítás

A keresett $\varphi(r)$ potenciált és a lehetséges $u(r)$ függvényeket függvénysor alakjában akarjuk előállítani. E sor egy N tagú részletösszege

$$u_N(r) = \sum_{s=0}^N a_s F_s(r), \quad r \in V, \quad (2.1-33)$$

ahol F_0, F_1, F_2, \dots általunk választott bázisfüggvények, míg a_0, a_1, a_2, \dots a meghatározandó együtthatók.

A bázisfüggvényeknek kétszer differenciálhatóknak kell lenniök. V -ben lineárisan független és teljes rendszert kell alkotniok. Ez lényegében azt jelenti, hogy bármely kétszer differenciálható $u(r)$ függvényt V -ben egyértelműen és a tagszám növelésével tetszőlegesen kis hibával elő lehet állítani a (33) szerinti alakban. Az esetek többségében ezeknek a kikötéseknek nincs jelentőségük. A számításigény és a pontosság kapcsolatát azonban befolyásolja a bázisfüggvények megválasztása.

Sokszor nem az egész V térfogatban, hanem annak egyes V_1 részeiben állítjuk elő a megoldást (33) alakjában és gondoskodunk a megoldások illesztéséről. Különösen hasznos ez bonyolult geometria és nem homogén közeg esetén. Ilyenkor elegendő pl. kis fokszámú polinom alakú közelítést keresni. Kétféle változós esetre szorítkozva a bázisfüggvények pl. a következők lehetnek:

$$F_0(x,y) = 1, \quad F_1(x,y) = x, \quad F_2(x,y) = y, \\ F_3(x,y) = x^2, \quad F_4(x,y) = xy, \quad F_5(x,y) = y^2.$$

Most azonban a globális feladat megoldásával foglalkozunk.

Jelölje r_0 egy olyan pont helyvektorát, ahol $\varphi(r_0) = 0$. Legyen $u_N(r_0) = 0$. Ebből a feltételeiből (33) alapján $F_0(r) = 1$ választással

$$a_0 + \sum_{s=1}^N a_s F_s(r_0) = 0.$$

Ebből a_0 kifejezhető. A sor ezzel a következő alakot ölti:

$$u_N(r) = \sum_{s=1}^N a_s [F_s(r) - F_s(r_0)].$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti bázisfüggvények helyett az

$$f_s(\mathbf{r}) = F_s(\mathbf{r}) - F_s(\mathbf{r}_0); \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2.1-34)$$

bázisfüggvények szerinti sorfejtés a_s együtthatóit keressük:

$$u_N(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^N a_s f_s(\mathbf{r}). \quad (2.1-35)$$

Helyettesítsük ezt az alakot a (32) funkcionálba. A $W[u]$ ennek során az a_1, a_2, \dots, a_N együtthatók függvénye lesz. Mivel $W[u]$ kvadratikusan u -ban, ezért kvadratikusan függvénye az a_s együtthatóknak is. Ennek következtében a $\partial W / \partial a_s = 0$ egyenletek éppen N számú lineáris egyenletet adnak az N számú ismeretlen a_s együtthatóra. Az egyértelmű megoldhatóság ennek következtében biztosított, a jól kondicionáltság azonban nem (ez a bázisfüggvények megválasztásától is függ).

A lineáris egyenletrendszer előállításához helyettesítsük a megoldás (35) alakját a (32) funkcionálba:

$$W[u] = \int_V \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^N a_s \text{grad } f_s \right)^2 dV - \iint_A \left(\sum_{s=1}^N a_s f_s - \phi \right) \left(\sum_{l=1}^N a_l \frac{\partial f_l}{\partial n} \right) dA.$$

Differenciáljuk ezt a_q szerint, majd tegyük egyenlővé a deriváltat nullával:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a_q} &= \int_V \left(\text{grad } f_q \right) \left(\sum_{s=1}^N a_s \text{grad } f_s \right) dV - \\ &- \iint_A \left\{ f_q \left(\sum_{s=1}^N a_s \frac{\partial f_s}{\partial n} \right) + \frac{\partial f_q}{\partial n} \left(\sum_{s=1}^N a_s f_s - \phi \right) \right\} dA = 0. \end{aligned}$$

Rendezzük az egyenletet az ismeretlen együtthatók szerint:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \left\{ \int_V \left(\text{grad } f_q \right) \left(\text{grad } f_s \right) dV - \iint_A \left(f_q \frac{\partial f_s}{\partial n} + \frac{\partial f_q}{\partial n} f_s \right) dA \right\} a_s &= \\ &= - \iint_A \phi \frac{\partial f_q}{\partial n} dA. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a (35) szerinti sorbafejtés együtthatóira vonatkozó lineáris egyenletrendszer

$$\underline{T} \underline{a} = \underline{b}, \quad (2.1-36)$$

ahol \underline{a} az a_s együtthatókból alkotott oszlop mátrix, a \underline{T} kvadratikusan mátrix és a \underline{b} oszlop mátrix elemei pedig a

$$\begin{aligned} T_{qs} &= T_{sq} = \int_V \left(\text{grad } f_q \right) \left(\text{grad } f_s \right) dV - \iint_A \frac{\partial f_q}{\partial n} f_s dA, \\ b_q &= - \iint_A \phi \frac{\partial f_q}{\partial n} dA, \quad q, s = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.1-37)$$

Ezek az integrálok általában csak numerikusan számíthatók. A felületi normális és a koordináták kapcsolata általában minden pontban más.

Mint minden közelítő megoldásnál, most is igen nagy nehézséget okoz a hiba becslése, ill. az előírt hibához tartozó szükséges tagszám vagy felosztás meghatározása.

2.1-7. ELEKTROSZTATIKUS ENERGIA

Már korábban láttuk, hogy a φ skalár potenciál szoros kapcsolatban áll a töltés energiájával. Most általánosan megmutatjuk, hogy lineáris izotrop (de nem feltétlenül homogén) közeg esetén a W elektromos térenergia kifejezhető a $\varphi(\mathbf{r})$ potenciálfüggvény ismeretében.

Az elektrosztatikus tér energiasűrűsége ekkor felírható

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = - \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{D}$$

alakban. Mivel $\text{div}(\varphi \mathbf{v}) \equiv \varphi \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi$, ezért az elektromos térenergia kifejezése

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \text{div } \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV.$$

A $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ összefüggést és a Gauss-Oszrogradszkij tételt felhasználva

$$W = \int_V \varphi \rho dV - \oint_A \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Az elektródák belsejében nincs erőter, ezért a térfogati integrált a szigetelőanyag V térfogatára kell képezni. Ahol ezt a térfogatot elektróda határolja, ott $D \, dA = -\sigma \, dA$, mert a felületi normális kifelé van irányítva. Ha a térfogat a végtelenbe nyúlik, akkor az A felület egy része a végtelen távoli felületet jelenti, amely r^2 -tel arányosan növekszik. A végesben lévő töltések ebből a szempontból pontszerűnek tekinthetők, tehát potenciáljuk mint $1/r$ és térerősségük mint $1/r^2$ csökken, vagyis a felületi integrál integrandusza $1/r^3$ ordóban, maga az integrál $r^2/r^3 = 1/r$ ordóban nullához tart.

Végeredményben az elektrosztatikus energia kifejezése

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi(r) \rho(r) \, dV + \frac{1}{2} \int_A \varphi(r) \sigma(r) \, dA, \quad (2.1-38)$$

ahol A az elektródák teljes felülete.

A gyakorlati esetek túlnyomó többségében térfogati töltéssűrűség nincs, tehát az első integrállal nem kell foglalkozni. Jelölje továbbá a k -adik elektróda felületét A_k , állandó potenciálját $\varphi(r) = \varphi_k$. A második integrál ekkor az A_k felületekre vett integrálok összege. Az állandó φ_k kiemelhető, a $\sigma(r)$ felületi integrálja az A_k felületre a k -adik elektróda Q_k töltése. Az elektromos energia kifejezése az n számú elektróda φ_k potenciáljának és Q_k töltésének ismeretében

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k Q_k. \quad (2.1-39)$$

Ez az összefüggés elemi megfontolásokkal is igazolható, az 1.8-1. szakaszban már meg is adtuk. Mostani gondolatmenetünk annak egy illusztrációja, hogy a Maxwell egyenletekből matematikai módszerekkel levezethetők olyan összefüggések, amelyek egyszerűbb úton is előállíthatók és kísérletileg igazolhatók. Az ilyen eredmények a közvetlenül nem igazolható Maxwell egyenletek egy-egy közvetett igazolását jelentik.

2.2. STACIONÁRIUS MÁGNESES TÉR

2.2-1. ALAPEGYENLETEK

2.2-1.1. A mágneses vektorpotenciál

Az időben állandó áramok által létrehozott stacionárius mágneses teret leíró egyenletek lineáris és izotrop közegben (1.6-4. szakasz)

$$\text{rot } H = J, \quad \text{div } B = 0, \quad B = \mu H, \quad (2.2-1)$$

ahol μ a közeg permeabilitása, amelyről a továbbiakban feltételezzük, hogy legalább térrészenként állandó. Többnyire nincs jelen ferromágneses közeg, ekkor a közeg homogén és $\mu = \mu_0$ mindenütt. Feltételezzük, hogy a vizsgált térrész mindenütt a végtelenbe nyúlik. (Megengedhető lenne pl. olyan perem is, amelyet végtelen nagy permeabilitású közeg alkot.) Arra az esetre szorítkozunk, amikor vonalmenti áramsűrűség nincs. A folytonossági feltételek ekkor

$$\text{két közeg határán } H_{1t} = H_{2t}, \quad B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.2-2)$$

Mivel H nem örvénymentes, ezért általában nem állítható elő egy egyértékű skalár potenciál gradienseként (1. a következő pontot is). Ismeretes azonban, hogy bármely divergenciamentes $B = B(r)$ vektor előállítható egy alkalmas $A = A(r)$ vektor, a vektorpotenciál divergenciájaként (nevezik mágneses vektorpotenciálnak is; SI-egysége: T/m), hiszen $\text{div rot } A = 0$. Ezek szerint

$$B = \text{rot } A. \quad (2.2-3)$$

A vektorpotenciál divergenciája szabadon megválasztható. A legegyszerűbb és esetünkben a legcélszerűbb választás az ún. Coulomb mérték:

$$\text{div } A = 0. \quad (2.2-4)$$

A vektorpotenciál ismeretében meghatározható bármely l zárt görbe által határolt A' felület Φ fluxusa. Stokes tételének felhasználásával

$$\Phi = \int_{A'} B \, dA' = \int_{A'} \text{rot } A \, dA' = \oint_l A \, dl,$$

ahol a görbe irányítása jobbcsvár szabály szerint van a felületi normális irányához rendelve. Végeredményben

$$\Phi = \oint_l A \, dl. \quad (2.2-5)$$

Ez gyakran egyszerűbben számítható, mint B felületmenti integrálja.

A vektorpotenciálra vonatkozó egyenlet előállításához helyettesítsük a $B = \text{rot } A$ összefüggést a $\text{rot}(B/\mu) = J$ egyenletbe. Ha egyik közeg sem ferromágneses, vagyis $\mu = \mu_0$, akkor

$$\mu_0 J = \text{rot } B = \text{rot rot } A = \text{grad div } A - \Delta A,$$

ahol $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$ a vektoriális Laplace operátor. Mivel (4) szerint $\text{div } A = 0$, ezért a vektorpotenciálnak a

$$\Delta A = -\mu_0 J \quad (2.2-6)$$

vektoriális Poisson egyenletet kell kielégítenie. Derékszögű Descartes koordinátákban ez a következő három skaláris egyenletet jelenti:

$$\Delta A_x = -\mu_0 J_x, \quad \Delta A_y = -\mu_0 J_y, \quad \Delta A_z = -\mu_0 J_z, \quad (2.2-7)$$

ahol $\Delta = \text{div grad}$, a skalárra vonatkozó Laplace operátor. Más koordináta-rendszerben ez csak speciális esetekben érvényes.

Ha a permeabilitás csak térrészenként állandó, akkor minden térrészben meg kell oldani a

$$\Delta A_i = -\mu_i J_i, \quad r \in V_i \quad (2.2-8)$$

vektoriális Poisson egyenletet, továbbá két közeg határfelületén ki kell elégíteni a (2) folytonossági feltételeket. Célszerű a vektorpotenciált folytonosnak választani, vagyis kielégíteni az

$$A_{it} = A_{jt}, \quad A_{in} = A_{jn}, \quad r \in A_{ij} \quad (2.2-9)$$

folytonossági feltételeket is.

Végeredményben a H térerősség-vektor és a B indukció-vektor meghatározását visszavezettük az A vektorpotenciál meghatározására. Ez nem jelent akkora egyszerűsítést, mint amikor a vektorokat egy skalárpotenciálból tudjuk származtatni. További nehézség, hogy a vektorpotenciál kvalitatív eloszlását nehezebb felderíteni, pedig ez sokszor segít a megoldás megtalálásakor és ellenőrzésekor.

2.2-1.2. A mágneses skalárpotenciál

Noha a mágneses tér általában nem állítható elő egy skalárpotenciál gradienseként, egyes esetekben ez mégis lehetséges és hasznos is.

Ez a helyzet a permanens mágnesek által létrehozott sztatikus mágneses tér esetén, amikor áram nincs, tehát $\text{rot } H = 0$. A nemlineáris $M = M(H)$ karakterisztika következtében a skalárpotenciálra nehezen

megoldható differenciálegyenlet adódik. Ezzel az esettel a továbbiakban nem foglalkozunk.

Egy másik tipikus feladatkörre az a jellemző, hogy a vizsgált térrészben nincs áram, a közeg rendszerint mágneses szempontból homogén, lineáris és izotrop. Az alapegyenletek ekkor

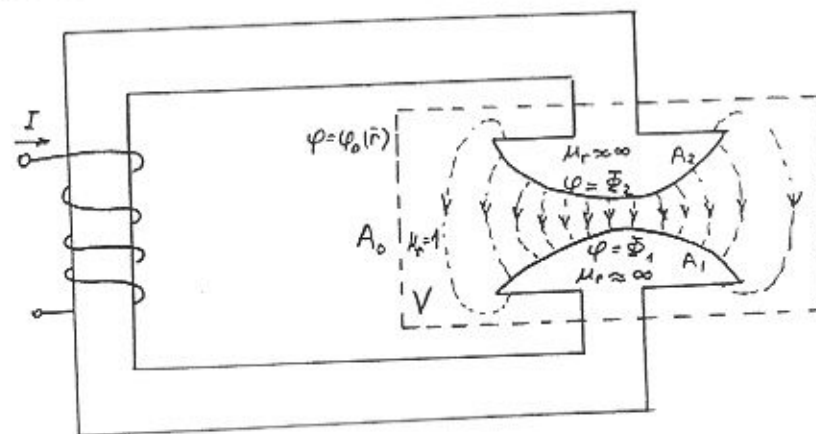
$$\text{rot } H = 0, \quad \text{div } B = 0, \quad B = \mu_0 H, \quad r \in V. \quad (2.2-10)$$

A mágneses térerősség előállítható egy $\varphi = \varphi(r)$ mágneses skalárpotenciál negatív gradienseként (SI-egysége: A)

$$H = -\text{grad } \varphi. \quad (2.2-11)$$

Mivel $\mu_0 \text{div } H = 0$, ezért φ -nek ki kell elégítenie a $\Delta \varphi = 0$ Laplace egyenletet és a peremfeltételeket.

Tipikus ilyen feladat vázlatát mutatja az 1. ábra. A mágneses teret végsősoron a gerjesztőáram (vagy egy permanens mágnes) hozza létre. Bennünket azonban az igen nagy permeabilitású mágneses pólusok között kialakuló erőtér eloszlása érdekel. Tekintsük adottnak a pólusok közötti mágneses feszültséget. Ha meg tudjuk határozni a pólus fluxusát, akkor ismerjük a légrés reluktanciáját és a mágneses kör az 1.7-2. szakaszban leírt módon számítható.



2.2-1. Ábra. Mágneses pólusok között kialakuló erőtér vizsgálata

Matematikai szempontból a Maxwell egyenletek megoldását az 1. ábrán szaggatott vonallal körhatárolt térrész belsejében keressük, ahol $J = 0$, tehát a mágneses térerősség levezethető egy skalárpotenciálból. Ennek ki kell elégítenie a Laplace egyenletet, továbbá a

pólusokon előírt értékűnek kell lennie (a pólusok felülete mágneseesen ekvipotenciális, Dirichlet feltétel).

Át kell még hidalnunk azt a problémát, amelyet a V térfogat önkényes kijelölése okoz. Egy szokásos módszer az, hogy valamilyen előzetes becslés alapján a V térfogatot burkoló felület nem ekvipotenciális részét az erővonalakkal egybeesőnek választjuk. Ezen a peremen homogén Neumann feltételt kell kielégíteni. Egy másik lehetőség az, hogy a peremre előírjuk a skalár potenciált. Ha ez a felület elég messze van a számunkra fontos térrészről, akkor a felvett $\varphi_0(r)$ potenciáeloszlás hibája kevéssé befolyásolja az eredményt. A két eljárás vegyesen is alkalmazható.

Végeredményben a nagypermeabilitású pólusok között kialakuló mágneses tér számítása a következő matematikai feladatra vezet:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, & r \in V, \\ \varphi &= \varphi_k, & r \in A_k, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0, & r \in A', \\ \varphi &= \varphi_0, & r \in A''. \end{aligned} \quad (2.2-2)$$

A feladat megoldására felhasználhatók azok a módszerek, amelyek az analóg elektrosztatikus feladatra alkalmazhatók, mint pl. a rácsmódszer (2.1-5. szakasz).

2.2-2. AZ ÁLTALÁNOS MEGOLDÁS ÉS ALKALMAZÁSA

2.2-2.1. Az általános megoldás

Mint az előző szakaszban láttuk: lineáris és homogén közeg esetén a vektorpotenciál a $\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ vektoriális Poisson egyenlet megoldása. A 2.1-2. szakaszból ismerjük a $\Delta \varphi = -\rho/\epsilon$ skaláris Poisson egyenlet megoldását. A (2.1-11) alapján pl. a $\Delta A_x = -\mu J_x$ egyenlet megoldása

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV'.$$

Képezzük az $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$ vektort, akkor a jobb oldalon a közös integráljel alatt $J_x \mathbf{e}_x + J_y \mathbf{e}_y + J_z \mathbf{e}_z = \mathbf{J}$ szerepel. Ezek szerint a vektorpotenciál általános kifejezése mágneseesen homogén közeg esetén:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|. \quad (2.2-13)$$

A vektorpotenciál helyfüggésének ismeretében a mágneses indukció és térerősség rotációképzéssel számítható.

A vektorpotenciált megadó integrál matematikailag bonyolultabb a skalárpotenciált megadónál, hiszen vektorfüggvényt kell integrálni. Az alkalmazás szempontjából azonban sokkal hatékonyabb, mert míg a töltés eloszlása többnyire nem ismert, az árameloszlás sok gyakorlati esetben ismertnek tekinthető (1. a következő pontokat).

2.2-2.2. Vonalszerű vezető

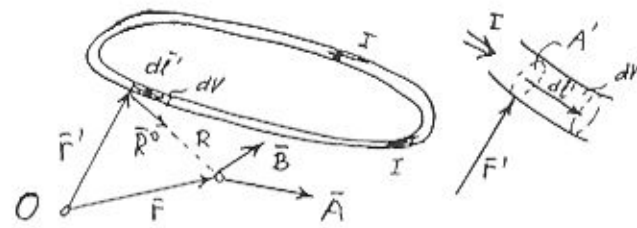
Az alkalmazások szempontjából különösen fontos az az eset, amikor a mágneses teret kiskeresztmetszetű vezetőben folyó áram hozza létre. Ilyenkor a vezetőt vonalszerűnek tekintjük. Ez a közelítés a vezető belsejében nem ad jó közelítést. A 2. ábra alapján a vezető egy dl' hosszúságú szakasza egy $R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ távolsággal jellemezhető, mert feltevésünk szerint a vezető keresztmetszet irányú méretei sokkal kisebbek az R távolságnál. Az ábra alapján továbbá

$$J dV' = J A' dl' = J A' dl' = I dl',$$

ahol I a zárt vezetőben folyó áram, amely mindenütt ugyanakkora. A dl' ívelemet az árammal (pontosabban az áramsűrűséggel) egyezően irányítjuk. Ezzel (13) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}'}{R}. \quad R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|. \quad (2.2-14)$$

Több áramhurok együttes vektorpotenciálja a szuperpozíció elve alapján számítható.



2.2-2. ábra. A vektorpotenciál számítása vonalszerű vezető esetén

A mágneses indukció általános kifejezése $B = \text{rot } A$ értelmében

$$B(r) = \text{rot } \frac{\mu}{4\pi} I \oint_1 \frac{dl'}{R} = \frac{\mu}{4\pi} I \oint_1 \text{rot } \frac{dl'}{R}, \quad R = |r' - r|.$$

A rotációt az r pontban kell képezni, az r' ebből a szempontból állandóként kezelendő. Használjuk fel a következő összefüggést

$$\text{rot}(\varphi v) = (\text{grad } \varphi) \times v + \varphi \text{rot } v,$$

$\varphi = 1/R$ és $v = dl'$ megfeleltetéssel, ahol $\text{rot } dl' = 0$, mert dl' nem függ r -től. Ezek felhasználásával

$$\text{rot } \frac{dl'}{R} = (\text{grad } \frac{1}{R}) \times dl' = - \frac{R^0}{R^2} \times dl', \quad R^0 = \frac{r' - r}{R},$$

ahol R^0 az r' pontból az r pontba mutató egységvektor (2. ábra). Cseréljük fel a vektoriális szorzat tényezőit és váltsunk előjelet.

A permeabilitással osztva kapjuk a mágneses térerősség következő általános kifejezését mágnesesen homogén közeg esetére

$$H(r) = \frac{1}{4\pi} I \oint_1 \frac{dl' \times R^0}{R^2}, \quad R = |r' - r|, \quad R^0 = \frac{r' - r}{R}. \quad (2.2-15)$$

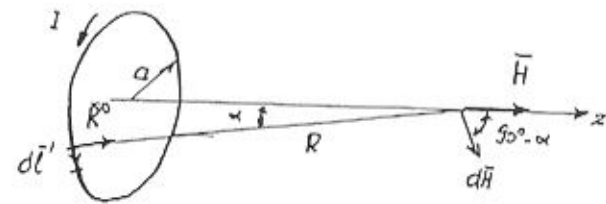
Ez a kísérletileg is ellenőrzött Biot - Savart törvény. Ez egy újabb példa arra, hogy a Maxwell egyenletekből matematikai úton tapasztalati összefüggések vezethetők le.

A vezeték alakjának és a benne folyó áramnak az ismeretében két-féleképpen is tudjuk számítani a mágneses teret. Vagy közvetlenül alkalmazzuk a (15) Biot - Savart törvényt, vagy először meghatározzuk (14) alapján a vektorpotenciált és képezzük annak rotációját. Az első esetben közvetlenül megkapjuk a mágneses térerősséget. A második esetben esetleg egyszerűbb a számítás, de ekkor minden pontban - de legalább a vizsgált pont környezetében - ismernünk kell a vektorpotenciált ahhoz, hogy rotációját képezni tudjuk. A szereplő integrálok csak ritkán számíthatók zárt alakban (l. a következő pontot).

2.2-2.3. Alkalmazások

Határozzuk meg egy kör alakú áramhurok mágneses terét a hurok tengelye, azaz a középpontján átmenő és síkjára merőleges egyenes mentén. A 3. ábrából látható, hogy a z -tengely minden pontjában a mágneses indukció szimmetriaokokból csak tengelyirányú lehet.

A vektorpotenciál számítása a P pontban igen egyszerű. Mivel az



2.2-3. ábra. Kör alakú áramhurok mágneses terének számítása tengelyében
ábrából láthatóan $R^2 = z^2 + a^2$ állandó, ezért

$$A(z) = \frac{\mu}{4\pi} I \oint_1 \frac{dl'}{R} = \frac{\mu}{4\pi} I \frac{1}{R} \oint_1 dl' = 0,$$

hiszen a dl' ívelem vektorok eredője nulla. Ezzel azonban csak annyit tudunk, hogy A nem változik a tengely mentén. Ebből belátható, hogy rotációjának itt csak z -irányú összetevője van, amit eleve tudtunk. A vektorpotenciált ezért egy, a z -tengely közelében lévő z, r hengerkoordinátájú pontban kell számítanunk, ahol kihasználhatjuk azt, hogy r kicsi. Ezt nem részletezzük.

E hosszadalmasnak ígérkező számítás helyett próbáljuk meg a Biot-Savart törvényt alkalmazni. A 3. ábrából látható, hogy dl' és R^0 merőlegesek egymásra (egyenes körkúp vezérgörbéje és alkotója), továbbá R állandó. A mágneses térerősség z -irányú rendezője (15) értelmében

$$H_z(z) = \frac{1}{4\pi} I \oint_1 \frac{dl' \sin \alpha}{R^2} = \frac{1}{4\pi} I \frac{2\pi a}{R^2} \frac{a}{R}.$$

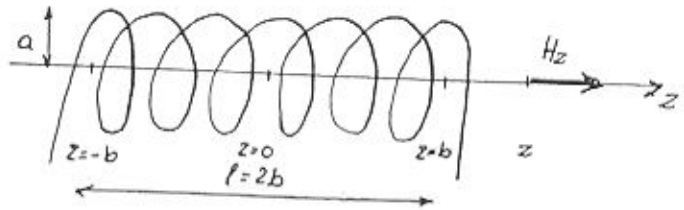
Egyszerűsítve és a z koordinátára áttérve

$$H_z(z) = \frac{a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} I. \quad (2.2-16)$$

A mágneses térerősség a tengely mentén hurok síkjában ($z=0$) maximális, nagy távolságban $1/z^3$ ordóban tart nullához.

Második példaként határozzuk meg egy sűrűn tekercselt N menetű szolenoid (egyenes tekercs) mágneses terét tengelye mentén. A 4. ábrán az áttekinthetőség érdekében a tekercselés ritka.

A sűrű tekercselés miatt a csavarvonal minden menete egy-egy körnek tekinthető, így - a hozzávetések hatását elhanyagolva - a mágneses térerősség (16) felhasználásával számítható. Figyelembe kell vennünk, hogy minden menet más távolságban van a vizsgált ponttól. Sok menet esetén azonban nehezen kezelhető eredményhez jutnánk. Mivel a



2.2-4. ábra. Szolenoid mágneses tereének számítása tengelyében

tekerccselés igen sűrű, ezért a tekercs dz' hosszúságú szakasza egyenértékű egy $N I dz'/2b$ áramú hurokkal. Az összegezést ennek alapján integrálással közelíthetjük:

$$H_z(z) = \int_{-b}^b \frac{a^2}{2} \frac{1}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \frac{N I dz'}{2b} = \frac{a^2 N I}{4b} \left[\frac{z' - z}{a^2 [(z'-z)^2 + a^2]^{1/2}} \right]_{-b}^b$$

A határokat behelyettesítve kapjuk a térerősség helyfüggését:

$$H_z(z) = \frac{N I}{4b} \left[\frac{b-z}{[(b-z)^2 + a^2]^{1/2}} + \frac{b+z}{[(b+z)^2 + a^2]^{1/2}} \right] \quad (2.2-17)$$

A tekercs közepén, ill. szélén

$$H_z(0) = \frac{N I}{2[(b^2 + a^2)]^{1/2}} \approx \frac{N I}{1}, \quad H_z(b) = \frac{N I}{2[(2b)^2 + a^2]^{1/2}} \approx \frac{N I}{2} \quad (2.2-18)$$

ahol a közelítés hosszú tekercsre ($b \gg a$) kis hibát jelent. A szolenoidra gyakran használt $H \approx N I/l$ közelítés (1.7-2.4. pont) tehát a hosszú tekercs közepén tűrhető pontosságú, de a tekercs szélén a térerősség mintegy fele a középpontbelinek.

2.2-3. INDUKTIVITÁSOK SZÁMÍTÁSA

2.2-3.1. A Neumann képlet

Vezetékek mágneses terét sokszor csak azért számítjuk, hogy ennek alapján meghatározhassuk

$$L_1 = L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1}, \quad \text{ill.} \quad M = L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad (2.2-19)$$

ön-, ill. kölcsönös inductivitásukat, ahol Ψ_{11} , ill. Ψ_{21} az 1., ill. a 2. huroknak az I_1 áram által létrehozott fluxusa ($I_2 = 0$). Az (5) értelmében a fluxus kifejezhető a vektorpotenciál ismeretében

$$\Psi_{21} = \oint_{l_2} A_{21} dl_2$$

alakban, ahol A_{21} az I_1 áram által létrehozott fluxus a 2. vezető kontúrja mentén. Ennek kifejezése (14) értelmében

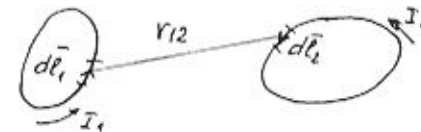
$$A_{21} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 \oint_{l_1} \frac{dl_1}{r_{12}}$$

ahol r_{12} az 1. hurok dl_1 és a 2. hurok dl_2 íveleme közötti távolság (5. ábra). Ezzel a fluxus kifejezése

$$\Psi_{21} = \oint_{l_2} \left(\frac{\mu}{4\pi} I_1 \oint_{l_1} \frac{dl_1}{r_{12}} \right) dl_2 = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}} \cdot I_1 = M \cdot I_1$$

Ebből máris adódik a kölcsönös inductivitás következő kifejezése:

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}} \quad (2.2-20)$$



2.2-5. ábra. Két vonalszerű vezető kölcsönös inductivitásának számítása

Ez a Neumann képletnek nevezett összefüggés lehetővé teszi vonalszerű vezetők kölcsönös inductivitásának számítását matematikai úton, tehát a mágneses tér meghatározása nélkül. A (20) szerinti kettős integrál többnyire csak numerikusan számítható. Az összefüggésből egyébként következik az $L_{21} = L_{12}$ reciprocitási összefüggés is.

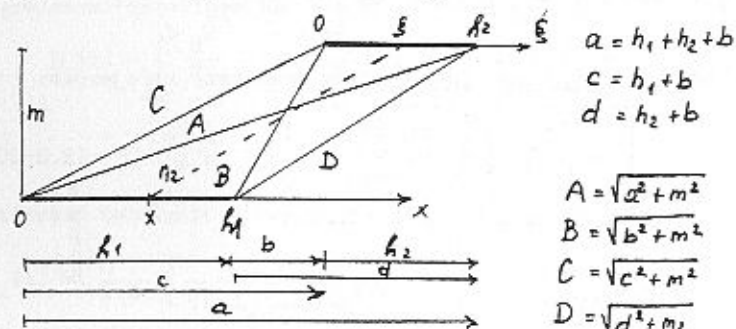
A Neumann képlet az öninduktivitás számítására közvetlenül nem alkalmas, mert ekkor nem jogos a vezetőket vonalszerűnek tekinteni. Többnyire úgy járhatunk el, hogy az l_1 görbét a vezeték középvonalával, az l_2 görbét a vezeték belső kontúrjával azonosítjuk. Ekkor (20) a vezeték külső öninduktivitását adja. A belső öninduktivitást a körkeresztmetszetű egyenes vezetőre vonatkozó $L_B = \mu l/8\pi$ összefüggéssel közelítjük (1.7-2.2. pont).

A Neumann képlet alkalmazásánál gyakran úgy járunk el, hogy mindkét görbét egyszerű geometriájú szakaszokra bontjuk, kiszámítjuk a (20) szerinti integrált egy-egy párra, majd összegezzük a részeredmé-

nyeket valamennyi párra. Figyelemreméltó, hogy a merőleges vezetékszakaszok (az integranduszban szereplő skaláris szorzat következtében) nulla "kölcsonös induktivitást" eredményeznek.

2.2-3.2. Alkalmazások

Határozzuk meg két párhuzamos vezetékdarab formális kölcsonös induktivitását. A 6. ábra elrendezését az m távolság, továbbá a h_1 , h_2 és b előjeles távolságok jellemzik. Az ábrán ezek mindegyike pozitív. Az a , c és d előjeles távolságok, továbbá az A , B , C és D nem előjeles távolságok ezekből már meghatározhatók.



2.2-6. Két irányított vezetékdarab kölcsonös induktivitása

A Neumann képletben dl_1 és dl_2 párhuzamosak, továbbá $dl_1 = dx$, $dl_2 = d\xi$ és $r_{12}^2 = (\xi + c - x)^2 + m^2$, így

$$\frac{4\pi}{\mu} M = \int_{x=0}^{a-d} \int_{\xi=0}^{a-c} \frac{d\xi dx}{[(\xi + c - x)^2 + m^2]^{1/2}} =$$

$$= \int_0^{a-d} \left[\operatorname{arsh} \frac{\xi+c-x}{m} \right]_{\xi=0}^{d-c} dx = \int_0^{a-d} \left(\operatorname{arsh} \frac{a-x}{m} + \operatorname{arsh} \frac{c-x}{m} \right) dx =$$

$$= \int_d^a \operatorname{arsh} \frac{u}{m} du + \int_{c-a+d=b}^c \operatorname{arsh} \frac{u}{m} du =$$

$$= \left[u \operatorname{arsh} \frac{u}{m} - \sqrt{u^2 + m^2} \right]_d^a + \left[u \operatorname{arsh} \frac{u}{m} - \sqrt{u^2 + m^2} \right]_b^c$$

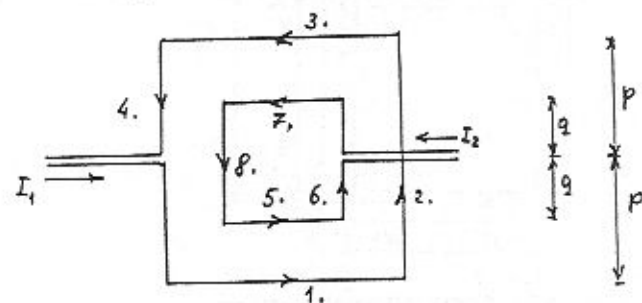
A primitív függvényeket integráltáblázatból vettük. A határokat behelyettesítve és az $\operatorname{arsh} x \equiv \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ azonosságot felhasználva, elemi átalakítások után a következő eredmény adódik:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\ln \frac{(A+a)^a (B+b)^b}{(C+c)^c (D+d)^d} - A - B + C + D \right] \quad (2.2-21)$$

Mivel $a+b = c+d$, ezért a logaritmikus kifejezés hosszúság dimenziójú.

Eredményünk egy alkalmazásaként határozzuk meg a 7. ábrán látható, közös síkban párhuzamosan elhelyezkedő, négyzet alakú hurkok kölcsonös induktivitását.

Minkét hurkot 4-4 egyenes szakaszra bonthatjuk. Ezután meghatározzuk az 1. jelű szakasz és az 5., 6., 7. és 8. jelű szakaszok kölcsonös induktivitását. Ezután ugyanígy járunk el a 2., 3. és 4. jelű szakaszokkal is, majd e 16 részeredményt összegezzük. Az 1.-6. és az 1.-8. párok kölcsonös induktivitása nulla, mert ezek merőlegesek egymásra, ezért csak 8 induktivitást kell számítanunk. A nagyfokú szimmetria miatt azonban elegendő a számítást az 1.-5. és az 1.-7. párokra elvégezni. Az alapvető paramétereket a következő táblázatba foglaltuk.



2.2-7. ábra. Négyzet alakú hurkok kölcsonös induktivitásának számítása

szakaszpár:	1. - 5.	1. - 7.
$h_1 =$	$2p$	$2p$
$h_2 =$	$2q$	$2q$
$m =$	$p - q$	$p + q$
$a =$	$p + q$	$p - q$
$b =$	$-(p + q)$	$-(p - q)$
$c =$	$p - q$	$p + q$
$d =$	$-(p - q)$	$-(p + q)$
$A = B =$	$[2(p^2 + q^2)]^{1/2}$	$[2(p^2 + q^2)]^{1/2}$
$C = D =$	$\sqrt{2} (p - q)$	$\sqrt{2} (p + q)$

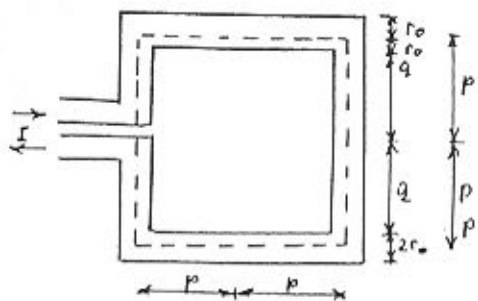
A (21)-be helyettesítve és néhány egyszerű átalakítást elvégezve a következő összefüggéshez jutunk $s = \sqrt{2(p^2 + q^2)}$ jelöléssel:

$$M = \frac{\mu_0}{\pi} \left[(p+q) \ln \frac{s+p+q}{p-q} + (p-q) \ln \frac{s+p-q}{p+q} + \right. \\ \left. - 2p \ln(\sqrt{2} + 1) - 2s + 2\sqrt{2} p \right]. \quad (2.2-22)$$

Hasonló módon végezhető el a számítás téglalap alakú hurokra, nem szimmetrikus vagy nem egysíkú helyzetre, amíg a vezetékszakaszok páronként párhuzamosak vagy merőlegesek.

Következő alkalmazásként határozzuk meg egy négyzet alakú hurok öninduktívását, ha a vezeték r_0 sugara jóval kisebb $8p$ hosszúságánál.

A külső öninduktívást a 8. ábra alapján úgy számíthatjuk, mint egy $2p$ és egy $2q = 2(p - r_0)$ oldalhosszúságú négyzetes hurok



2.2-8. Ábra. Négyzet alakú hurok öninduktívásának számítása

kölcsönös inductívását. A (22)-ben tehát $p + q = 2p - r_0 \approx 2p$, $p - q = r_0$ és $s \approx 2p$ helyettesítendő, amivel közelítőleg

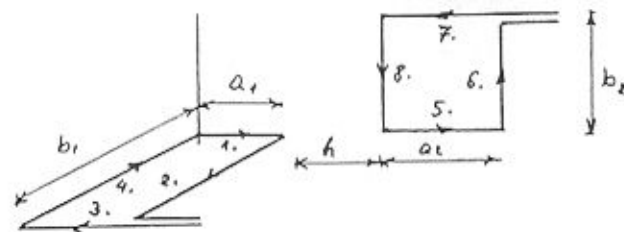
$$L_K = \frac{4\mu_0}{\pi} p \left[\ln \frac{4(\sqrt{2}-1)p}{r_0} - 2 + \sqrt{2} \right] \quad (2.2-23)$$

adódik. A belső öninduktívás $L_B = \mu \cdot 8p/8\pi$. A teljes öninduktívás

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \left[\ln \frac{(\sqrt{2}-1)h}{2r_0} - 2 + \sqrt{2} + \frac{\mu_r}{4} \right], \quad (2.2-24)$$

ahol $h = 8p$, a vezeték hossza. A (24) közelítőleg akkor is használható, ha nem négyzet alakú, hanem hasonló alakú hurokról van szó (pl. kör, nem nagyon elnyújtott négyszög vagy ellipszis).

Határozzuk meg következő példaként a 9. ábrán látható, egymásra merőleges síkú, téglalap alakú hurok kölcsönös inductívását.



2.2-9. Ábra. Merőleges síkban elhelyezkedő téglalap alakú hurok

A kölcsönös inductívás kifejezése 16 összetevőre bontható. Ebből 12 páronként merőleges szakaszból áll. Ténylegesen csak az 1.-5., 1.-7., 3.-5. és 3.-7. párhuzamos párokat kell figyelembe venni, amelyek a (21) alapján számíthatók. Ennek paraméterei a 6. és a 9. ábra összevetéséből (ügyeljünk az irányításból adódó előjelekre!):

szakaszpár	1.-5.	1.-7.	3.-5.	3.-7.
$h_1 =$	a_1	a_1	a_1	a_1
$h_2 =$	a_2	$-a_2$	$-a_2$	a_2
$b =$	h	$h+a_2$	$-h-a_1$	$-h-a_1-a_2$
$m =$	0	b_2	b_1	$\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
$a =$	a_1+a_2+h	a_1+h	$-a_2-h$	$-h$
$c =$	a_1+h	a_1+a_2+h	$-h$	$-a_2-h$
$d =$	a_2+h	h	$-a_1-a_2-h$	$-a_1-h$

A (21)-ben szereplő A, B, C és D további paraméterek számítását numerikus adatokkal célszerű végezni. Az általános formula előállításá sem jelent nehézséget.

Más típusú feladatként határozzuk meg a 4. ábrán már vázolt szolenoid öninduktívását.

A Neumann képlet alkalmazása most nagyon bonyolult integrálokra vezetne, ezért a feladatot közelítőleg fogjuk megoldani sűrű tekercselés esetére. Feltételezzük, hogy minden keresztmetszetben az indukció állandónak tekinthető, tehát megegyezik a középpontban fellépő, (17) szerinti értékével. Ez a közelítés csak kellően hosszú tekercs esetén elfogadható. A z helyen lévő menet fluxusa ekkor $\Phi(z) = B_z(z) \cdot a^2 \pi$. Az öninduktívást megadó teljes fluxust azzal a közelítéssel számítjuk, hogy a tekercs dz hosszúságú szakasza $N \cdot dz/2b$ "menetszámot" jelent:

$$\psi = \int_{-b}^b B_z(z) a^2 \pi \frac{N dz}{2b} =$$

$$= \frac{\mu N^2 a^2 \pi}{8 b^2} I \int_{-b}^b \left(\frac{b-z}{[(b-z)^2 + a^2]^{1/2}} + \frac{b+z}{[(b+z)^2 + a^2]^{1/2}} \right) dz$$

Az integrál egyszerűen számítható. Az $L = \psi/I$ induktivitásra végül

$$L = L_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2} - \frac{a}{l} \right], \quad L_0 = \frac{\mu N^2 A}{l} \quad (2.2-25)$$

adódik, ahol L_0 a homogén tér feltételezésével számított öninduktivitás (1.7-2.4. pont). Ha $a \ll l$, akkor $L \approx L_0$. A (25) jó közelítést jelent $a/l < 0,25$ esetén, egyébként túl kis értéket ad.

E példa mintájára számítható két tekercs kölcsönös induktivitása megfelelő geometria esetén (pl. ha a egyik tekercs a másik belsejében helyezkedik el).

2.2.-4. MÁGNESES ENERGIA

A vektorpotenciálnak - a φ skaláris potenciálhoz hasonlóan - energetikai tartalma is van. Ennek belátásához tekintsük a mágneses energia-sűrűség kifejezését lineáris izotrop közegben:

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2} H \operatorname{rot} A$$

Mivel $\operatorname{div}(A \times H) = H \operatorname{rot} A - A \operatorname{rot} H$, ezért a mágneses térenergia

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V A \operatorname{rot} H dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(A \times H) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V A J dV + \frac{1}{2} \oint_{A'} (A \times H) dA'$$

alakban is kifejezhető. Felhasználtuk a $\operatorname{rot} H = J$ összefüggést és a Gauss-Osztrogradszkij tételt. Ha az egész teret vizsgáljuk, akkor A' a végtelen távoli felületet jelöli, amely r^2 -tel nő. A 2.2-3.2. pontban láttuk, hogy az áramhurok mágneses térerőssége a végtelenben legalább mint $1/r^3$ csökken. A felületi integrál tehát $r^2/r^5 = 1/r^3$ nagyságrendben nullához tart. A mágneses energia mágnesesen homogén közeg esetén

$$W = \frac{1}{2} \int_V A J dV$$

(2.2-26)

alakban is kifejezhető. Ez emlékeztet az elektromos energia $\frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$ kifejezésére.

Az integrált ténylegesen csak a vezetők térfogatára kell számítani. Kis keresztmetszet esetén a k -adik vezetékre $dV_k = A'_k dl_k$, így

$$J dV_k = J A'_k dl_k = J A_k dl_k = I_k dl_k$$

ahol I_k a k -adik hurok árama és dl_k az áramsűrűséggel egyirányú iv-elem. Ezt (26)-ba helyettesítve

$$W = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_V A J dV_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{l_k} A I_k dl_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \oint_{l_k} A dl_k$$

A zárt görbe menti integrál (4) értelmében a k -adik áramhurok Ψ_k fluxusa. A mágneses energia egy további kifejezése ezért

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k \quad (2.2-27)$$

amint azt az 1.8-2. szakaszban valamivel általánosabb feltételek mellett már beláttuk.

2.2-5. VÁLTOZÓ ÁRAM MÁGNESES TERE

Vizsgáljuk meg, miként alakulnak a Maxwell egyenletek és megoldásuk kvázistacionárius közelítésben, vagyis amikor az eltolási áram elhanyagolható. Az időben változó áram eloszlását ismertnek tekintjük.

Szorítkozzunk homogén lineáris és izotrop közeg vizsgálatára. Az alapegyenletek az eltolási áram elhanyagolásával

$$\operatorname{rot} H = J, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad B = \mu H,$$

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} D = 0, \quad D = \epsilon E \quad (2.2-28)$$

A vektorok most nem csak a hely, hanem az idő függvényei is, például $H = H(r, t)$. A térfogati töltéssűrűség időben csak állandó lehet, mert $\operatorname{div} J + \partial \rho / \partial t = 0$ és $\operatorname{div} J = \operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0$. Az állandó töltéssűrűséget az időben változó folyamatok szempontjából nullának tekinthetjük.

A mágneses indukció most is előállítható egy vektorpotenciál rotációjaként, amelynek divergenciáját nullának választjuk:

$$B = \operatorname{rot} A, \quad \operatorname{div} A = 0 \quad (2.2-29)$$

Helyettesítsük ezt a II. Maxwell egyenletbe:

$$\operatorname{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} A = - \operatorname{rot} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

A zárójelben álló mennyiség előállítható egy skalár potenciál negatív

gradfenseként - grad φ alakban, vagyis az elektromos térerősség

$$E = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.2-30)$$

alakban fejezhető ki. Látható, hogy két pont közötti feszültség (az elektromos térerősségnek egy görbe menti integrálja) általában nem egyezik meg a skalár potenciálnak a két végpontban felvett értékének különbségével.

Helyettesítsük B és E kifejezését a még fel nem használt Maxwell egyenletekbe:

$$\text{rot } H = \text{rot } \frac{\text{rot } A}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot rot } A = \frac{1}{\mu} (\text{grad div } A - \Delta A) = J,$$

$$\text{div } D = \text{div } \epsilon (-\text{grad } \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}) = -\epsilon \Delta \varphi - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{div } A = 0.$$

Mivel $\text{div } A = 0$, ezért a vektor-, ill. a skalár potenciál a

$$\Delta A = -\mu J, \quad (2.2-31)$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2.2-32)$$

vektoriális Poisson, ill. skaláris Laplace egyenlet megoldásával határozható meg.

Eltekintve attól, hogy most a J áramsűrűség az időnek is függvénye, a mágneses térre vonatkozó egyenletek megegyeznek a stacionárius esetben érvényesekkel. Ennek következtében érvényes például a Biot - Savart törvény következő általánosítása (jelölések a 2. ábrán):

$$H(r, t) = \frac{1}{4\pi} I(t) \oint \frac{dl \times R^0}{R^2} \quad (2.2-33)$$

Ez azt jelenti, hogy a mágneses térerősség úgy számítható, mint ha az áram állandó lenne, csak minden időpontban más az értéke. Ez indokolja a kvázistacionárius mágneses tér elnevezést.

Ez a közelítés az áramhuroktól nagy távolságban elvileg hibás eredményt ad, hiszen azt jelenti, hogy az áram változásának hatása késleltetésmentesen, vagyis végtelenül nagy sebességgel terjed. Jellemezzük az áram időfüggvényét spektrumának f_B sávkorlátjával, ill. az ehhez tartozó $\lambda_B = c/f_B$ szabadtéri hullámhosszal. A kvázistacionárius közelítés, azaz pl. a (33) elfogadható, ha $R \ll \lambda_B = c/f_B$ teljesül. Pl. $f_B = 10$ kHz esetén (hallható hang) a feltétel $R \ll 30$ km, ami többnyire ki van elégítve, míg pl. $f_B = 3$ GHz esetén (mikrohullám) a feltétel $R \ll 0,1$ m, ami rendszerint nem teljesül.

A kvázistacionárius elektromos tér szigetelőben nem egyezik meg azzal az elektromos térrel, ami időben állandó esetben is fellepne, mert (30) értelmében E nem csak a φ skalár potenciáltól, hanem az A vektorpotenciáltól is függ, ha az időben változik. Fizikailag arról van szó, hogy a Faraday törvénye értelmében az időben változó mágneses tér elektromos teret indukál.

Az időben változó elektromomágneses térrel a 4. részben fogunk részletesebben foglalkozni.

2.3. FELADATOK

2.3-1. SZTATIKUS ÉS STACIONÁRIUS ELEKTROMÁGNESES TÉR

2.3-1.1. Egy síkondenzátor lemezei között ϵ permittivitású homogen szigetelőben állandó ρ töltéssűrűség van. Adott a lemezek közötti U feszültség is.

Az egydimenziós Poisson egyenlet megoldásával határozza meg a potenciál és az elektromos térerősség helyfüggését. Fejezze ki a tárolt energiát az energiasűrűség, ill. a potenciál felhasználásával.

2.3-1.2. Egy r_0 sugarú körlemezen a σ felületi töltéssűrűség állandó.

Határozza meg a körlemez síkjára merőleges z tengely mentén az elektromos térerősség és a potenciál helyfüggését. Ellenőrizze az eredményeket $r_0 \rightarrow \infty$ esetére.

2.3-1.3. Igazolja, hogy a

$$\varphi(x, y) = (A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx})(B_1 \cos ky + B_2 \sin ky)$$

potenciálfüggvény kielégíti a kétdimenziós Laplace egyenletet. Az A_1 , A_2 , B_1 , B_2 és k állandók tetszőlegesen. Az egyenlet linearitása következtében az ilyen megoldások szuperpozíciója is megoldás.

2.3-1.4. Az előző feladatból következik, hogy a

$$\varphi(x, y) = U e^{-kx} \cos ky$$

potenciálfüggvény kielégíti a Laplace egyenletet.

Vázzon fel a $\varphi(x, y) = U (1 + i + i^2)$ potenciálú ekvipotenciális felületeket. Határozza meg az $E_x(x, y)$ és $E_y(x, y)$ térerősség-

rendezőket. Vázolja fel az erővonalakat.

2.3-1.5. Vizsgálja meg az előző feladatban megadott potenciál-függvényre a rácsmódszer alkalmazása során fellépő hibát az $x = 1/k$, $y = 1/2k$ pontban, ha a rács távolság (a) $d = 1/k$; (b) $d = 1/10k$; (c) $d = 1/100k$. A hiba méretéke legyen a pontbeli potenciálérték és a négy szomszédos pont potenciálja számtani közepének különbsége viszonyítva a pontos értékhez. (A módszer alkalmazása során ez a hiba a teljes hibának csak egy része.)

2.3-2. STACIONÁRIUS MÁGNESES TÉR

2.3-2.1. Derékszögben meghajlított vonalszerű vezető mindkét irányban végtelen hosszúságú. A vezetőkben I állandó áram folyik.

Határozza meg a mágneses térerősséget a vezető által kifeszített síkban a szögfelező mentén a saroktól d távolságban.

2.3-2.2. Egy téglalap alakú hurok méretei $2a$ és $2b$, a hurokban állandó I áram folyik.

Határozza meg a hurok középpontjára merőleges z tengely mentén a mágneses térerősség rendezőt. Hasonlítsa ezt össze egy azonos áramú és felületű kör alakú hurok mágneses terével a hurok síkjától messze.

2.3-2.3. Két, szimmetrikusan elhelyezkedő szolenoid hossza h_1 , ill. h_2 , átmérője d_1 , ill. d_2 ($d_2 < d_1$), menetszáma N_1 , ill. N_2 .

Határozza meg a kölcsönös induktivitásukat annak feltételezésével, hogy a külső szolenoidban folyó áram által létrehozott mágneses tér a belső szolenoid keresztmetszetében állandónak tekinthető. Ellenőrizze az eredményt az egyszerűen számítható $h_2 \ll h_1$ esetre!

2.3-2.4. Egy N menetszámú tekercs hossza $2h$, külső sugara a , belső sugara b , a többretegű tekercselés egyenletes és sűrű a tekercs állandó árama I .

Határozza meg a gyűrű forgástengelye mentén a mágneses térerősség rendezőt. Igazolja, hogy $b \rightarrow a$ esetén ez átmegy az egyrétegű tekercsre vonatkozó összefüggésbe.

2.3-2.5. Két téglalap alakú keret szimmetriatengelyei megegyeznek, oldalméreteik $a_1 = a$, $b_1 = 2a$, ill. $a_2 = 3a$, $b_2 = 4a$. Határozza meg kölcsönös induktivitásukat. (Két feladat!)

2.3-2.6. Oldja meg az előző feladatot, ha a két négyzet síkja nem közös, de az elrendezés szimmetrikus.

2.3-2.7. Egy négyzet alakú keret egyik oldalfelező szimmetriásík-jában egy másik ugyanolyan méretű keret helyezkedik el, amelynek egyik oldalfelező szimmetriásíkja az első keret síkjával párhuzamos.

Határozza meg a kölcsönös induktivitást.

2.3-2.8. Téglalap alakú hurok oldalhossza a , ill. $2a$, a vezeték sugara r_0 , ahol $r_0 \ll a$.

Határozza meg a hurok öninduktivitását, ha a vezeték

(a) nem ferromágneses.

(b) relatív permeabilitása μ_r .

3. TÁVVEZETÉKEK

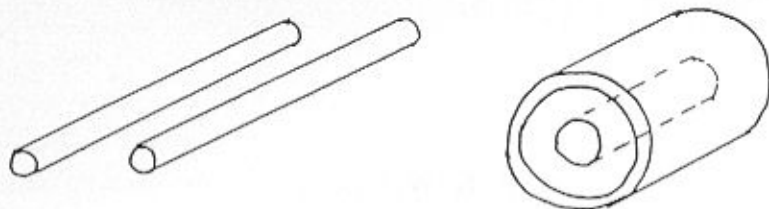
A távvezeték - vagy általánosabban: az elosztott paraméterű hálózat - feszültség- és árameloszlásának számítása a kialakuló elektromágneses tér számítását igényli. Ebben a részben azonban a távvezetékét a koncentrált paraméterű hálózat általánosításaként fogjuk tárgyalni. Ennek során feltételezzük, hogy a távvezeték paramétereit előzőleg már meghatároztuk. Rendszerint jó közelítést jelentenek az időben állandó erőter alapján számított értékek, korrekciókat a következő részben fogunk tárgyalni. Célunk többek között a hullámterjedés néhány alapvető sajátosságának megvilágítása olyan esetben, amikor csak a terjedés irányú változással kell foglalkozni és a leíró mennyiségek skalárok. Ezzel előkészítjük a 4. részt, amelyben általánosabb elektromágneses hullámjelenségekkel fogunk foglalkozni.

3.1. ALAPEGYENLETEK

3.1-1. ELOSZTOTT PARAMÉTERŰ HÁLÓZATOK

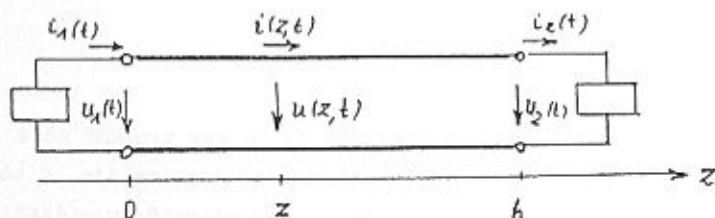
A távvezeték az elosztott paraméterű hálózatok egy tipikus és a gyakorlati alkalmazások szempontjából legfontosabb képviselője. A távvezeték többnyire vagy két párhuzamos körkeresztmetszetű vezetékből áll (kettősvezeték, Lecher vezeték), vagy koaxiális elrendezésű (koaxiális kábel, 1. ábra). Előfordulnak más alakzatok is, mint pl. a többvezetékes távvezeték. A továbbiakban a kettősvezetékkel tartjuk szem előtt, de eredményeink kábelekre is alkalmazhatók. A többvezetékes rendszerek tárgyalása kívül esik kereteinken.

A z-tengelyt a vezeték irányában vesszük fel. Többnyire úgy tekintjük az elrendezést, hogy a $z = 0$ helyen, a távvezeték elején van a generátor, a $z = h$ helyen, a távvezeték végén van a fogyasztó (2. ábra a következő oldalon). A valóságos helyzet ettől eltérő is lehet, amint ezt később látni is fogjuk.



3.1-1. Ábra. Egyszerű távvezetők: kettősvezeték és koaxiális kábel

A koncentrált paraméterű hálózati modellnél külön térrészben koncentráltan képzeljük a tárolt elektromos energiát (kondenzátor), a tárolt mágneses energiát (tekerecs), a fogyasztott és a keletkező energiát (rezisztív komponensek, mint az ellenállás, a források, stb.). A hálózat véges (esetleg megszámlálhatóan végtelen) számú feszültséggel és árammal leírható. Az elosztott paraméterű hálózati modellnél ez a szétválasztás nem lehetséges vagy nem célszerű. Minden pontban elektromos és mágneses energia van tárolva és energiaátalakulás is bekövetkezik. A legegyszerűbb esetben van egy kitüntetett irány, amely mentén a feszültség és az áram változik, a teljesítmény terjed. A továbbiakban ezt az irányt választjuk z-tengelynek (2. ábra).



3.1-2. Ábra. Kétpólusokkal lezárt távvezeték általános elrendezése. Az elosztott paraméterű hálózat általánosabb típusú is lehet

Az elosztott paraméterű hálózat alapegyenletei általánosan úgy állíthatók elő, hogy az elektromágneses tér egyenleteiből - az elrendezés geometriájának figyelembe vételével - előállítjuk az $u = u(z,t)$ feszültségre és az $i = i(z,t)$ áramra vonatkozó egyenleteket. Kevésbé általános, de gyakran áttekinthetőbb eljárás az, amikor az elrendezés egy differenciálisan rövid szakaszát koncentrált paraméterű kétkapuként kezeljük. Ezt a módszert mutatjuk be a következőkben távvezetők esetére.

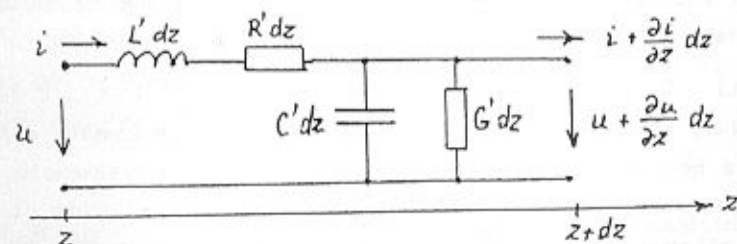
3.1-2. A TÁVIRÓ EGYENLETEK

A 3. ábrán láthatjuk a távvezeték típusú elosztott paraméterű hálózat egy dz hosszúságú szakaszának helyettesítő kapcsolását. Itt $L' = L/h$, $R' = R/h$, $C' = C/h$, ill. $G' = G/h$ a távvezeték hosszegységre vonatkoztatott inductivitása, rezisztenciája, kapacitása, ill. konduktanciája. Ezek SI-egysége H/m, Ω/m , F/m, ill. S/m. Koaxiális kábelre ezek kifejezése kis frekvencián közelítőleg

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu_r}{2} \right], \quad R' = \frac{1}{\sigma_1 A_1} + \frac{1}{\sigma_2 A_2},$$

$$C' = 2\pi \epsilon \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}, \quad G' = 2\pi \sigma_0 \frac{1}{\ln(r_2/r_1)},$$

ahol r_2 és r_1 az ér külső és a köpeny belső sugara, A_1 és A_2 az ér és a köpeny keresztmetszete, σ_1 és σ_2 a konduktivitásuk, σ_0 a szigetelőanyag konduktivitása. Hasonló kifejezések érvényesek kettősvezetésekre (1.7. fejezet). Nagy frekvencián elsősorban L' és R' kifejezése módosul (4.2-4.4. pont). Más elosztott paraméterű rendszerek (pl. menetkapacitásos tekerecs) helyettesítő kapcsolása hasonlóan konstruálható meg.



3.1-3. Ábra. A távvezeték egy dz hosszúságú szakasza koncentrált paraméterű kétkapuként tekinthető

Alkalmazzuk a dz hosszúságú szakasz helyettesítő kapcsolására Kirchhoff feszültség- és áramtörvényét. A másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolásával (3. ábra)

$$-u + L' dz \frac{\partial i}{\partial t} + R' dz i + (u + \frac{\partial u}{\partial z} dz) = 0,$$

$$-i + C' dz \frac{\partial u}{\partial t} + G' dz u + (i + \frac{\partial i}{\partial z} dz) = 0.$$

Rendezve és dz -vel egyszerűsítve kapjuk a következő két egyenletet:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} - R' i,$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C' \frac{\partial u}{\partial t} - G' u. \quad (3.1-1)$$

Differenciáljuk az első egyenletet z szerint. Helyettesítsük ebbe a második egyenlet alapján $\partial i/\partial z$ kifejezését. Ekkor a feszültségre a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L'G' + R'C') \frac{\partial u}{\partial t} + R'G' u \quad (3.1-2)$$

parciális differenciálegyenletet kapjuk. Az i -re ugyanez a differenciálegyenlet vonatkozik. Az (1) differenciálegyenlet-rendszer és a (2) differenciálegyenlet szokásos neve távíró egyenlet (telegráf egyenlet). Általános megoldása nehéz feladat (l. a 3.3. fejezetet), ezért először a szinuszos állandósult állapot vizsgálatával foglalkozunk.

A távvezeték két fontos speciális esete az ideális vagy veszteségmentes távvezeték ($R' = 0, G' = 0$) és az elosztott RC-tápvonal ($L' = 0, G' = 0$), amely integrált áramkörök modellezésénél használatos.

3.2. SZINUSZOS ÁLLAPOT VIZSGÁLATA

3.2-1. A HELMHOLTZ EGYENLET

Az időben szinuszos állandósult állapotot a feszültség és az áram komplex alakjával írjuk le:

$$u(z, t) = \operatorname{Re} \{U(z) e^{j\omega t}\}, \quad i(z, t) = \operatorname{Re} \{I(z) e^{j\omega t}\}. \quad (3.2-1)$$

Itt $U = U(z)$, ill. $I = I(z)$ a feszültség, ill. az áram komplex amplitúdója a z helyen, ω a forrás által meghatározott körfrekvencia. Az időbeli differenciálás $j\omega$ -val végzett szorzásra egyszerűsödik, a Re műveletet elhagyhatjuk és $e^{j\omega t}$ -vel egyszerűsíthetünk. A (3.1-1) távíró egyenlet a következő két közönséges differenciálegyenletre egyszerűsödik:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dz} = -(R' + j\omega L') I, \\ \frac{dI}{dz} = -(G' + j\omega C') U. \end{cases} \quad (3.2-2)$$

Fejezzük ki az első egyenletből az áramot:

$$I = - \frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{dU}{dz}. \quad (3.2-3)$$

Helyettesítsük ezt a második egyenletbe:

$$- \frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d^2 U}{dz^2} = -(G' + j\omega C') U.$$

Vezessük be a γ terjedési együtthatót (értelmezését később tárgyaljuk)

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}. \quad (3.2-4)$$

Ezzel a feszültségre a következő egyenlet adódik:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0. \quad (3.2-5)$$

Ez az ún. Helmholtz egyenlet a (3.1-2) távíró egyenlet szinuszos időbeli változásra vonatkozó alakja. Az $I = I(z)$ komplex áramfüggvényre is a Helmholtz egyenlet vonatkozik.

Az általánosabb elosztott paraméterű hálózatok alapegyenletei szinuszos időbeli változás esetén felírhatók

$$\frac{dU}{dz} = -Z' I, \quad \frac{dI}{dz} = -Y' U \quad (3.2-6)$$

alakban is, ahol $Z' dz$, ill. $Y' dz$ a helyettesítő kapcsolás dz hosszúságú szakaszának hosszági impedanciája, ill. keresztági admittanciája.

A terjedési együttható kifejezése ezekkel $\gamma = \sqrt{Z' \cdot Y'}$. Általános időbeli változás esetén nem lehet ilyen egyszerűen megadni az alapegyenleteket, még az sem biztos, hogy másodrendű differenciálegyenlettel írhatók le. A továbbiakban csak a távvezeték típusú elosztott paraméterű hálózatokkal foglalkozunk.

3.2-2. AZ ÁLTALÁNOS MEGOLDÁS

Az (5) közönséges másodrendű differenciálegyenlet két sajátértéke $+\gamma$ és $-\gamma$. Az általános megoldás ennek megfelelően

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z}, \quad (3.2-7)$$

ahol U_1^+ és U_1^- egyelőre tetszőleges állandók, amelyek értéke a peremfeltételek ismeretében határozható meg (pl. adott a feszültség a vezeték elején és végén; részletesebben l. később). A $z = 0$ helyen a két összetevő értéke U_1^+ , ill. U_1^- . Az áramfüggvény kifejezése (3) értelmében

$$I = - \frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{dU}{dz} = \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U_1^+ e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U_1^- e^{+\gamma z}.$$

Vezessük be a $\sqrt{R' + j\omega L'}/\gamma$ mennyiségre a hullámimpedancia (karakterisztikus impedancia) elnevezést és a Z_0 jelölést (fizikai tartalmát

később fogjuk látni):

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (3.2-8)$$

Ezzel az áramfüggvény általános alakja

$$I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma z} \quad (3.2-9)$$

Az áramfüggvény tehát ugyanolyan alakú, mint a feszültségfüggvény, csak az exponenciális függvények együtthatói mások. A $Z(z) = U(z)/I(z)$ impedancia általában a z koordináta függvénye.

3.2-3. A MEGOLDÁS ÉRTELMEZÉSE

Az előzőekben kapott megoldás értelmezéséhez vezessük be a γ terjedési együttható valós, ill. képzetes részére a

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3.2-10)$$

Jelölést, ahol α a csillapítási együttható és β a fázisegyüttható (az elnevezések értelmét mindjárt látni fogjuk). Ezek mindegyike reciproktávolság dimenziójú és pl. $m^{-1} = 1/m$ egységben fejezhető ki. Ezzel a feszültségfüggvény részletesebb alakja

$$u(z,t) = \operatorname{Re} \{ U(z) e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ U_1^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} + U_1^- e^{+\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \} \quad (3.2-11)$$

Vezessük be a v fázissebességet, amelynek definíciója

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (3.2-12)$$

A feszültségfüggvény egy más általános alakja ezzel

$$u(z,t) = \operatorname{Re} \{ U_1^+ e^{-\alpha z} e^{j\omega(t - z/v)} + U_1^- e^{+\alpha z} e^{j\omega(t + z/v)} \} \quad (3.2-13)$$

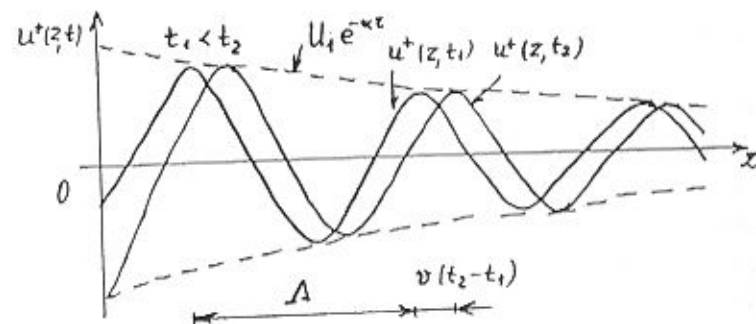
Vizsgáljuk először azt a speciális esetet, amikor $U_1^- = 0$ és U_1^+ valós értékű. Ekkor a feszültségfüggvény kifejezése

$$u^+(z,t) = U_1^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) = U_1^+ e^{-\alpha z} \cos \omega(t - \frac{z}{v}) \quad (3.2-14)$$

Az $e^{-\alpha z}$ tényező azt jelenti, hogy a feszültség amplitúdója z függvé-

nyében exponenciálisan csökken. A csökkenés mértékét fejezi ki az α (térbeli) csillapítási együttható. A (14) első alakjából látható, hogy a feszültség fázisban késik a $z = 0$ helyen felvett fázishoz képest, a fáziskülönbség βz , ezért érthető β -ra a fázisegyüttható elnevezés. A (14) második alakjából látható, hogy az $\omega(t - z/v)$ fázis v sebességgel terjed a z -tengely pozitív irányában, ezért v a fázissebesség. Ezel szerint a (14) egy, a z -tengely pozitív irányában terjedő, csillapított szinuszos feszültséget (feszültség hullámot) ír le. A (9)-ből látható, hogy $U_1^- = 0$ esetén az áramfüggvény hasonló alakú, fázisa Z_0 szögével kisebb a feszültségfüggvény fázisánál.

Az 1. ábra mutatja a pozitív z -tengely irányában haladó csillapított feszültség hullámot z függvényében két időpontra. Ebből jól látható, hogy a feszültségeloszlás v sebességgel terjed a pozitív z -tengely irányában.



3.2-1. ábra. A z -tengely pozitív irányában terjedő csillapított feszültség hullám: a feszültség térbeli változása két időpontra

A vezetéken mért Λ hullámhossz a $\beta \Lambda = 2\pi$ egyenletből

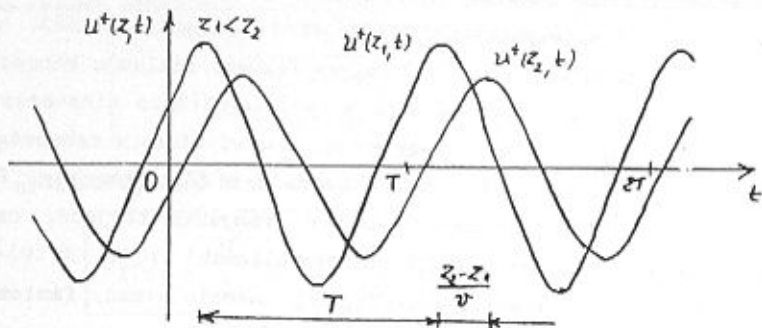
$$\Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \frac{v}{\omega} = \frac{v}{f} \quad (3.2-15)$$

A λ jelet a szabadtéri hullámhosszra tartjuk fenn:

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (3.2-16)$$

Ez tehát a frekvenciával egyenértékű jellemző.

A 2. ábrán a feszültség időbeli változását láthatjuk. Ez természetesen szinuszos, az amplitúdó és a kezdőfázis a z függvénye. Az időbeli periodicitást $T = 1/f = 2\pi/\omega$ jellemzi.



3.2-2. Ábra. A z-tengely pozitív irányában terjedő csillapított feszültség-hullám: a feszültség időbeli változása két helyen

Ezután már könnyen értelmezhető a (13) általános megoldás második tagja is:

$$u^-(z,t) = U_1^- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) = U_1^- e^{+\alpha z} \cos \omega(t + \frac{z}{v}) \quad (3.2-17)$$

Ez a z-tengely negatív irányában terjed v sebességgel, saját irányában (csökkenő z-k felé) exponenciálisan csillapodik.

Az általános megoldás nem egyszerűen (14) és (17) összege, mert U_1^+ és U_1^- legfeljebb egyike választható valósnak.

Hasonló módon értelmezhető a (9) alapján előállítható áramfüggvény két összetevője is.

Az egy irányban terjedő feszültség-hullám és áram-hullám komplex amplitúdójának viszonya tetszőleges z helyen

$$\frac{U^+(z)}{I^+(z)} = \frac{U_1^+ e^{-\gamma z}}{(U_1^+/Z_0) e^{-\gamma z}} = Z_0, \quad \frac{U^-(z)}{I^-(z)} = \frac{U_1^- e^{+\gamma z}}{-(U_1^-/Z_0) e^{+\gamma z}} = -Z_0$$

Ezek szerint a z-tengely pozitív, ill. negatív irányában terjedő feszültség-hullám és áram-hullám komplex amplitúdójának hányadosa minden z helyen $+Z_0$, ill. $-Z_0$:

$$Z_0 = \begin{cases} U^+(z)/I^+(z), \\ -U^-(z)/I^-(z). \end{cases} \quad (3.2-18)$$

Végeredményben a vezetéken kialakuló feszültség és áram szinuszos időbeli változás esetén úgy írható le, mint két, ellentétes irányban a fázissebességgel haladó és a terjedés irányában csillapított hullám szuperpozíciója.

Feladatunk még az U_1^+ és U_1^- komplex amplitúdók meghatározása a vezeték lezárásainak ismeretében (3.2-5. és 6. szakasz).

3.2-4. A VEZETÉKPARAMÉTEREK

Az előzőkből látható, hogy a vezetéken kialakuló feszültség- és árameloszlás lényegesen függ a γ terjedési együtthatótól, ahol

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = \alpha + j\frac{\omega}{v} = \alpha + j\frac{2\pi}{\lambda} = \\ &= \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \end{aligned} \quad (3.2-19)$$

Az α csillapítási együttható és a β fázisegyüttható (a v fázissebesség, a λ hullámhossz) bonyolult módon függ a vezeték R' , L' , G' és C' paramétereitől és az ω körfrekvenciától. Érdemes ezért speciális eseteket megvizsgálni, amikor ez a függés áttekinthetőbb.

3.2-4.1. Ideális vezeték

Tekintsük először azt az esetet, amikor a frekvencia olyan nagy, hogy $\omega L' \gg R'$ és $\omega C' \gg G'$ teljesül. Ez $f = 50$ Hz frekvencián ritkán igaz, mert energetikai szabadvezetékre $R'/\omega L' \approx 0,3$ és $G'/\omega C' \approx 0,03$, energetikai kábelre $R'/\omega L' \approx 4$ és $G'/\omega C' \approx 0$. Ezzel szemben $f = 5$ kHz frekvencián távbeszélő vezetéken $R'/\omega L' \approx 0,08$ és $G'/\omega C' \approx 0,003$, tehát a feltétel ki van elégítve. Ekkor a vezeték veszteségeit a feszültség- és az árameloszlás szempontjából elhanyagolhatjuk, ami az

$$R' = 0, \quad G' = 0 \quad (3.2-20)$$

közelítést jelenti. Az ilyen vezetéket ideálisnak nevezzük.

Az ideális vezeték terjedési együtthatója (19) értelmében

$$\gamma = \sqrt{j\omega L' \cdot j\omega C'} = j\omega \sqrt{L'C'} \quad (3.2-21)$$

Ebből következik, hogy ideális vezetékre

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L'C'}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (3.2-22)$$

A csillapítási együttható tehát nulla, ami a veszteségek elhanyagolása miatt várható is volt. A fázissebesség független a frekvenciától (diszperziómentesség). Megjegyezzük, hogy a

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} \quad (3.2-23)$$

összefüggéssel definiált csoportsebesség ideális vezetékre megegyezik a fázissebességgel, tehát ugyancsak frekvenciafüggetlen.

A feszültségfüggvény kifejezése (13) értelmében

$$u(z,t) = \text{Re} \{ U_1^+ e^{j\omega(t - z/v)} + U_1^- e^{j\omega(t + z/v)} \} \quad (3.2-24)$$

Ebből látható, hogy mind a pozitív, mind a negatív irányban terjedő összetevő csillapítatlanul terjed a vezeték mentén.

A kettősvezeték hosszegységre vonatkoztatott külső öninduktivitásának és kapacitásának kifejezése (1.7. fejezet)

$$L' = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}, \quad C' = \frac{\pi \epsilon}{\ln(d/r_0)} \quad (3.2-25)$$

A koaxiális kábel megfelelő paraméterei

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_2/r_1)} \quad (3.2-26)$$

Ebből következően mindkét elrendezésre

$$L'C' = \epsilon \mu = (\epsilon_0 \mu_0) (\epsilon_r \mu_r) = (1/c^2) \epsilon_r \mu_r$$

Itt $\mu_r = 1$ vehető. Légszigetelésű vezetékre $\epsilon_r = 1$, egyébként $\epsilon_r > 1$.

A fázissebesség kifejezése

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (3.2-27)$$

A (vezetéken mért) hullámhossz (15) értelmében $\Lambda = v/f$, vagyis

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (3.2-28)$$

Ezek szerint légszigetelésű ideális kettősvezetéken a fázissebesség megegyezik a fény vákuumbeli terjedési sebességével, a hullámhossz a szabadtéri hullámhosszal. Más szigetelés esetén $v < c$ és $\Lambda < \lambda$. Ezek az összefüggések nagyságrendileg más elrendezésekre is érvényesek.

A ideális vezeték hullámimpedanciája (8) értelmében a vezetékparaméterektől $Z_0 = \sqrt{j\omega L' / j\omega C'}$ alakban függ, vagyis

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (3.2-29)$$

A hullámimpedancia tehát valós és frekvenciafüggetlen, ezért gyakran hullámellenállásnak is nevezik.

3.2-4.2. Kisveszteségű vezeték

Vizsgáljuk meg, miként befolyásolják a vezeték veszteségei a vezeték paramétereit. Feltételezzük, hogy $R' \ll \omega L'$ és $G' \ll \omega C'$, tehát $(R'/\omega L')^2$ és $(G'/\omega C')^2$ - sőt további közelítésként $G'/\omega C'$ is - elhanyagolható az 1 mellett. Ez már hangfrekvencián is többnyire elfogadható közelítést

Néhány jellegzetes távvezeték paraméterei
(tájékoztató adatok)

	energetikai légvezeték	kábel	távbeszélő vezeték	rádiófrekv. vezeték	
$f =$	50	50	$5 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	Hz
$ Z_0 =$	346	52,4	578	751	Ω
$\text{arc } Z_0 =$	$-1,9^\circ$	-38°	-2°	$-0,0035^\circ$	
$\alpha =$	0,036	6,03	4,47	79,7	$10^{-3}/\text{km}$
$\beta =$	0,972	7,78	109	2173	$10^{-3}/\text{km}$
$\Lambda =$	5778	807	57,5	289	km
$v =$	289	40,4	288	2,90	10^3 km/s
$R' =$	0,025	0,5	5	60	Ω/km
$L' =$	1,2	0,4	2	2,6	mH/km
$G' =$	0,1	0,0	0,5	106	$\mu\text{S}/\text{km}$
$C' =$	10	600	6	4,6	nF/km
$\omega L' =$	0,376	0,126	62,8	1630	Ω/km
$\omega C' =$	3,14	62,8	188	2900	$\mu\text{S}/\text{km}$
$R'/\omega L' =$	0,063	3,98	0,08	0,04	
$G'/\omega C' =$	0,004	0,00	0,003	0,04	

A táblázatból látható, hogy G' gyakorlatilag mindig elhanyagolható. Már 5 kHz frekvencián (hangfrekvencia) sem követünk el nagy hibát, ha a vezeték ideálisnak tekintjük a feszültség- és az árameloszlás szempontjából. A veszteségek számításakor a vezeték természetesen nem tekinthető ideálisnak.

50 Hz frekvencián a vezeték nem tekinthető ideálisnak, de még kis veszteségűnek sem. Ezen a frekvencián a vezeték a hullámhosszhoz képest olyan rövid, hogy koncentrált paraméterű hálózattal is jól modellezhető. nincs szükség elosztott paraméterű modell bevezetésére

Jelent. A terjedési együttható kifejezése ekkor

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \sqrt{j\omega L'} \sqrt{1 + \frac{R'}{j\omega L'}} \sqrt{j\omega C'} \sqrt{1 + \frac{G'}{j\omega C'}} \approx$$

$$\approx j\omega \sqrt{L'C'} \left(1 + \frac{R'}{j2\omega L'}\right) \left(1 + \frac{G'}{j2\omega C'}\right) \approx j\omega \sqrt{L'C'} \left(1 + \frac{R'}{j2\omega L'} + \frac{G'}{j2\omega C'}\right).$$

A valós és képzetes részek szétválasztásával kapjuk, hogy

$$\alpha \approx \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \approx \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} \quad , \quad \beta \approx \omega \sqrt{L'C'} \quad (3.2-30)$$

Ebből következik, hogy $v_g \approx v \approx 1/\sqrt{L'C'}$. Ebben a közelítésben tehát a fázisgyüttható, a csoportsebesség és fázissebesség megegyezik az ideális vezeték megfelelő értékeivel. A csillapítási együttható nem nulla, de a frekvenciától független.

A hullámimpedancia közelítő kifejezése hasonlóan adódik:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \sqrt{\frac{1 + R'/j\omega L'}{1 + G'/j\omega C'}} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left(1 + \frac{R'}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{G'}{j2\omega C'}\right).$$

A hullámimpedancia ebben a közelítésben tehát

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} - j \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left(\frac{R'}{2\omega L'} - \frac{G'}{2\omega C'}\right) \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} - j \frac{R'}{2\omega \sqrt{L'C'}} \quad (3.2-31)$$

A hullámimpedancia valós része megegyezik az ideális vezeték hullámellenállásával, képzetes része többnyire negatív, tehát a hullámimpedancia kapacitív jellegű.

3.2-5. A REFLEXIÓS TÉNYEZŐ

A vezetéken kialakuló feszültség, ill. áram komplex amplitúdójának kifejezése (7) és (9) értelmében

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z}, \quad I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma z},$$

ahol U_1^+ , ill. U_1^- a z-tengely pozitív, ill. negatív irányában terjedő feszültség hullám amplitúdója a vezeték elején ($z = 0$). Célunk e két állandó kifejezése az adottak tekinthető mennyiségekkel.

Tekintsük adottnak a $Z_2 = Z$ lezáró impedanciát. A komplex alakú Ohm törvény értelmében (3. ábra)

$$Z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U(h)}{I(h)} = \frac{U_1^+ e^{-\gamma h} + U_1^- e^{+\gamma h}}{\frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma h} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma h}} = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-},$$

ahol $U_2^+ = U_1^+ e^{-\gamma h}$, ill. $U_2^- = U_1^- e^{+\gamma h}$ a z-tengely pozitív, ill. negatív irányában terjedő feszültség hullám amplitúdója a $z = h$ helyen, a vezeték végén, amely a Z impedanciájú kétpólussal van lezárva. Ezt úgy foghatjuk fel, hogy a lezárásra beesik egy U_2^+ , ill. egy U_2^+ / Z_0 amplitúdójú feszültség hullám, ill. áram hullám, és ott visszaverődik egy U_2^- , ill. egy $-U_2^- / Z_0$ amplitúdójú feszültség hullám, ill. áram hullám.

Vezessük be a visszavert és a beeső feszültség hullámok a vezeték végén fellépő amplitúdójának viszonyára az

$$r = \frac{U_2^-}{U_2^+} \quad (3.2-32)$$

reflexiós tényezőt (visszaverődési tényezőt). Ennek értéke általában komplex, $|r| = |U_2^-| / |U_2^+|$, $\text{arc } r = \text{arc } U_2^- - \text{arc } U_2^+$. Az $I(z)$ kifejezéséből látható, hogy az áramra vonatkozó reflexiós tényező $I_2^- / I_2^+ = -r$, ezért erre a mennyiségre nem használnak külön jelet.

Helyettesítsük az $U_2^- = r U_2^+$ alakot Z kifejezésébe:

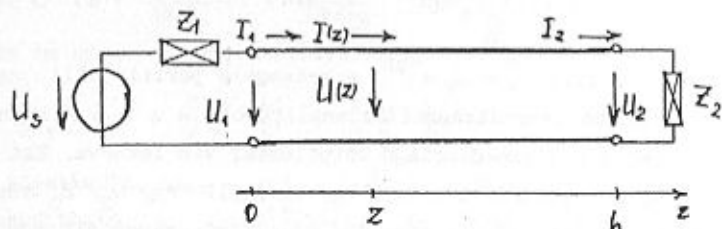
$$Z = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-} = Z_0 \frac{U_2^+ + r U_2^+}{U_2^+ - r U_2^+} = Z_0 \frac{1+r}{1-r}.$$

Ebből a reflexiós tényező kifejezhető a Z_0 hullámimpedancia és a Z lezáró impedancia ismeretében:

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (3.2-33)$$

Érdekes speciális esetet jelent, ha $Z = Z_0$, vagyis ha a vezeték hullámimpedanciájával zárjuk le. Ekkor $r = 0$, vagyis nem lép fel visszaverődés az illesztés helyén. (A reflexiómentes illesztést ne tévesszük össze a teljesítmény illesztéssel!) A reflexió kiküszöbölése azért is előnyös, mert ilyen módon kiküszöböljük a visszavert áram hullám által okozott veszteséget. Az illesztés általában csak adott frekvencián (közelítőleg annak egy környezetében) valósítható meg. Az

ideálisnak tekinthető vezeték hullámimpedanciája a frekvenciától független, ezért arra az illesztés - alkalmas ellenállással - elméletileg frekvenciafüggetlenül létrehozható. Energetikai távvezetéknel nem szokás illesztést biztosítani.



3.2-3. ábra. Primer oldalán generátorral, szekunder oldalán immittanciával lezárt távvezeték szinuszos állandósult állapotban

Az U_2^+ és U_2^- állandókkal a feszültségeloszlás felírható

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z} = U_2^+ e^{\gamma(h-z)} + U_2^- e^{-\gamma(h-z)}$$

alakban. A reflexió tényező bevezetésével a feszültség és az áram komplex csúcértékének helyfüggvénye a következő alakot ölti:

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{\gamma(h-z)} + r e^{-\gamma(h-z)} \right],$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left[e^{\gamma(h-z)} - r e^{-\gamma(h-z)} \right]. \quad (3.2-34)$$

Az ebben szereplő U_2^+ állandó egy másik peremfeltételből határozható meg. Ha pl. ismert a lezáráson fellépő feszültség U_2 komplex amplitúdója, akkor a $z = h$ helyettesítéssel adódó

$$U_2 = U_2^+ \left[1 + r \right] \quad (3.2-35)$$

egyenletből $U_2^+ = U_2 / (1+r)$ kifejezhető. Ezzel a feszültségeloszlás

$$U(z) = \frac{U_2}{1+r} \left[e^{\gamma(h-z)} + r e^{-\gamma(h-z)} \right]. \quad (3.2-36)$$

Hasonló az árameloszlás kifejezése is. Ha viszont a vezeték elején fellépő U_1 feszültség ismert, akkor az $U_1 = U_2^+ \left[e^{\gamma h} + r e^{-\gamma h} \right]$ egyenletből fejezhető ki U_2^+ . Tekintsük végül azt az esetet, amikor a primer oldali generátor U_s forrásfeszültsége és Z_1 belső impedanciája adott (3. ábra). Ekkor az

$$U_s = U_1 + Z_1 I_1 = U_2^+ \left[e^{\gamma h} + r e^{-\gamma h} \right] + Z_1 \frac{U_2^+}{Z_0} \left[e^{\gamma h} - r e^{-\gamma h} \right] \quad (3.2-37)$$

egyenletből fejezhető ki az ismeretlen U_2^+ állandó. Előfordulnak más típusú peremfeltételek is.

Szokásos az U és I komplex amplitúdókat a vezeték végétől mért $x = h - z$ koordináta függvényeként is kifejezni.

3.2-6. FESZÜLTÉG- ÉS ÁRAMELOSZLÁS IDEÁLIS VEZETÉKEN

Vizsgáljuk meg részletesebben a feszültség és az áram eloszlását ideális vezetéken, amikor $\gamma = j\beta = j\omega/v$, ahol a $v = 1/\sqrt{L'C}$ fázissebesség és a $Z_0 = \sqrt{L'/C}$ hullámimpedancia frekvenciafüggetlen.

3.2-6.1. Lezárás hullámellenállással

Tekintsük először a reflexiómentes lezárás esetét, amikor a lezáró impedancia egy ellenállás: $Z = Z_0 = \sqrt{L'/C}$. A (33) értelmében ekkor a reflexió tényező $r = 0$, tehát $U_2^- = 0$ és így $U_1^- = 0$. Ekkor (7) szerint

$$U(z) = U_1 e^{-j\omega z/v}, \quad I(z) = \frac{U_1}{Z_0} e^{-j\omega z/v}. \quad (3.2-38)$$

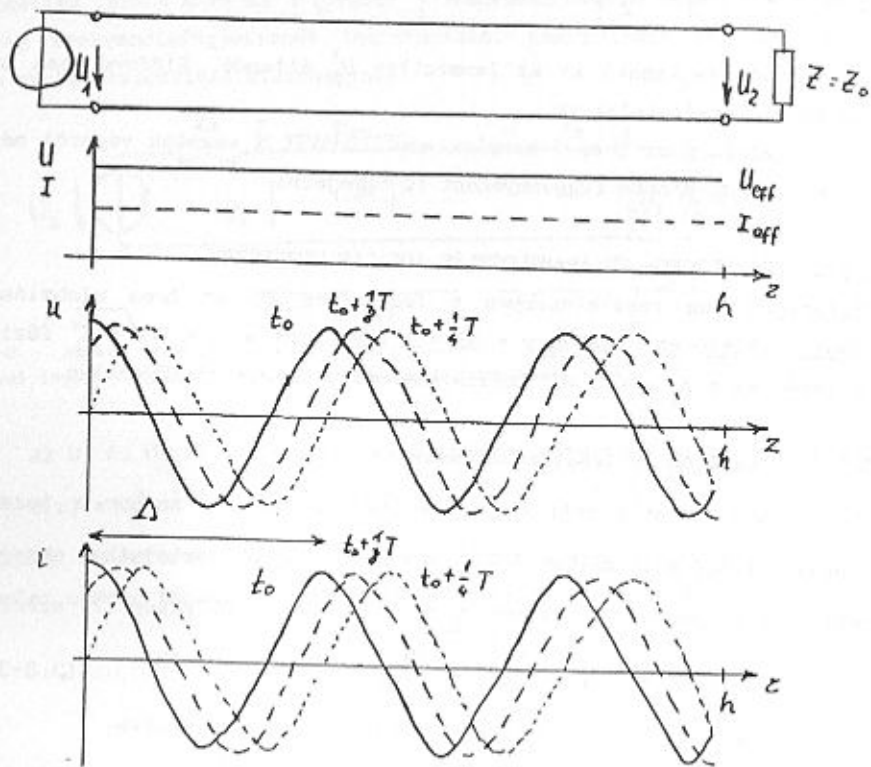
A vezeték elején fellépő U_1 feszültséget valóságnak választva

$$u(z,t) = U_1 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad i(z,t) = \frac{U_1}{Z_0} \cos \omega \left(t - \frac{z}{v} \right). \quad (3.2-39)$$

A vezetéken tehát ekkor csillapítatlan szinuszos feszültség- és áramhullám terjed a z -tengely pozitív irányában, amelyek fázisban vannak. Minden időpontban a feszültség és az áram eloszlása a vezeték mentén ugyancsak szinuszos. Az effektív értéket mérő műszerek kitérése a vezeték minden pontjában mindenütt ugyanakkora (4. ábra a következő oldalon).

2.3-6.2. Lezárás reaktanciával

Tekintsük most azt az esetet, amikor a vezeték vége olyan kétpólussal van lezárva, amely nem vesz fel hatásos teljesítményt. A legegyszerűbb ilyen lezárás a szakadás és a rövidzár, de ez a helyzet akkor is, ha a lezáró kétpólus impedanciája képzetes. Mivel a vezeték is veszteségmentes, ezért ilyenkor hatásos teljesítmény nem áramlik.



3.2-4. ábra. A feszültség és az áram effektív értékek, ill. időfüggvényének eloszlása az illesztve lezárt ($Z = Z_0$) ideális vezetéken

Tekintsük először a szabad végű vezetékét. Ekkor $Z = \infty$ és $r = 1$.

A komplex csúcserőtekek eloszlása (36) értelmében

$$U(z) = \frac{U_2}{2} \left[e^{j\beta(h-z)} + e^{-j\beta(h-z)} \right] = U_2 \cos \beta(h-z), \quad (3.2-40)$$

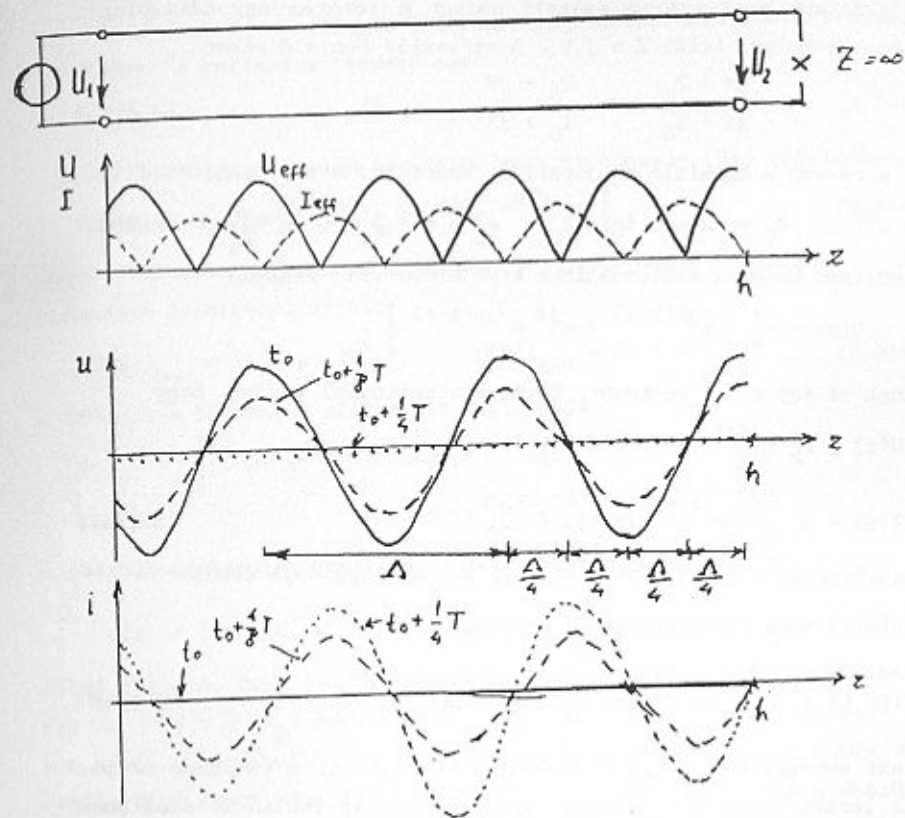
$$I(z) = \frac{U_2}{2Z_0} \left[e^{j\beta(h-z)} - e^{-j\beta(h-z)} \right] = j \frac{U_2}{Z_0} \sin \beta(h-z).$$

A feszültség és az áram mint a hely és az idő függvénye

$$u(z, t) = U_2 \cos \beta(h-z) \cos \omega t, \quad (3.2-41)$$

$$i(z, t) = \frac{U_2}{Z_0} \sin \beta(h-z) \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Minden időpontban a feszültség és az áram eloszlása a vezetéken szinuszos, de ezek most állóhullámok (pl. a nullahelyek nem mozdulnak el).



3.2-5. ábra. A feszültség és az áram effektív értékek, ill. időfüggvényének eloszlása a szakadással lezárt ideális távvezetéken

Az effektív értéket mérő műszerek a különböző helyeken más-mást mutatnak (5. ábra). A feszültség és az áram térben negyed hullámhosszal, időben negyed periódussal el van tolódva egymáshoz képest. Ahol a feszültségnek csomópontja van, ott van az áramnak maximuma vagy minimuma és viszont. Abban a pillanatban, amikor a feszültség időben maximális vagy minimális, az áram a vezeték egész hosszában nulla és viszont. A vezetéken energiaszállítás nincs, csak teljesítménylengés a $\lambda/4$ hosszúságú szakaszokon belül.

Teljesen hasonló a helyzet a rövidre zárt végű vezetéken. Ekkor $Z = 0$, és így $r = -1$. Most is állóhullámok alakulnak ki, csak ekkor a vezeték végén a feszültségnek van csomópontja és az áramnak maximuma vagy minimuma. A részletes számítást az Olvasóra bizzuk. (Felhasználhatók a következő eredmények is $X = 0$ helyettesítéssel.)

Tekintsük most azt az esetet, amikor a lezárás egy tetszőleges reaktáns kétpólus, tehát $Z = jX$. A reflexiós tényező ekkor

$$r = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = -\frac{Z_0 - jX}{Z_0 + jX} \quad (3.2-42)$$

Mivel a nevező a számláló konjugáltja, ezért $|r| = 1$, tehát

$$r = e^{j\delta}; \quad \delta_C = -2 \arctg \frac{\omega L}{Z_0}, \quad \delta_L = \pi - 2 \arctg \frac{\omega L}{Z_0} \quad (3.2-43)$$

A feszültség komplex amplitúdójának kifejezése (34) alapján

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{j\beta(h-z)} + e^{j\delta} e^{-j\beta(h-z)} \right]$$

Emeljünk ki egy $e^{j\delta/2}$ tényezőt. Elemi átalakítással kapjuk, hogy

$$U(z) = U_2^+ e^{j\delta/2} \cos \beta \left(h-z - \frac{\delta}{2\beta} \right),$$

$$I(z) = j \frac{U_2^+}{Z_0} e^{j\delta/2} \sin \beta \left(h-z - \frac{\delta}{2\beta} \right) \quad (3.2-44)$$

A feszültség és az áram mint a hely és az idő függvénye ebből

$$u(z, t) = U_2^+ \cos \beta \left(h-z - \frac{\delta}{2\beta} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\delta}{2} \right),$$

$$i(z, t) = \frac{U_2^+}{Z_0} \sin \beta \left(h-z - \frac{\delta}{2\beta} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.2-45)$$

Mint azt energetikai megfontolásokkal előre láttuk: a reaktáns kétpólussal lezárt ideális vezetéken ugyanúgy csillapítatlan állóhullámok alakulnak ki, mint pl. a szakadással lezárt vezetéken. A vezeték végén azonban sem a feszültségnek, sem az áramnak nincs csomópontja, hanem

$$U_2 = U_2^+ \cos \delta, \quad I_2 = -\frac{U_2^+}{Z_0} \sin \delta \quad (3.2-46)$$

Induktív lezáró reaktancia esetén $X > 0$ és $\arctg \delta > 0$, az áram a vezeték végén negyed periódussal késik a feszültséghez képest. Kapacitív lezáró reaktancia esetén a helyzet ennek fordítottja. A vezeték más pontjaiban a feszültség és az áram fáziskülönbsége mindig negyed periódus, de a "siet" és a "késik" félhullámhosszanként felcserélődik (1. később a 8. ábrát is).

A kapacitív reaktanciával lezárt vezetéken a feszültség és az áram eloszlása olyan, mint a szakadással lezárt vezetéken, amelynek vége a $z = h + |\delta_C|/2\beta$ helyen van. Az induktív reaktanciával lezárt vezetéken fellépő eloszlások olyanok, mint egy rövidrezárt végű vezetéken, amelynek vége a $z = h + (\pi - \delta_L)/2\beta$ helyen van.

2.3-6.3. Lezárás általános impedanciával

Tekintsük most a tetszőleges Z impedanciájú kétpólussal lezárt ideális vezetékét. A reflexiós tényező most

$$r = \rho e^{j\delta}, \quad \rho = |r| \leq 1 \quad (3.2-47)$$

A feszültség komplex amplitúdójának kifejezése (34) értelmében

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{j\beta(h-z)} + \rho e^{j\delta} e^{-j\beta(h-z)} \right] \quad (3.2-48)$$

Ebből látható, hogy a feszültség amplitúdójának legnagyobb, ill. legkisebb lehetséges értéke

$$|U(z)|_{\max} = (1 + \rho) |U_2^+|, \quad |U(z)|_{\min} = (1 - \rho) |U_2^+| \quad (3.2-49)$$

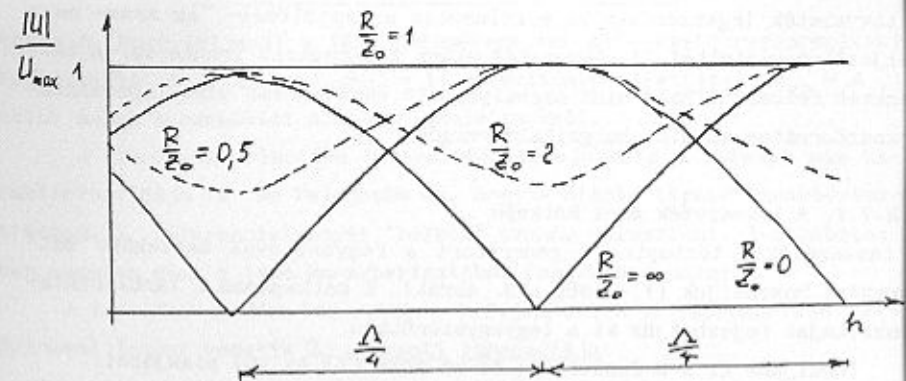
A (48)-at a következő alakban is felírhatjuk:

$$U(z) = U_2^+ \left[(1-\rho) e^{j\beta(h-z)} + \rho e^{j\delta/2} e^{j\beta(h-z)-j\delta/2} + \rho e^{-j\delta/2} e^{-j\beta(h-z)+j\delta/2} \right]$$

A feszültség komplex amplitúdójának eloszlása tehát

$$U(z) = (1-\rho) U_2^+ e^{j\beta(h-z)} + 2\rho U_2^+ e^{j\delta/2} \cos \beta \left(h-z - \frac{\delta}{2\beta} \right) \quad (3.2-50)$$

Ebből látható, hogy fellép egy $(1-\rho) |U_2^+|$ amplitúdójú haladóhullám és egy $2\rho |U_2^+| = 2 |U_2^-|$ amplitúdójú állóhullám. Ha $\rho = 0$ (illesztés), akkor csak haladóhullám lép fel, ha $\rho = 1$ (rövidzár, szakadás vagy reaktancia) akkor csak állóhullám van. A 6. ábrán láthatjuk a feszültség amplitúdójának eloszlását néhány lezáró ellenállásra ($Z = R$). A



3.2-6. Ábra. A feszültség amplitúdójának eloszlása ellenállással lezárt ideális vezetéken

feszültség az adott helyen az idő függvényében ezzel az amplitúdóval szinuszosan változik. Ugyanezek a görbék az áram amplitúdójának eloszlását is megadják, ha R/Z_0 helyére Z_0/R -et írunk.

Az illesztés mértékére két dimenzió nélküli mennyiséget szokás használni. Az egyik a σ állóhullámarány, a másik a k haladóhullámarány

$$\sigma = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}}, \quad 1 \leq \sigma < \infty; \quad k = \frac{|U|_{\min}}{|U|_{\max}}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (3.2-51)$$

Nyilvánvaló, hogy $k = 1/\sigma$. Mindkettő kifejezhető a reflexiós tényező nagyságának ismeretében. A (49) felhasználásával

$$\sigma = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}, \quad k = \frac{1 - |r|}{1 + |r|}. \quad (3.2-52)$$

Ha csak haladóhullám lép fel (nincs állóhullám), akkor $\sigma = 1$ és $k = 1$. Ha csak állóhullám lép fel (nincs haladóhullám), akkor $\sigma = \infty$ és $k = 0$. A haladóhullámarány vagy az állóhullámarány egyszerűbben mérhető, mint a reflexiós tényező, ill. annak abszolút értéke.

Elég nagy frekvencián ($\omega L' \gg R'$, $\omega C' \gg G'$) a valódi vezetéken hasonló a feszültség és az áram eloszlása. A csomópontokban ekkor természetesen nem nulla a feszültség és az áram, csak jóval kisebb maximális értékénél. A veszteséges vezetéken kialakuló feszültség- és árameloszlás számítása nem jelent elvi nehézséget, csak az eredmények általános alakjukban kevésbé áttekinthetőek.

3.2-7. A TÁVVEZETÉK NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

A távvezeték legkézenfekvőbb alkalmazása a feszültség-, az áram- és a teljesítmény-átvitel. A távvezeték ekkor kétkapuként írható le. A távvezeték felhasználható mint szabályozható reaktancia, mint impedancia-transzformátor és mint hangolható rezgőkör is.

3.2-7.1. A távvezeték mint kétkapu

A távvezeték többnyire a generátort a fogyasztóval összekötő két-kapuként használjuk (1. előbb a 3. ábrát). E kétkapunak a lánckarakterisztikáját fejezhetjük ki a legyegegyeszerűbben.

Induljunk ki a a feszültség és az áram (7) és (9) alakjából:

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z}, \quad I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma z}.$$

Fejezzük ki ebből az $U_2 = U(h)$ és $I_2 = I(h)$ mennyiségeket:

$$U_2 = U_1^+ e^{-\gamma h} + U_1^- e^{+\gamma h}, \quad I_2 = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma h} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma h}.$$

A két egyenlet összegét és különbségét képezve U_1^+ és U_1^- kifejezhető:

$$U_1^+ = \frac{1}{2} (U_2 + Z_0 I_2) e^g, \quad U_1^- = \frac{1}{2} (U_2 - Z_0 I_2) e^{-g}.$$

Itt bevezettük a

$$g = a + jb = \gamma h$$

(3.2-53)

definíciókkal a következő dimenzió nélküli mennyiségeket: a $g = \gamma h$ átvitel, az $a = \alpha h$ csillapítás és a $b = \beta h$ forgatás. A csillapítást gyakran decibelben, a forgatást néha fokban adják meg. A vezeték elején fellépő $U_1 = U_1^+ + U_1^-$ feszültség és $I_1 = (U_1^+/Z_0) - (U_1^-/Z_0)$ áram kifejezése ezek felhasználásával

$$U_1 = \frac{e^g + e^{-g}}{2} U_2 + Z_0 \frac{e^g - e^{-g}}{2} I_2,$$

$$I_1 = \frac{e^g - e^{-g}}{2 Z_0} U_2 + \frac{e^g + e^{-g}}{2} I_2.$$

A hiperbolikus függvények bevezetésével kapjuk a távvezeték mint kétkapu lanc karakterisztikáját lanc referencia irányokkal (3. ábra):

$$U_1 = (\operatorname{ch} g) U_2 + (Z_0 \operatorname{sh} g) I_2,$$

$$I_1 = \frac{\operatorname{sh} g}{Z_0} U_2 + (\operatorname{ch} g) I_2.$$

(3.2-54)

Látható, hogy teljesül a lanc paraméterekkel kifejezett reciprocitási feltétel ($\Delta_A \equiv A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1$) és szimmetria feltétel ($A_{22} = A_{11}$), amint annak a szemlélet alapján lennie is kell.

A lánckarakterisztika ismeretében kifejezhető a kétkapu más karakterisztikája is. Ne felejtsük el, hogy a hibrid típusú karakterisztikáknál I_2 referenciairányát "befelé" szokás választani. A továbbiakban azonban csak a lanc karakterisztikát fogjuk használni.

A karakterisztika ismeretében kifejezhető a Z impedanciájú két-pólussal lezárt vezeték Z_B bemeneti impedanciája:

$$Z_B = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \operatorname{ch} g + I_2 Z_0 \operatorname{sh} g}{\frac{U_2 \operatorname{sh} g}{Z_0} + I_2 \operatorname{ch} g}.$$

Mivel $U_2 = Z_0 I_2$, ezért egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$Z_B = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} g + Z_0 \operatorname{sh} g}{Z_0 \operatorname{ch} g + Z_2 \operatorname{sh} g} \quad (3.2-55)$$

Ha $Z_2 = Z_0$, akkor $Z_{B0} = Z_0$, vagyis illesztés esetén a generátor közvetlenül a fogyasztót "látja". Ez megfelel a szimmetrikus kétkapú hullámimpedanciájára vonatkozó definíciónak. A Z_{rZ} rövidzárási és a Z_{sz} üresjárású bemeneti impedancia kifejezése (55)-ből $Z_{rZ} = Z_0 \operatorname{th} g$, $Z_{sz} = Z_0 / \operatorname{th} g$. Ebből következik a hullámimpedancia és az átviteli mérésének egy elvileg egyszerű módja:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{rZ} \cdot Z_{sz}}, \quad \operatorname{th} g = \sqrt{\frac{Z_{rZ}}{Z_{sz}}} \quad (3.2-56)$$

A bemeneti impedancia ismeretében számíthatjuk például a generátor által leadott hatásos és meddő teljesítményt, amelyet a lezárás és a távvezeték együttesen vesz fel:

$$P + jQ = \frac{1}{2} Z_B |I_1|^2 = \frac{1}{2} Z_B^* |U_1|^2 \quad (3.2-57)$$

ahol $|I_1|$, ill. $|U_1|$ az amplitúdót jelenti a vezeték elején.

A lánckarakterisztika ismeretében kifejezhetők a lezárt vezeték átviteli mennyiségei is. Pl. a feszültségátviteli függvényre rövid számítással kapjuk, hogy

$$W_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{Z_2 \operatorname{ch} g + Z_0 \operatorname{sh} g} \quad (3.2-58)$$

Ha $Z_2 = 0$ (rövidzár), akkor természetesen $W_U = 0$. Ha $Z_2 = \infty$ (üresjárás), akkor $W_U = 1/\operatorname{ch} g$. Ha $Z_2 = Z_0$ (illesztés), akkor $W_U = e^{-g}$.

A konkrét számításoknál figyelembe kell vennünk $g = a + jb$ komplex jellegét. Ehhez hasznosak a következő, az addíciós képletekkel igazolható összefüggések:

$$e^{-g} = e^{-a} (\cos b + j \sin b), \quad |e^{-g}| = e^{-a} \quad (3.2-59)$$

$$\operatorname{ch} g = \operatorname{ch} a \cdot \cos b + j \operatorname{sh} a \cdot \sin b, \quad |\operatorname{ch} g| = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2a + \cos 2b)}$$

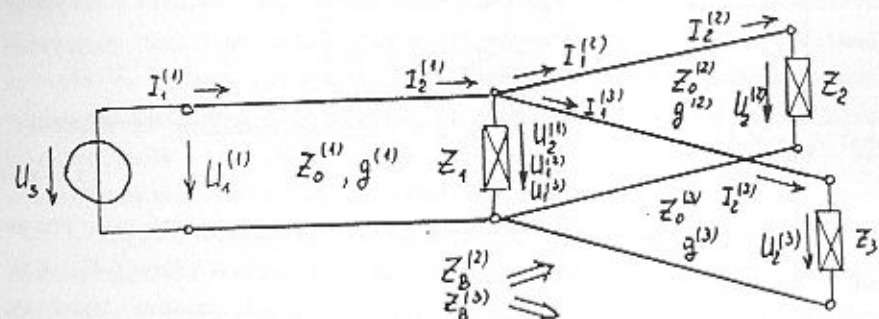
$$\operatorname{sh} g = \operatorname{sh} a \cdot \cos b + j \operatorname{ch} a \cdot \sin b, \quad |\operatorname{sh} g| = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2a - \cos 2b)}$$

Ha az a vagy a b paraméter kicsi, akkor célszerű lehet a függvényeket első vagy másodfokú Taylor polinomjukkal helyettesíteni. Így például a $\operatorname{ch} a \approx 1 + a^2/2$, $\operatorname{sh} a \approx a$, $\cos b \approx 1 - b^2/2$, $\sin b \approx b$ közelítések $a < 0,4$ és $b < 0,4$ esetén 2,5%-nál kisebb hibát jelentenek.

3.2-7.2. Összetett vezeték

A bemeneti impedancia alkalmazásával a több vezetékből és koncentrált kétpólusokból álló hálózat vizsgálatát visszavezethetjük a kétpólussal lezárt vezeték vizsgálatára.

Példaként tekintsük a 7. ábrán látható elrendezést. Az (1) jelű vezeték végét egy Z_1 impedanciájú kétpólus zárja le, továbbá egy (2), ill. (3) jelű, egy-egy kétpólussal lezárt vezeték. A feladat például a lezárások feszültségének meghatározása.



3.2-7. Ábra. Távvezeték szakaszokból és koncentrált kétpólusokból álló hálózat

A legegyszerűbben úgy járhatunk el, hogy először meghatározzuk a két vezeték $Z_B^{(2)}$ és $Z_B^{(3)}$ bemeneti impedanciáját. Az (1) vezeték szempontjából ezek párhuzamosan vannak kapcsolva a Z_1 lezáró impedanciával. Az (1) vezeték lezáró impedanciája tehát $Z_1 \times Z_B^{(2)} \times Z_B^{(3)}$. Az $U_2^{(1)}$ feszültség pl. az (58) alapján számítható. Ez az $U_2^{(1)}$ egyúttal a (2) vezeték $U_1^{(2)}$ és a (3) vezeték $U_1^{(3)}$ primer oldali feszültsége is. Az $U_2^{(2)}$ és az $U_2^{(3)}$ feszültség ismét (58) felhasználásával számítható.

Analóg módon számíthatók a hasonló jellegű feladatok. Előfordulhat például, hogy valamelyik vezeték nem közvetlenül csatlakozik a másikhoz, hanem egy sorosan kapcsolt koncentrált kétpóluson keresztül. A két csatlakozó vezeték között lehet egy ennél bonyolultabb koncentrált paraméterű hálózatrész is, amely kétkapuként írható le.

Ha ismert a vezeték elején pl. a feszültség és végén a lezáró impedancia, akkor nem csak a lezárások feszültsége és árama számítható egyszerűen, hanem a vezeték bármely pontjában fellépő feszültség és áram is a 3.2-6. szakaszban bemutatott módon.

3.2-7.3. Az ideális vezeték szakasz mint reaktancia

A Z_2 impedanciájú kétpólussal lezárt ideális vezeték bemeneti impedanciáját (55) alapján kapjuk $g = jb$, helyettesítéssel:

$$Z_B = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} g + Z_0 \operatorname{sh} g}{Z_0 \operatorname{ch} g + Z_2 \operatorname{sh} g} = Z_0 \frac{Z_2 \cos b + j Z_0 \sin b}{Z_0 \cos b + j Z_2 \sin b} \quad (3.2-60)$$

A Z_{rz} rövidzárási, ill. a Z_{sz} üresjárású bemeneti impedancia ebből

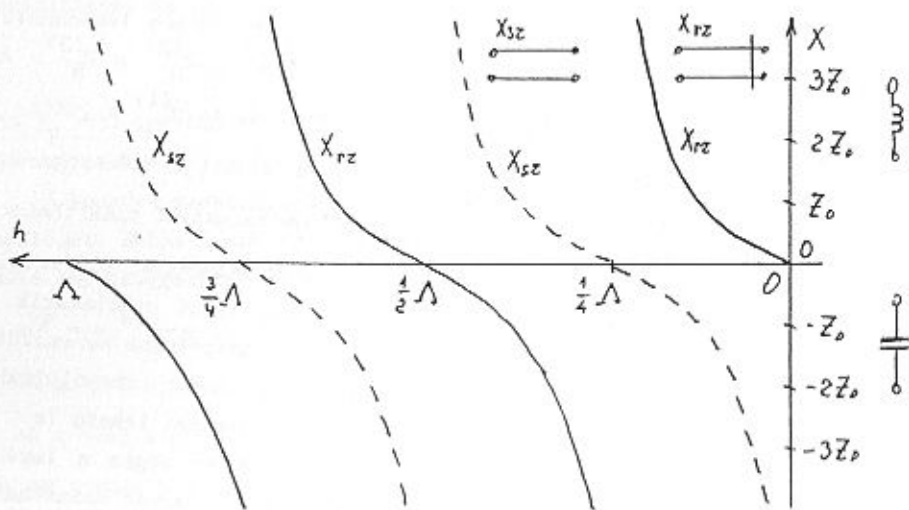
$$Z_{rz} = j X_{rz}, \quad X_{rz} = Z_0 \operatorname{tg} b; \quad (3.2-61)$$

$$Z_{sz} = j X_{sz}, \quad X_{sz} = -Z_0 \frac{1}{\operatorname{tg} b}; \quad (3.2-62)$$

ahol $Z_0 = \sqrt{L'/C'}$ valós állandó és a b forgatás különböző kifejezései

$$b = \beta h = \frac{2\pi}{\lambda} h = \frac{\omega}{v} h. \quad (3.2-63)$$

Az X_{rz} rövidzárási és az X_{sz} üresjárású bemeneti reaktancia függését a h hosszától a 8. ábra szemlélteti. A negyedhullámhossznál rövidebb rövidrezárt, ill. szakadással lezárt vezeték szakasz induktív, ill. kapacitív reaktanciaként viselkedik. Ez a jelleg negyedhullámhosszanként megváltozik.



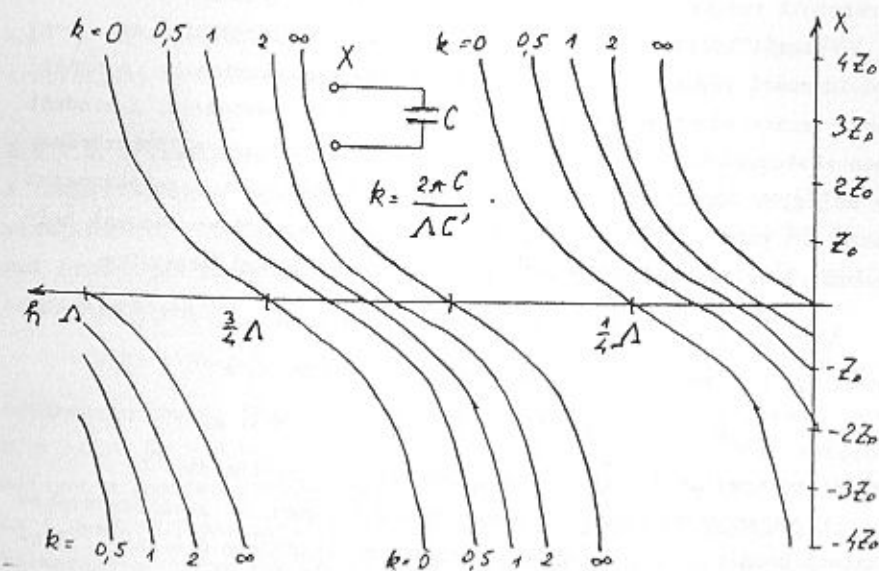
3.2-8. ábra. A rövidzárási és az üresjárású bemeneti reaktancia függése az ideális vezeték szakasz hosszától

Ilyen módon létre lehet hozni (majdnem) ideális és könnyen változtatható reaktanciát. A valódi vezetékek természetesen nem ideálisak, de különösen induktivitást sokkal kisebb veszteséggel lehet rövidrezárt vezeték szakasszal ("stubline") megvalósítani, mint más módszerekkel. A vezeték szakasz természetesen csak olyan frekvenciákon alkalmazható reaktanciaként, amelyekhez ésszerű hosszúság tartozik.

Az adott impedanciával lezárt vezeték reflexiómentességét (azaz állóhullámok kiküszöbölését) biztosítani lehet egy, a vezeték vége közelében alkalmas helyre beiktatott megfelelő nagyságú reaktanciával. (Gondolja meg, hogy milyen feltételi egyenletekből lehet a reaktancia értékét és helyét meghatározni! A reaktancia és a fogyasztó közötti szakaszon fellépnek állóhullámok is, ezek csak a vezeték többi részén kiküszöbölhetők ki ilyen módon.) A reaktancia rövidrezárt végű vezeték szakasszal szabályozhatóan realizálható.

A vezeték szakasz olyan reaktanciát realizál, amelynek más a frekvenciafüggése, mint a kondenzátorok és tekercsek összekapcsolásával kialakított reaktáns kétpólusoké. Utóbbi ω racionális, előbbi az ω transzcendens függvénye, mint az az előzőkből látható.

A reaktanciát realizáló vezeték szakasz szükséges hossza csökkenthető, ha egy reaktanciával zárjuk le. Legyen pl. $Z_2 = 1/j\omega C_2$, akkor



3.2-9. ábra. A kondenzátorral lezárt ideális vezeték szakasz bemeneti reaktanciájának függése a szakasz hosszától

(60) értelmében

$$Z_B = Z_0 \frac{(1/j\omega C_2) \cos b + j Z_0 \sin b}{Z_0 \cos b + (1/\omega C_2) \sin b} \quad (3.2-63)$$

A bemeneti reaktancia kifejezése ebből ($Z_B = j X_B$):

$$X_B = Z_0 \frac{k \operatorname{tg} b - 1}{\operatorname{tg} b + k}, \quad k = \omega C_2 Z_0 = \frac{2\pi C_2}{\lambda C'} \quad (3.2-64)$$

A 9. ábrán láthatjuk X_B változását a h hossz függvényében a k paraméter (vagyis C_2) néhány értékére. Láthatjuk, hogy míg kapacitív reaktancia létrehozásához legalább $\lambda/4$ hosszúságú rövidrezárt végű vezeték szakaszra van szükség, kondenzátorral lezárt vezeték szakasz esetén ennél kisebb hossz is elegendő, amint az várható is.

3.2-7.4. Az ideális vezeték szakasz mint rezgőkör

Mint korábban láttuk (2.3-6.2. pont) a rövidzárral vagy szakadással lezárt ideális vezeték szakaszon állóhullámok alakulnak ki, a feszültségnek és az áramnak félhullámhossznyi távolságban csomópontjai vannak (5. ábra). A feszültség csomópontjainak helyén $u = 0$, tehát ott a vezeték rövidrezárható. Az áram csomópontjainak helyén $i = 0$, tehát ott a vezeték megszakítható. Az így keletkező vezeték szakaszokon a létrehozott rezgés - elméletileg korlátlan ideig - fennmarad.

A rezgési hullámhosszak abból a feltételből határozhatók meg, hogy a rövidrezárt végén a feszültség nulla és az áram maximális, a szakadással lezárt végén az áram nulla és a feszültség maximális. A mindkét végén rövidrezárt vezeték szakasz hossza tehát $\lambda_n/2$ egész többszöröse, míg az egyik végén nyitott és másik végén rövidrezárt vezeték szakasz hossza $\lambda/4$ páratlan többszöröse (10. ábra). A lehetséges rezgési hullámhosszak és frekvenciák a két végén egyformán lezárt vezetékre

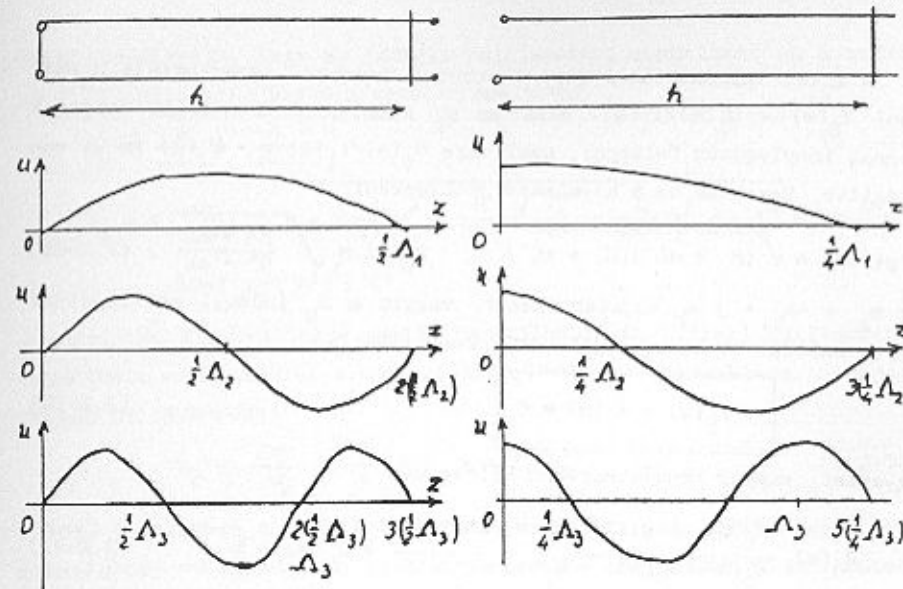
$$\lambda_n = \frac{2}{n} h, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2} \frac{v}{h}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2-65)$$

míg az egyik végén nyitott, másik végén zárt vezetékre

$$\lambda_n = \frac{4}{2n+1} h, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{2n+1}{4} \frac{v}{h}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2-66)$$

A sajátfrekvenciák a rövidzár mozgásával változtathatók.

A veszteséges vezeték szakasz Q körjóságára a következőképpen adhatunk becslést. A koncentrált paraméterű rezgőkörre $Q = \omega L/R$. Kisveszteségű vezeték esetén (30) értelmében



3.2-10. Ábra. Egyik végén rövidrezárt, ill. nyitott, másik végén rövidrezárt ideális vezeték szakaszon kialakuló feszültség állóhullámok

$$\alpha = \frac{R'}{Z} \sqrt{\frac{C'}{L'}}, \quad \beta = \omega \sqrt{L' C'}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{\omega L'}{R'} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

Ebből következik, hogy a rezgőkör körjósága $\Lambda_n = 2\pi/\beta_n$ hullámhosszon

$$Q_n = \frac{\pi}{\alpha \Lambda_n} \quad (3.2-67)$$

ahol Λ_n kifejezését (65) vagy (66) adja. Ebből következik, hogy az alaprezgést ($n = 1$) célszerű felhasználni.

3.2-7.5. A veszteséges vezeték szakasz mint rezgőkör

A vezeték szakasz sajátrezgéseit általánosabb feltételek mellett is vizsgálhatjuk. Tekintsünk a végein Z_1 , ill. Z_2 impedanciájú kétpólussal lezárt nem ideális vezeték szakaszt. A vezeték és a lezárás veszteségei miatt ekkor

$$u(z, t) = \operatorname{Re} \{ U(z) e^{-\delta t} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ U(z) e^{st} \} \quad (3.2-68)$$

alakban leírható, időben csillapított rezgések fognak fellépni, ahol $s = -\delta + j\omega$ a komplex frekvencia. Eddigi, a szinuszos állandósult állapotra vonatkozó összefüggéseink érvényesek maradnak, ha $j\omega$ helyére az s komplex frekvenciát helyettesítjük. A Laplace transzformáció alkalmazásával formailag azonos eredményhez jutunk (3.3-3. szakasz).

A $Z_2(s)$ impedanciával lezárt vezeték bemeneti impedanciája $Z_B(s)$, ahol $Z_B(s) = U_1(s)/I_1(s)$. Azok az s_k komplex frekvenciájú rezgések fognak ténylegesen fellépni, amelyekre $U_1(s)/I_1(s) = -Z_1(s)$ is ki van elégítve. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$g(s) = h \sqrt{(R' + sL')(G' + sC')} \quad , \quad Z_0(s) = \sqrt{\frac{R' + sL'}{G' + sC'}} \quad (3.2-69)$$

Az $s_k = -\delta_k + j \omega_k$ sajátértékeket, vagyis a δ_k időbeli csillapítási együtthatókat és az ω_k saját-körfrekvenciákat a

$$Z_B(s) + Z_1(s) = 0 \quad (3.2-70)$$

egyenlet, vagyis részletesebben kiírva a

$$Z_0(s) \frac{Z_2(s) \operatorname{ch} g(s) + Z_0(s) \operatorname{sh} g(s)}{Z_0(s) \operatorname{ch} g(s) + Z_2(s) \operatorname{sh} g(s)} + Z_1(s) = 0 \quad (3.2-71)$$

transzcendens egyenlet gyökei adják. Mivel ezek komplexek, ezért meghatározásuk általában körülményes feladat.

Igen egyszerű példaként vizsgáljuk a mindkét végén rövidrezárt vezetékszakaszt. Ekkor $Z_1 = Z_2 = 0$, ezért (70) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\operatorname{sh} g = 0 \quad , \quad g = g(s) \quad (3.2-72)$$

Belátható, hogy a $g_k = g(s_k)$ gyökök mind képzetesek, és pedig

$$g(s_k) = h \sqrt{(R' + s_k L')(G' + s_k C')} = j k \pi \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2-73)$$

Négyzetreemelés és rendezés után a következő egyenlet adódik:

$$h^2 L' C' s_k^2 + h^2 (R' C' + L' G') s_k + (h^2 R' G' + k^2 \pi^2) = 0 \quad .$$

A $v = 1/\sqrt{L' C'}$ ideális fázissebesség bevezetésével kapjuk, hogy

$$s_k^2 + \left(\frac{R'}{L'} + \frac{G'}{C'} \right) s_k + \frac{R' G'}{L' C'} + \left(k \frac{\pi v}{h} \right)^2 = 0 \quad .$$

E másodfokú egyenlet megoldásai

$$\begin{aligned} s_k &= -\delta_k \pm j \omega_k = \\ &= - \left(\frac{R'}{L'} + \frac{G'}{C'} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{R'}{2L'} + \frac{G'}{2C'} \right)^2 - \frac{R' G'}{L' C'} - \left(k \frac{\pi v}{h} \right)^2} = \\ &= - \left(\frac{R'}{L'} + \frac{G'}{C'} \right) \pm j k \frac{\pi v}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{k \pi v} \right)^2 \left(\frac{R'}{2L'} - \frac{G'}{2C'} \right)^2} \quad . \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az időbeli csillapítási együttható és a saját-körfrekvencia kifejezése a vezeték adataival

$$\delta_k = \frac{R'}{2L'} + \frac{G'}{2C'} \quad , \quad (3.2-74)$$

$$\omega_k = k \frac{\pi v}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{k \pi} \right)^2 \left(\frac{R'}{2L'} \sqrt{\frac{C'}{L'}} - \frac{G'}{2C'} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right)^2} \approx k \frac{\pi v}{h} \quad ,$$

$$\text{ahol } v = 1/\sqrt{L' C'} \quad .$$

A közelítés kis veszteség esetén használható. Az időbeli csillapítási együttható ezek szerint minden sajátfrekvenciára ugyanakkora. A saját-rezgés hullámhosszai

$$\Lambda_k = \frac{2\pi v}{\omega_k} \approx \frac{2}{k} h \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2-75)$$

A (65) értelmében a közelítő eredmény megegyezik az ideális vezetékre számítottal. A pontosabb számítás egyfelől szolgáltatja az időbeli csillapítási együtthatót, másfelől látható, hogy a sajátfrekvencia valamivel kisebb (a hullámhossz valamivel nagyobb) mint ideális vezetékszakasznál.

A (74) és (75) összefüggésekben v az ideális vezeték fázissebességét jelöli. Kis csillapítású vezetékre a valódi fázissebesség ettől csak kevéssel tér el.

Általánosabb lezárások mellett a (70) transzcendens egyenlet nem egyszerűsödik másodfokúvá. Az Olvasóra bizzuk az egyik végén rövidzárral, másik végén kondenzátorral lezárt vezeték sajátértékeinek meghatározására szolgáló egyenlet felírását.

A sajátértékeket megadó transzcendens egyenlet megoldásához célszerű lehet a vezetékét először ideálisnak tekinteni és ennek alapján meghatározni a sajátértékeket. Ha mindkét lezárás veszteségmentes (rövidzár, szakadás, reaktáns kétpólus), akkor az így adódó sajátértékek képzetesek ($s_k = \pm j \hat{\omega}_k$, csillapítatlan rezgés). Pontosabb megoldáshoz úgy juthatunk, hogy feltételezzük, hogy δ_k és $|\omega_k - \hat{\omega}_k|$ olyan kicsi, hogy a transzcendens és irracionális függvények elsőfokú Taylor polinomjukkal közelíthetők. Szükség esetén a korrigált megoldás helyén újabb sorbafejtést végzünk. Az ideális vezetékre vonatkozó megoldás numerikus közelítő eljárás alkalmazása esetén is felhasználható generáló megoldásként.

3.3. ÁTMENETI FOLYAMAT VIZSGÁLATA

A távvezeték elosztott paraméterű hálózat, ezért törvényei bonyolultabbak, mint a koncentrált paraméterű hálózatoké. A távvezetéken lezajló átmeneti folyamatok vizsgálata ezért nehéz matematikai feladat, amely általános esetben csak numerikus módszerrel oldható meg. Gyakran megelégedhetünk azonban azzal a közelítéssel, hogy a vezeték ideálisnak tekintjük. Különösen egyszerű a helyzet, ha a lezárás egy ellenállás. Ebben a fejezetben először ezt a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, aztán rátérünk az általánosítási lehetőségekre. A numerikus eljárásokat nem tárgyaljuk.

3.3-1. A FREKVENCIAFÜGGETLEN ESET

3.3-1.1. Általános összefüggések

A 3.2-4.1. pontban láttuk, hogy az ideális távvezeték csillapítási együtthatója nulla, $v = 1/\sqrt{L'C}$ fázissebessége pedig a frekvenciától független (a terjedési együttható $\gamma = j\omega/v$), a $Z_0 = \sqrt{L'/C'}$ hullámimpedancia ugyancsak független a frekvenciától. Ha az ideális vezeték elején a feszültség kifejezése

$$u(t) = U_1 e^{j\omega t},$$

akkor tetszőleges z helyen a feszültség kifejezése (a reflexiót egyelőre figyelmen kívül hagyva)

$$u^+(z, t) = U_1 e^{j\omega(t - z/v)}.$$

Állítsuk elő a tetszőleges $u_1(t)$ feszültséget $U_1(j\omega)$ spektruma segítségével Fourier integrál alakjában:

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

A feszültségfüggvény kifejezése a szuperpozíció elve alapján

$$u^+(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(j\omega) e^{j\omega(t - z/v)} d\omega. \quad (3.3-1)$$

Minden frekvenciakomponens ugyanazzal a sebességgel terjed, ezért a z -tengely pozitív irányában terjedő feszültség-hullám és áramhullám kifejezhető az $u_1(t)$ feszültség ismeretében:

$$u^+(z, t) = u_1\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad i^+(z, t) = \frac{1}{Z_0} u_1\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (3.3-2)$$

Ez azt jelenti, hogy valamely z helyen a feszültség ugyanolyan lefolyású, mint a vezeték elején, csak $T_z = z/v$ idővel késleltetve van. Az áram minden időpontban arányos a feszültséggel. Ennek az a magyarázata, hogy a feszültség és az áram minden frekvenciakomponense azonos sebességgel és csillapítatlanul terjed, ezért a teljes feszültség-hullám és áramhullám is torzítatlanul és csillapítatlanul terjed.

Vizsgáljuk most meg a vezeték végén fellépő reflexió hatását.

A legegyszerűbb esetben a lezárás is frekvenciafüggetlen, vagyis egy R_2 rezisztenciájú ellenállás, vagy azzal helyettesíthető. Ekkor az

$$r_2 = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0} \quad (3.3-3)$$

reflexiós tényező is frekvenciafüggetlen. Ez azt jelenti, hogy minden frekvenciakomponens azonos arányban verődik vissza. Ennek következtében a beeső feszültség-hullám és áramhullám alakhűen reflektálódik:

$$\begin{aligned} u^-(z, t) &= r_2 u_1\left(t - \frac{h}{v} - \frac{h-z}{v}\right), \\ i^-(z, t) &= -\frac{1}{Z_0} r_2 u_1\left(t - \frac{h}{v} - \frac{h-z}{v}\right). \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

Ez a visszavert hullám a feszültségforrásnál ismét visszaverődik. Legyen $R_1 = 0$, tehát $r_1 = -1$. (Az általánosabb esettel később foglalkozunk.) A z -tengely pozitív irányában terjedő reflektált hullámok

$$\begin{aligned} u^+(z, t) &= -r_2 u_1\left(t - \frac{2h}{v} - \frac{z}{v}\right), \\ i^+(z, t) &= -\frac{1}{Z_0} r_2 u_1\left(t - \frac{2h}{v} - \frac{z}{v}\right). \end{aligned} \quad (3.3-5)$$

Ez a feszültség- és áramhullám a vezeték végén ismét visszaverődik (a reflexiós tényező r_2) és így tovább.

Ebben a gyakorlatilag nem érdektelen esetben a feszültség és az áram bármely helyen és bármely időpontban a reflektált hullámok szuperpozíciójával meghatározható. A vezeték veszteségeinek elhanyagolása elsősorban azt jelenti, hogy a csillapítást figyelmen kívül hagyjuk. Az első néhány reflektált hullám figyelembe vételekor ezzel többnyire nem is követünk el lényeges hibát.

Az általánosabb esetek (frekvenciafüggő lezárás, nem ideális vezeték) vizsgálatával a következő két szakaszban foglalkozunk. Előbb bemutatjuk a legegyszerűbb közelítés néhány alkalmazását.

3.3-1.2. Illusztratív példa

Zárjuk le az ideális vezeték végét egy R_2 rezisztenciájú ellenállással. Kapcsoljunk a vezeték elejére a $t = 0$ pillanatban egy U_0 állandó feszültségű feszültségforrást. Határozzuk meg a lezáró ellenálláson fellépő feszültség időfüggvényét.

A $t = 0$ időponttól kezdve a vezetéken egy U_0 amplitúdójú feszültség-hullám halad, amely $T = h/v$ idő múlva ér a vezeték végéhez. Ott r_2 -szöröse reflektálódik, így a lezárás feszültsége a T időpontig nulla, azután $(1+r_2) U_0$. Az $r_2 U_0$ visszavert feszültség-hullám a generátor felé halad, majd ott a $2T$ időpontban reflektálódik. Mivel a generátor belső ellenállását elhanyagoltuk, ezért $r_1 = -1$, tehát egy $-r_2 U_0$ amplitúdójú feszültség-hullám halad a vezeték vége felé, ahová a $3T$ időpontban érkezik meg és reflektálódik. Az $(1+r_2) U_0$ feszültségre így $-r_2 U_0 + r_2(-r_2 U_0) = -r_2(1+r_2) U_0$ feszültség szuperponálódik. A $t = 3T$ időponttól a lezárás feszültsége $[(1+r_2) - r_2(1+r_2)] U_0$ lesz. Az $r_2^2 U_0$ amplitúdójú hullám a generátor felé halad, ott reflektálódik, és így tovább. A lezáráson fellépő feszültség állandósult értéke

$$U_2 = (1+r_2) U_0 - r_2(1+r_2) U_0 + r_2^2(1+r_2) U_0 - \dots = (1+r_2) [1 - r_2 + r_2^2 - \dots] U_0 = (1+r_2) \frac{1}{1+r_2} U_0,$$

mivel $|r_2| < 1$. Végeredményben a feszültség állandósult értéke

$$U_2 = U_0, \quad (3.3-6)$$

ami a vezeték és a generátor ideális volta miatt természetes is. Ugyanekkora az állandósult feszültség a vezeték minden pontjában.

A feszültség kialakulását egy konkrét esetre ($R_1 = 0$, $R_2 = 4 Z_0$, ill. $R_2 = Z_0/4$) az 1. ábrán követhetjük.

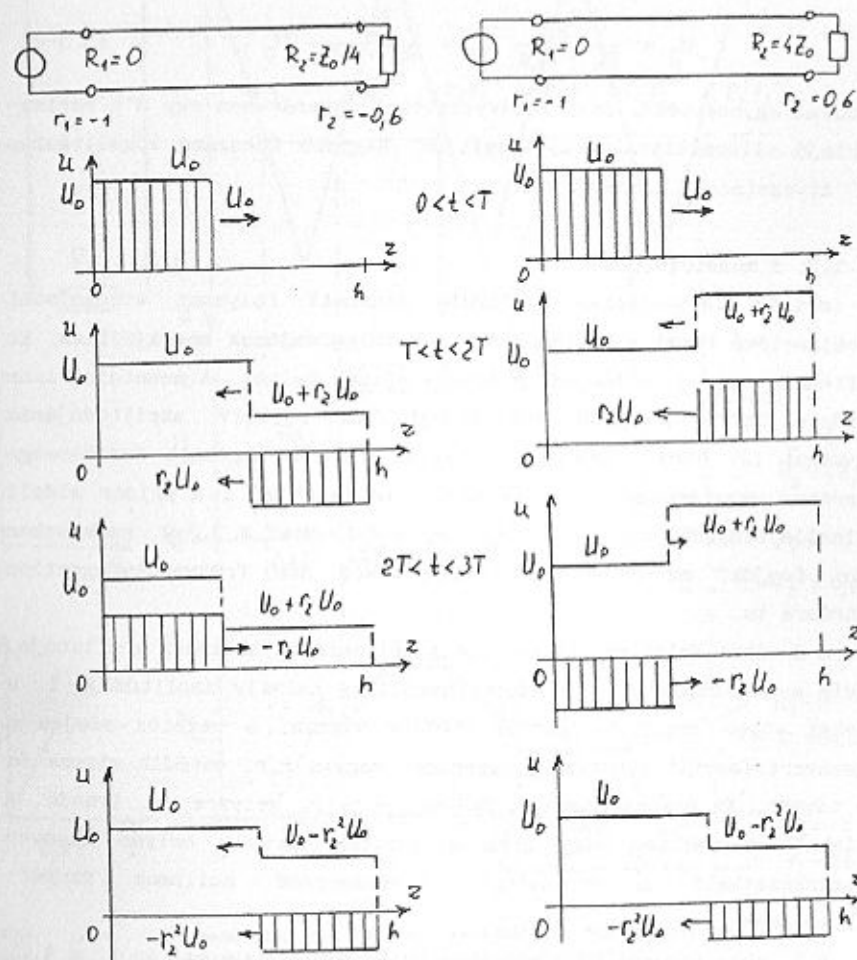
Az áram eloszlásának kialakulása hasonló módon követhető. A bekapcsolás után U_0/Z_0 amplitúdójú áramhullám indul meg a z -tengely pozitív irányában. Ez nem függ a lezárástól. A vezeték végén $-r_2 U_0/Z_0$ amplitúdójú áramhullám verődik vissza, az eredő áram $U_0/Z_0 - r_2 U_0/Z_0$. Ezután a vezeték elején $-r_2 U_0/Z_0$ amplitúdójú áramhullám verődik vissza, majd a vezeték végén $r_2^2 U_0/Z_0$ és így tovább. Az áram állandósult értéke

$$I_2 = (1-r_2) \frac{U_0}{Z_0} - r_2(1-r_2) \frac{U_0}{Z_0} + r_2^2(1-r_2) \frac{U_0}{Z_0} - \dots$$

A mértani sor összegképletét alkalmazva

$$I_2 = \frac{1-r_2}{1+r_2} \frac{U_0}{Z_0} = \frac{U_0}{R_2} \quad (3.3-7)$$

ami a vezeték ideális volta miatt a helyes eredmény. Ugyanez az áram állandósult értéke a vezeték minden pontjában. Az Olvasóra bízunk az áramra vonatkozó, az 1. ábrával analóg diagram felvázolását.



3.3-1. ábra. A feszültség eloszlása különböző időpontokban az ideális távvezetéken, amelynek elejére a $t = 0$ időpontban egyenfeszültséget kapcsolunk, vége ellenállással van lezárva

A veszteséges vezetéken állandó feszültség hatására kialakuló állandósult feszültség nem állandó a vezeték mentén és csak a $z = 0$ helyen U_0 értékű. Az állandó feszültség a szinuszos esetre érvényes

összefüggésekből $\omega = 0$ helyettesítéssel számítható. Ekkor $\gamma = \sqrt{R'G'}$ és $Z_0 = \sqrt{R'/G'}$. A lezáráson fellépő feszültség (3.2-58) értelmében

$$U_2 = U_0 U_1 = \frac{R_2}{R_2 \operatorname{ch} g + Z_0 \operatorname{sh} g}; \quad g = \gamma h. \quad (3.3-8)$$

Ha $g \ll 1$, akkor a nevezőt elsőfokú Taylor polinomjával helyettesítve

$$U_2 \approx \frac{R_2}{R_2 + Z_0 g} U_0 = \frac{R_2}{R_2 + R'h} U_0. \quad (3.3-9)$$

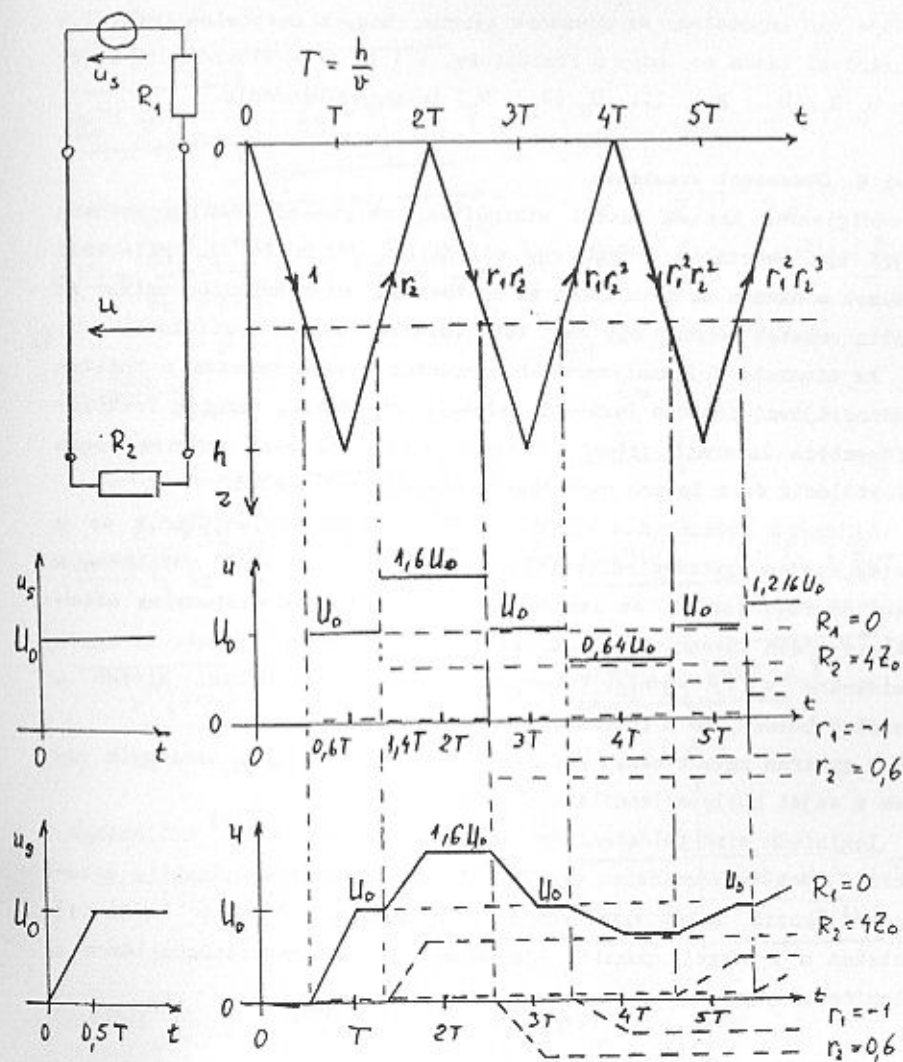
Ez azzal egyenértékű, hogy a távvezeték egyenáramon egy $R'h$ rezisztenciájú ellenállással helyettesítjük. Nagyobb fokszámú közelítésben a G' átvezetés is szerepet kap.

3.3-1.3. A menetdiagram

Az ideális távvezetéken kialakuló átmeneti folyamat vizsgálatát áttekinthetővé teszi a hullámok ún. menetdiagramjának megrajzolása. Ez grafikusan megadja a terjedő hullám elejének helyét. A menetdiagramon feltüntetjük a terjedő feszültség-hullám relatív amplitúdójának nagyságát (2. ábra). Jelölje a vezeték elejére kapcsolt feszültség-generátor vagy áramgenerátor belső ellenállását R_1 , a primer oldali reflexió tényezőt $r_1 = (R_1 - Z_0)/(R_1 + Z_0)$. Mint a 3.3-2. szakaszban látni fogjuk, az eljárás általánosítható nem frekvenciafüggetlen lezárásra is.

A 2. ábra felső részén látható a hullámfront helyének grafikonja, vagyis a menetdiagram. Az induló feszültség relatív amplitúdója 1, a vezeték végén ennek r_2 -szöröse verődik vissza, a vezeték elején a visszavert feszültség-hullám r_1 -szerese, vagyis $r_1 r_2$ verődik vissza és így tovább. Az áramra nézve r_1 helyére $-r_1$, r_2 helyére $-r_2$ irandó. A kialakuló feszültség vagy áram a vezeték bármely helyén könnyen megszerkeszthető a sorozatosan visszaverődő hullámok szuperpozíciójaként.

A 2. ábra középső és alsó része az $R_1 = 0$ ($r_1 = -1$) és $R_2 = 4Z_0$ ($r_2 = 0,6$) esetre vonatkozik. Az ábra középső, ill. alsó részén azt az esetet vizsgáltuk, amikor $u_s(t)$ a $t = 0$ időpontban bekapcsolt egyenfeszültség, ill. amikor $u_s(t)$ lineárisan nő állandó értékére. Mindkét esetben a feszültség állandósult értéke U_0 , az áram állandósult értéke U_0/R_2 . Az áramfüggvény szerkesztését a két vázolt



3.3-2. ábra. A menetdiagram és a feszültség időfüggvényének meghatározása az ideális távvezetéken sorozatos reflexiók szuperpozíciójával
esetben az Olvasóra bizzuk.

A szerkesztés elsősorban a szemléltetést szolgálja. A feszültség és az áram időfüggvénye számítással is meghatározható.

Ha $R_1 \neq 0$ (tehát ha $r_1 \neq -1$), akkor az induló feszültség-hullám $u_s(t) \cdot Z_0 / (R_1 + Z_0)$, az induló áramhullám $u_s(t) / (R_1 + Z_0)$, hiszen a be-

kapcsolási folyamat szempontjából a feszültségforrásra R_1 és Z_0 soros eredője van kapcsolva. Az Olvasóra bizzuk, hogy a sorozatos reflexiók módszerével lássa be, hogy a feszültség, ill. az áram állandósult értékére $U_0 \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$, ill. $U_0 / (R_1 + R_2)$ helyesen kiadódik.

3.3-1.4. Összetett vezeték

Az eddigiekben azt az esetet vizsgáltuk, amikor az ideális vezeték elejét egy generátor, végét egy ellenállás zárja le. A reflektált hullámok módszere azonban abban az esetben is alkalmazható, amikor az ideális vezeték végéhez egy vagy több ideális vezeték csatlakozik.

Az átmeneti folyamat során a vezetékelt lezáró vezeték a hullámimpedanciájával történő lezárást jelenti, az ideális vezeték frekvenciafüggetlen lezárást jelent. A beeső hullám az első vezeték végén reflektálódik és a lezáró vezeték (vezetéseken) terjed.

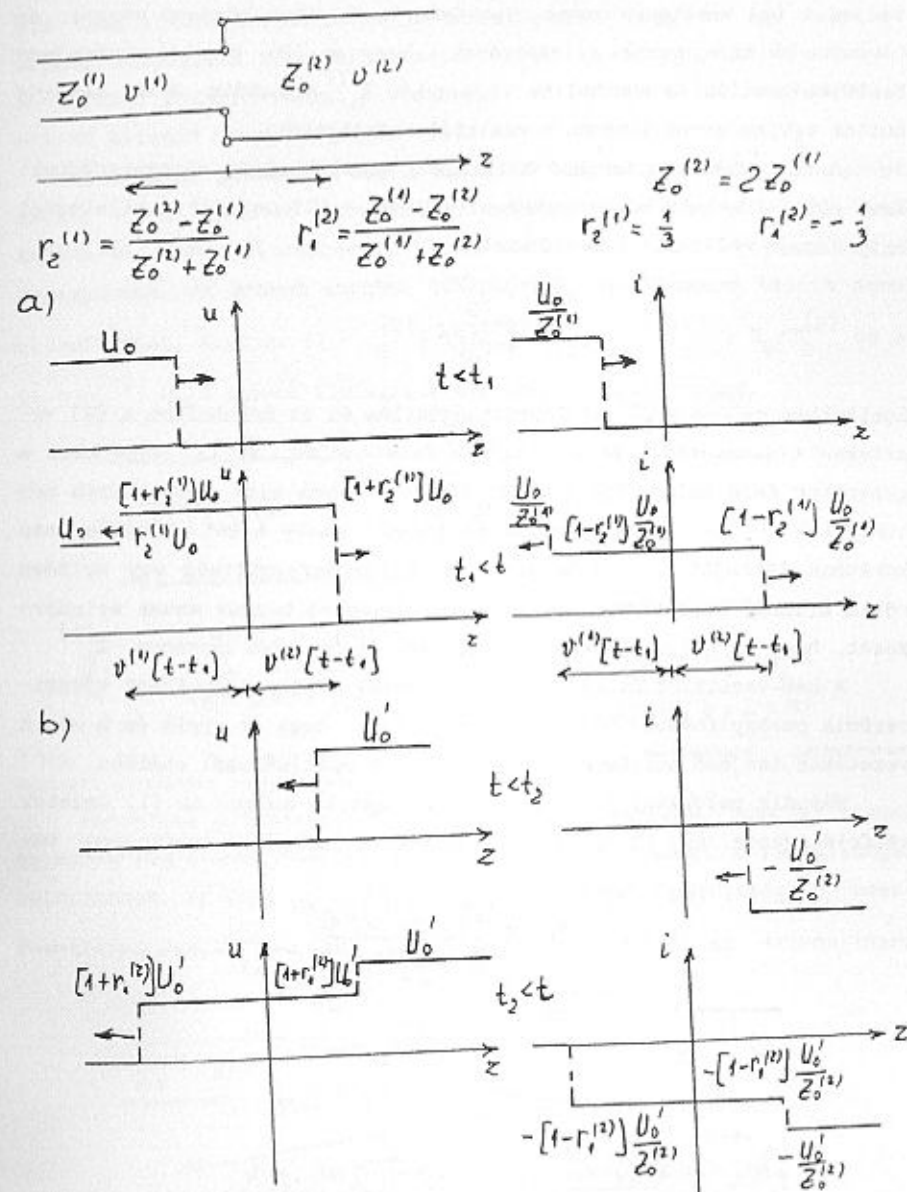
A lezáró vezeték terjedő hullám a végén reflektálódik és a vezeték elején egyrészt reflektálódik, másrészt az "első" vezeték generátor felé terjed. Az ismételt reflexiók hatása viszonylag áttekinthető módon követhető a 2. ábrához hasonló menetdiagramon. Az egyes vezetésekre a $T_1 = h_1/v_1$ terjedési idők különbözőek, hiszen a vezeték hossza, de a fázissebesség is eltérő lehet.

A gyakran zavart okozó reflexiók nem lépnek fel, ha mindegyik vezeték a saját hullámellenállásával van lezárva.

Tekintsük első példaként azt az esetet, amikor a $Z_0^{(1)}$ hullámimpedanciájú ideális vezetékhez egy $Z_0^{(2)}$ hullámimpedanciájú ideális vezeték csatlakozik. A két vezeték a fázissebesség $v^{(1)}$ és $v^{(2)}$. Az (1) vezeték a z-tengely pozitív irányában terjedő feszültség-hullámra a reflexió tényező

$$r_2^{(1)} = \frac{Z_0^{(2)} - Z_0^{(1)}}{Z_0^{(2)} + Z_0^{(1)}}$$

Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk bekapcsolt U_0 egyenfeszültség hatásának vizsgálatára. A z-tengely pozitív irányában terjedő feszültség-hullám egy t_1 időpontban érkezik az (1) vezeték végéhez. Ekkor ott $r_2^{(1)} U_0$ nagyságú feszültség visszaverődik. A vezeték végén $[1+r_2^{(1)}] U_0$ nagyságú feszültség lép fel és ez terjed a (2) vezeték annak vége felé. A beeső áramhullám $U_0/Z_0^{(1)}$, a visszavert áramhullám $-r_2^{(1)} U_0/Z_0^{(1)}$.



3.3-3. ábra. Az egyik és a másik irányban terjedő feszültség-hullám és áramhullám viselkedése két ideális vezeték csatlakozásánál

az (1) vezeték végén az áram $[1 - r_2^{(1)}] U_0/Z_0^{(1)}$. Ez az áramhullám terjed a (2) vezetéken annak vége felé (a 3. ábra középső része). Az Olvasóra bizzuk annak ellenőrzését, hogy a (2) vezetéken terjedő feszültség-hullám és áramhullám viszonyára $Z_0^{(2)}$ kiadódik. A két terjedő hullám egyike ennek alapján a másiktól számítható.

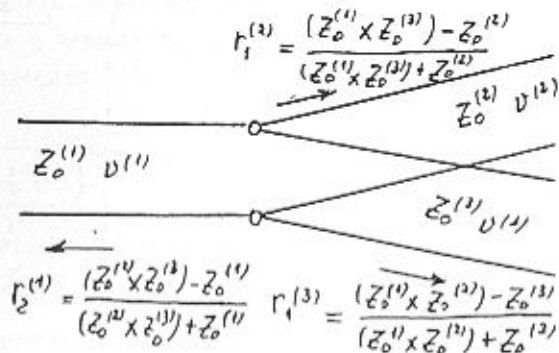
A (2) vezetéken terjedő hullámok e vezeték végén visszaverődnek. Ezek egy t_2 időpontban érkeznek az (1) és a (2) vezeték csatlakozási helyéhez. A reflexiók tényező ezekre

$$r_1^{(2)} = \frac{Z_0^{(1)} - Z_0^{(2)}}{Z_0^{(1)} + Z_0^{(2)}}$$

Esetünkben $r_1^{(2)} = -r_2^{(1)}$. A feszültség-hullám és az áramhullám a (2) vezetéken visszaverődik és a lezárása felé terjed, az (1) vezetéken a generátor felé halad. Ezt szemlélteti a 3. ábra alsó része. Ezen nem tüntettük fel azt a feszültséget és áramot, amely a két vezetéken már korábban létrejött. Ez a helyzet, ha a forrásfeszültség egy kellően rövid állandó amplitúdójú impulzus. Az Olvasóra bizzuk annak ellenőrzését, hogy az (1) vezetéken a feszültség és az áram viszonya $-Z_0^{(1)}$.

A két vezetéken haladó hullám a vezeték másik végén ismét visszaverődik és így tovább. Gondosan követni kell, hogy az egyik és a másik vezetéken terjedő hullámok mikor érkeznek a csatlakozási ponthoz.

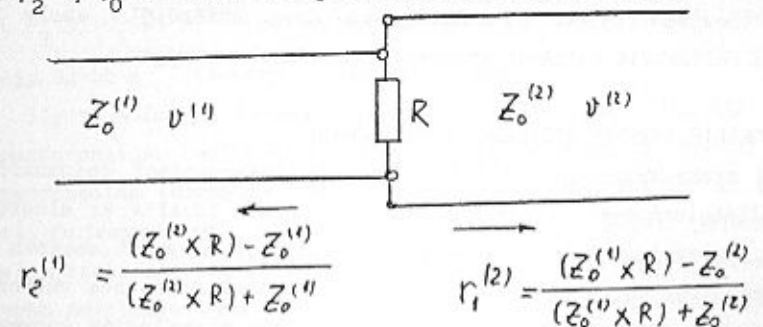
Második példaként tekintsük azt az esetet, amikor az (1) vezeték kétféle ágazik: egy (2) és egy (3) jelűre (4. ábra). A reflexiók té-



3.3-4. Ábra. A reflexiók tényezőik elágazó ideális vezetékére

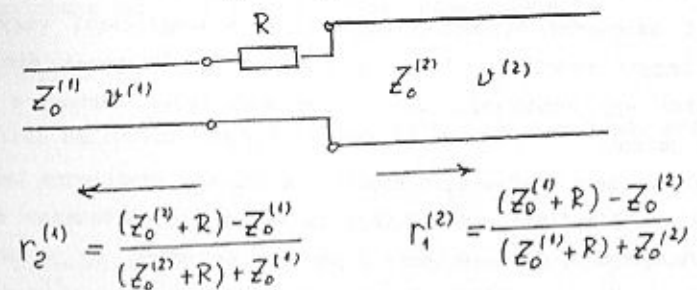
nyező szempontjából a lezárás a hullámellenállások párhuzamos eredője. A feszültség-hullámokat egyszerűbb követni, az áramok a hullámimpedancia ismeretében számíthatók. Ellenőrizhetjük, hogy az így számított áramok kielégítik Kirchhoff áramtörvényét. Javasljuk az Olvasónak a 3. ábrához hasonló vázlat elkészítését az (1) és a (2) vezeték felől érkező állandó feszültségugrás esetére.

Következő példaként tekintsük az 5. ábra szerinti elrendezést, amikor a két vezeték illeszkedési pontjai közé egy ellenállás van kapcsolva. Az illeszkedési pont két oldalán a feszültségek megegyeznek, az áramok azonban különböznek. Az Olvasóra bizzuk annak ellenőrzését, hogy az $[1 - r_2^{(1)}] U_0/Z_0^{(1)}$, az $[1 + r_2^{(1)}] U_0/Z_0^{(2)}$ és az $[1 + r_2^{(1)}] U_0/R$ áramok kielégítik Kirchhoff áramtörvényét.



3.3-5. Ábra. A reflexiók tényezőik csatlakozó vezetékére párhuzamosan kapcsolt ellenállás jelenlétében

Hasonlóak a viszonyok a 6. ábrán vázolt esetben. Most az áramok egyeznek meg a csatlakozási hely két oldalán, viszont a feszültségek különböznek. Az első reflexió után az (1) vezeték feszültsége U_0 beeső feszültség esetén $[1 + r_2^{(1)}] U_0$. Ez megegyezik az ellenálláson



3.3-6. Ábra. A reflexiók tényezőik csatlakozó ideális vezetékére sorosan kapcsolt ellenállás jelenlétében

fellépő $R [1 + r_2^{(1)}] U_0/Z_0^{(1)}$ és a (2) vezetéken haladó, az áramból számított $Z_0^{(2)} [1 - r_2^{(1)}] U_0/Z_0^{(1)}$ feszültség összegével, vagyis Kirchhoff feszültségtörvénye ki van elégítve.

Az 5. vagy a 6. ábrán vázolt elrendezésben R megválasztható úgy, hogy pl. $r_2^{(1)} = 0$ legyen. Ha $Z_0^{(2)} > Z_0^{(1)}$, akkor a párhuzamos kapcsolást, az ellenkező esetben a soros kapcsolást kell választani.

Az e pontban bemutatott példák mintájára más olyan elrendezésekre is elvégezhető a feszültség és az áram számítása, amely ideális vezeték szakaszok és ellenállások (általánosabban lineáris rezisztív kétpólusok és források) összekapcsolásából áll. Gondosan meg kell különböztetni a terjedő feszültség hullám és áram hullám amplitúdóját a vizsgált helyen fellépő feszültség és áram értékétől, amely a sorozatos reflektált hullámok szuperpozíciójaként alakul ki.

3.3-2. IDEÁLIS VEZETÉK ÁLTALÁNOS LEZÁRÁSOKKAL

Az előző szakaszban a távvezetéken lezajló bekapcsolási folyamatot annak feltételezésével vizsgáltuk, hogy a vezeték ideális és mindkét lezárása rezisztív. Ebben a frekvenciafüggetlennek nevezett esetben a feszültség hullám és az áram hullám a visszaverődések során nem változtatja alakját, csak nagysága és előjele változik a reflexiós tényező értékének megfelelően.

A folyamat elejének vizsgálata során többnyire elfogadható közelítést jelent, ha a vezetéket ideálisnak tekintjük. Egy egyszerű korrekciót ebben a szakaszban még bemutatunk. A lezárás rezisztív jellegének feltételezése azonban ritkán jelent jó közelítést. Elsősorban a szórt kapacitás hatása nem elhanyagolható. Még ha a fogyasztó az állandósult szinuszos állapot szempontjából ellenállással vagy pl. soros RL taggal modellezhető is, a bekapcsolási folyamat elejének vizsgálatakor egy kondenzátorral történő modellezés többnyire jobb közelítést jelent.

Vizsgáljuk ezért a következő modellt. A vezeték ideálisnak tekinthető, tehát csillapítási együtthatója nulla, v fázissebessége és Z_0 hullámimpedanciája a frekvenciától független és valós. Az s komplex frekvenciatartományban változatlanul értelmezhetjük az $U^+(z,s)$ és $U^-(z,s)$ vagy az $I^+(z,s) = U^+(z,s)/Z_0$ és $I^-(z,s) = -U^-(z,s)/Z_0$ beeső és

visszavert hullámokat. Ezek kapcsolatát a vezeték elején és végén az

$$\begin{aligned} r_1(s) &= \frac{U^-(0,s)}{U^+(0,s)} = \frac{Z_1(s) - Z_0}{Z_1(s) + Z_0}, \\ r_2(s) &= \frac{U^-(h,s)}{U^+(h,s)} = \frac{Z_2(s) - Z_0}{Z_2(s) + Z_0}, \end{aligned} \quad (3.3-18)$$

s -tartománybeli reflexiós tényezők adják meg. (Ennek részletesebb indokolását a következő szakaszban adjuk a Laplace transzformáció felhasználásával.) Továbbra is alkalmazhatjuk tehát a 3.3-1.3. pontban bevezetett menetdiagram elvét (2. ábra), csak most pl. az $U_1(s)$ beeső feszültség hullámot kell megszorozni az $r_2(s)$ reflexiós tényezővel és az időbeli késleltetést kifejező e^{-sT} tényezővel, majd ezt a visszavert $r_2(s) U_1(s) e^{-sT}$ feszültség hullámot az $r_1(s)$ reflexiós tényezővel és egy újabb e^{-sT} tényezővel, és így tovább.

Ilyen módon a feszültségfüggvény és az áramfüggvény Laplace transzformáltját tudjuk előállítani. Az időtartományba történő visszatranszformálás többnyire csak részlettörtekre bontást és az eltolási tétel felhasználását igényli. Némi kényelmetlenséget jelent, hogy mivel a racionális $r_1(s)$ és $r_2(s)$ hatványal is fellépnek, ezért egyre nagyobb multiplicitású pólusok lépnek fel, ami a részlettörtekre bontást kissé hosszadalmassá teszi.

Javíthatjuk számításunk pontosságát, ha figyelembe vesszük, hogy kisveszteségű vezetéken a fázissebesség az ideális esetbelivel megegyezőnek, a csillapítás frekvenciafüggetlennek tekinthető (3.2-4.2. pont). Ennek alapján feltételezzük, hogy a hullám a vezeték végéig nem csillapodik, míg a végén (a visszavert hullámra az elején) nagysága $e^{-\alpha h}$ -szorosára csökken. Ez egyenértékű azzal, hogy az

$$\hat{r}_1(s) = e^{-\alpha h} r_1(s), \quad \hat{r}_2(s) = e^{-\alpha h} r_2(s) \quad (3.3-11)$$

módosított reflexiós tényezőket használjuk, ahol (3.2-30) értelmében

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}.$$

A távvezetékek ennél pontosabb számítása nagyon nehéz feladat (l. pl. a következő szakaszt), még inkább vonatkozik ez a nem (közel) ideális távvezeték típusú elosztott paraméterű hálózatokra. Egy

elvileg egyszerű eljárás a Fourier transzformáció alkalmazása: a rögzített helyen fellépő feszültség vagy áram spektrumának számítása a 3.2. fejezet alapján nem jelent nehézséget, az időfüggvényt numerikusan, valamilyen FFT algoritmussal állíthatjuk elő.

Példaként határozzuk meg a C_2 kapacitású kondenzátorral lezárt ideális vezeték végén fellépő $u_2(t)$ feszültséget, ha a vezeték elejére feszültségforrás van kapcsolva, amelynek forrásfeszültsége

$$u_s(t) = U_0 c(t). \quad (3.3-12)$$

A reflexiók tényezőik az s -tartományban $r_1(s) = -1$ és

$$r_2(s) = \frac{(1/sC_2) - Z_0}{(1/sC_2) + Z_0} = -\frac{s-a}{s+a}; \quad a = \frac{1}{C_2 Z_0}. \quad (3.3-13)$$

A beeső feszültség transzformáltja $U_1(s) = U_0/s$. A kondenzátoron $T = h/v$ idő múlva $r_2(s) U_1(s)$ feszültség verődik vissza, tehát az első reflexió után a kondenzátoron fellépő feszültség transzformáltja

$$U_2^{(1)}(s) = [1 + r_2(s)] e^{-sT} U_1(s) = \frac{2a}{s(s+a)} e^{-sT} U_0. \quad (3.3-14)$$

A reflektált feszültség a forrásnál reflektálódik. A $-r_2(s) U_1(s)$ feszültség hullám a $3T$ időpontban a kondenzátoron újból reflektálódik. A második reflexió után a kondenzátoron

$$U_2^{(2)}(s) = -r_2(s) [1 + r_2(s)] e^{-s3T} U_1(s) = \frac{2a(s-a)}{s(s+a)^2} e^{-s3T} U_0 \quad (3.3-15)$$

Járulékos feszültség lép fel. A következő feszültségösszetevő ennek $-r_2(s) e^{-s2T}$ -szerese, és így tovább. A k -adik összetevő ezek szerint

$$U_2^{(k)}(s) = \frac{2a(s-a)^{k-1}}{s(s+a)^k} e^{-s(2k-1)T} U_0; \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3-16)$$

A kondenzátoron fellépő feszültség Laplace transzformáltja

$$U_2(s) = U_2^{(1)}(s) + U_2^{(2)}(s) + U_2^{(3)}(s) + \dots \quad (3.3-17)$$

A (16)-ból $s \rightarrow \infty$, ill. $s \rightarrow 0$ határátmenettel következik, hogy minden $U_2^{(k)}(t)$ a $t = (2k-1)T$ időpontig nulla, ott nulla értékről indul és a $2(-1)^k U_0$ határértékhez tart.

A visszatranszformálás részlettörtekre bontással végezhető el:

$$F^{(k)}(s) = \frac{2a(s-a)^{k-1}}{s(s+a)^k} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+a} + \frac{B_2}{(s+a)^2} + \dots + \frac{B_k}{(s+a)^k}.$$

A B_1 együtthatók számítása nem jelent elvi nehézséget, habár k nagy

értékeire hosszadalmas lehet. A részletszámítások mellőzésével megadjuk az eredményt k néhány értékére:

$$u_2^{(1)}(t) = 2 U_0 c(t-T) [1 - e^{-a(t-T)}], \quad (3.3-18)$$

$$u_2^{(2)}(t) = -2 U_0 c(t-3T) [1 - \{2a(t-3T) + 1\} e^{-a(t-3T)}],$$

$$u_2^{(3)}(t) = 2 U_0 c(t-5T) [1 - \{2a^2(t-5T)^2 + 1\} e^{-a(t-5T)}],$$

$$u_2^{(4)}(t) = -2 U_0 c(t-7T) [1 - \{ \frac{4}{3} a^3 (t-7T)^3 - 2a^2 (t-7T)^2 + 2a(t-7T) + 1 \} e^{-a(t-7T)}],$$

és így tovább. A keresett feszültség időfüggvénye

$$u_2(t) = u_2^{(1)}(t) + u_2^{(2)}(t) + u_2^{(3)}(t) + \dots \quad (3.3-19)$$

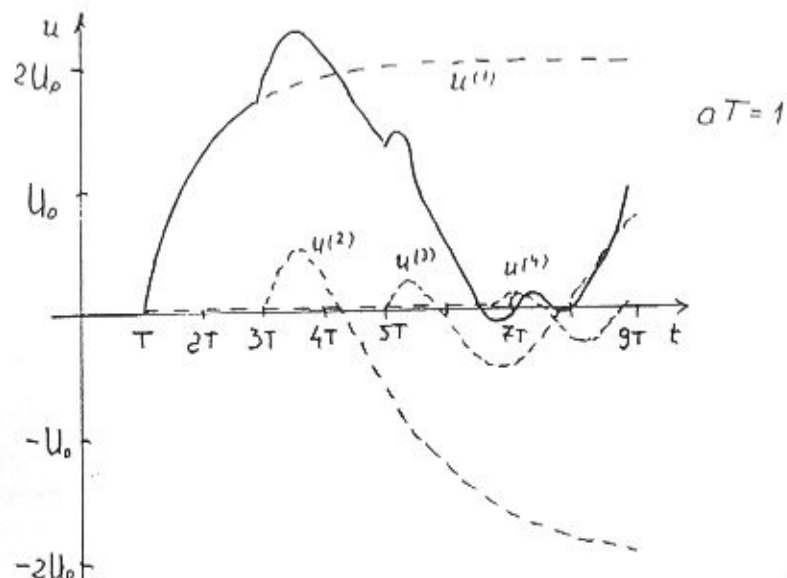
Az egyes feszültségösszetevők (szaggatott vonallal) és eredőjük (folytonos vonallal) látható a 7. ábrán az $aT = 1$, vagyis $C_2 = C'h$ esetén. Ha aT kellően nagy (kb. $aT > 5$ esetén), akkor mindegyik komponens eléri $+2 U_0$ vagy $-2 U_0$ állandósult állapotát, mielőtt a következő komponens elkezdődne. Ekkor u_2 egy periodikus négyszögjelre emlékeztet. Ha aT viszonylag kicsi, akkor u_2 lefolyása hullámosabb, mint ez a 7. ábra is mutatja.

A (18) és (19) alapján látható, hogy ebben a közelítésben a feszültség nem tart valamilyen állandó értékhez. Ez érthető is, hiszen a vizsgált rendszer veszteségmentes. Ha a veszteségek elég kicsik, akkor hatásuk úgy vehető figyelembe, hogy a (18) szerinti komponenseket megszorozzuk az $e^{-\alpha h}$, $e^{-3\alpha h}$, $e^{-5\alpha h}$, $e^{-7\alpha h}$... tényezővel. Ebben a közelítésben a feszültség állandósult értéke

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2(t) = \frac{e^{-\alpha h}}{1 + e^{-\alpha h}} 2U_0 \approx U_0,$$

ahol a közelítés $\alpha h \ll 1$, $e^{-\alpha h} \approx 1$ esetén érvényes. Például távbeszélő-vezeték esetén $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-3}/\text{km}$, tehát $h = 2 \text{ km}$ esetén $\alpha h \approx 0,01$ és így $e^{-\alpha h} \approx 0,99$. Ilyen feltételek mellett a csillapítás gyakorlatilag nem befolyásolja az első néhány komponens és azok eredőjét, sőt az állandósult feszültség is alig különbözik az U_0 értéktől.

Hasonló módon határozható meg a feszültség és az áram időfüggvénye más forrásfeszültség vagy forrásáram esetén is. Figyelembe vehetjük a generátor belső impedanciáját is.



3.3-7. Ábra. A feszültség időbeli változása a kondenzátorral lezárt ideális vezeték végén egyenfeszültség bekapcsolásakor

3.3-3. AZ ÁLTALÁNOS ESET

3.3-3.1. A transzformált vezetékegyenletek

Vizsgáljuk meg most az átmenti folyamatok számítását abban az általános esetben, amikor nem feltételezzük a vezeték ideális voltát. Ilyenkor vissza kell nyúlnunk az időtartománybeli (3.1-1) táviró egyenletekhez, amelyek az $u = u(z, t)$ és $i = i(z, t)$ függvényekre vonatkoznak:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = L' \frac{\partial i}{\partial t} + R' i, \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = C' \frac{\partial u}{\partial t} + G' u. \quad (3.3-21)$$

Alkalmazzuk az egyenletekre a Laplace transzformációt a t változó szerint. Ennek során az időtől független z változó paraméternek tekinthető, ezért a z szerinti differenciálás és a Laplace transzformálás sorrendje felcserélhető. Az

$$U(z, s) = \mathcal{L}\{u(z, t)\}, \quad I(z, s) = \mathcal{L}\{i(z, t)\} \quad (3.3-22)$$

transzformált változókra a következő közönséges differenciálegyenletek adódnak:

$$-\frac{dU}{dz} = L' [s I - i(z, -0)] + R' I, \\ -\frac{dI}{dz} = C' [s U - u(z, -0)] + G' U \quad (3.3-23)$$

Szorítkozzunk egyelőre bekapcsolási folyamat vizsgálatára, amikor az $u(z, -0)$ és $i(z, -0)$ kiindulási feszültségeloszlás és árameloszlás nulla. Ekkor a megoldandó differenciálegyenletek egyszerűsödnek:

$$-\frac{dU}{dz} = (sL' + R') I, \\ -\frac{dI}{dz} = (sC' + G') U. \quad (3.3-24)$$

Ezek az egyenletek $s = j\omega$ helyettesítéssel alakilag megegyeznek a szinuszos esetre vonatkozó (3.2-2) egyenletekkel. Az analógia alapján felírhatók az általános megoldások:

$$U(z, s) = U_1^+(s) e^{-\gamma(s) z} + U_1^-(s) e^{+\gamma(s) z}, \\ I(z, s) = \frac{U_1^+(s)}{Z_0(s)} e^{-\gamma(s) z} - \frac{U_1^-(s)}{Z_0(s)} e^{+\gamma(s) z}. \quad (3.3-25)$$

A két tagot nevezhetjük a z -tengely pozitív, ill. negatív irányában terjedő hullámnak, de ez az értelmezés nem általános érvényű. Az s -tartománybeli terjedési együttható és hullámimpedancia

$$\gamma(s) = \sqrt{(R' + sL')(G' + sC')}, \quad Z_0(s) = \sqrt{\frac{R' + sL'}{G' + sC'}}. \quad (3.3-26)$$

Legyen pl. adott a $Z_2(s) = U_2(s)/I_2(s)$ szekunder oldali lezáró impedancia, továbbá a primer oldalra kapcsolt feszültséggenerátor $U_s(s)$ forrásfeszültsége és $Z_1(s)$ belső impedanciája. Az $U_1(s)$ és $U_2(s)$ meghatározására szolgáló peremfeltételek ekkor

$$U_1^+ e^{-\gamma h} + U_1^- e^{+\gamma h} = Z_2 \left(\frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma h} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma h} \right), \\ (U_1^+ + U_1^-) + Z_1 \left(\frac{U_1^+}{Z_0} - \frac{U_1^-}{Z_0} \right) = U_s. \quad (3.3-27)$$

Vezessük be a primer- és a szekunderoldali s -tartománybeli reflexiók tényezőit:

$$r_1(s) = \frac{Z_1(s) - Z_0(s)}{Z_1(s) + Z_0(s)}, \quad r_2(s) = \frac{Z_2(s) - Z_0(s)}{Z_2(s) + Z_0(s)}. \quad (3.3-28)$$

Rövid számolással belátható, hogy a (27) egyenletrendszer megoldása

$$U_1^+ = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \frac{U_s}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma h}}, \quad U_1^- = r_2 e^{-2\gamma h} U_1^+. \quad (3.3-29)$$

A peremfeltételeket is kielégítő s -tartománybeli megoldás tehát:

$$U(z, s) = \frac{Z_0(s)}{Z_0(s) + Z_1(s)} \frac{e^{-\gamma(s)z} + r_2(s) e^{-\gamma(s)[2h-z]}}{1 - r_1(s) r_2(s) e^{-2\gamma(s)h}} U_s(s), \quad (3.3-30)$$

$$I(z, s) = \frac{1}{Z_0(s) + Z_1(s)} \frac{e^{-\gamma(s)z} - r_2(s) e^{-\gamma(s)[2h-z]}}{1 - r_1(s) r_2(s) e^{-2\gamma(s)h}} U_s(s).$$

Az időfüggvények meghatározásához ezek inverz Laplace transzformáltját kell számítanunk. Ez általános esetben nagyon nehéz feladat. Az inverziós integrál alkalmazása is csak speciális esetekben vezet kezelhető eredményre.

Az időfüggvény számítását sokszor megkönnyíti, ha a függvényeket $e^{-\gamma(s)x}$ szerinti sor alakjában állítjuk elő. Ehhez felhasználhatjuk a $q = r_1 r_2 e^{-2\gamma h}$ hányadosú mértani sor összegképletét:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$$

Ez a sor akkor konvergens, ha $|r_1 r_2 e^{-2\gamma h}| < 1$, ami $s = \infty$ környezetében biztosan ki van elégítve. Ez azt jelenti, hogy az így kapott megoldás $t = 0$ környezetében, vagyis a folyamat elején jó közelítést jelent. A (30) megoldás ezzel a következő alakban írható:

$$U(z, s) = U_s(s) \frac{Z_0(s)}{Z_0(s) + Z_1(s)} \left[e^{-\gamma(s)z} + r_2(s) e^{-\gamma(s)[2h-z]} + r_1(s) r_2(s) e^{-\gamma(s)[2h+z]} + r_1(s) r_2^2(s) e^{-\gamma(s)[4h-z]} + r_1^2(s) r_2^2(s) e^{-\gamma(s)[4h+z]} + \dots \right], \quad (3.2-31)$$

$$I(z, s) = U_s(s) \frac{1}{Z_0(s) + Z_1(s)} \left[e^{-\gamma(s)z} - r_2(s) e^{-\gamma(s)[2h-z]} + r_1(s) r_2(s) e^{-\gamma(s)[2h+z]} - r_1(s) r_2^2(s) e^{-\gamma(s)[4h-z]} + r_1^2(s) r_2^2(s) e^{-\gamma(s)[4h+z]} + \dots \right]. \quad (3.2-32)$$

Az s -tartománybeli eredmény a következőképpen értelmezhető. A vezetéken megindul egy $U_1 = U_s Z_0 / (Z_0 + Z_1)$ által leírt feszültség hullám, amely $e^{-\gamma z}$ szerint "csillapodik". A vezeték végén értéke $U_0 e^{-\gamma h}$, itt $r_2 U_0 e^{-\gamma h}$ visszaverődik, majd $e^{-\gamma(h-z)}$ szerint "csillapodva" terjed

visszafelé. A generátornál a reflexiós tényező r_1 , ezért az ott visszaverődő feszültség hullám $r_1 e^{-\gamma h} (r_2 U_0 e^{-\gamma h})$, és így tovább. Hasonló az áramfüggvény egyes tagjainak értelmezése. Mivel $\gamma(s)$ irracionális függvénye s -nek, ezért $e^{-\gamma(s)z}$ általában nem tekinthető egy csillapodva haladó hullám leírásának.

A konkrét feladat ezek szerint a következő függvények inverz Laplace transzformáltjának meghatározása:

$$G_k(s) = U_0(s) r_1^k(s) r_2^k(s) e^{-\gamma(s)x}, \quad H_k(s) = r_2(s) G_k(s),$$

$$U_0(s) = \frac{Z_0(s)}{Z_0(s) + Z_1(s)} U_s(s), \quad (3.3-33)$$

ahol x egy a z -től is függő távolság. Mivel $\gamma(s)$ és $Z_0(s)$ általában irracionális függvény, ezért ez nagyon nehéz feladat, a továbbiakban csak közelítő megoldásával foglalkozunk.

3.3-3.2. Kisveszteségű vezeték vizsgálata

A nagyon nehezen megoldható általános eset helyett szorítkozunk kisveszteségű vezeték vizsgálatára, vagyis arra az esetre, amikor teljesülnek az $R' \ll |s| L'$ és $G' \ll |s| C'$ feltételek. Ezek felhasználása annál kisebb hibát jelent, minél nagyobb $|s|$ értéke, vagyis minél inkább az átmeneti folyamat elejére szorítkozunk.

A legegyszerűbb közelítésben a vezeték ideálisnak tekintjük. Ekkor $\gamma(s) = s/v$ és $Z_0(s) = \sqrt{L'/C'}$. Ekkor racionális $Z_1(s)$ és $Z_2(s)$ esetén $r_1(s)$ és $r_2(s)$ is racionális, továbbá $e^{-\gamma(s)x} = e^{-sx/v}$, tehát az exponenciális szorzó az időtartományban csak késleltetést jelent. Ily módon ahhoz a megoldáshoz jutunk, amelyet az előző két szakaszban egyszerűbb megfontolásokkal már előállítottunk.

Jobb közelítéshez a függvények s^{-1} szerinti hatványsorával juthatunk. A (3.2-30) és (3.2-31) mintájára a következő közelítések adódnak

$$\gamma(s) = \frac{s}{v} + \alpha, \quad Z_0(s) = R_0 + \frac{R' v}{2s}, \quad (3.3-34)$$

ahol a v fázissebesség, az R_0 hullámellenállás és az az α csillapítási együttható kifejezése

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \quad \alpha \approx \frac{R'}{2 R_0}. \quad (3.3-35)$$

Ha $Z_1(s)$ és $Z_2(s)$ racionális, akkor $r_1(s)$ és $r_2(s)$ továbbra is

racionális. Az $e^{-\gamma(s)x} = e^{-\alpha x} e^{-sx/v}$ tényező az időtartományban a késleltetés mellett a távolságtól függő csillapítást jelent. Ez is olyan eredmény, amelyet egyszerűbb megfontolásokkal is meg lehet kapni, mint az előző szakaszban láttuk.

A $Z_0(s)$ hullámimpedanciára nehézség nélkül előállítható a (34)-nél jobb racionális közelítés, amelynek figyelembe vétele a visszatranszformálást nem nehezíti meg lényegesen. A $\gamma(s)$ terjedési együttható jobb racionális közelítése egy m/s alakú további tagot tartalmaz (m a vezetékparaméterek által meghatározott állandó). Az $e^{-mx/s}$ alakú tényező hatása az időfüggvényre nem fejezhető ki egyszerű módon. Csak a teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy Bessel függvénnyel végzett konvolúció elvégzésére van szükség.

E pont eredményei abban foglalhatók össze, hogy a Laplace transzformáció alapján igazoltuk azokat az eredményeket, amelyeket az s -tartományban formális analógia alapján már előállítottunk.

3.3-3.3. Nem bekapcsolási folyamat

Térjünk most vissza az általánosabb eset vizsgálatához, amikor a vezetéken a $t = -0$ időpontra kialakuló $u(z, -0)$ feszültségeloszlás és $i(z, -0)$ árameloszlás ismert. Ezek eredete lehet a távvezeték üzem-szerű állandósult állapota, de lehet külső oka is, mint pl. atmoszférikus hatás vagy egy másik vezeték befolyása.

Az $U = U(z, s)$ és $I = I(z, s)$ transzformált változókra vonatkozó (23) szerinti differenciálegyenlet átrendezett alakja

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= -[sL' + R'] I + L' i(z, -0), \\ \frac{dI}{dz} &= -[sC' + G'] U + C' u(z, -0). \end{aligned} \quad (3.3-36)$$

A transzformált áramfüggvény kifejezése az első egyenletből

$$I(z, s) = -\frac{1}{sL' + R'} \frac{dU(z, s)}{dz} + \frac{L'}{sL' + R'} i(z, -0). \quad (3.3-37)$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve némi rendezéssel a

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = -C'(sL' + R') u(z, -0) + L' \frac{di(z, -0)}{dz} \quad (3.3-38)$$

másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet adódik az $U(z, s)$ függvény meghatározására. Ennek általános megoldása a homogén diffe-

renciálegyenlet - amikor $u(z, -0) = 0$ és $i(z, -0) = 0$ - általános megoldásának és az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának összege. Előbbit a (25) adja meg. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását rendszerint a próbafüggvények módszerével állítjuk elő. Az általános megoldásban szereplő két állandó a peremfeltételek alapján határozható meg. Mivel nem bekapcsolási folyamatról van szó, ezért a lezárások figyelembe vételét meg kell gondolnunk, szükség lehet pl. a kiindulási feltételeket figyelembe vevő fiktív források bevezetésére is.

Az $U(s, z)$ függvény visszatranszformálása csak akkor végezhető el egyszerűen, ha a vezetéket ideálisnak tekintjük. Ekkor $\gamma(s) = s/v$, ahol $v = 1/\sqrt{L'C'}$ és $Z_0 = \sqrt{L'/C'}$.

Példaként tekintsünk egy ideális vezetéket, amelynek mindkét vége nyitott, a $t = -0$ időpontban $u(z, -0) = U_0$ és $i(z, -0) = 0$. A $t = 0$ időpontban a vezeték elejét rövidrezárjuk. Meghatározandó a nyitott vég feszültsége.

Ebben az esetben a (38) egy $U_{1h}(z, s)$ partikuláris megoldása ugyancsak független z -től. Ez a

$$-\frac{s^2}{\sqrt{2}} U_{1h}(z, s) = -\frac{s}{\sqrt{2}} U_0$$

egyenletből határozható meg: $U_{1h}(z, s) = U_0/s$. Az általános megoldás

$$U(z, s) = U_1^+(s) e^{-s \cdot z/v} + U_1^-(s) e^{+s \cdot z/v} + \frac{U_0}{s}.$$

Az áramfüggvényre vonatkozó általános megoldás (37) értelmében

$$I(z, s) = \frac{U_1^+(s)}{Z_0} e^{-s \cdot z/v} - \frac{U_1^-(s)}{Z_0} e^{+s \cdot z/v}.$$

Mivel a vezeték elején a feszültség nulla, végén pedig az áram nulla, ezért $U(0, s) = 0$ és $I(h, s) = 0$. Az $U_1^+(s)$ és $U_1^-(s)$ "állandók" meghatározására szolgáló egyenletek tehát $T = h/v$ jelöléssel

$$U_1^+ + U_1^- + \frac{U_0}{s} = 0, \quad U_1^+ e^{-sT} - U_1^- e^{+sT} = 0.$$

Ebből $U_1^+(s)$ és $U_1^-(s)$ kifejezhető. A transzformált feszültségfüggvény kifejezése némi számolással

$$U(z, s) = \frac{U_0}{s} \frac{1 - e^{-sTz/h} + e^{-s2T} - e^{-s(2-z/h)T}}{1 + e^{-s2T}}.$$

A nyitott végen $U_2(s) = U(h, s)$, vagyis

$$U_2(s) = \frac{U_0}{s} \frac{1 - 2e^{-sT} + e^{-s2T}}{1 + e^{-s2T}} =$$

$$= \frac{U_0}{s} \frac{1 - 2e^{-sT} + 2e^{-s2T} - e^{-s4T}}{1 - e^{-s4T}}$$

A második alakból látható, hogy mivel

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - 2e^{-sT} + 2e^{-s2T} - e^{-s4T}}{s} \right\} = 0, \text{ ha } t > 4T, \text{ ezért}$$

a folyamat t pozitív értékeire periodikus $4T$ periódusidővel:

$$u_2(t) = \begin{cases} U_0, & 0 < t < T, \\ -U_0, & T < t < 3T, \\ U_0, & 3T < t < 4T. \end{cases}$$

Mivel mind a vezeték, mind lezárásait veszteségmentesnek tekinttük, a folyamat periodikus jellege nem meglepő.

A vezeték kis veszteségeinek figyelembe vétele nem jelent elvi nehézséget, de a számítás lényegesen hosszadalmasabb. Általánosabb lezárások is figyelembe vehetők. Ekkor az előző szakaszokban látottakhoz hasonló összefüggések adódnak.

3.4. FELADATOK

3.4-1. SZINUSZOS ÁLLAPOT TÁVVEZETÉKEN

3.4-1.1. Kettősvezeték vezetőinek sugara $r_0 = 2$ mm, középvonaluk távolsága $d = 24$ mm, a vezeték anyaga réz ($\sigma = 57 \cdot 10^6$ S/m), a légszigetelés tökéletesnek tekinthető.

Határozza meg a távvezeték R' , L' , G' , C' , γ , α , β , v , Λ és Z_0 paramétereit a következő frekvenciákon: (a) $f = 50$ Hz; (b) $f = 1$ kHz; (c) $f = 10$ kHz; (d) $f = 1$ MHz. (Ha már áttanulmányozta a 4.2-4. szakaszt, akkor gondolja meg, hogy mikor kell figyelembe venni az áramkiszorítás hatását.)

3.4-1.2. Ideálisnak tekinthető koaxiális kábel erének sugara r_1 , köpenyének belső sugara $r_2 = 20$ mm, külső sugara $r_3 = 24$ mm.

Határozza meg a belső sugarat úgy, hogy a kábel hullámellenállása $Z_0 = 60 \Omega$ legyen, ha a szigetelőanyag

(a) levegő.

(b) trolitul, amelyre $\epsilon_r = 2,3$.

3.4-1.3. Koaxiális csillapítókábel vezetőjének anyaga alumínium ($\sigma = 35 \cdot 10^6$ S/m), erének sugara $r_1 = 6$ mm, köpenyének belső, ill. külső sugara $r_2 = 18$ mm, ill. $r_3 = 22$ mm, a szigetelőanyag polietilén ($\epsilon_r = 5,5$; $10^4 \cdot \text{tg } \delta = 4$).

Határozza meg $\lambda = 10$ cm szabadtéri hullámhosszra a terjedési együtthatót és a hullámimpedanciát. Milyen frekvencián lesz Z_0 valós? (Az ϵ_r és a $\text{tg } \delta$ értékét tekintse frekvenciafüggetlennek. Ismételje meg a számítást, ha már megismerkedett az áramkiszorítás hatásával.)

3.4-1.4. Egy távvezeték adatai $R' = 2 \Omega/\text{km}$, $L' = 4$ mH/km, $G' = 0,4$ mS/km, $C' = 3$ nF/km, hossza $h = 8$ km.

Határozza meg $f = 12$ kHz frekvencián a csillapítási és a fázis-együtthatót, a terjedési együttható és a hullámimpedancia abszolút értékét és szögét, a vezetéken mért hullámhosszt és a fázissebességet. Hasonlítsa össze ezeket az eredményeket a kis veszteségű és a veszteségmentes közelítéssel számítással.

3.4-1.5. Ideális, légszigetelésű távvezeték hossza $h = 20$ km, hullámellenállása $Z_0 = 500 \Omega$. A primer oldalra kapcsolt feszültségforrás frekvenciája $f = 5$ MHz. A vezeték a szekunder oldalon lezáró impedancia $Z = (300 + j 400) \Omega$, feszültségének amplitúdója $U_2 = 30$ V.

Határozza meg a beeső és a visszavert feszültség-hullám komplex amplitúdóját a forrásnál és a lezárásnál. Írja fel a feszültségeloszlás időfüggvényét. Határozza meg az állóhullám- és a haladóhullámviszonyt.

3.4-1.6. Ideális, légszigetelésű távvezeték hullámimpedanciája $Z_0 = 120 \Omega$, hossza $h = 150$ m, bemeneti impedanciája $f = 20$ MHz frekvencián $Z_B = (200 - j 100) \Omega$.

Határozza meg a lezáró impedanciát.

3.4-1.7. Ideális, légszigetelésű távvezeték hullámimpedanciája $Z_0 = 80 \Omega$, hossza $h = 200$ m. A lezáró impedancia $f = 18$ MHz frekvencián $Z_2 = (30 - j 40) \Omega$.

Határozza meg azt a primer feszültséget, amelynek hatására a lezáráson $I = 0,5$ A amplitúdójú áram lép fel. Mekkora a hatásfok (a lezárás és a lezárt távvezeték által felvett hatásos teljesítmény viszonya)?

3.4-1.8. A reflexió tényező mint a hely függvénye

$$r(z) = \frac{U^-(z)}{U^+(z)}$$

összefüggéssel értelmezett.

Igazolja, hogy az eddig is alkalmazott jelölésekkel

$$r(z) = r_2 e^{-2\gamma(h-z)}$$

Megválasztható-e az ideális vezeték hossza úgy, hogy adott r_2 mellett $r(0) = 0$ legyen?

3.4-1.9. Adott egy távvezeték rögzített frekvenciára vonatkozó Z_0 hullámimpedanciája és γ terjedési együtthatója, továbbá h hossza és így a $g = \gamma h$ mennyiség is.

Fejezze ki ezekkel a távvezeték helyettesítő T-tagjának impedanciát és Π -tagjának admittanciát. Ellenőrizze az eredményt a (hullámhosszhoz képest) rövid távvezetékre.

3.4-1.10. Egy ideális, légszigetelésű, $Z_0 = 200 \Omega$ hullámimpedanciájú távvezeték $C = 10 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátorral van lezárva.

Határozza meg a vezeték azon legkisebb h_{rZ} , ill. h_{sz} hosszát, amely mellett a lezárt vezeték szakasz $f = 20$ MHz frekvencián rövidzárként, ill. szakadásként viselkedik. Mekkora a további ilyen hosszak?

3.4-1.11. Egy veszteségmentes távvezeték hullámellenállása Z_0 .

Igazolja, hogy azon a frekvencián, amelyen a vezeték hossza a vezetéken mért $\lambda = 1/(f \sqrt{L'C'})$ hullámhossz fele, ill. negyede, a Z_2 impedanciával lezárt vezeték bemeneti impedanciája $Z_B(\lambda/2) = Z_2$, ill. $Z_B(\lambda/4) = Z_0^2/Z_2$. Az utóbbi eset jelenti a bevezetésben említett (negyed hullámhosszúságú) impedanciáttranszformátort.

3.4-1.12. Egy veszteségmentes vezeték hullámellenállása Z_0 , a Z_2 lezáró impedancia egy adott frekvencián valós értékű.

Igazolja, hogy ha a vezeték vége és a lezárás közé egy olyan vezeték szakaszt iktatunk, amelynek hossza az adott frekvenciához tartozó hullámhossz negyede és hullámimpedanciája $\sqrt{Z_0 Z_2}$, akkor a vezeték végén nem lép fel reflexió (negyedhullámhosszúságú impedanciáttranszformátor).

3.4-1.13. Egy ideális, légszigetelésű, $h = 20$ m hosszúságú vezeték szakasz egyik vége rövidzárral, másik vége $L = 4$ mH induktivitású kétpólussal van lezárva.

Határozza meg a rezgőrendszer sajátfrekvenciáit!

3.4-1.14. Légszigetelésű, ideálisnak tekinthető távvezeték szakasz hullámimpedanciája $Z_0 = 150 \Omega$, hossza $h = 1,2$ m. Egyik vége nyitott, másik vége C kapacitású kondenzátorral van lezárva.

Határozza meg C értékét úgy, a sajátrezgés frekvenciája $f = 100$ MHz legyen! Van-e a feladatnak több megoldása? Függ-e az egyértelműség az adatoktól?

3.4-2. ÁTMENETI FOLYAMAT TÁVVEZETÉKEN

3.4-2.1. Ideálisnak tekinthető légszigetelésű távvezeték hullámellenállása $Z_0 = 500 \Omega$, hossza $h = 900$ m. A szekunder oldali lezáró ellenállás $R_2 = 2000 \Omega$. A $t = 0$ időpontban a primer oldalra $U = 100$ V állandó forrásfeszültségű feszültséggenerátort kapcsolunk, amelynek belső ellenállása (a) $R_1 = 0$; (b) $R_1 = 500 \Omega$; (c) $R_1 = 100 \Omega$.

Határozza meg a távvezeték elején és végén a feszültség időbeli változását. Mennyi idő után éri el a feszültség állandósult értékének 90%-át?

3.4-2.2. Az előző feladatban legyen $R_1 = 0$ és a forrásfeszültség időfüggvénye: $u_s(t) = U$, ha $0 < t < T$ és $u_s(t) = 0$ egyébként.

Határozza meg a lezárás feszültségének időfüggvényét, ha (a) $T = 2 \mu\text{s}$; ill. (b) $T = 10 \mu\text{s}$.

4. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

A 2. részben az időben állandó elektromos és mágneses terek törvényeivel, legfontosabb jelenségeivel és néhány számítási módszerével foglalkoztunk. Ebben a részben rátérünk az időben változó elektromágneses tér tárgyalására.

A 4.1. fejezetben azt vizsgáljuk, hogy miként határozható meg az erőter az árameloszlás és a töltéseloszlás ismeretében. Eredményeink adják az antennák számításának alapját. Itt a legegyszerűbb antennatípus tárgyalására szorítkozunk.

A 4.2. fejezetben a legegyszerűbb hullámforma, a síkhullám néhány alapvető tulajdonságát vizsgáljuk. Külön foglalkozunk az ideális és a veszteséges szigetelőkben, ill. a vezetőkben kialakuló síkhullámokkal. Sok gyakorlati feladat síkhullámú közelítéssel kielégítő pontossággal tárgyalható. Általánosabb hullámok előállíthatók síkhullámok szuperpozíciójaként, ezzel azonban nem foglalkozunk. Nem tárgyaljuk az elektromágneses hullámok elhajlásának és szóródásának igen fontos problémáit sem.

A 4.3. fejezetben a vezetett hullámok két típusát tárgyaljuk: a fémfalak által határolt csőtápvonalakat és az inhomogén szigetelőből kialakított szigetelő réteg hullámvezetőt (amely az optikai szál egy erősen egyszerűsített modellje). Csak a haladó hullám tulajdonságaival és terjedésének feltételeivel foglalkozunk egyszerű geometriai feltételek mellett. A be- és a kicsatolás módja vagy az inhomogén kitöltésű csőtápvonal tárgyalása kívül esik kereteinken.

Még érintőlegesen sem foglalkozunk az elektromágneses tér számításának numerikus módszereivel. A rácsmódszer általánosításának nincs akadálya. Az antennák számításánál elterjedten használják a megfelelő integrálegyenlet közelítő megoldását. A legelterjedtebbek talán a véges elemek módszerének különböző változatai, de más módszerek is használatosak.

4.1-1. AZ ALAPEGYENLETEK

Az elektromágneses tér alapegyenletei, a Maxwell egyenletek (1.6-1. szakasz) a következő alakúak lineáris, izotrop közegben olyan térrészre szorítkozva, ahol nincs belktatott térerősség:

$$\begin{aligned} \text{(I.)} \quad \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{(II.)} \quad \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(III.)} \quad \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{(IV.)} \quad \text{div } \mathbf{D} &= \rho, \\ \text{(V.)} \quad \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.1-1)$$

Feltételezésünk szerint az ϵ permittivitás, a μ permeabilitás és a σ konduktivitás legalább térrészenként állandó. A továbbiakban erre az esetre szorítkozunk.

Ebben a fejezetben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ áramsűrűség és a $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ töltéssűrűség ismert. Ezek nem választhatók meg önkényesen, mert a

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.1-2)$$

folytonossági egyenletnek teljesülnie kell. Ebből következik, hogy ha $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ismert, akkor $\rho(\mathbf{r}, t)$ egy időben állandó - és ezért érdektelen - összetevőtől eltekintve meghatározott. Tipikusan kiskörésmetszetű vezetésekre lehet az $\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$ árameloszlásra ésszerű közelítő feltételezésekkel élni. Az árameloszlás pontos számítása nehéz feladat, amivel nem is fogunk foglalkozni.

A III. Maxwell egyenlet értelmében a forrásmentes $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ indukció vektor előállítható egy $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektorpotenciál rotációjaként:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (4.1-3)$$

A $\text{div } \mathbf{A}$ értékét később választjuk meg. Ezt a II. Maxwell egyenletbe helyettesítve

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = - \text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Ebből következik, hogy $\text{rot} (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$. Az örvénymentes vektor előállítható egy $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ skalár potenciál (negatív) gradienseként,

tehát

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.1-4)$$

Ebből következik, hogy két pont közötti feszültség kifejezése

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \int_{r_1}^{r_2} \text{grad } \varphi \, d\mathbf{l} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \, d\mathbf{l}.$$

A gradiens tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) - \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{A} \, d\mathbf{l}, \quad (4.1-5)$$

vagyis a feszültség nem egyenlő a két pont (skaláris) potenciáljának különbségével, hanem függ a vektorpotenciálnak a két pontot összekötő görbe menti integráljától is, amely a rögzített végpontú egyes görbékre általában különböző. Ez annak következménye, hogy időben változó mágneses tér jelenlétében két pont közötti elektromos feszültség nincs egyértelműen meghatározva (1.7-3.1. pont).

Helyettesítsük $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ és $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$ (3) és (4) szerinti kifejezését az I. Maxwell egyenletbe. A bal, ill. a jobb oldal átírt alakja

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} (\text{grad } \text{div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(- \text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = - \epsilon \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Az átalakítások során felhasználtuk, hogy kikötésünk értelmében ϵ és μ térrészenként állandó. Az I. Maxwell egyenlet átírt alakja tehát

$$\text{grad } \text{div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = - \epsilon \mu \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu \mathbf{J} = 0. \quad (4.1-6)$$

Az egyenlet egyszerűsíthető $\text{div } \mathbf{A}$ alkalmas megválasztásával. Annak érdekében, hogy az egyenletből a φ potenciált kiküszöböljük, a

$$\text{div } \mathbf{A} = - \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.1-7)$$

választással célszerű élni, ez az ún. Lorentz mérték. Megjegyezzük, hogy a $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ún. Coulomb mérték választásával ugyan kevésbé áttekinthető, de a numerikus közelítő eljárások szempontjából előnyösebb alakhoz jutnánk. A (7) felhasználásával a vektorpotenciálra a

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (4.1-8)$$

inhomogén hullámegyenlet adódik.

A vektorpotenciál ismeretében a skalár potenciál idő szerinti deriváltja (7) szerint divergenciaképzéssel $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ segítségével kifejezhető, majd ebből $\varphi(\mathbf{r}, t)$ már számítható - eltekintve egy az időtől független és ezért érdektelen additív helyfüggvénytől. A (8) megoldásának ismeretében tehát az elektromos és a mágneses erőter egyaránt számítható. Gyakran azonban egyszerűbb úgy eljárni, hogy $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ismeretében a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ mágneses indukciót és a $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ mágneses térerősséget számítjuk, majd az I. Maxwell egyenletből kifejezzük \mathbf{D} idő szerinti deriváltját, amiből $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ egy időben állandó összetevőtől eltekintve már kifejezhető (4.1-4.2. pont).

A teljesség kedvéért azonban állítsuk elő a φ skalár potenciálra vonatkozó differenciálegyenletet is. A IV. Maxwell egyenletbe helyettesítve és a Lorentz mértéket felhasználva

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \\ &= -\epsilon \Delta \varphi - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \rho. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a skalár potenciálra is a

$$\Delta \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (4.1-9)$$

inhomogén hullámegyenlet vonatkozik.

Ha az időbeli változás kellően lassú, akkor \mathbf{A} és φ idő szerinti második deriváltja elhanyagolhatóan kicsi. Ekkor ezek a mennyiségek a $\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$, ill. a $\Delta \varphi = -\rho/\epsilon$ vektoriális, ill. skaláris Poisson egyenletet elégítik ki. Ez jelenti a kvázistacionárius közelítést (2.2-5. és 4.1-3. szakasz).

Szinuszos időbeli változás esetén az $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \}$ alakban értelmezett $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ komplex vektorpotenciálra a

$$\Delta \mathbf{A} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

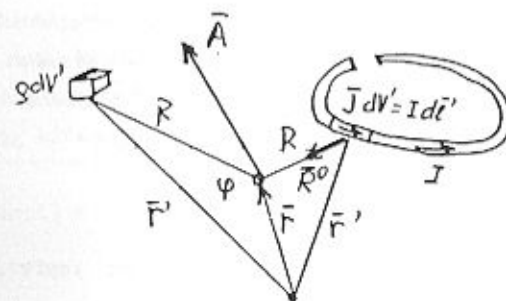
vektoriális inhomogén Helmholtz egyenlet vonatkozik. Ezt azonban nem fogjuk a továbbiakban használni.

4.1-2. A RETARDÁLT POTENCIÁLOK

A (8) és (9) inhomogén hullámegyenletnek megadható az általános megoldása, ha a teret kitöltő közeg homogén, vagyis ha ϵ és μ állandó az egész térben (rendszerint $\epsilon = \epsilon_0$ és $\mu = \mu_0$). A hosszadalmas levezetés mellőzésével az eredmény megadására és értelmezésére szorítkozunk.

Az adott $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ töltéeloszlás és $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ árameloszlás által létrehozott skalár potenciál és vektorpotenciál kifejezése homogén lineáris és izotrop közegben (1. ábra)

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{R} \rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}) dV', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}) dV', \\ R &= |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \end{aligned} \quad (4.1-10)$$



4.1-1. ábra. Az adott töltéeloszlás és árameloszlás által létrehozott potenciálok számítása. A valóságban a töltés és az áram térben nem különül el

Ha az erőteret a töltésekhez és az áramokhoz nagyon közel keressük, vagyis ha minden előforduló R távolság olyan kicsi, hogy az R/v időközök mind elhanyagolhatóak, akkor a sztatikus elektromos térre vonatkozó skalár potenciál, ill. a stacionárius mágneses térre vonatkozó vektorpotenciál kifejezése adódik (2.1-2., ill. 2.2-2. szakasz). Az R/v azt az időközt jelenti, amely alatt a v sebességgel terjedő elektromágneses hatás (hullám) megteszi az R távolságot, vagyis eljut a

vizsgált töltéselemtől és áramelemtől a vizsgálati pontig. Egy f frekvenciával jellemezhető (pl. periodikus vagy sávkorlátozott) folyamat esetén ennek feltétele $R/v \ll 1/f$ vagy a $\lambda = v/f$ hullámhosszal kifejezve

$$R \ll \lambda. \quad (4.1-11)$$

Ez a kvázistacionárius közelítés alkalmazhatóságának feltétele.

Általános esetben (10) értelmében a t időpontban fellépő potenciálok számításánál nem a t időpontbeli töltés- és árameloszlásokat kell figyelembe venni hanem az R/v idővel korábbi, a $t-R/v$ időpontban fellépő töltés- és áramértékekből kell a potenciálokot meghatározni. A (10) által megadott skalár- és vektorpotenciált ezért késleltetett vagy retardált potenciáloknak nevezik.

Az inhomogén hullámegyenlet megadott megoldása ezek szerint szemléletes tartalmú. A következő szakaszban látni fogjuk, hogy az eredmény ennek ellenére nem magától értetődő.

4.1-3. AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT BIOT - SAVART TÖRVÉNY

Az előző szakaszban megadott eredmények alapján kézenfekvőnek tűnik, hogy a vonalszerű vezetékben folyó, időben változó áramhoz tartozó mágneses térerősséget a Biot - Savart törvény (2.2-2. szakasz) retardált alakjával lehet kifejezni. E megfontolás alapján

$$H(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\ell} I(r', t - \frac{R}{v}) \frac{dl' \times R^0}{R^2}$$

adódik. Ez az összefüggés azonban nem helyes és legfeljebb egy korrigált kvázistacionárius közelítésnek tekinthető.

A helyes eredmény előállításához először írjuk át a retardált vektorpotenciál (10) szerinti alakját a már ismert $J dV' = I dl'$ átalakítás felhasználásával. Az 1. ábra jelöléseivel:

$$A(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\ell} \frac{1}{R} I(r', t - \frac{R}{v}) dl',$$

$$R = |r' - r|, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}. \quad (4.1-12)$$

A mágneses térerősség kifejezését az r helyen a vektorpotenciálnak r koordinátái szerinti rotáció-képzésével kapjuk. E művelet az r' vektor

koordinátái szerinti integrálással felcserélhető. Ezek szerint

$$H = \frac{1}{\mu} B = \frac{1}{4\pi} \int_{\ell} \text{rot} \left[\frac{1}{R} I(r', t - \frac{R}{v}) dl' \right].$$

A rotációképzés szempontjából dl' állandó vektor, csak $R = |r' - r|$ függ az r koordinátáitól. Ezt figyelembe véve

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[\frac{1}{R} I(r', t - \frac{R}{v}) dl' \right] &= \text{grad} \left[\frac{1}{R} I(r', t - \frac{R}{v}) \right] \times dl' = \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{R} I(r', t - \frac{R}{v}) \right] R^0 \times dl', \end{aligned}$$

ahol R^0 az $r - r'$ irányába mutató egységvektor. Az R szerinti parciális deriváltat képezve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{R} I(r', t - \frac{R}{v}) \right] &= \\ &= -\frac{1}{R^2} I(r', t - \frac{R}{v}) + \frac{1}{R} \frac{\partial I(r', t - \frac{R}{v})}{\partial R}. \end{aligned}$$

A második tagban az R szerinti derivált arányos a $(t-R/v)$ vagy akár a t szerinti deriválttal. Az arányossági tényező a lánc szabály értelmében $-1/v$. Mindezeket figyelembe véve kapjuk a következő eredményt.

A vonalszerű vezetékben folyó áram által létrehozott mágneses térerősség kifejezése homogén lineáris és izotrop közeg esetén (1. ábra)

$$\begin{aligned} H(r, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\ell} I(r', t - \frac{R}{v}) \frac{dl' \times R^0}{R^2} + \\ &+ \frac{1}{4\pi v} \int_{\ell} \frac{\partial I(r', t - \frac{R}{v})}{\partial t} \frac{dl' \times R^0}{R}; \end{aligned} \quad (4.1-13)$$

$$R = |r' - r|, \quad R^0 = \frac{r - r'}{R}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}.$$

Ez az összefüggés nevezhető általánosított Biot - Savart törvénynek. Az első tag megegyezik a szakasz elején "megsejtett" kifejezéssel. A második tag azonban ettől teljesen eltérő! E szerint a mágneses térerősségnek van olyan összetevője, amely nem az árammal, hanem az áram idő szerinti deriváltjával arányos (természetesen az R/v időközszel késleltetve), továbbá ez az összetevő nem a távolság négyzetével,

hanem a távolsággal fordítottan arányos. Az áramot vivő vezetéktől kellően nagy távolságban ezért a (13) második tagja jóval nagyobb az elsőnél. A második tag által leírt összetevőt ezért távoli térnek is nevezik, szemben az első tag által leírt közeli térrel, amely a vezetékhez elég közel jóval nagyobb a távoli térnél.

Az áram idő szerinti deriváltjával való arányosságot úgy is kifejezhetjük, hogy adott nagyságú áram és adott távolság esetén a távoli tér annál nagyobb a közelineél, minél nagyobb az áram időfüggésére jellemző frekvencia. Előírt erőteret annál kisebb árammal tudunk létrehozni, minél nagyobb frekvenciát (minél kisebb hullámhosszat) választunk - amint az közismertnek tekinthető.

A mágneses térerősség ismeretében konkrét esetekben az elektromos térerősség rotációképzéssel számítható (l. a következő szakaszt). Megadható azonban az elektromos térerősségre egy általános, a (13)-hoz hasonló kifejezés is. Ez azonban bonyolultabb, mint a mágneses térerősségre vonatkozó. Az elektromos térerősségnek is van egy távoli összetevője (ez $\partial I/\partial t$ -vel arányos és $1/R$ szerint tűnik el), egy közeli összetevője (ez I -vel arányos és $1/R^2$ szerint tűnik el) és egy "még közelebbi" összetevője (ez I idő szerinti integráljával, vagyis a Q töltéssel arányos és $1/R^3$ szerint tűnik el). Míg az $I dl'$ áramelemhez tartozó dH mágneses térerősség $dl' \times R^0$ irányú (vagyis merőleges e két vektor által kifeszített síkra), addig a dE elektromos térerősség dH -ra merőleges (vagyis benne van a dl' és az R^0 vektorok által kifeszített síkban, ezért fel is bontható pl. e két, egymásra általában nem merőleges irány szerinti összetevőre).

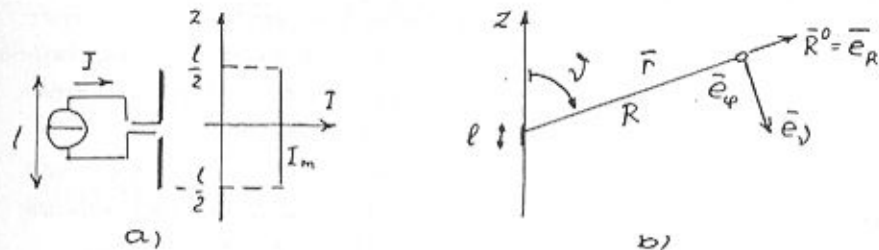
A következő szakaszban egy konkrét elrendezésre részletesen is megadjuk a mágneses és az elektromos térerősség kifejezését.

4.1-4. A HERTZ DIPÓLUS ELKTROMÁGNESES TERE

4.1-4.1. A Hertz dipólus

Az adott árameloszláshoz tartozó elektromágneses tér számításának módját egy igen egyszerű esetre, a Hertz dipólus (vagy elemi sugárzó dipólus) példáján mutatjuk be. A Hertz dipólus a legegyszerűbb antennának tekinthető.

A Hertz dipólus egy (a hullámhosszhoz képest) nagyon rövid egyenes vezetékdarab ($l \ll \lambda$), amelynek minden pontjában ugyanakkora az



4.1-2. Abra. (a) A Hertz dipólus elvi kivitele. (b) Az erőter számításánál használt koordináták

áram értéke (2a ábra). A továbbiakban időben szinuszos változás vizsgálatára szorítkozunk:

$$I(t) = \text{Re} \{ I_m e^{j\omega t} \}, \quad (4.1-14)$$

ahol I_m az áram komplex amplitúdója, amelyet a továbbiakban valósnak tekintünk.

A helytől nem függő $I(z,t) = I(t)$ árameloszlás feltételezése fizikailag nem indokolt, mert a vezetékdarab két végén az áramnak (közeliítőleg) nullának kell lennie. Mivel az egyenes antenna egy távvezeték szakasznak tekinthető, ezért első közelítésben szinuszos árameloszlás feltételezése jobb közelítést jelentene. A legegyszerűbb esetben az antenna hossza a hullámhossz fele, általánosabban a hossz a hullámhossz felének egész többszöröse. Szokásos azonban lineáris (azaz "háromszög alakú") árameloszlás feltételezése is.

A Hertz dipólus vizsgálatát egyrészt az indokolja, hogy ennek számítása a legkönnyebb. A kapott eredmények másféle árameloszlás esetére becslésként felhasználhatók, az I_m ekkor az áram komplex amplitúdójának az antenna mentén vett középértékét jelenti. Másfelől bármely egyenes - vagy akár görbült - vonalszerű vezeték felosztható dl hosszúságú elemi szakaszokra, minden szakasz árama állandónak tekinthető. Más szóval bármely ismert árameloszlás erőterének számítása visszavezethető Hertz dipólusok erőterének szuperpozíciójára. Ez néha elvégezhető zárt alakban, vagyis az előálló integrál ismert függvényekkel kifejezhető. Többnyire azonban csak véges számú rövid szakaszra történő felosztáshoz tartozó összeg számítható ki. Az igazi nehézséget az árameloszlás meghatározása jelenti.

A Hertz dipólus erőterének ismeretében nem csak egy vonalszerű antenna erőtere számítható, hanem gerjesztett és gerjesztetlen vonalszerű antennákból álló rendszer erőterének számításának is rendelkezésre állnak az elvi alapjai (pl. dipólus-sor, dipólus-oszlop, dipólus-függöny). Ez azonban már túlnyúlik kereteinken.

Lényegesen bonyolultabb feladatot jelent a nem elhanyagolható átmérőjű és adott anyagi tulajdonságú (adott konduktivitású) antenna erőterének számítása, amivel itt még elvi szinten sem foglalkozunk.

Megemlítjük, hogy a Hertz dipólus mellett értelmezett egy másik elemi sugárzó, a kisméretű áramhurok is (sugárzó mágneses dipólus). Erőterének lényeges tulajdonságai hasonlítanak a Hertz dipólus megfelelő tulajdonságaira.

4.4-4.2. A teljes erőter

A Hertz dipólus mágneses tere a (13) általánosított Blot - Savart törvény felhasználásával számítható. Mivel a vezetékdarab rövid, ezért az integrandusok állandónak tekinthetők, így a dipólustól kellő távolságban ($R \gg l$) a mágneses térerősség mint a hely és az idő függvénye

$$H(r, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4\pi} I_m e^{j(\omega t - R/v)} \frac{1 \times R^0}{R^2} + \frac{1}{4\pi v} I_m j\omega e^{j(\omega t - R/v)} \frac{1 \times R^0}{R} \right\}. \quad (4.1-15)$$

Látható, hogy a mágneses térerősség közeli és távoli összetevőjének egyaránt csak azimutális (φ irányú) rendezője van. A továbbiakban a vektoroknak csak a

$$H(r, t) = \operatorname{Re} \{ H(r) e^{j\omega t} \} \quad (4.1-16)$$

alakban értelmezett $H(r)$ komplex amplitúdóját adjuk meg. Hasonlóképpen pl. $H_\varphi(r)$ a φ irányú rendező komplex amplitúdóját jelöli. Ezeket alább az R, θ, φ gömbkoordinátákban adjuk meg (2b ábra). A forgás-szimmetria miatt nem meglepő, hogy a mennyiségek a φ koordinátától nem függenek.

A (15) szerint a mágneses térerősség komplex amplitúdójának rendezői $1 \times R^0 = l \sin \theta$ felhasználásával

$$H_R(R, \theta) = 0,$$

$$H_\theta(R, \theta) = 0,$$

$$H_\varphi(R, \theta) = \frac{l}{4\pi} I_m \left[\frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{vR} \right] \sin \theta e^{-j\omega R/v}. \quad (4.1-17)$$

Az elektromos térerősség komplex amplitúdóját a

$$\operatorname{rot} H = j\omega \epsilon E \quad (4.1-18)$$

összefüggésből számíthatjuk. A rotációképzés gömkoordinátákban a

$$(\operatorname{rot} H)_R = \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta H_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right],$$

$$(\operatorname{rot} H)_\theta = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial(R H_\varphi)}{\partial R} \right],$$

$$(\operatorname{rot} H)_\varphi = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial(R H_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right] \quad (4.1-19)$$

műveletekkel végezhető el. Esetünkben rövid számolással kapjuk, hogy

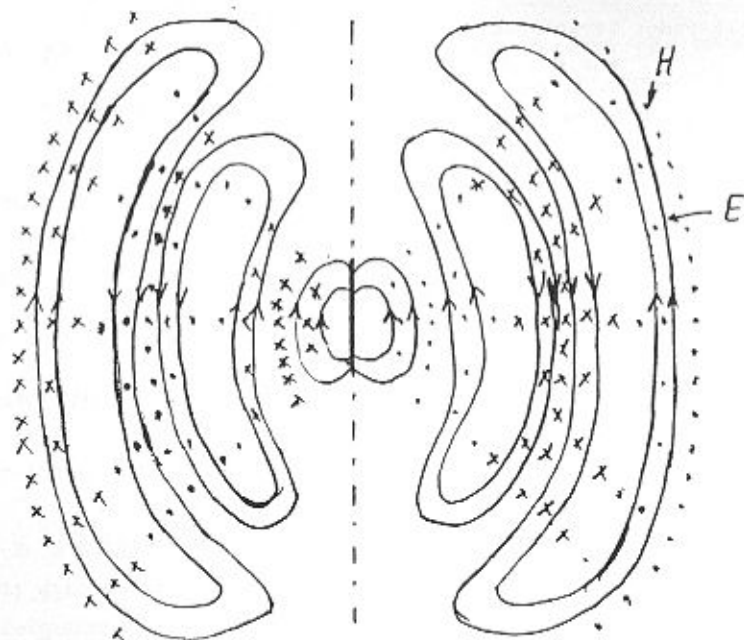
$$E_R(R, \theta) = \frac{l}{4\pi\epsilon} I_m \left[\frac{2}{j\omega R^3} + \frac{2}{vR^2} \right] \cos \theta e^{-j\omega R/v},$$

$$E_\theta(R, \theta) = \frac{l}{4\pi\epsilon} I_m \left[\frac{1}{jR^3} + \frac{1}{vR^2} + \frac{j\omega}{v^2 R} \right] \sin \theta e^{-j\omega R/v},$$

$$E_\varphi(R, \theta) = 0. \quad (4.1-20)$$

A (10) és a (20) összefüggésekből jól látható, hogy H és E merőlegesek egymásra. Megfigyelhetjük, hogy H_φ és E_θ tartalmaz távoli összetevőt ($j\omega I_m/R$ típusú), mindegyik összetevő tartalmaz közeli összetevőt (I_m/R^2 típusú), E_R és E_θ tartalmaz "még közelebbi" összetevőt is ($I_m/j\omega R^3$ típusú). A 3. ábrán felvázoltuk az elektromos és a mágneses térerősség erővonalait egy rögzített időpontra. A H -vonalak körök, amelyek középpontja a z -tengelyen van. Az E -vonalak alakja vesére emlékeztet. Az erőter, ill. az erővonalkép nagyjából úgy változik az időben, mint ha v sebességgel radiálisan távolna. Az óvatos fogalmazást az indokolja, hogy a helytől való függés bonyolultabb, mint azt pl. a távvezetékknél láttuk, ezért az $e^{j\omega(t-R/v)}$ tényező ellenére sem állítható, hogy a fázissebesség (az azonos fázisú helyek terjedési sebessége) megegyezne a v sebességgel. A távoli térre egyszerűbbek a viszonyok, ott viszont az erővonalkép felrajzolása nem problémamentes (l. a következő pontot).

A sugárzott teljesítményt jellemző $S = \frac{1}{2} E \times H^*$ komplex Poynting vektorral kapcsolatban a következőket állapíthatjuk meg. (a) A távoli térre E és H fázisban van, a szorzatukból adódó komplex Poynting vektor valós, ami hatásos teljesítmény áramlását jelenti, a Poynting



4.1-3. ábra. A Hertz dipólus erőterének szemléltetése egy rögzített időpontban

vektor $1/R^2$ szerint csökken. (b) A H távoli és az E közeli összetevője, valamint a H közeli és az E távoli összetevője között 90° a fáziseltérés, a szorzatukból adódó Poynting vektor képzetes, ami meddő teljesítmény áramlását jelent, a Poynting vektor $1/R^3$ szerint csökken. (c) A H távoli és az E "nagyon közeli" összetevője fázisban van, az ezekhez tartozó Poynting vektor ismét valós, tehát hatásos teljesítményt jelent, de $1/R^4$ szerint csökken. (d) A H közeli és az E "nagyon közeli" összetevője között ismét 90° a fáziskülönbség, a képzetes Poynting vektor meddő teljesítményt jelent és $1/R^5$ szerint csökken. A (b), (c) és (d) szerinti Poynting vektornak nincs radiális összetevője.

4.1-4.3. A távoli erőtér

A Hertz dipólustól kellő távolságban ($R \gg v/\omega = \lambda/2\pi$) az $1/R$ szerint csökkenő összetevők mellett a többiek elhanyagolhatók - kivéve az antenna tengelyének környezetét ($\sin \theta \approx 0$), ahol a távoli összetevőt nem tartalmazó $|E_R|$ nagyobb mint $|E_\theta|$. Ezt a távoli teret leíró térerősségek komplex amplitúdója ($\ell \ll \lambda$ és $R \gg \ell$, λ esetén) egy j szorzó elhagyásával

$$E_\theta(R, \theta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\ell}{\lambda} I_m \frac{\sin \theta}{R} e^{-j 2\pi R/\lambda},$$

$$H_\varphi(R, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\ell}{\lambda} I_m \frac{\sin \theta}{R} e^{-j 2\pi R/\lambda}, \quad (4.1-21)$$

ahol felhasználtuk az $\omega/v = 2\pi/\lambda$ és a $v^2 = 1/\epsilon\mu$ összefüggéseket. Szigorúan véve a $\lambda = c/f$ szabadtéri hullámhossz helyett a $\Lambda = v/f$ valódi hullámhosszat kellene írni. Mivel azonban az antenna környezetében többnyire $\epsilon_r = 1$ és $\mu_r = 1$, ezért $v = c$ és $\Lambda = \lambda$ helyettesíthető. Az E és a H többi rendezőjének nincs távoli összetevője.

A (21) kifejezésekből látható, hogy a távoli térre

$$\frac{E_\theta(R, \theta)}{H_\varphi(R, \theta)} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (4.1-22)$$

a helytől függetlenül. Ezt a mennyiséget szokás a közeg hullámellenállásának (hullámimpedanciájának, karakterisztikus impedanciájának) nevezni. Vákuumban vagy levegőben

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377,0 \Omega \approx (120 \pi) \Omega. \quad (4.1-23)$$

Ha tehát egy pontban a mágneses térerősség amplitúdója $H = 0,01 \text{ A/m}$, akkor ott az elektromos térerősség amplitúdója $E = 3,77 \text{ V/m}$ és a Poynting vektor nagysága $S = 0,019 \text{ W/m}^2$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a "távoli tér" nem valódi elektromágneses tér abban az értelemben, hogy a (21) szerinti $E = E_\theta e_\theta$ és $H = H_\varphi e_\varphi$ nem elégítik ki a Maxwell egyenleteket. Bejátható például, hogy $\text{div } E$ nem nulla, vagy hogy $\text{rot } H$ -nak van radiális rendezője is, tehát nem a (20) szerinti $j\omega \epsilon E$. A távoli tér erővonalképét ezért nem is adjuk meg, lokálisan síkhullámnak tekinthető (következő szakasz).

A távoli tér Poynting vektorának egyetlen, éspedig radiális rendezője van, amely valós értékű:

$$S_R(R, \theta) = \frac{1}{2} E_\theta(R, \theta) H_\varphi^*(R, \theta) =$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 I_m^2 \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$$

Egy, a sugárzó dipólust koncentrikusan körülvevő R sugarú gömbön átsugárzott komplex és egyúttal hatásos teljesítmény

$$P = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^\pi S_R(R, \theta) 2\pi R R \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 I_m^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Felhasználva a $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ azonosságot, kapjuk hogy

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

A Hertz dipólus által elsugárzott teljesítményt

$$P = \frac{1}{2} R_S I_m^2 \quad (4.1-23)$$

alakban szokás kifejezni. A (23) által értelmezett R_S sugárzási ellenállás (sugárzási rezisztencia) kifejezése az előzők szerint

$$R_S = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \quad (4.1-24)$$

Vákuumban vagy levegőben ennek numerikus alakja

$$R_S = 790 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \Omega = 80 \pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (4.1-25)$$

Emlékeztetünk arra, hogy eredményeink csak $\ell \ll \lambda$ és az ℓ hossz mentén állandó áram esetén érvényesek.

A Poynting vektor (23) kifejezéséből látható, hogy a Hertz dipólus teljesítményének döntő részét felezősíkjának környezetében és forgásszimmetrikusan sugározza ($\sin \theta \approx 1$), míg tengelye irányában nem sugároz. Az elsugárzott teljesítmény majdnem 90 %-a a $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ szögtartományba esik.

Érdekes kifejezni az $E_{\max} = |E_\theta(R, \pi/2)|$ elektromos térerősséget a P elsugárzott teljesítménnyel. A (21), (23) és (24) felhasználásával rövid számolással adódik, hogy

$$E_{\max}(R) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{R} \sqrt{P} \quad (4.1-26)$$

Levegő vagy vákuum esetén a következő számérték egyenlet adódik:

$$\left\{ E_{\max}(R) \right\}_{V/m} = \frac{300}{(R)_m} \sqrt{(P)_{kW}} \quad (4.1-27)$$

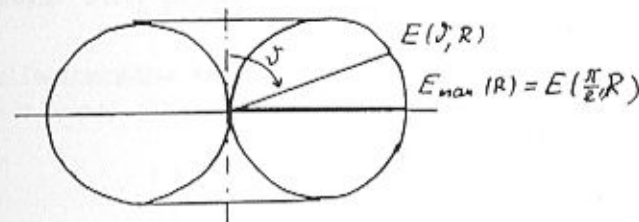
Ha pl. $P = 1$ kW és $R = 300$ m, akkor $E_{\max} = 1$ V/m. A (27) más sugárzó

esetén is elfogadható nagyságrendi becslést ad.

A sugárzás térbeli eloszlását a sugárzási karakterisztikával szokás jellemezni. Ez egy olyan függvény, ill. az azt ábrázoló polárdiagram, amely rögzített R távolságban megadja $|E|$ relatív nagyságát a θ és a φ szögek függvényében. A Hertz dipólusra (és minden egyenes antennára) a sugárzási karakterisztika nem függ a φ szögtől, ábrája forgásfelület, tehát síkmetszetével teljesen ábrázolható. A (21)-ből következik, hogy

$$|E_\theta(R, \theta)| = E_{\max}(R) \sin \theta \quad (4.1-28)$$

A Hertz dipólus sugárzási karakterisztikájának vezérgörbéje kör, a felület egy "lyuk nélküli" gyűrű (4. ábra). Az $S_R(R, \theta)$ Poynting vektor az $|E|$ metszék négyzetével arányos a választott θ irányban. Sok feladatnál ennél élesebb maximummal bíró vagy más alakú sugárzási karakterisztikára van szükség.



4.1-4. ábra. A Hertz dipólus sugárzási karakterisztikája

A sugárzási karakterisztika irányítottságát a

$$G = \frac{|S|_{\max}}{|S|_{\text{átl}}} \quad (4.1-28)$$

dimenzió nélküli mennyiséggel jellemzik, amit neveznek az antenna nyereségének is. Itt $|S|_{\max}$, ill. $|S|_{\text{átl}} = P/4\pi R^2$ a Poynting vektor legnagyobb, ill. átlagos értéke az R sugarú gömbön. A Hertz dipólus nyereségére egyszerű számítással $G = 3/2$ adódik, ami kis érték.

Az antennák jellemzésére további mennyiségeket is használnak. Ezek egy része a távoli térhez kapcsolódik, de vannak olyanok is, amelyeket a közeli tér is befolyásol (pl. az antenna sugárzási és bemeneti reaktanciája vagy impedanciája). Ezek tárgyalása azonban meghaladja kereteinket. Nem foglalkozunk az antennával mint vevővel sem.

4.2. SÍKHULLÁMOK

4.2-1. ALAPEGYENLETEK

4.2-1.1. Általános összefüggések

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a szabadon terjedő hullámok leg-egyszerűbb típusát, a síkhullámokat. Az erőteret gerjesztő forrásoktól kellően távol és kellően kis tartományban a legtöbb szabadon terjedő hullám síkhullámmal jól közelíthető. A síkhullámok vizsgálatával az elektromágneses hullámok sok fontos tulajdonságával ismerkedhetünk meg. Mint már említettük, síkhullámok alkalmas szuperpozíciójával bármely elektromágneses hullám leírható.

Jellemezze a teret kitöltő közeget térrészenként állandó ϵ permittivitás, μ permeabilitás és σ konduktivitás, vagyis legyen a közeg térrészenként homogén, lineáris és izotrop. Olyan térrészek vizsgálata-ra szorítkozunk, ahol a ρ töltéssűrűség nulla és E_b beiktatott tér-erősség nincs. A térjellemező vektorok kapcsolatát leíró egyenletek tehát $D = \epsilon E$, $B = \mu H$ és $J = \sigma E$.

A Maxwell egyenletek ekkor a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned} \text{(I.)} \quad \text{rot } H &= \sigma E + \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{(II.)} \quad \text{rot } E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{(III.)} \quad \text{div } H &= 0 \\ \text{(IV.)} \quad \text{div } E &= 0 \end{aligned} \quad (4.2-1)$$

Az ϵ , μ és σ közegjellemzők minden térrészben mások. Szükség esetén ezeket indexszel különböztetjük meg.

Ha a közeg ideális szigetelő, akkor benne $\sigma = 0$, tehát vezetési áram nincs. Ha a közeg jó vezető, akkor az eltolási áram elhanyagolható, ami formálisan az $\epsilon = 0$ esetnek felel meg.

A $H = H(r, t)$ vagy az $E = E(r, t)$ kiküszöbölésével a másik vektorra egy másodrendű parciális differenciálegyenlet állítható elő. Noha az általános időbeli változás vizsgálata meglehetősen bonyolult matematikai feladat, először annak egyenleteit állítjuk elő, azután rátérünk a szinuszos időbeli változás alapegyenleteinek előállítására. A fejezet további részében az utóbbi esetre fogunk szorítkozni. A Fourier transzformáció módszerével az általános időbeli változás

vizsgálata a szinuszos folyamatok szuperpozíciójára visszavezethető, de ennek részleteivel nem foglalkozunk.

4.2-1.2. Tetszőleges időbeli változás

Képezzük a II. Maxwell egyenlet rotációját és helyettesítsük rot H kifejezését az I. Maxwell egyenletből:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } E &\equiv \text{grad div } E - \Delta E = \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } H = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Mivel esetünkben $\text{div } E = 0$, ezért az $E = E(r, t)$ vektorra a

$$\Delta E - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2-2)$$

parciális differenciálegyenlet adódik. Ennek speciális esetei:

$\sigma = 0$ esetén (ideális szigetelőben):

$$\Delta E - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (4.2-3)$$

ami a hullámegyenlet;

$\epsilon = 0$ esetén (jó vezetőben)

$$\Delta E - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (4.2-4)$$

amit neveznek diffúziós egyenletnek is.

Ha a (2) megoldásával meg tudjuk az $E(r, t)$ elektromos térerősséget határozni, akkor a II. Maxwell egyenlet alapján kifejezhető a H idő szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \text{rot } E. \quad (4.2-5)$$

Ebből a $H = H(r, t)$ mágneses térerősség egy időben állandó - és ezért érdektelen - helyfüggő összetevőtől eltekintve idő szerinti integrálással meghatározható.

Hasonló módon látható be, hogy a H vektorra ugyancsak a (2) parciális differenciálegyenlet vonatkozik. A H ismeretében E csak akkor számítható egyszerűen, ha vagy $\sigma = 0$ vagy $\epsilon = 0$.

A (2) parciális differenciálegyenlet megoldása általános időbeli változás esetén nagyon nehéz feladat, ha a $\sigma = 0$ közelítés nem elfogadható. Ezt láthattuk a 3.3-3. szakaszban, ahol a távvezetékre

vonatkozó egyszerűbb egyenlet is csak (közelítőleg) ideálisnak tekinthető esetben vezetett áttekinthetően kezelhető feladatra.

4.2-1.3. Szinuszos időbeli változás

Szinuszos időbeli változás esetén az

$$E(r,t) = \operatorname{Re} \{ E(r) e^{j\omega t} \}, \quad H(r,t) = \operatorname{Re} \{ H(r) e^{j\omega t} \} \quad (4.2-6)$$

Által értelmzett $E(r)$ és $H(r)$ helyfüggő komplex amplitúdó vektorok meghatározása a célunk. Itt ω a szinuszos gerjesztés körfrekvenciája, és az állandósult állapotot vizsgáljuk.

A Maxwell egyenletek a bevezetésben leírt feltételek mellett a következő egyenletekre vezetnek az $E(r)$ és $H(r)$ vektorokra:

$$\begin{aligned} \text{(I.)} \quad & \operatorname{rot} H = (\sigma + j\omega\epsilon) E \\ \text{(II.)} \quad & \operatorname{rot} E = -j\omega\mu H \\ \text{(III.)} \quad & \operatorname{div} H = 0 \\ \text{(IV.)} \quad & \operatorname{div} E = 0 \end{aligned} \quad (4.2-7)$$

A II. egyenletből H kifejezhető E segítségével:

$$H = -\frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{rot} E. \quad (4.2-8)$$

Helyettesítsük ezt az I. egyenletbe. Vezessük be a

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad (4.2-9)$$

definícióval a közeg és a frekvencia által meghatározott γ terjedési együtthatót. Ezzel az $E(r)$ vektorra a

$$\Delta E - \gamma^2 E = 0 \quad (4.2-10)$$

parciális differenciálegyenlet, a Helmholtz egyenlet (időtől független hullámegyenlet) adódik. Az $E(r)$ ismeretében a $H(r)$ a (8) alapján már egyszerűen számítható.

A (10) és a (8) előállítható az általánosabb (2) és (3) alapján is $\partial/\partial t = j\omega$ helyettesítéssel.

A $H(r)$ ugyancsak kielégíti a (10) Helmholtz egyenletet. A $H(r)$ ismeretében $E(r)$ az I. Maxwell egyenletből fejezhető ki. Általában az E és a H felcserélése a $\sigma + j\omega\epsilon$ és a $-\mu$ felcserélését jelenti.

Még a Helmholtz egyenlet megoldása is nehéz feladatot jelent,

hiszen három térbeli koordinátától függő vektort (vagyis három skalár függvényt) kell meghatározni. E fejezet további részében ezért ennek az egyenletnek csak a legegyszerűbb, egydimenziós alakjának megoldásával foglalkozunk.

4.2-2. LINEÁRISAN POLARIZÁLT SÍKHULLÁM

4.2-2.1. Általános összefüggések

A szinuszos esetre vonatkozó Helmholtz egyenlet megoldását keressük először abban a legegyszerűbb esetben, amikor a térerősségek csupán a z koordinátától függenek, vagyis egy-egy $z = \text{állandó}$ síkban nagyságuk és irányuk állandó. Az így adódó síkhullámok a valóságban természetesen nem léteznek, de gyakran mégis elfogadhatóan leírják az erőteret egy tartományban.

Az $E(z)$ komplex amplitúdóra vonatkozó Helmholtz egyenlet

$$\frac{d^2 E}{dz^2} - \gamma^2 E = 0; \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad (4.2-11)$$

A $H(z)$ meghatározásához képezzük $E(z)$ rotációját:

$$\operatorname{rot} E = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{d}{dz} \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

A második determináns az $e_z \times E$ vektorialis szorzat. Ezek szerint

$$H = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{d}{dz} (e_z \times E). \quad (4.2-12)$$

Ebből az következik, hogy H merőleges a z -tengelyre és E -re. Ugyanígy látható be, hogy E merőleges a z -tengelyre és természetesen H -ra is.

Összefoglalva:

$$E_z = 0, \quad H_z = 0, \quad E \cdot H = 0, \quad (4.2-13)$$

vagyis az ilyen elektromágneses síkhullámok transzverzálisak. Ebből következően az $S = \frac{1}{2} E \times H^*$ komplex Poynting vektornak csak z irányú komponense van, vagyis

$$S = S_z e_z. \quad (4.2-14)$$

Általános esetben $E(r,t) = \operatorname{Re}(E(r) e^{j\omega t})$ és $H(r,t) = \operatorname{Re}(H(r) e^{j\omega t})$ iránya változhat. Szorítkozzunk arra a legegyszerűbb esetre, amikor irányuk rögzített. E lineárisan polarizált síkhullámokat leíró egyenletek $E = E_x e_x$, $H = H_y e_y$ választással (11) és (12) értelmében

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} - \gamma^2 E_x = 0, \quad H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{dE_x}{dz},$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}. \quad (4.2-15)$$

Az általánosabb (pl. a körkörös vagy az elliptikus) polarizált síkhullám előállítható két, egymásra merőleges, lineárisan polarizált síkhullám szuperpozíciójával. Ezt azonban nem részletezzük.

4.2-2.2. A távvezeték analógia

Látható, hogy a lineárisan polarizált síkhullámra vonatkozó egyenletek analógok a távvezetésekre vonatkozókkal, amelyek (3.2. fejezet)

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0, \quad I = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{dU}{dz},$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}. \quad (4.2-16)$$

Az analóg mennyiségek ebből következően:

távvezeték:	U	I	R'	L'	G'	C'
síkhullám:	E_x	H_y	0	μ	σ	ϵ

(4.2-17)

Érdekes, hogy a távvezeték soros veszteségi ellenállásának nincs hullámtani megfelelője. Az analógiából is következik - de természetesen a (15) általános megoldásaként közvetlenül is felírható - hogy a síkhullám előállítható a z-tengely pozitív, ill. negatív irányában terjedő hullámok szuperpozíciójaként:

$$E_x(z) = E_1^+ e^{-\gamma z} + E_1^- e^{+\gamma z},$$

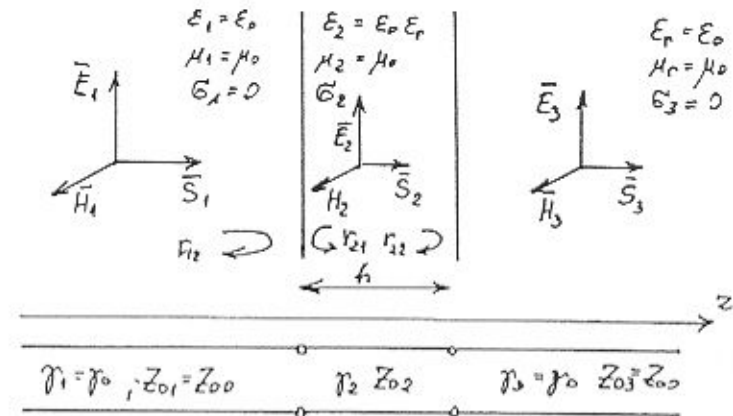
$$H_y(z) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E_1^-}{Z_0} e^{+\gamma z}, \quad (4.2-18)$$

ahol $\gamma = \alpha + j\beta$ a terjedési együttható, míg a Z_0 hullámimpedancia kifejezése az analógia alapján

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}. \quad (4.2-19)$$

Az E_1^+ , ill. az $E_1^+/Z_0 = H_1^+$ a z-tengely pozitív irányában csillapodva haladó síkhullám térerősségeinek komplex amplitúdója a $z = 0$ helyen. Míg a távvezetékénél $z = 0$ a vezeték elejét jelölte, most a "távvezeték" mindkét irányban végtelen hosszúnak kell tekintenünk.

A távvezeték analógia felhasználásával megoldható pl. az 1. ábrán vázolt következő egyszerű feladat. Egy levegőben terjedő, lineárisan polarizált síkhullám útjában egy (végtelen nagy kiterjedésűnek tekinthető) szigetelő vagy vezető fal helyezkedik el, amelynek síkja merőleges a hullám terjedési irányára. Adottnak tekinthető az 1. közegben a beeső hullámot leíró $(E_1^+)_1$ térerősség. Keresett a 3. közegben továbbterjedő hullámot leíró $(E_1^+)_3$ térerősség. Ezek nem egyeznek meg, mert mindkét elválasztó felületen reflexiók lépnek fel, továbbá a falban a hullám csillapodhat is.



4.2-1. ábra. Polarizált síkhullám áthaladása terjedési irányára merőleges falon

Az 1. közegben (levegő) az erőtér úgy számítható, mint ha az analóg távvezetékét egy olyan Z_{B2} impedancia zárná le, amely a 2. közegnek megfelelő hosszúságú, Z_{03} impedanciával lezárt távvezeték szakasz bemeneti impedanciája. Ennek ismeretében számítható az $r_1^{(2)} = -r_2^{(1)}$ reflexió tényező, majd E_x és H_y a 2. közeg mindkét végén és a 3. közegben is. A levegő ideális szigetelőként, a fal ideális vagy veszteséges szigetelőként, ill. vezetőként írható le (l. a következő szakaszokat).

A vizsgált elrendezés természetesen nagyon speciális. A feladatot valamivel általánosabban a 4.2-3.4. pontban fogjuk tárgyalni, ahol nem fogjuk feltételezni, hogy az elválasztó felület merőleges a síkhullám terjedési irányára.

(I.) rot $\mathbf{H} = \mathbf{j} \omega \epsilon \mathbf{E}$ egyenletek koordinátákra bontott alakja ezek alapján egyszerűen felírható:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \beta E_y &= -\mathbf{j} \omega \mu H_x, & \mathbf{j} \beta H_y &= \mathbf{j} \omega \epsilon E_x, \\ \mp \mathbf{j} k E_z - \mathbf{j} \beta E_x &= -\mathbf{j} \omega \mu H_y, & \mp \mathbf{j} k H_z - \mathbf{j} \beta H_x &= \mathbf{j} \omega \epsilon E_y, \\ \mp \mathbf{j} k E_y &= -\mathbf{j} \omega \mu H_z, & \mp \mathbf{j} k H_y &= \mathbf{j} \omega \epsilon E_z. \end{aligned}$$

Az első és harmadik sor alapján H_x és H_z kifejezhető E_y segítségével, ill. E_x és E_y kifejezhető H_y segítségével. Ezek az egyenletek a következő két csoportra bonthatók (más elnevezések is használatosak):

TE típus	TM típus	
$H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu} E_y,$	$E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_y,$	
$H_z = \pm \frac{k}{\omega \mu} E_y;$	$E_z = \mp \frac{k}{\omega \mu} H_y.$	(4.2-29)

A TE a transzverzális elektromos elnevezés rövidítése, ami arra utal, hogy az elektromos térerősségnek csak az x, z síkra merőleges E_y összetevője van, míg a mágneses térerősség benne van ebben a síkban, mindkettő merőleges a Poynting vektor irányára. A TM a transzverzális mágneses elnevezés rövidítése, amelynek jelentése az előzőkből már következik. Az elektromágneses tér a TE és a TM típusú összetevő összegeként írható fel. Mindkét típusban E és H egyaránt merőleges a terjedés irányára.

Helyettesítsük H_x és H_z , ill. E_x és E_z most kapott kifejezését a még fel nem használt második egyenletekbe. Mindkét típusra az kapjuk, hogy (miután a E_y , ill. H_y tényezővel egyszerűsítettünk)

$$\boxed{k^2 + \beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu = N^2 k_0^2}, \quad (4.2-30)$$

ahol k_0 a frekvencia által meghatározott szabadtéri fázisegyüttható (más néven a szabadtéri cirkuláris hullámszám) és N a közegre jellemző (de rendszerint frekvenciafüggő) szám, amely a tipikus $\mu_r = 1$ esetben megegyezik az $n = \sqrt{\epsilon_r}$ törésmutatóval:

$$\boxed{k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad N = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (4.2-31)$$

A (30) az ún. diszperziós egyenlet, amely megadja a térbeli eloszlásra jellemző k és β mennyiségek kapcsolatát adott frekvencián. Az ideális vezetékre vonatkozó (3.2-22) szerinti $\beta = \omega \sqrt{L'C'}$ vagy az ideális szigetelőben terjedő síkhullámra vonatkozó (4.2-20) szerinti $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ összefüggés is (megoldott) diszperziós egyenlet.

A két módusra az $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ komplex Poynting vektor rendezői kifejezhető E_y , ill. H_y segítségével:

TE típus	TM típus	
$S_x = \frac{\pm k^*}{2 \omega \mu} E_y ^2,$	$S_x = \frac{\pm k}{2 \omega \epsilon} H_y ^2,$	
$S_y = 0,$	$S_y = 0,$	
$S_z = \frac{\beta}{2 \omega \mu} E_y ^2;$	$S_z = \frac{\beta}{2 \omega \epsilon} H_y ^2.$	(4.2-32)

Az S_z rendező valós és pozitív, tehát a z-tengely irányában csak hatásos teljesítmény áramlik. Az y-tengely irányában nincs teljesítményáramlás. Az S_x valós, ha k valós; ekkor az x-tengely irányában csillapítatlan hullám halad és csak hatásos teljesítmény áramlik. Az S_x képzetes, ha $k = \mp \mathbf{j} \alpha_x$ képzetes; ekkor az x-tengely irányában eltűnő elektromágneses tér lép fel és amelyhez meddő teljesítmény tartozik, amely oda-vissza lengő teljesítményt jelent, vagyis az x-tengely irányában nincs energiaátvitel.

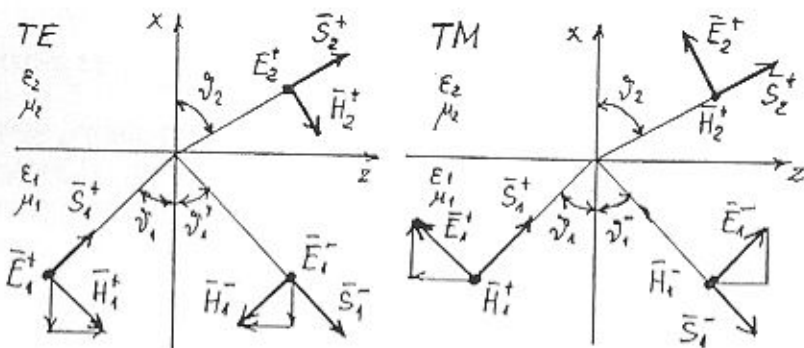
Homogén közeg esetén β tetszőleges érték, k a (30)-ból számítható a β ismeretében. A $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = N k_0$ választáshoz $k = 0$ tartozik. Ekkor az előző pontokban tárgyalt, a z-tengely irányában terjedő síkhullám adódik, amelynél a TE és TM típusok megkülönböztetésének nincs értelme, az ilyen hullámot TEM típusúnak is nevezik.

4.2-3.5. Síkhullámok visszaverődése és törése

Vizsgáljuk meg, hogyan terjed egy z irányban haladó síkhullám egy olyan közegben, amelyet az $x = 0$ koordinátájú sík két homogén részre oszt (3. ábra). Az 1. jelű közegből érkező hullám $\mathbf{E}_1^+ = E_1^+(r, t)$ elektromos és $\mathbf{H}_1^+ = H_1^+(r, t)$ mágneses térerősségének y rendezője a határfelülettel párhuzamos (a 3. ábra síkjára merőleges) összetevőt jelent. A hullám \mathbf{S}_1^+ Poynting vektora és a határfelület \mathbf{e}_x normálisa

által kifeszített beesési sík (a 3. ábra síkja) normálisa e_y . A TE típusú összetevőre $E_1^+ = E_{1y}^+ e_y$ (és H_{1x}^+, H_{1z}^+ ezáltal már meghatározott), a TM típusú összetevőre hasonló módon $H_1^+ = H_{1y}^+ e_y$ (és E_{1x}^+, E_{1z}^+ ezáltal meghatározott).

Az 1. közegben a z-tengely és az x-tengely pozitív irányában terjedő beeső hullám részben továbbhalad a 2. közegben - ez a megtört hullám, amelyet E_2^+ és H_2^+ ír le - részben visszaverődik a z-tengely pozitív és az x-tengely negatív irányában - ez a visszavert hullám, amelyet E_1^- és H_1^- ír le.



4.2-3. Ábra. TE típusú és TM típusú síkhullám visszaverődése és törése sík határfelületen

Valójában nem síkhullámot, hanem hullámmalábort kellene vizsgálnunk. Ennek tárgyalása azonban túlnyúlik kereteinken, ezért a síkhullámú közelítés vizsgálatára szorítkozunk.

Az adottnak tekintett mennyiségek: ϵ_1, μ_1 és ϵ_2, μ_2 vagy az ezekből képzett $N_1 = \sqrt{\epsilon_{1r} \mu_{1r}}$ és $N_2 = \sqrt{\epsilon_{2r} \mu_{2r}}$ (ill. $\mu_{1r} = \mu_{2r} = 1$ esetén az $n_1 = \sqrt{\epsilon_{1r}}$ és $n_2 = \sqrt{\epsilon_{2r}}$ törésmutatók) a vizsgált frekvencián, továbbá a TE típusra E_{1y}^+ , a TM típusra H_{1y}^+ , a θ_1 beesési szög és az ω körfrekvencia. Meghatározandók a terjedésre jellemző β_1, k_1 és β_2, k_2 értékek, a θ_1^- , ill. θ_2^- visszaverődési, ill. törési szög, továbbá TE típusra az E_{1y}^-, E_{2y}^+ , TM típusra a H_{1y}^-, H_{2y}^+ rendezők. A többi rendező a (29) alapján már egyszerűen számítható.

A kielégítendő folytonossági feltételek: az $x = 0$ határfelületen

E és H tangenciális komponensének, vagyis y és z irányú rendezőjének folytonosnak kell lennie.

A z irányú terjedésre jellemző β fázisgyűrűthető (vagy a fázissebesség z irányú rendezője: $v_z = \beta/\omega$) a két közegben nem lehet különböző, tehát $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. A beeső és a visszavert hullámra az x irányú terjedésre jellemző k_1 fázisgyűrűthető ugyancsak közös, ezért $\theta_1^- = \theta_1$, vagyis a visszaverődési szög megegyezik a beesési szöggel. A (30) alapján k_1 és k_2 kifejezhető a még ismeretlen β segítségével:

$$k_1 = \sqrt{N_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \quad k_2 = \sqrt{N_2^2 k_0^2 - \beta^2} = -j \sqrt{\beta^2 - N_2^2 k_0^2}, \quad (4.2-33)$$

ahol $N_1^2 k_0^2 \equiv \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$. A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, amikor a beeső hullám csillapítatlan, tehát amikor k_1 valós, vagyis amikor $\beta < N_1 k_0 = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$. Az E_y és H_z , ill. a H_y és E_z folytonosságának feltételei a (29) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \text{TE típus} & \quad E_{1y}^+ + E_{1y}^- = E_{2y}^+, & \text{TM típus} & \quad H_{1y}^+ + H_{1y}^- = H_{2y}^+, & (4.2-34) \\ \frac{k_1}{\mu_1} E_{1y}^+ - \frac{k_1}{\mu_1} E_{1y}^- & = \frac{k_2}{\mu_2} E_{2y}^+; & -\frac{k_1}{\epsilon_1} H_{1y}^+ + \frac{k_1}{\epsilon_1} H_{1y}^- & = -\frac{k_2}{\epsilon_2} H_{2y}^+. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásával adódnak a reflexiós tényezők (Ügyeljünk az eltérő értelmezésre e két típusnál!):

$$\begin{aligned} \text{TE típus} & \quad r_{TE} = \frac{E_{1y}^-}{E_{1y}^+} = \frac{\frac{k_1}{\mu_1} - \frac{k_2}{\mu_2}}{\frac{k_1}{\mu_1} + \frac{k_2}{\mu_2}}; & \text{TM típus} & \quad r_{TM} = \frac{H_{1y}^-}{H_{1y}^+} = \frac{\frac{k_1}{\epsilon_1} - \frac{k_2}{\epsilon_2}}{\frac{k_1}{\epsilon_1} + \frac{k_2}{\epsilon_2}}. & (4.2-35) \end{aligned}$$

Ideális vezető felületén történő visszaverődésnél az $E_{1y} = 0$ feltételből $r_{TE} = -1$, $r_{TM} = +1$ adódik.

Ha k_2 valós ($\beta < N_2 k_0$), vagyis ha a 2. közegben csillapítatlan hullám terjed, akkor - mivel k_1 valós - ezért r_{TE} és r_{TM} egyaránt valós, $-1 < r_{TE} < +1$ és $-1 < r_{TM} < +1$.

Ha k_2 képzetes ($\beta > N_2 k_0$ és $k_2 = -jk_2$, ahol κ_2 valós), vagyis ha a 2. közegben az erőtér az x irányban eltűnő, akkor r_{TE} és r_{TM} egyaránt komplex, a számláló a nevező konjugáltja és ezért $|r_{TE}| = 1$

és $|r_{TM}| = 1$. Ekkor teljes visszaverődés áll elő; a 2. közegben x irányban nem áramlik hatásos teljesítmény. A z irányban azonban mindkét közegben áramlik hatásos teljesítmény. Megjegyezzük, hogy a geometriai optika közelítésében teljes visszaverődés esetén a fénysugár egyáltalában nem lép át a 2. közegbe.

A reflexió tényező ismeretében kifejezhető a megtört és a visszavert hullámot jellemző térerősség:

$$\begin{array}{cc} \text{TE típus} & \text{TM típus} \end{array} \quad (4.2-36)$$

$$\begin{array}{ll} E_{1y}^- = r_{TE} E_{1y}^+, & H_{1y}^- = r_{TM} H_{1y}^+, \\ E_{2y}^+ = (1 + r_{TE}) E_{1y}^+, & H_{2y}^+ = (1 + r_{TM}) H_{1y}^+. \end{array}$$

A beeső hullámhoz tartozó S_1^+ Poynting vektor és a felületi normális által bezárt θ_1 szög szinusza (32) értelmében

$$\sin \theta_1 = \frac{S_{1z}^+}{\sqrt{(S_{1x}^+)^2 + (S_{1z}^+)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{k_1^2 + \beta^2}} = \frac{\beta}{N_1 k_0}.$$

Ennek alapján az eddig ismeretlen β fázisegyüttható kifejezhető az adottak tekintett mennyiségekkel:

$$\beta = N_1 k_0 \sin \theta_1. \quad (4.2-37)$$

Ezeket az eredményeket a 4.3-2. szakaszban, a szigetelő réteg hullámvezető tárgyalásánál fel fogjuk használni. Most még megvizsgáljuk, hogy hullámtani megfontolásaink alapján kapott összefüggéseink hogyan kapcsolódnak a geometriai optika néhány törvényéhez.

A (37) alapján a teljes visszaverődés $\beta > N_2 k_0$ feltételére

$$\sin \theta_1 > \frac{N_2}{N_1} \quad (4.2-38)$$

adódik (a θ_1 beesési szög "elég nagy"). Ez természetesen csak akkor teljesülhet, ha $N_2 < N_1$, vagyis ha $\epsilon_{2r} \mu_{2r} < \epsilon_{1r} \mu_{1r}$, ami többnyire azt jelenti, hogy $\epsilon_{2r} < \epsilon_{1r}$ vagy $n_2 < n_1$.

Helyettesítsük β -nak (37) szerinti alakját k_1 és k_2 (33) szerinti kifejezésébe:

$$k_1 = N_1 k_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = N_1 k_0 \cos \theta_1, \quad (4.2-39)$$

$$k_2 = \sqrt{N_2^2 k_0^2 - N_1^2 k_0^2 \sin^2 \theta_1} = N_1 k_0 \sqrt{(N_2/N_1)^2 - \sin^2 \theta_1}.$$

Ha $N_2/N_1 > \sin \theta_1$, akkor (37) mintájára $\sin \theta_2 = \beta/N_2 k_0$ és ebből adódik, hogy

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \text{ha } \sin \theta_1 < \frac{N_2}{N_1}. \quad (4.2-40)$$

Ha $\mu_{1r} = \mu_{2r} = 1$, akkor ez a $\sin \theta_2 / \sin \theta_1 = n_1/n_2$ alakra egyszerűsödik, ami a Snellius - Descartes törvény. A (35) felhasználásával némi rendezés után adódnak a Fresnel képletek:

$$\begin{array}{l} r_{TE} = \frac{\cos \theta_1 - (\mu_{1r}/\mu_{2r}) \sqrt{(N_2/N_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + (\mu_{1r}/\mu_{2r}) \sqrt{(N_2/N_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}, \\ r_{TM} = \frac{\cos \theta_1 - (\epsilon_{1r}/\epsilon_{2r}) \sqrt{(N_2/N_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + (\epsilon_{1r}/\epsilon_{2r}) \sqrt{(N_2/N_1)^2 - \sin^2 \theta_1}}. \end{array} \quad (4.2-41)$$

Nem lép fel visszavert hullám, ha $r_{TE} = 0$, ill. ha $r_{TM} = 0$. Az ennek megfelelő θ_{TE} , ill. θ_{TM} beesési szögre (a Brewster szögre) némi rendezés után kapjuk, hogy

$$\begin{array}{l} \text{tg } \theta_{TE} = \sqrt{\frac{(\mu_{2r}/\mu_{1r})^2 - (N_2/N_1)^2}{(N_2/N_1)^2 - 1}}, \\ \text{tg } \theta_{TM} = \sqrt{\frac{(\epsilon_{2r}/\epsilon_{1r})^2 - (N_2/N_1)^2}{(N_2/N_1)^2 - 1}}. \end{array} \quad (4.2-42)$$

A leggyakoribb $\mu_{1r} = \mu_{2r} = 1$ esetben $N_1 = n_1$ és $N_2 = n_2$. Ekkor TE típusú hullámra a Brewster szög nem értelmezett (mindig van visszaverődés), míg a TM típusú hullám nem verődik vissza a

$$\text{tg } \theta_{TM} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.2-43)$$

által meghatározott θ_{TM} beesési szög esetén. Ha tehát egy TE és TM módusú összetevőt egyaránt tartalmazó hullám beesési szöge a Brewster szög, akkor a visszavert hullám TE típusú polarizált hullám lesz. Belátható, hogy ekkor $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ érvényes.

4.2-4. SÍKHULLÁMOK VEZETŐBEN

4.2-4.1. Általános összefüggések

Vizsgáljuk meg a vezetőkben terjedő síkhullámok általános tulajdonságait. Vezetőknek ebben az értelemben az olyan közeget nevezzük, amelyben az eltolási áramsűrűség elhanyagolható a vezetési áramsűrűség mellett. Szinuszos időbeli változás esetén ez azt jelenti, hogy

$$|J| = \sigma |E| \gg |J_D| = |j \omega \epsilon E|, \text{ vagyis } \sigma \gg \omega \epsilon.$$

Az $\omega \epsilon = 0$ közelítés akkor megengedett, ha

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}, \text{ vagyis } f \ll \frac{\sigma}{2\pi \epsilon}. \quad (4.2-44)$$

Fémekre $\sigma \approx 10^6$ S/m nagyságrendű (pl. rézre $\sigma = 57 \cdot 10^6$ S/m), $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, ahol $\epsilon_0 \approx 10^{-11}$ F/m, míg ϵ_r értelmezésére ϵ pont végén még visszatérünk. Az eltolási áramsűrűség elhanyagolásának feltétele fémes vezetőkre ezek szerint

$$f \ll \frac{10^{16}}{\epsilon_r} \text{ Hz},$$

ami mindig teljesül, bármekkora véges érték is ϵ_r . A talajra ezzel szemben $\sigma \approx 10^{-2}$ S/m, így a feltétel

$$f \ll \frac{10^8}{\epsilon_r} \text{ Hz},$$

ami még közepes rádiófrekvenciára is ki van elégítve, de nagyobb frekvenciákra már nem. A tengervízre vonatkozó feltétel az előző kettő közé esik. A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, amikor az eltolási áramsűrűség elhanyagolható.

A vezetőkben terjedő síkhullámnak olyan távvezeték felel meg, amelyre $C' = 0$ és természetesen $R' = 0$.

A vezetőkben terjedő síkhullámra a γ terjedési együttható (15) és a Z_0 hullámimpedancia (19) szerinti kifejezése a

$$\gamma = \sqrt{j \omega \mu \sigma} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}},$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j \omega \mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}}$$

alakra egyszerűsödik. Vezessük be a

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (4.2-45)$$

definícióval a δ behatolási mélységet (szkinmélységet), amelynek értelmezését hamarosan látni fogjuk. Ezzel $\gamma = (1 + j)/\delta$, vagyis

$$\alpha = \frac{1}{\delta}, \quad \beta = \frac{1}{\delta}, \quad Z_0 = \frac{1 + j}{\sigma \delta} \quad (4.2-46)$$

adja a csillapítási együtthatót, a fázisegyütthatót, ill. a hullámimpedancia kifejezését. Réz esetén $\mu = \mu_0$, $\sigma = 57 \cdot 10^6$ S/m, amivel rövid számolással a következő számértékegyenletet kapjuk:

$$\left\{ \delta_{\text{Cu}} \right\}_{\text{mm}} = \frac{66,6}{\sqrt{\{f\}_{\text{Hz}}}} \quad (4.2-47)$$

A hullámterjedésre jellemző értékeket néhány jellegzetes frekvenciára a következő táblázatba foglaltuk réz esetére.

$f =$	50 Hz	1 kHz	1 MHz	1 GHz
$\delta =$	9,4 mm	2,1 mm	67 μm	2,1 μm
$\alpha = \beta =$	106 m^{-1}	474 m^{-1}	15 $\cdot 10^3 \text{m}^{-1}$	474 $\cdot 10^3 \text{m}^{-1}$
$\lambda =$	59,3 mm	13,2 mm	0,42 mm	13,2 μm
$v =$	2,97 m/s	13,2 m/s	420 m/s	13,2 km/s
$R_0 = X_0 =$	1,86 $\mu\Omega$	8,14 $\mu\Omega$	264 $\mu\Omega$	8,14 m Ω
$ Z_0 =$	2,63 $\mu\Omega$	11,5 $\mu\Omega$	373 $\mu\Omega$	11,5 m Ω

A $v = \omega/\beta$ fázissebesség erősen frekvenciafüggő és még nagy frekvenciákon is jóval kisebb c -nél, mint ahogy a $\lambda = 2\pi/\beta$ hullámhossz is jóval kisebb a $\lambda = c/f$ szabadtéri hullámhossznál. Míg az ideális vagy a kis veszteségű szigetelőben a $v_g = (d\beta/d\omega)^{-1}$ csoportsebesség megegyezik a v fázissebességgel, jó vezetőkben $v_g = 2v$ érvényes, mint az könnyen belátható. A hullámimpedancia valós része jóval kisebb, a csillapítási együttható viszont nagyságrendekkel nagyobb a szigetelőanyagoknál vagy a távvezetéseknél fellépő értékénél.

A következő pontokban néhány egyszerű esetre megvizsgáljuk a vezetőkben kialakuló elektromágneses teret olyan esetekben, amikor az síkhullámmal közelíthető. Az erőter vagy az áramsűrűség eloszlása mellett a veszteségre jellemző R váltakozóáramú rezisztencia, továbbá az L_B belső öninduktivitás meghatározása is fontos feladat. Ezek a

$$P + jQ = \frac{1}{2} (R + j\omega L_B) |I_m|^2 \quad (4.2-48)$$

összefüggésből számíthatók, ahol P a határos, Q a meddő teljesítmény, I_m az áram komplex amplitúdója. A teljesítmények a komplex Poynting vektor ismeretében számíthatók.

Térjünk még vissza az $\omega \ll \sigma/\epsilon$ feltételre. Jó vezetőkre a σ konduktancia a frekvenciától függetlennek tekinthető és így megegyezik egyenáramú értékével. A vezető permittivitása azonban nem értelmezhető a szigetelőknél megszokott módon. (Pl. hányszorosára növekszik egy kondenzátor kapacitása, ha levegő helyett a vizsgált közeg helyezzük az elektródák közé - ha ez a közeg réz vagy alumínium?!)

A vezető permittivitásának értelmezéséhez írjuk fel a folytonossági egyenletet és a IV. Maxwell egyenletet σ és ϵ anyagállandókkal jellemzett homogén közeg esetére:

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \rho.$$

A $\operatorname{div} \mathbf{E}$ kiküszöbölésével a töltéssűrűsége a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad (4.2-29)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ennek a $\rho(r,0)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása könnyen beláthatóan

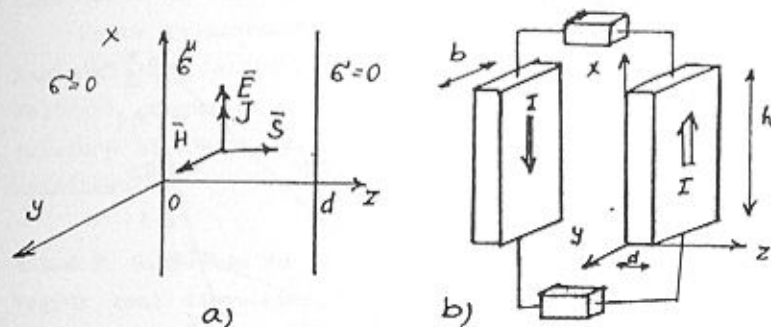
$$\rho(r,t) = \rho(r,0) e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (4.2-30)$$

A τ időállandó megmérésével és σ ismeretében $\epsilon = \sigma \tau$ számítható. Fémek vezetőkire azonban a felhalmozott töltés eltűnése olyan gyors, hogy τ mérése a mai technikával nem lehetséges. Ha ennek alapján feltételezzük, hogy $\tau = 10^{-15}$ s vagy ennél is kisebb, akkor $\sigma = 10^7$ S/m esetén $\epsilon = 18^{-8}$ F/m, $\epsilon_r = 10^3$ vagy ennél is kisebb. A vezetőre vonatkozó $f \ll (10^{16}/\epsilon_r)$ Hz feltétel tehát valóban ki van elégítve fémek vezetőkire minden előforduló frekvencián.

4.2-4.2. Síkhullám vastag hasáiban

Tekintsünk egy d vastagságú vezető hasábot, amelynek felületére merőlegesen síkhullám esik be (4a ábra). E síkhullámot létrehozhatja valamilyen külső forrás, de létrehozhatja a hasáiban folyó áram is (4b ábra). A valóságos erőter természetesen nem síkhullám, továbbá a hasáb x és y irányú méretei is végesek a valóságban.

Ebben a pontban a hasáb d vastagságát olyan nagyra tekintjük, hogy a $z = d$ helyen az erőter már elhanyagolható. Ez a feltétel $\omega d > 5$



4.2-4. Ábra. Vezető hasáiban terjedő síkhullám. (a) Az általános elrendezés. (b) Két hasáb mint kettősvezeték

vagyis $d > 5\delta$ esetén gyakorlatilag kielégítettnek tekinthető. (Az általánosabb esetet a következő pontban tárgyaljuk.) Ekkor nincs visszavert hullám, a (18) a következő alakra egyszerűsödik:

$$E_x(z) = E_1 e^{-\gamma z}, \quad H_y(z) = \frac{E_1}{Z_0} e^{-\gamma z}, \quad J_x(z) = \sigma E_1 e^{-\gamma z}, \quad (4.2-51)$$

ahol E_1 a beeső hullám elektromos térerősségének komplex amplitúdója a $z = 0$ síkban. A lemezben folyó áramra a gerjesztési törvény értelmében $H_y(0) \cdot b = I_m$ vonatkozik, ahol I_m az áram komplex amplitúdója. Ezzel E_1 kifejezhető:

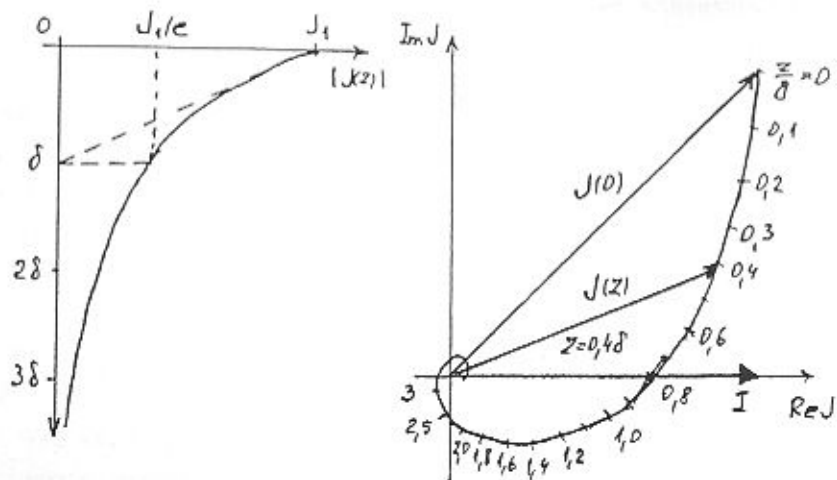
$$E_1 = \frac{Z_0 I_m}{b}. \quad (4.2-52)$$

Az áramsűrűség komplex amplitúdójának, ill. amplitúdójának helyfüggése az áram valósnak tekintett amplitúdójával kifejezve

$$J(z) = (1 + j) \frac{I_m}{b \delta} e^{-z/\delta} e^{-j z/\delta}, \quad (4.2-53)$$

$$|J(z)| = \sqrt{2} \frac{I_m}{b \delta} e^{-z/\delta}. \quad (4.2-54)$$

Az áramsűrűség amplitúdójának változását szemlélteti az 5. ábra. Ebből látható, hogy ez exponenciálisan csökken, $z = \delta$ mélységben az áramsűrűség felületi értékének e -edrészére csökken, $z > 5\delta$ mélységben az áramsűrűség elhanyagolható. Ezek szerint "áramkiszorítási jelenség" lép fel. Ha $d > 5\delta$, akkor a hasáb vastagsága már érdektelen. Az 5b ábra az áramsűrűség komplex amplitúdójának Nyquist diagramját mutatja a mélység (nem a frekvencia!) függvényeként. Az ábrából látható, hogy



4.2-5. Ábra. Az áramsűrűség nagyságának és komplex amplitúdójának változása vastag hasáiban a mélység függvényében

az áramsűrűség a felületen 45° -kal siet az áramhoz képest, $z > 2,5 \delta$ mélységben már több mint 90° -kal késik az áramhoz képest, tehát mintegy "visszafelé" folyik.

A Poynting vektor a felületen (52) és (46) felhasználásával

$$S_z(0) = \frac{1}{2} E_x(0) H_y^*(0) = \frac{|E_1|^2}{2 Z_0} = \frac{1}{2} \frac{2}{(\sigma \delta b)^2} |I_m|^2 \frac{\sigma \delta}{1-j}$$

Ha a hasáb h hossza és b szélessége elég nagy, akkor a szélhatások elhanyagolhatók. A hasáb által felvett komplex teljesítmény ekkor

$$P + jQ = S_z(0) h b = \frac{1+j}{2} \frac{h}{b \delta} |I_m|^2$$

Az $R + j \omega L_B = (P + jQ)/2 |I_m|^2$ összefüggés alapján

$$R = \omega L_B = \frac{h}{b \delta}, \quad d > 5 \delta \quad (4.2-55)$$

Ezek szerint a vastag hasáb váltakozóáramú rezisztenciája megegyezik egy olyan hasáb egyenáramú rezisztenciájával, amelynek vastagsága δ , az adott frekvenciához tartozó behatolási mélység. A váltakozóáramú értékek viszonya az egyenáramú rezisztenciához

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\omega L_B}{R_0} = \frac{d}{\delta}, \quad d > 5 \delta; \quad R_0 = \frac{h}{\sigma b d} \quad (4.2-56)$$

Az R/R_0 viszony adott áram esetén megadja a teljesítmény és az egyenletes eloszláshoz tartozó teljesítmény viszonyát.

Egyes feladatoknál a veszteségi teljesítményt nem az árammal, hanem az $|E_1|$ felületi elektromos térerősséggel vagy a $|H_1| = |E_1/Z_0|$ felületi mágneses térerősséggel vagyis a felületi áramsűrűséggel célszerű kifejezni (pl. csőtápvonal vagy üregrezonátor veszteségének számításakor).

4.2-4.3. Síkhullám vékony hasáiban

Vegyük most figyelembe az előző pontban tárgyalt elrendezésben a hasáb d vastagságát. A $z = d$ síkban a mágneses térerősség nullának tekinthető, mivel a hasábal analóg távvezetékét lezáró szigetelő közeg (többnyire levegő) hullámimpedanciája jóval nagyobb a vezető hullámimpedanciájánál, tehát jó közelítéssel a lezárás szakadásnak felel meg. (Nincs akadálya a pontosabb modell számításának sem.) A reflexiós tényező a $z = d$ helyen ezek szerint $r = +1$. A térerősségek komplex amplitúdójának helyfüggése ennek megfelelően (vö. 3.2-5. szakasz)

$$E_x(z) = \frac{1}{2} E_2 \left[e^{\gamma(d-z)} + e^{-\gamma(d-z)} \right] = E_2 \operatorname{ch} \gamma(d-z), \quad (4.2-57)$$

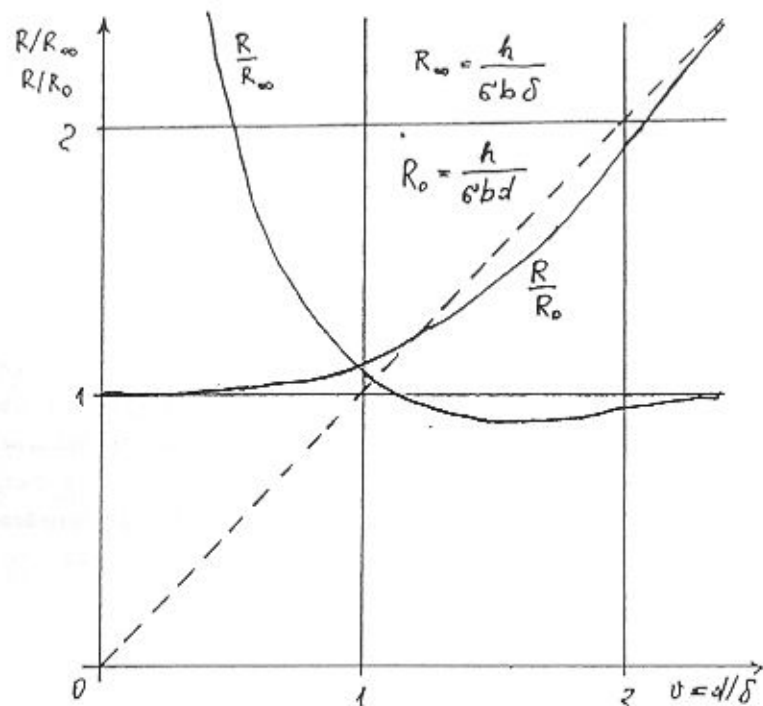
$$H_y(z) = \frac{1}{2} \frac{E_2}{Z_0} \left[e^{\gamma(d-z)} - e^{-\gamma(d-z)} \right] = \frac{E_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma(d-z)$$

Az E_2 állandó ismét a $H_y(0) b = I_m$ összefüggésből határozható meg, hiszen $H_y(d) = 0$. A Poynting vektor a $z = 0$ síkban és a felvett komplex teljesítmény is az előző pontban látott módon számítható. A $\operatorname{ch} \gamma d$ és $\operatorname{sh} \gamma d$ függvényeket valós és képzetes részre bontva (3.2-7.1. pont) némi számolás után a következő összefüggések adódnak:

$$\frac{R}{R_\infty} = \frac{\operatorname{sh} 2v + \sin 2v}{\operatorname{ch} 2v - \cos 2v}, \quad \frac{\omega L_B}{R_\infty} = \frac{\operatorname{sh} 2v - \sin 2v}{\operatorname{ch} 2v - \cos 2v},$$

$$R_\infty = \frac{h}{\sigma b \delta}, \quad v = \frac{d}{\delta}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (4.2-58)$$

Az R_∞ a végtelenül vastag hasáb váltakozóáramú rezisztenciáját jelöli. Ha d elég nagy, pl. ha $v > 5$, akkor $R \approx R_\infty$, mert ekkor a hiperbolikus függvények mellett a trigonometrikusok elhanyagolhatók és $\operatorname{th} \gamma d \approx 1$. A mennyiségek vonatkoztathatók az $R_0 = R_\infty/v$ egyenáramú rezisztenciára



4.2-6. Ábra. A hasáb váltakozóáramú rezisztenciájának függése a d vastagságától.

is. A függvénygörbéket a 6. ábra mutatja. Látható, hogy kellően nagy d vagy v esetén $R \rightarrow R_\infty$ és $\omega L_B \rightarrow R_\infty$. Határértékszámítással vagy sorbafejtéssel az is belátható, hogy $d \rightarrow 0$, ill. $v \rightarrow 0$ esetén $R \rightarrow R_0/v = R_0$ helyesen kiadódik.

Figyelemre méltó, hogy R nem monoton csökken a vastagság növelésével. Szélsőértékszámítással (v szerinti differenciálással) egyszerűen belátható, hogy az R/R_0 függvénynek a $v_1 = \pi/2$ helyen van (az első) minimumhelye. Ha $d = \delta \cdot \pi/2$ a hasáb vastagsága, akkor

$$\frac{R_{\min}}{R_\infty} = \frac{\text{sh } \pi}{1 + \text{ch } \pi} = \text{th } \frac{\pi}{2} = 0,917. \quad (4.2-59)$$

Ezek szerint alkalmas vastagság esetén a hasábban kisebb veszteség lép fel, mint ha nagyon vastag lenne! Ez az árameloszlásnak az 5b ábrából kiolvasható fázisviszonyaival magyarázható.

A d vastagságú hasáb árnyékolja a polarizált síkhullámot. Az árnyékoló hatást a

$$K = \frac{|E_1|}{|E_2|} = |\text{ch } \gamma d| = \sqrt{\frac{\text{ch } 2v + \cos 2v}{2}}; \quad v = \frac{d}{\delta} \quad (4.2-60)$$

árnyékolási tényezővel fejezhetjük ki. Ha $v > 2$, akkor 1%-nál kisebb hibával $K \approx e^v/2$. Eredményünk az árnyékoló hatás számítására csak korlátozottan alkalmazható, hiszen a határfelület ritkán merőleges a hullám terjedési irányára. Az mindenesetre látható, hogy a nagypermeabilitású közeg árnyékoló hatása erőteljesebb, még ha konduktivitása kisebb is.

4.2-4.4. Körkeresztmetszetű vezető közelítése

A gyakorlatban elsősorban körkeresztmetszetű vezetőket alkalmazunk. A feladat erre az esetre is megoldható, de nagyobb matematikai apparátust igényel. Az előzők alapján a következő két becslést adhatjuk.

Ha a δ behatolási mélység sokkal nagyobb a vezető r_0 sugaránál (ez a "kisfrekvenciás eset") az árameloszlás egyenletesnek tekinthető, a rezisztenciát az $R_0 = h/(\sigma r_0^2 \pi)$ egyenáramú értékével egyenlőnek vehetjük. Ha a δ behatolási mélység sokkal kisebb a vezető r_0 sugaránál (ez a "nagyfrekvenciás eset") a vezető görbültségé elhanyagolható, a váltakozóáramú rezisztencia megegyezik egy $b = 2\pi r_0$ szélességű hasábéval, vagyis $R \approx h/(\sigma \cdot 2r_0 \cdot \pi \cdot \delta)$, tehát $R/R_0 \approx r_0/2\delta$.

A körkeresztmetszetű vezetőben az elektromágneses tér eloszlását és az impedanciát a pontos számítás szerint komplex argumentumú Bessel függvények írják le. Ezek közelítésével a következő, igen kis hibájú eredmények adódnak:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{4} x^4, \quad \frac{\omega L_B}{R_0} = x^2, \quad x = \frac{r_0}{2\delta} < 1, \quad (4.2-61)$$

$$\frac{R}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64} x, \quad \frac{\omega L_B}{R_0} = x - \frac{3}{64} x, \quad x = \frac{r_0}{2\delta} > 1. \quad (4.2-62)$$

Az első közelítés alapján $L_B = \mu h/8\pi$ (az egyenáramú érték) adódik, míg a második közelítésből $L_B \rightarrow 0$, ha $\omega \rightarrow \infty$. Ez az oka annak, hogy nagy frekvenciákon a belső induktivitást rendszerint elhanyagolják, az öninduktivitást a külső öninduktivitással egyezőnek tekintik.

A koaxiális kábel r_1 belső sugarú és $d = r_2 - r_1$ vastagságú köpenyének belső rezisztenciája kellően nagy frekvencián úgy számítható, mint egy $b = 2 \pi r_1$ szélességű és d vastagságú hasábé.

Kettősvezeték veszteségének számításánál további korrekciókat kell figyelembe venni, ha azok sugarukkal összemérhető távolságban helyezkednek el egymástól, mert ekkor az egyik vezetékben kialakuló erőteret a másikban folyó áram (sőt annak eloszlása is) befolyásolja. Ezekre nehéz elemi függvényekkel leírható elfogadható közelítéseket megadni. Az ilyen feladatokat numerikusan célszerű megoldani konkrét méretek és anyagjellemzők esetére.

4.2-4.5. Őrvényáramok vékony lemezben

Vizsgáljuk meg egy vékony lemezben kialakuló őrvényáramokat és az általuk létrehozott teljesítményt, amelyet időben szinuszosan változó külső mágneses tér hoz létre. Ezzel modellezhető a transzformátorokban, villamos forgógépekben és más lemezelte vasmagú elrendezésekben kialakuló elektromágneses tér, ha a közeg lineárisnak és izotropnak tekinthető, vagyis állandó μ permeabilitással jellemezhető. Ennek az a feltétele, hogy a telítési hatás, a hiszterézis és a hengerlés által okozott anizotrópia hatása elhanyagolható legyen.

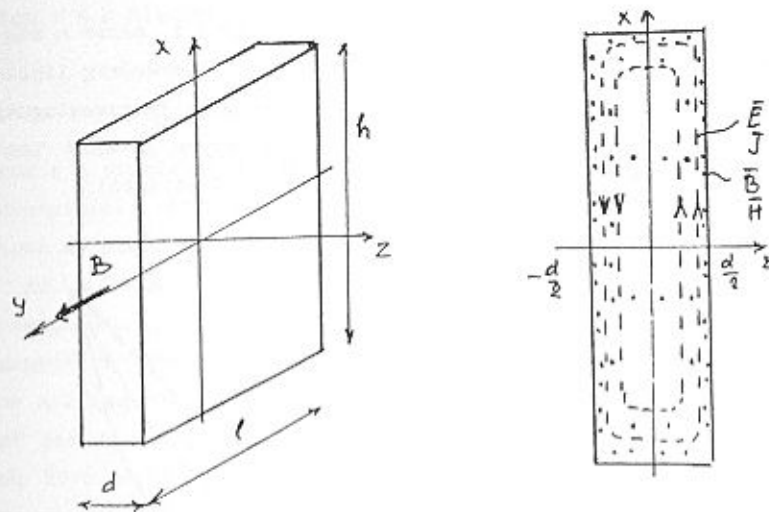
A vizsgált lemez a 7. ábrán látható: a d szélességi méret jóval kisebb a másik kettőnél (ℓ és h). A mágneses térerősség és indukció legyen párhuzamos a lemez hosszú élével, a 7. ábrán ezt választottuk y tengelynek, a rövid éllel párhuzamos a z tengely. Az origót a lemez közepére helyeztük. A 7. ábrán felvázoltuk az áramsűrűség és az elektromos térerősség vonalatos menetét is. Ebből látható, hogy a lemezben kb. a $-(h-d/2) < x < (h-d/2)$ tartományban - vagyis a széleiktől eltekintve - az elektromos térerősségnek csak x irányú, a mágneses térerősségnek csak y irányú rendezője van, ezek csak a z koordinátától függenek. A kialakuló erőteret ebben a közelítésben síkhullámnak tekinthető.

A viszonyok tehát hasonlóak, mint a 4.2-4.3. pontban tárgyalt hasábnál, csak most az elektromos térerősséget a z -ben páros, a mágneses térerősséget a z -ben páratlan függvény írja le a választott koordináta-rendszerben:

$$E_x(z) = Z_0 H_0 \operatorname{sh} \gamma z, \quad H_y(z) = H_0 \operatorname{ch} \gamma z, \quad (4.2-63)$$

$$\gamma = (1 + j) k, \quad Z_0 = (1 + j) \frac{k}{\sigma}, \quad k = \sqrt{\pi f \mu \sigma},$$

ahol H_0 a mágneses térerősség komplex amplitúdója a lemez középpontjában, k a behatolási mélység reciproka. (Ennél a feladatkörnél a behatolási mélységet ritkán használják.) A használatos vaslemezekre tipikus értékek $\mu_r = 3000$, $\sigma = 10^7$ S/m, így $f = 50$ Hz esetén kapjuk, hogy $k = 2,4 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = 2,4 \text{ mm}^{-1}$. Ha $d = 0,5$ mm (egy szabványos méret), akkor $kd = 1,2$.



4.2-7. Ábra. Vékony lemezben külső mágneses tér hatására kialakuló őrvényáramok

A távvezeték analógia nyelvén a lemez olyan távvezetéknek felel meg, amely mindkét végén feszültségforrással vagy áramforrással van lezárva. A lemez fele olyan távvezetéknek is tekinthető, amelynek egyik oldala forrással, másik - a szimmetrisiknak megfelelő - oldala rövidzárral van lezárva. A $H_0 \operatorname{ch}(\gamma d/2)$ jelenti a forrásáramot.

Az adottnak tekinthető mennyiség a lemez Φ mágneses fluxusa vagy a $B_k = \Phi/hd$ közepes mágneses indukció, amelyet a továbbiakban valósnak tekintünk. A fluxus kétféle kifejezése

$$B_k h d = \int_{-d/2}^{d/2} \mu H_y(z) h dz = \mu H_0 h \int_{-d/2}^{d/2} \operatorname{ch} \gamma z dz = \frac{2 \mu}{\gamma} H_0 h \operatorname{sh} \frac{\gamma d}{2}$$

Ebből a H_0 állandó kifejezhető:

$$H_0 = \frac{\gamma d}{2 \mu \operatorname{sh}(\gamma d/2)} B_k \quad (4.2-64)$$

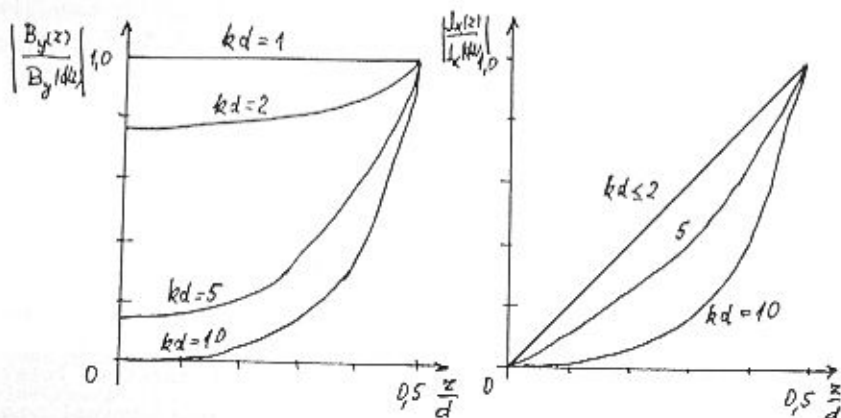
Az áramsűrűség $J(z) = \sigma E(z)$ komplex amplitúdója a (63) felhasználásával

$$J_y(z) = \frac{\gamma^2 d}{2 \mu \operatorname{sh}(\gamma d/2)} B_k \operatorname{sh} \gamma z \quad (4.2-65)$$

Az áramsűrűség amplitúdója ebből $\gamma = (1+j)k$ felhasználásával

$$|J_y(z)| = \frac{k^2 d}{\mu} B_k \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch} kd - \cos kd}} \quad (4.2-66)$$

Ennek menetét mutatja a 8. ábra. Látható, hogy ha $kd < 1$, akkor a mágneses térerősség vagy indukció alig függ z -től, az áramsűrűség lineárisan változik z függvényében. Nagyobb kd (pl. nagyobb lemeztvastagság vagy nagyobb frekvencia) esetén a mágneses tér egyre kevésbé lesz homogén, az áramsűrűség helyfüggése erősen eltér a lineáristól.



4.2-8. Ábra. A mágneses indukció és az áramsűrűség amplitúdójának eloszlása vékony lemezen

A legfontosabb jellemző a lemezen fellépő P veszteségi teljesítmény. Ez számítható pl. a Poynting vektorral:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_x \left(\frac{d}{2} \right) \cdot H_y^* \left(\frac{d}{2} \right) \right\} 2 \ell h$$

Ennek kifejtését az Olvasóra bizzuk. A teljesítmény számítható a $p(z) = |J(z)|^2 / 2\sigma$ teljesítménysűrűség térfogati integráljaként is:

$$P = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{k^2 d}{\mu} B_k \right)^2 \frac{1}{\operatorname{ch} kd - \cos kd} \int_{-d/2}^{d/2} (\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz) \ell h dz$$

A $V = \ell h d$ térfogatra vonatkoztatott átlagos teljesítménysűrűsége rövid számolással a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{24} d^2 \omega^2 B_k^2 F(v) \quad (4.2-66)$$

ahol $v = kd$ a normalizált lemeztvastagság és

$$F(v) = \frac{3}{v} \frac{\operatorname{sh} v - \sin v}{\operatorname{ch} v - \cos v} \quad (4.2-67)$$

Amíg $v < 2$, addig 2,5 %-nál kisebb hibával $F(v) = 1$ vehető. Ilyenkor tehát a veszteség a lemeztvastagságtól, a frekvenciától és a közepes mágneses indukciótól egyaránt négyzetesen függ. Mint láttuk 50 Hz esetén $v < 2$ általában teljesül. Ha viszont $v > 4$, akkor $F(v) \approx 3/v$ és ekkor

$$\frac{P}{V} \approx \frac{\sqrt{2}}{8} d \sqrt{\frac{\omega^3 \sigma}{\mu}} B_k^2, \quad kd > 4 \quad (4.2-78)$$

Ilyenkor a veszteség sűrűsége kevésbé függ a lemez vastagságától és a frekvenciától, erősebben függ viszont a lemez anyagjellemzőitől, amelyek az előző közelítésben nem is játszottak szerepet.

Az alkalmazások során meg kell még gondolnunk a lemez ferromágneses jellegének következményeit. Ha a mágneses indukció legnagyobb értéke akkora, hogy a telítés nem hagyható figyelmen kívül, akkor a közeg nem tekinthető lineárisnak, tehát már kiinduló egyenleteink sem érvényesek (pl. az időbeli változás nem lehet szinuszos). Ennek következtében a valamilyen átlagos permeabilitással számított eredményeink legfeljebb tájékoztató jellegűek. Fellép továbbá a hiszterézisvesztés, amely a frekvenciával arányos és a közepes indukciótól nagyjából négyzetesen függ. Az örvényáramvesztés és a hiszterézis veszteség mellett további veszteségek is fellépnek.

Az örvényáramok következtében fellépő teljesítmény nem mindig veszteség, lehet elérendő cél is. Ez a helyzet pl. az indukciós hevítésnél. Az örvényáramokat hasznosítja a legtöbb fogyasztásmérő ("villanyóra"), amelynél az örvényáramok teljesítménye nem kívánt cél, de nem is tekinthető veszteségnek. Az említett feladatok a bonyolultabb geometria miatt nem közelíthetők síkhullámmal, számításuk kivétel esetektől (pl. hengeres test hevítése) eltekintve csak numerikusan reményteljes.

4.3. VEZETETT HULLÁMOK

4.3-1. CSÓTÁPVONALAK

4.3-1.1. Alapegyenletek

Kellően nagy frekvenciájú (kellően kis hullámhosszúságú) elektromágneses hullámok terjedhetnek egy fémfalú cső belsejében. Szemléletesen úgy magyarázhatjuk a jelenséget, hogy a cső falában az egyik irányban folyó áramot a szigetelőben fellépő eltolási áram vezeti vissza, nincs szükség a visszavezetést biztosító érre. E csőtápvonalakat régebben ezért nevezték érnéküli kábeleknek is. A csőtápvonal előnye a koaxiális kábelhez képest az, hogy egyszerűbb szerkezetű, míg a kettősvezetékhez képest az, hogy nem sugároz, miáltal jobb a hatásfok és kisebb a környezetet zavaró hatás.

Részletesebben csak a téglalap keresztmetszetű, homogén szigetelővel kitöltött csőtápvonalakban terjedő hullámok tulajdonságait fogjuk vizsgálni. A fémfalról feltételezzük, hogy ideális vezető, míg a csőtápvonalat kitöltő közegről, hogy ideális szigetelő. Csak vázlatosan foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy miként lehet az elektromágneses hullámot a csőtápvonalba bejuttatni és onnan kivezetni.

Az ϵ permittivitású és μ permeabilitású lineáris, izotrop ideális szigetelőben szinuszos időbeli változás esetén fellépő térerősségeknek az $E(r,t) = \operatorname{Re} \{E(r) e^{j\omega t}\}$, ill. a $H(r,t) = \operatorname{Re} \{H(r) e^{j\omega t}\}$ által értelmezett $E(r)$, ill. $H(r)$ komplex amplitúdójára vonatkozó Maxwell egyenletek:

$$\begin{aligned} \text{(I.)} \quad \operatorname{rot} H &= j \omega \epsilon E, & \text{(III.)} \quad \operatorname{div} H &= 0, \\ \text{(II.)} \quad \operatorname{rot} E &= -j \omega \mu H, & \text{(IV.)} \quad \operatorname{div} E &= 0. \end{aligned} \quad (4.3-1)$$

A csőtápvonalak számítását a vektorpotenciál bevezetésével fogjuk tárgyalni (l. a 4.1-1. szakaszt), noha ennek bevezetése nem okvetlenül szükséges. A mágneses indukció kifejezése az A vektorpotenciállal

$$B = \operatorname{rot} A. \quad (4.3-2)$$

Helyettesítsük ezt a (II.) Maxwell egyenletbe:

$$\operatorname{rot} E = -j \omega \operatorname{rot} A, \text{ vagyis } \operatorname{rot} (E + j \omega A) = 0.$$

Ebből következően bevezethető az $E + j \omega A = -\operatorname{grad} \varphi$ definícióval egy φ skalár potenciál, vagyis

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - j \omega A. \quad (4.3-3)$$

Ezt az (I.) Maxwell egyenletbe helyettesítve

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A \right) = \frac{1}{\mu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A) = -j \omega \epsilon (\operatorname{grad} \varphi + j \omega A).$$

Válasszuk A divergenciájára a már megismert Lorentz mértéket:

$$\operatorname{div} A = -j \omega \epsilon \mu \operatorname{grad} \varphi. \quad (4.3-4)$$

Ezzel az A vektorpotenciálra a Helmholtz egyenlet adódik:

$$\Delta A + \omega^2 \epsilon \mu A = 0. \quad (4.3-5)$$

Az itt szereplő állandó más alakokban is felírható, mint például

$$\omega^2 \epsilon \mu \equiv \epsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} \equiv \epsilon_r \mu_r \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2.$$

A frekvencia helyett gyakran a $\lambda = c/f$ szabadtéri hullámhosszat tekintjük adottnak, mivel az jobban érzékelhető nagyságrendű.

Ha az (5) megoldásaként $A = A(r)$ már ismert, akkor ezzel $H(r)$, majd ebből $E(r)$ kifejezhető:

$$H = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A, \quad E = \frac{1}{j \omega \epsilon} \operatorname{rot} H. \quad (4.3-6)$$

A φ skalár potenciálra nincs is szükségünk.

Az (1) egyenletek szimmetriája miatt egy másik utat is választhatunk, hiszen az elektromos térerősség is divergenciamentes, ezért kifejezhető egy $Z = Z(r)$ elektromos vektorpotenciál rotációjaként:

$$E = \operatorname{rot} Z. \quad (4.3-7)$$

A további összefüggések ϵ és $-\mu$ felcserélésével adódnak. Az elektromos vektorpotenciálra is a Helmholtz egyenlet vonatkozik:

$$\Delta Z + \omega^2 \epsilon \mu Z = 0. \quad (4.3-8)$$

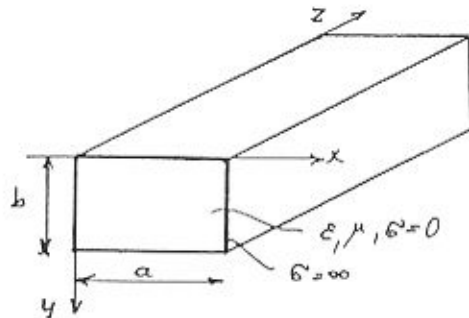
Ha ennek megoldásaként $Z(r)$ már ismert, akkor a térerősségek kifejezése a (6) mintájára

$$E = \text{rot } Z, \quad H = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } E. \quad (4.3-9)$$

A vizsgált elrendezés az 1. ábrán látható. E szerint a terjedés iránya a z-tengely. Az ideális szigetelőanyagot az ϵ és μ anyagállandók jellemzik. A határoló fémfalat ideális vezetőnek tekintjük, ezért a kielégítendő peremfeltétel $E_t = 0$, vagyis részletesebben felírva:

$$\begin{aligned} E_y = 0, \quad E_z = 0, \quad \text{ha } x = 0 \text{ és } x = a, \\ E_x = 0, \quad E_z = 0, \quad \text{ha } y = 0 \text{ és } y = b. \end{aligned} \quad (4.3-10)$$

A mágneses vagy az elektromos vektorpotenciálra közvetlenül nem vonatkozik peremfeltétel.



4.3-1. Ábra. Téglalap keresztmetszetű csőtápvonal

4.3-1.2. A TM módusok

Vizsgáljuk meg, van-e az előző pontban kitűzött feladatnak olyan megoldása, amikor a mágneses vektorpotenciálnak csak egyetlen, és pedig z-irányú rendezője van. A z-irányban terjedő hullámot leíró vektorpotenciál rendezőit a következő alakban keressük:

$$A_x = 0, \quad A_y = 0, \quad A_z(x, y, z) = F(x, y) e^{-\gamma z}, \quad (4.3-11)$$

ahol $F(x, y)$ ismeretlen függvény, míg $\gamma = \alpha + j\beta$ a z-irányú, ugyancsak ismeretlen terjedési együttható, α és β a z-irányú csillapítási és fázisegyüttható. Az (5) vektoriális Helmholtz egyenlet egyetlen, az A_z rendezőre vonatkozó egyenletre egyszerűsödik:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu A_z = 0.$$

A megoldás (11) szerinti feltételezett alakját behelyettesítve:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} e^{-\gamma z} + \gamma^2 F e^{-\gamma z} + \omega^2 \epsilon \mu F e^{-\gamma z} = 0.$$

Egyszerűsítsünk az $e^{-\gamma z}$ tényezővel. Az ismeretlen F függvényre ugyancsak a (kétdimenziós) Helmholtz egyenlet vonatkozik:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2. \quad (4.3-12)$$

A terjedési együttható jellegű k mennyiség egyelőre ismeretlen.

A mágneses térerősség, ill. μH kifejezése (6) értelmében

$$\mu H = \text{rot } A = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & F e^{-\gamma z} \end{vmatrix} = e_x \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} - e_y \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z}.$$

A mágneses térerősség rendezőinek kifejezése ezek szerint

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z}, \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z}, \quad H_z = 0. \quad (4.3-13)$$

A (11) szerinti mágneses vektorpotenciál esetén a mágneses térnek nincs a terjedés irányába eső komponense, ezért ez a hullám transzverzális mágneses vagy röviden TM típusú. Az elektromos térerősség, ill. $j\omega\epsilon E$ kifejezése (6) szerint

$$\begin{aligned} j\omega\epsilon E = \text{rot } H &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z} & 0 \end{vmatrix} \\ &= e_x \frac{-\gamma}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z} + e_y \frac{-\gamma}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z} + e_z \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) e^{-\gamma z}. \end{aligned}$$

A (12) értelmében a zárójeles kifejezés $k^2 F$, ezért

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-\gamma}{j\omega\epsilon\mu} \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\gamma z}, \\ E_y &= \frac{-\gamma}{j\omega\epsilon\mu} \frac{\partial F}{\partial y} e^{-\gamma z}, \\ E_z &= \frac{k^2}{j\omega\epsilon\mu} F e^{-\gamma z}. \end{aligned} \quad (4.3-14)$$

Ezek szerint E_z arányos az $A_z = F e^{-\gamma z}$ rendezővel. Ebből következik, hogy a (12) Helmholtz egyenlet olyan megoldását keressük, amely a peremen nulla értékű.

Keressük a (12) parciális differenciálegyenlet megoldását

$$F(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (4.3-15)$$

ún. szorzatszerparációs alakban, ahol X csak az x , míg Y csak y függvénye. Helyettesítsük ezt a (12)-be:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 X Y = 0.$$

Osszuk ezt el $X \cdot Y$ -nal. Átrendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2.$$

A csak x -től függő első tag és a csak y -től függő második tag összege csak akkor lehet egyenlő egy állandóval, ha mindkettő maga is állandó. Jelölje e két ismeretlen állandót $-k_x^2$, ill. $-k_y^2$, ahol

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 = \omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2. \quad (4.3-16)$$

Az ismeretlen $X(x)$ és $Y(y)$ függvényekre vonatkozó közösleges differenciálegyenletek

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0. \quad (4.3-17)$$

A sajátértékek $\pm j k_x$, ill. $\pm j k_y$. A megoldások tehát $\sin k_x x$, ill. $\sin k_y y$ alakúak, mert a \cos típusú összetevő nem nulla az $x = 0$, ill. $y = 0$ peremen. Az ismeretlen $F = X \cdot Y$ függvény kifejezése ezek szerint

$$F(x,y) = \mu M \sin k_x x \sin k_y y, \quad (4.3-18)$$

ahol M ismeretlen állandó. Ez a linearitás miatt tetszőleges, értéke pl. az átvitt teljesítmény ismeretében határozható meg. A μ szorzó a későbbiekben egyszerűsíti H kifejezését.

Biztosítanunk kell még, hogy E_z , ill. a vele arányos F az $x = a$ és az $y = b$ peremen is nulla legyen. A $\sin k_x a = 0$, ill. a $\sin k_y b = 0$ feltétel ki van elégítve, ha

$$k_x = m \frac{\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad k_y = n \frac{\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (4.3-19)$$

Az m és n módusindexek tetszőlegesek, egyikük sem lehet nulla, mert az

az $F = 0$ triviális megoldást eredményezi (az ideális vezető fémfalon belül nincs erőter). Egy rögzített m, n indexpárhoz tartozó hullámot TM_{mn} módusúnak neveznek (pl. TM_{11} módusú hullám). Helyettesítsük (19)-et a (16)-ba:

$$\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 = \omega^2 \epsilon \mu + (\alpha_{mn} + j \beta_{mn})^2.$$

Ebből kifejezhető az m, n indexpárhoz tartozó α_{mn} csillapítási együttható és β_{mn} fázisegyüttható. A $\lambda = c/f$ szabadterei hullámhossz bevezetésével

$$\gamma_{mn} = \alpha_{mn} + j \beta_{mn} = \sqrt{\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 - \epsilon_r \mu_r \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}. \quad (4.3-20)$$

Az összefüggés értelmezésével a 4.3-1.4. pontban foglalkozunk. Az azonban máris látható, hogy a terjedési együttható vagy valós (ha λ vagy m , ill. n viszonylag nagy), vagy képzetes (ha λ kellően kicsi, vagyis ha a frekvencia kellően nagy). Utóbbi esetben a z -tengely irányában csillapítatlan hullám terjed. Az előbbi esetben viszont az elektromágneses tér a z -tengely irányában exponenciálisan eltűnő, ennek az "állóhullámnak" a fázisegyütthatója nulla, hullámhossza nem értelmezett.

A TM módusú mágneses térerősség komplex amplitúdójának rendezői a (13) felhasználásával nehézség nélkül felírhatók:

$$\begin{aligned} H_x(x,y,z) &= k_y M \sin k_x x \cos k_y y e^{-\gamma z}, \\ H_y(x,y,z) &= -k_x M \cos k_x x \sin k_y y e^{-\gamma z}, \\ H_z(x,y,z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3-21)$$

Hasonlóképpen adódnak (14) alapján az elektromos térerősség komplex amplitúdójának rendezői:

$$\begin{aligned} E_x(x,y,z) &= j \frac{k_x \gamma}{\omega \epsilon} M \cos k_x x \sin k_y y e^{-\gamma z}, \\ E_y(x,y,z) &= j \frac{k_y \gamma}{\omega \epsilon} M \sin k_x x \cos k_y y e^{-\gamma z}, \\ E_z(x,y,z) &= -j \frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega \epsilon} M \sin k_x x \sin k_y y e^{-\gamma z}. \end{aligned} \quad (4.3-22)$$

Itt nem jelöltük, hogy k_x , k_y és $\gamma = \alpha + j \beta$ az m és n módusindexek által meghatározott. Láthatjuk, hogy nem csak $E_z = 0$ a peremen, hanem

$E_x = 0$ az $y = 0$ és $y = b$ peremen, és $E_y = 0$ az $x = 0$ és $x = a$ peremen, vagyis a (18) szerinti összes peremfeltétel ki van elégítve. Ha ez nem teljesülne, akkor a feladatnak nem lenne (11) alakú megoldása.

4.3-1.4. A TE módusok

A transzverzális elektromos vagy röviden a TE módusú hullámokat nyilván úgy kapjuk, hogy olyan megoldást keresünk, amelyre az elektromos vektorpotenciálnak csak z-irányú rendezője van:

$$Z_x = 0, \quad Z_y = 0, \quad Z_z(x, y, z) = F(x, y) e^{-\gamma z} \quad (4.3-23)$$

Az (1) szerinti kiinduló egyenletek szimmetrikus jellege következtében az előző pont eredményeit E és H , ill. ϵ és $-\mu$ felcserélésével átvehetjük két módosítással. Az egyik az, hogy mivel a peremfeltételek most is E -re (és nem H -ra) vonatkoznak, ezért

$$F(x, y) = M \cos k_x x \cos k_y y \quad (4.3-24)$$

a peremfeltételeknek is eleget tevő függvény. A másik, ebből következő módosítás az, hogy az m és n módusindexek egyike nulla is lehet. Ez azt jelenti, hogy $m = 0$ esetén $k_x = 0$, tehát az erőtér az x -tengely irányában nem változik, míg $n = 0$ esetén $k_y = 0$, tehát az erőtér az y -tengely irányában nem változik.

Ezeket figyelembe véve az elektromos térerősség komplex amplitúdójának rendezőire (9) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= -k_y M \cos k_x x \sin k_y y e^{-\gamma z}, \\ E_y(x, y, z) &= k_x M \sin k_x x \cos k_y y e^{-\gamma z}, \\ E_z(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3-25)$$

Láthatjuk, hogy a (10) szerinti $E_x = 0$, $E_z = 0$, ha $y = 0$ és $y = b$ és $E_y = 0$, $E_z = 0$, ha $x = 0$ és $x = a$ peremfeltételek ki vannak elégítve. A mágneses térerősség rendezői $\text{rot } E = -j \epsilon \mu H$ alapján

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &= j \frac{k_x \gamma}{\omega \mu} M \sin k_x x \cos k_y y e^{-\gamma z}, \\ H_y(x, y, z) &= j \frac{k_y \gamma}{\omega \mu} M \cos k_x x \sin k_y y e^{-\gamma z}, \\ H_z(x, y, z) &= j \frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega \mu} M \cos k_x x \cos k_y y e^{-\gamma z}. \end{aligned} \quad (4.3-26)$$

Most is $k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$, míg $\gamma_{mn} = \alpha_{mn} + j \beta_{mn}$ kifejezését a (20) adja. Ha speciálisan $m = 0$, akkor $E_y = 0$ és $H_x = 0$, ha pedig $n = 0$, akkor $E_x = 0$ és $H_y = 0$. Az $m = n = 0$ eset a triviális megoldást jelent.

4.3-1.4. A teljesítményáramlás

Az előző két pont eredményeiből következik, hogy mind a TM módusú, mind a TE módusú hullámoknál az E_x és a H_y , ill. az E_y és a H_x rendezőt ugyanolyan típusú függvény írja le a hely függvényében. Időben $\gamma_{mn} = \alpha_{mn}$ esetén negyedperiódusnyi (fázisban 90°) eltérés van közöttük, míg $\gamma_{mn} = j \beta_{mn}$ esetén fázisban vannak. Az is könnyen belátható, hogy mindkét hullámtípusra

$$E \cdot H = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = 0, \quad (4.3-27)$$

ami azt jelenti, hogy E és H mindenütt és mindig merőleges egymásra.

A teljesítményáramlás vizsgálatához határozzuk meg az

$$S = \frac{1}{2} E \times H^* \quad (4.3-28)$$

komplex Poynting vektor kifejezését. A TM módusú hullámokra

$$E \times H^* = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x^* & H_y^* & 0 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &-e_x E_z H_y^* + \\ &+e_y E_z H_x^* + \\ &+e_z (E_x H_y^* - E_y H_x^*) \end{aligned}$$

Hasonló módon kapjuk a TE módusú hullámokra

$$E \times H^* = e_x E_y H_z^* - e_y E_z H_x^* + e_z (E_x H_y^* - E_y H_x^*).$$

A Poynting vektor rendezőinek kifejezése az előző két pontban kapott eredmények felhasználásával

$$\text{TM módus:} \quad (4.3-29)$$

$$S_x(x, y, z) = j \frac{k_x^2 + k_y^2}{2 \omega \epsilon} k_x M^2 \sin k_x x \cos k_x x \sin^2 k_y y e^{-2\alpha z},$$

$$S_y(x, y, z) = j \frac{k_x^2 + k_y^2}{2 \omega \epsilon} k_y M^2 \sin^2 k_x x \sin k_y y \cos k_y y e^{-2\alpha z},$$

$$S_z(x, y, z) = j \frac{-\gamma}{2 \omega \epsilon} M^2 (k_x^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + k_y^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y) e^{-2\alpha z}.$$

TE módus: (4.3-30)

$$S_x(x, y, z) = -j \frac{k_x^2 + k_y^2}{2 \omega \mu} k_x M^2 \sin k_x x \cos k_x x \cos^2 k_y y e^{-2\alpha z}$$

$$S_y(x, y, z) = -j \frac{k_x^2 + k_y^2}{2 \omega \mu} k_y M^2 \cos^2 k_x x \sin k_y y \cos k_y y e^{-2\alpha z}$$

$$S_z(x, y, z) = j \frac{\gamma}{2 \omega \mu} M^2 (k_x^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y + k_y^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y) e^{-2\alpha z}$$

A Poynting vektor kifejezéséből a következők olvashatók ki figyelembe véve a $\gamma = \alpha + j\beta$ terjedési együttható (20) szerinti kifejezését is.

Amely módusra $\gamma_{mn} = \alpha_{mn}$ valós, az hatásos teljesítményt nem szállít, mert S minden rendezője képzetes, a meddő teljesítmény exponenciálisan csökken a haladás irányában.

Amely módusra $\gamma_{mn} = j\beta_{mn}$ (tehát $\alpha_{mn} = 0$), az a terjedés irányában hatásos teljesítményt szállít, mert S_z valós (és a keresztmetszet minden pontjában ugyanolyan előjelű), arra merőlegesen hatásos teljesítményáramlás nincs (S_x és S_y képzetes). Mind a hatásos, mind a meddő teljesítmény z -től független. A csillapítatlan hullám által a z -tengely irányában szállított P hatásos teljesítmény S_z -nek a keresztmetszetre vett integráljaként (fejben is) számítható:

$$P_{TM} = \frac{\omega^2 \epsilon \mu - \beta^2}{8 \omega \epsilon} a b M^2, \quad P_{TE} = \frac{\omega^2 \epsilon \mu - \beta^2}{8 \omega \mu} a b M^2 \quad (4.3-31)$$

Ha csak egyetlen csillapítatlan módus terjed, akkor a teljesítmény ismeretében az M állandó kifejezhető.

4.3-1.5. A csillapítatlan módusok

Noha az eltűnő módusoknak is van bizonyos gyakorlati jelentőségük, a továbbiakban csak az energiaszállításra alkalmas csillapítatlan módusokkal foglalkozunk.

A csillapítatlan hullámok terjedésének feltétele $\alpha_{mn} = 0$, ami a (22) értelmében akkor teljesül, ha

$$\left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 < \epsilon_r \mu_r \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = N^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2, \quad (4.3-32)$$

ahol a tipikus $\mu_r = 1$ esetén N a törésmutató a vizsgált frekvencián.

Az m, n módusszámokhoz tartozó, csillapítás nélkül még éppen átvihető hullám szabadtéri hullámhossza, az ún. határhullámhossz ($N^2 = \epsilon_r \mu_r$)

$$\lambda_{h, mn} = \frac{2N}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3-33)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

ahol TM módusra m és n egyike sem lehet nulla, TE módusra egyikük nulla is lehet. Csillapítatlanul terjedhetnek azok a módusok, amelyek λ szabadtéri hullámhossza kisebb a határhullámhossznál, vagyis frekvenciája nagyobb az $f_{h, mn} = c/\lambda_{h, mn}$ határfrekvenciánál (más néven: vágási frekvenciánál)

$$\lambda < \lambda_{h, mn}, \quad f > f_{h, mn} \quad (4.3-34)$$

A határhullámhossz a (33)-ból láthatóan annál nagyobb, minél nagyobbak a keresztirányú a és b méretek, minél nagyobb a szigetelőanyag ϵ_r relatív permittivitása (és μ_r relatív permeabilitása, azonban többnyire $\mu_r = 1$), továbbá minél kisebbek az m és n módusindexek.

A csillapítatlan hullám β_{mn} fázisegyütthatója kifejezhető (20)-ból. Ebből adódik a csőben mért $\Lambda_{mn} = 2\pi/\beta_{mn}$ hullámhossz következő kifejezése:

$$\Lambda_{mn} = \frac{\lambda}{N \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{h, mn})^2}} \quad (4.3-35)$$

Ha $\epsilon_r = \mu_r = 1$, akkor $\Lambda_{mn} > \lambda$. A hullám fázissebessége $v_{mn} = f \cdot \Lambda_{mn}$

vagy $v_{mn} = \Lambda_{mn} \cdot c/\lambda$, vagyis

$$v_{mn} = \frac{1}{N \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{h, mn})^2}} \quad (4.3-36)$$

A fázissebesség mindig nagyobb a közegben terjedő fény sebességénél, levegő esetén $v_{mn} > c$. Ez nincs ellentmondásban a relativitáselmélettel, mert a fázissebesség (a végtelen szinusz hullám azonos fázisú pontjainak sebessége) általában nem bír fizikai tartalommal. Némi számolással belátható, hogy a csoportsebesség kifejezése

$$v_{g, mn} = \left(\frac{d\beta_{mn}}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c}{N} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{h, mn}}\right)^2} \quad (4.3-37)$$

A kis sávzélességű, λ közepes szabadtéri hullámhosszúságú jel közeli-

tőleg v_g sebességgel terjed. A (37)-ből látható, hogy $v_{g,mn} < c$. Megjegyezzük, hogy $\sqrt{v_{mn} \cdot v_{g,mn}} = c/N$, ami fénysebesség a közegben.

Ha $\lambda > \lambda_{h,mn}$, akkor Λ_{mn} , v_{mn} és $v_{g,mn}$ mindegyike képzetes. Ebből is következik, hogy az ekkor kialakuló eltűnő módusok nem csillapítatlan terjedő hullámok.

Az energiaátvitel szempontjából a legfontosabbak a legkisebb indexű módusok. A legnagyobb hullámhosszúságú (legkisebb frekvenciájú) csillapítatlan hullám a TE_{10} módussal vihető át. (A TE_{01} módus ebből indexcserével adódik, ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk.) Ennek határhullámhossza (33) értelmében

$$TE_{10}: \lambda_{h,10} = 2Na = \lambda_0. \quad (4.3-38)$$

Ez - és valamennyi TE_{m0} módus határhullámhossza - független az x-irányú a mérettől. A következő leghosszabb határhullámhossza vagy a TE_{20} vagy a TE_{11} ill. TM_{11} módusnak van:

$$TE_{20}: \lambda_{h,20} = \frac{1}{2} \lambda_0, \quad (4.3-39)$$

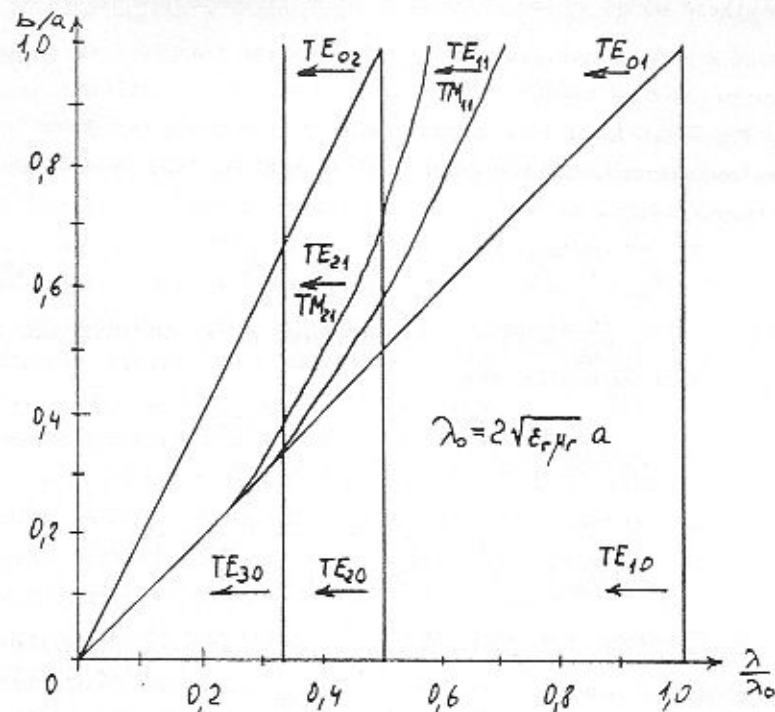
$$TE_{11}, TM_{11}: \lambda_{h,11} = \frac{1}{\sqrt{1 + (a/b)^2}} \lambda_0. \quad (4.3-40)$$

Tetszőleges m,n módusindexekre a határhullámhossz kifejezése

$$\lambda_{h,mn} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2(a/b)^2}} \lambda_0. \quad (4.3-41)$$

Mindebből az következik, hogy a csőtápvonalon olyan hullámok terjedhetnek csillapítatlanul, amelyek szabadtéri hullámhossza a cső keresztmetszeti méreteinek nagyságrendjébe esik. Ez $\lambda \approx 10$ cm körüli hullámhosszat, vagyis $f = 3 \cdot 10^9$ Hz = 3 GHz körüli frekvenciát jelent. Ennél lényegesen "hosszabb", ill. "lomhább" hullámok csillapítatlan átvitelére a csőtápvonal nem alkalmas.

A 2. ábrán láthatjuk a határhullámhosszakat λ/λ_0 és b/a függvényében. A határgörbétől balra eső pontoknak megfelelő módusok terjedhetnek csillapítatlanul. Ha pl. $b/a = 0,8$, akkor a frekvenciától, ill. a λ szabadtéri hullámhossztól függően a következő módusok terjedhetnek csillapítatlanul:



4.3-2. A csőtápvonalon csillapítatlanul átvihető módusok

TE_{10} :	$\lambda/\lambda_0 < 1,000$
TE_{01} :	$\lambda/\lambda_0 < 0,800$
TE_{11}, TM_{11} :	$\lambda/\lambda_0 < 0,625$
TE_{21}, TM_{21} :	$\lambda/\lambda_0 < 0,530$

Tovább csökkentve a hullámhosszat (növelve a frekvenciát) a TE_{20} , majd a TE_{12} és TM_{12} (az ábrán nincs feltüntetve), majd a TE_{02} és így tovább módusok terjedhetnek csillapítatlanul.

A méreteket rendszerint úgy választják meg, hogy az adott frekvencián a kívánt teljesítmény átvihető legyen úgy, hogy az elektromos térerősség maximuma ne legyen nagyobb egy megengedett értéknél, és csak egyetlen módus terjedhessen csillapítatlanul. Az utóbbi feltétel azt biztosítja, hogy a különböző inhomogenitásoktól (becsatolás, kicsatolás, egyenetlenség a közegben vagy a méretben) távol csak ez a módus terjedjen, mert a fellépő parazita módusok nullává váltak.

A négyszögletes keresztmetszetű csőtápvonalra a hullámimpedanciát a következő módon szokás értelmezni TM és TE módusokra egyaránt:

$$Z_0 = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (4.3-42)$$

A Z_0 független az x, y és z koordinátáktól. Konkrét kifejezése más az egyes módusokra. A (21) és (22), ill. a (25) és (26) összefüggésekből következik, hogy

$$Z_0(TM_{mn}) = \frac{\beta_{mn}}{\omega \epsilon}, \quad Z_0(TE_{mn}) = \frac{\omega \mu}{\beta_{mn}} \quad (4.3-43)$$

Felhasználva a $\beta_{mn} = 2\pi/\lambda_{mn}$ összefüggést és a (35)-öt, azt kapjuk elemi átalakítások után, hogy

$$Z_0(TM_{mn}) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{h,mn}}\right)^2},$$

$$Z_0(TE_{mn}) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{h,mn}}\right)^2} \right]^{-1} \quad (4.3-44)$$

A $\sqrt{\mu/\epsilon}$ mennyiség a csőtápvonalat kitöltő közegnek a síkhullámhoz kapcsolódó hullámellenállása. A $\lambda < \lambda_{h,mn}$ szabadtéri hullámhosszakon (csillapítatlan módus) a Z_0 hullámimpedancia valós, a $\lambda > \lambda_{h,mn}$ hullámhosszakon (eltűnő módus) a hullámimpedancia képzetes.

Érdekességként megemlítjük, hogy a $\xi^2 + \eta^2 = 1$ egység sugarú kör első negyede írja le a következő mennyiségek kapcsolatát:

$$\xi = \frac{\lambda}{\lambda_{h,mn}}, \quad \frac{f_{h,mn}}{f}$$

$$\eta = \frac{\beta_{mn}}{\beta(0)}, \quad \frac{\Lambda_{mn}}{\Lambda(0)}, \quad \frac{v(0)}{v_{mn}}, \quad \frac{v_{g,mn}}{v_g(0)}, \quad \frac{Z_0(TM_{mn})}{Z_0(0)}, \quad \frac{Z_0(0)}{Z_0(TE_{mn})}$$

ahol $\beta(0) = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, $\Lambda(0) = 2\pi/\omega\sqrt{\epsilon\mu}$, $v(0) = v_g(0) = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, $Z_0 = \sqrt{\epsilon/\mu}$ a közeg és a frekvencia által meghatározott jellemzők, amelyeknek síkhullám esetén van egyszerű fizikai jelentésük: fázisgyűtthetőség, hullámhossz, fázis- és csoportsebesség, ill. hullámimpedancia.

4.3-1.6. Az erővonalkép

A csőtápvonalban kialakuló erőter ábrázolása nehéz feladat, mert noha a TM módusok esetén a H-vonalak, a TE módusok esetén az E-vonalak a keresztmetszet síkjában vannak, a másik vektornak van z -irányú összetevője is. Csillapítatlan módusok esetén z -irányban minden mennyiség eloszlása egy rögzített időpontban szinuszos, az idő függvényében haladó hullám. A térerősségek x és y rendezői fázisban vagy ellenfázisban vannak, a z rendezői ezekhez képest negyed periódussal siet vagy késik. Mindez a (21), (22) és a (25), (26) összefüggésekből következik, amelyekben most $j\gamma = -\beta$ valós érték.

A továbbiakban az erőternek a keresztmetszetben kialakuló eloszlásának vizsgálatára szorítkozunk. Az ábrázolást megkönnyíti, hogy csak három módussal kell foglalkoznunk (TE_{10} , TE_{11} és TM_{11}), a többi ezekből már egyszerűen adódik.

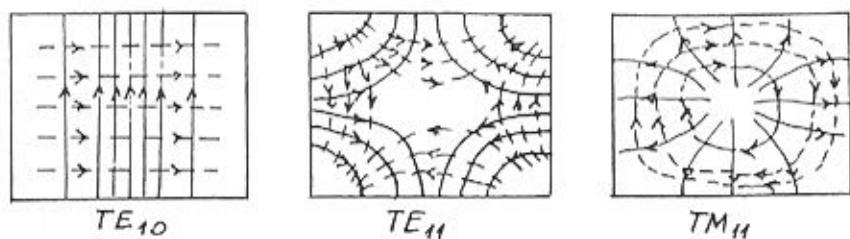
Az erővonalak vázlatos megrajzolásánál a következőket vegyük figyelembe. A H-vonalak zártak. Az E-vonalak vagy zártak, vagy a falon erednek és végződnek a falra merőlegesen. Az E- és a H-vonalak mindenütt merőlegesen egymásra, irányuk olyan, hogy a Poynting vektor S_z rendezője mindenütt pozitív. A már hivatkozott megoldásokból látható, hogy mindkét módusfjtára

$$E_y = 0, \quad H_x = 0, \quad \text{ha } x = 0, \quad \frac{a}{m}, 2\frac{a}{m}, 3\frac{a}{m}, \dots, m\frac{a}{m} = a,$$

$$E_x = 0, \quad H_y = 0, \quad \text{ha } y = 0, \quad \frac{b}{n}, 2\frac{b}{n}, 3\frac{b}{n}, \dots, n\frac{b}{n} = b.$$

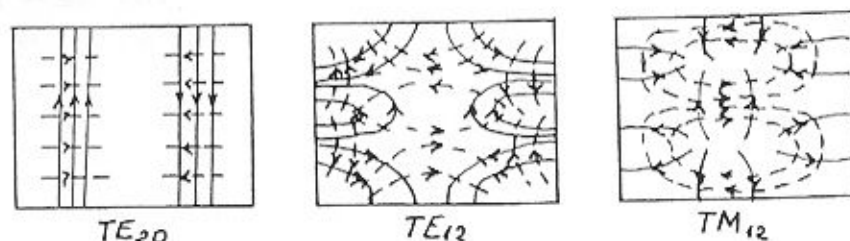
Ezek jelentik a csomósíkokat, amelyek mentén az erőter olyan, mint ha ott fémfal lenne. A csomósíkok mentén - a rá merőleges két csomósík között - minden térerősség-rendező eloszlását egy fél szinuszhullám vagy egy fél koszinuszhullám írja le.

Mindezek alapján a 3. ábrán felvázoltuk a három alapvető módus erővonalképét a keresztmetszet síkjában. Az E-vonalakat folytonos, a H-vonalakat szaggatott vonalú görbék ábrázolják. A TE-módusoknál a megszakadó H-vonalak kilépnek a keresztmetszet síkjából, majd $\Lambda_{mn}/2$ távolságon belül visszalépnek és fordított irányítással záródnak. Hasonló a helyzet a TM módusnál az E-vonalakkal, csak azok a falon is végződhetnek. Az erővonalak sűrűsége érzékelteti a térerősség rendezőinek szinuszos eloszlását.



4.3-3. ábra. A csőtápvonal három alapvető módusának keresztmetszeti erővonalképe

A nagyobb indexű módusok erővonalképe a három alapvető erővonalaképből építőköcsa-szerűen felépíthető. A 4. ábrán az $m = 2$ eset vázlatai láthatók. Ezeknek az x tengely irányában 1 belső csomósíkjuk (összesen $m + 1 = 3$ csomósíkjuk) van. Javasoljuk az Olvasónak a TE_{22} és a TM_{22} módus erővonalképeinek felvázolását.



4.3-4. ábra. A csőtápvonal három további módusának erővonalképe

Az erővonalkép alapján az elektromágneses tér kialakulása szemléletesen követhető: a mágneses erővonalakat körülveszik az indukálás révén kialakuló elektromos tér (zárt vagy a falon végződő) erővonalai. Az eltolási áramsűrűséget is jelentő elektromos tér erővonalait körülveszik a mágneses tér zárt erővonalai. A TE módusoknál a H-vonalak, a TM módusoknál az E-vonalak a keresztmetszetből kilépve, majd egy másik keresztmetszetben visszatérve záródnak.

Az erővonalkép segít annak az elképzelésében is, hogy miként lehet a csőtápvonalban valamilyen módust létrehozni vagy egy módusban terjedő hullám hatását kicsatolni. Például a TE_{10} módust egy, az elektromos térerősséggel (az y tengellyel) párhuzamos, szinuszos időfüggvényű vezetékkel ("bottal") hozzák létre. A kézenfekvőnek tűnő

sikelektrodás gerjesztés a gyakorlatban nem használatos. A TM_{11} módust a z -irányban benyúló rúd és a fal közé kapcsolt feszültséggel szokás létrehozni. Megfelelően elhelyezett árammal átjárt hurkokkal az alkalmas mágneses teret lehet létrehozni, ill. annak indukáló hatását lehet felhasználni. A be- és kicsatolás módszereivel azonban nem foglalkozunk részletesebben.

A határoló fémfal és a szigetelőanyag nem ideális volta a kialakuló erőteret alig befolyásolja. A fellépő veszteségek első közelítésben úgy számíthatók, hogy az (ismert veszteségi tényezőjű) szigetelőanyagban az elektromos térerősséget, az (ismert konduktivitású) vezető felületén a mágneses térerősséget az ideális esetben fellépővel megegyezőnek tekintjük. A veszteség további számítását azonban nem részletezzük.

4.3-1.7. Üregrezonátorok

Egy mindkét végén fémlemezekkel lezárt csőtápvonalban ugyanúgy állóhullámok alakulhatnak ki, mint a mindkét végén rövidrezárt ideális távvezetéken (3.2-7.4. pont). Az üregben olyan hullámok alakulhatnak ki, amelyek fél hullámhosszának egész számú többszöröse egyenlő az üreg h hosszával. Az m, n módusindexekhez tartozó hullámhosszal kifejezve $\epsilon_r = \mu_r = 1$ esetén a (35) értelmében a kialakuló rezgés λ_{mnp} szabadtéri hullámhosszára felírható a következő összefüggés:

$$h = p \frac{\lambda_{mnp}}{2} = \frac{p}{2} \frac{\lambda_{mnp}}{\sqrt{1 - (\lambda_{mnp}/\lambda_{h,mn})^2}}$$

Helyettesítsük ebbe a határhullámhossz (33) szerinti kifejezését, akkor rendezés után megkapjuk a fellépő TE_{mn} vagy TM_{mn} módusú állóhullám lehetséges λ_{mnp} szabadtéri hullámhosszának kifejezését:

$$\lambda_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2}}; \quad m, n, p = 1, 2, \dots \quad (4.3-45)$$

ahol m, n és p egyike nulla is lehet. A TE_{101} módusú rezgés szabadtéri hullámhossza

$$\lambda_{101} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}}} \quad (4.3-46)$$

Ebből következik, hogy az üregrezonátor centiméteres hullámhosszúságú, vagyis gigahertz frekvenciájú rezgések rezgőkörként használható. Ilyen frekvenciájú "hagyományos" rezgőkörök kezelhetetlenül kis méretűek lennének és nagy sugárzási veszteségük lenne.

Az üregrezonátor veszteségének számítása, a be- és kicsatolás megválasztása hasonló módon végezhető el, mint azt az előző pontban vázoltuk.

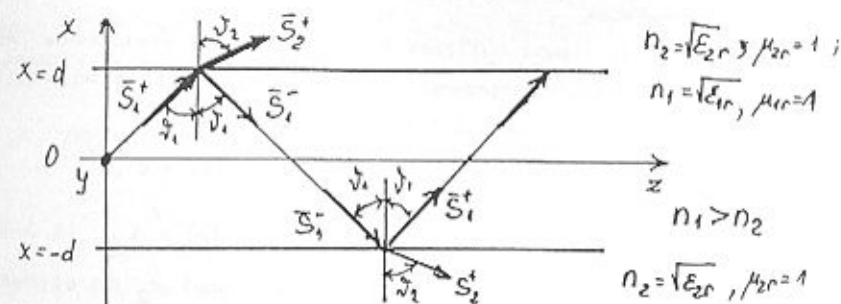
Az egyik lezáró fal helyzetének változtatásával az üregrezonátor sajátfrekvenciája könnyen és pontosan szabályozható. Technikailag ez körkeresztmetszetű üreg esetén valósítható meg egyszerűen csavarral mozgatható dugattyúval. A körkeresztmetszetű üregrezonátor erőterének számítása és sajátfrekvenciáinak kifejezése azonban nagyobb matematikai apparátust igényel, ezért ennek tárgyalását is mellőzzük.

4.3-2. SZIGETELŐ RÉTEG HULLÁMVEZETŐ

4.3-2.1. A feladat megfogalmazása

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett terjedhet egy $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{1r} = \epsilon_0 n_1^2$ anyagjellemzőjű ideális szigetelő (dielektromos) hengerben vagy hasámban, az ún. magban adott frekvenciájú elektromágneses hullám úgy, hogy a $\mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{2r} = \epsilon_0 n_2^2$ anyagjellemzőjű ideális szigetelő környezetébe, az ún. héjba nem lép ki hatásos teljesítmény, az utóbbi közegben az elektromágneses tér a terjedésre merőleges irányban eltűnő. A gyakorlati alkalmazás során az üvegszál magot borító héját védőréteg (azt pedig levegő) veszi körül. A héj azonban kis hibával végtelen vastagságúnak tekinthető. Egyes kiviteleknel a törésmutató változása nem ugrásszerű, hanem folytonos (a középvonalban n_1 , a szélénél n_2). A továbbiakban azonban ezzel az esettel nem foglalkozunk, csak az ugrásszerűen változó törésmutató esetét tárgyaljuk.

A vázolt feladat matematikai tárgyalása nagyon bonyolult. A lényeges jelenségek jelentős része azonban megismerhető az 5. ábrán vázolt egyszerűbb (habár absztraktabb) modell alapján is.



4.3-5. Ábra. Szigetelő réteg hullámvezetőben kialakuló elektromágneses tér Poynting vektora

Az 5. ábra szerinti elrendezésben a mag egy x -irányban $2d$ vastagságú réteg, amelynek y -irányú méretét végtelen nagynak tekintjük. Olyan megoldást keresünk, amely z -irányban csillapítatlan haladó hullám β fázisegyütthatóval, az x -irányban a magban csillapítatlan állóhullám (valós fázisegyüttható), míg a héjban x -irányban eltűnő jellegű (képzetes fázisegyüttható).

Ilyen erőter kialakulásának egy feltétele az, hogy a mag mindkét határfelületén ($x = \pm d$) teljes visszaverődés következzen be, amihez $n_2 < n_1$ szükséges (4.2-3.5. pont). A feltételezett hullámforma kialakulásához ehhez túlmenően az is szükséges, hogy két teljes visszaverődés után a hullámot leíró függvények fáziskülönbsége 2π egész számú többszöröse legyen. Ebből már sejthető, hogy csak bizonyos beesési szögű hullámok terjedhetnek a leírt módon.

Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy miként lehet a megfelelő hullámot létrehozni (becsatolás), ill. miként lehet a terjedő hullámot a szigetelő hullámvezetőből kicsatolni.

A következő pontokban többször fogunk hivatkozni a 4.2-3.4. és 5. pontban tárgyaltakra. Az ott szereplő $N = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ anyagjellemző helyére most az $n = \sqrt{\epsilon_r}$ törésmutatót írjuk, hiszen kikötésünk értelmében egyik közeg sem ferromágneses. A szigetelő hullámvezetőket a látható fény tartományában használják, a forrás egy lézer vagy egy LED.

4.3-2.2. Alapegyenletek

Tekintsünk először TE típusú hullámokat, amelyeknél az elektromos térerősségnek csak y-irányú komponense van. A magban, ill. a héjban az elektromos térerősség komplex amplitúdója (4.2-3.4. pont):

$$E_y(x, z) = (E_{1y}^+ e^{-jk_1 x} + E_{1y}^- e^{+jk_1 x}) e^{-j\beta z}, \quad |x| < d,$$

$$E_y(x, z) = E_{2y} e^{-jk_2 |x|} e^{-j\beta z}, \quad |x| > d. \quad (4.3-47)$$

ahol k_1 valós, $k_2 = -jk_2$ képzetes ($-jk_2 = -\kappa_2$, ahol κ_2 az eltűnési együttható a magban). A határfelületeken a beeső és a visszavert térerősség kapcsolata

$$x = d: \quad E_{1y}^- e^{jk_1 d} = r_{TE} E_{1y}^+ e^{-jk_1 d},$$

$$x = -d: \quad E_{1y}^+ e^{jk_1 d} = r_{TE} E_{1y}^- e^{-jk_1 d}.$$

A második összefüggésből $E_{1y}^+ = r_{TE} E_{1y}^- e^{-j2k_1 d}$. Ezt az első összefüggésbe helyettesítve, felhasználva r_{TE} (4.2-35) szerinti kifejezését és hogy $\mu_{1r} = \mu_{2r}$, kapjuk hogy

$$e^{j4k_1 d} = r_{TE}^2 = \left(\frac{(k_1/\mu_1) - (k_2/\mu_2)}{(k_1/\mu_1) + (k_2/\mu_2)} \right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2. \quad (4.3-48)$$

A bennünket érdeklő esetben (4.2-30) értelmében

$$k_1 = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \quad k_2 = -j\kappa_2, \quad \kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}. \quad (4.3-49)$$

ahol $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$. A (48) jobb oldalán szereplő komplex (!) szám abszolút értéke 1, szöge egyenlő a számláló szögének négyszeresével. Ebből következően

$$e^{j4k_1 d} = \left(\frac{\mu_2 k_1 + j\mu_1 \kappa_2}{\mu_2 k_1 - j\mu_1 \kappa_2} \right)^2, \quad 4k_1 d = 4 \arctg \frac{\mu_1 \kappa_2}{\mu_2 k_1} + 2m\pi.$$

Mivel a $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ esetre szorítkoztunk, ezért végeredményben

$$TE_m: \quad \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} d - m \frac{\pi}{2} = \arctg \frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3-50)$$

adódik a $\beta = \beta_m$ fázisegytűthető meghatározására.

A TM típusú hullámokra (H-nak csak y-irányú komponense van) vonatkozó összefüggések az előzőkből $\mu_1/\mu_2 \rightarrow \epsilon_1/\epsilon_2 = n_1^2/n_2^2$ helyettesítéssel adódnak

$$TM_m: \quad \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} d - m \frac{\pi}{2} = \arctg \frac{n_1^2 \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{n_2^2 \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3-51)$$

Az (50), ill. az (51) a diszperziós egyenlet, amely a TE_0, TE_1, \dots , ill. a TM_0, TM_1, \dots módusú hullámokra implicit alakban megadja a $\beta = \beta(\omega)$ függvényt. Az ω ismeretében β meghatározható, majd (49) alapján k_1 és κ_2 is számítható.

Szemléletesebb lehet a következő másik utat követni. A (50)-hez visszatérve, az felírható a következő alakban is:

$$TE_m: \quad k_1 d - m \frac{\pi}{2} = \arctg \frac{\mu_1 \kappa_2}{\mu_2 k_1}.$$

Fejessük ki ebből vagy az (51)-ből a κ_2 , ill. a $\kappa_2 d$ mennyiséget:

$$TE_m: \quad \kappa_2 d = k_1 d \operatorname{tg}(k_1 d - m \frac{\pi}{2}); \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.3-52)$$

$$TM_m: \quad \kappa_2 d = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 k_1 d \operatorname{tg}(k_1 d - m \frac{\pi}{2}); \quad m = 0, 1, \dots; \quad (4.3-53)$$

Ez egy-egy görbesereg a $(k_1 d)$, $(\kappa_2 d)$ síkon, amely a 6. ábrán látható. A (49)-ből négyzetre emeléssel és összeadással még egy kötést kapunk $k_1 d$ és $\kappa_2 d$ kapcsolatára:

$$(k_1 d)^2 + (\kappa_2 d)^2 = (n_1^2 - n_2^2) (k_0 d)^2, \quad (4.3-54)$$

ami egy adott sugarú kör egyenlete. A kör sugarának elterjedési jele V . A kör és a görbesereg metszéspontjai adják $k_1 d$ és $\kappa_2 d$ értékét. A k_1 és κ_2 ismeretében a z irányú fázisegytűthető kétféle módon is számítható:

$$\beta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k_1^2} \quad \text{vagy} \quad \beta = \sqrt{n_2^2 k_0^2 + \kappa_2^2}. \quad (4.3-55)$$

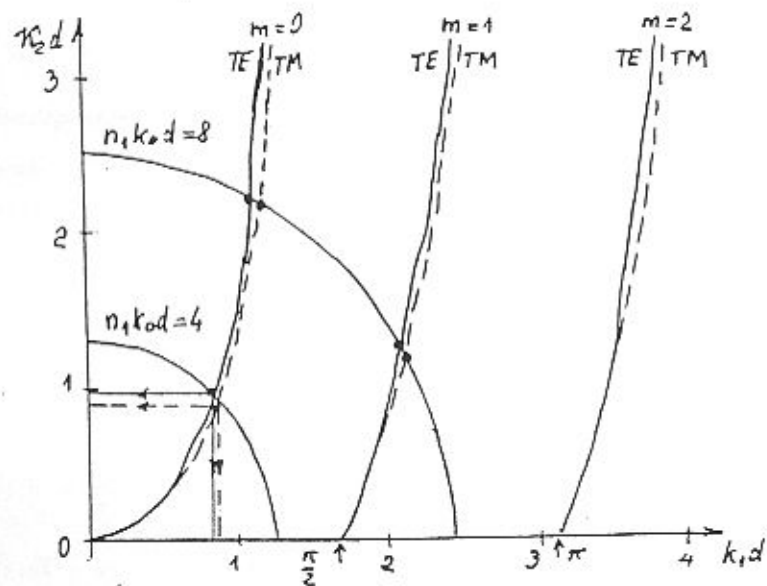
A két fázisegytűthető ismeretében kifejezhető az a

$$\sigma_1 = \arctg \frac{\beta}{k_1} \quad (4.3-56)$$

beesési szög, amely mellett a vizsgált módus létrejön: z irányban haladó hullám β fázis együtthetővel, x irányban állóhullám k_1 fázis együtthetővel a magban és κ_2 eltűnési együtthetővel a héjban.

A 6. ábra az $(n_2/n_1)^2 = \epsilon_2/\epsilon_1 = 0,1$ ($n_2 \approx 0,949 n_1$) esetre

vonatkozik. Ebből látható, hogy a TE_0 és a TM_0 módus bármilyen frekvencián csillapítatlanul terjedhet a magban, vagyis ezeknek nincs határhullámhossza. Minél nagyobb $k_0 d$ értéke (minél nagyobb a frekvencia vagy minél vastagabb a réteg), annál több módus terjedhet csillapítatlanul. Ha pl. $(n_2/n_1)^2 = 0,9$ és $n_1 k_0 d = 4$, akkor csak egy csillapítatlan módus terjed, amelyre az ábra alapján $k_1 d = 0,83$, ill. $0,87$ és $\kappa_2 d = 0,95$, ill. $0,92$. Az (55) alapján $\beta = 3,91/d$, ill. $3,90/d$ adódik. Ebből $\theta_1 = 77,8^\circ$, ill. $77,5^\circ$ az a beesési szög (a tengellyel majdnem párhuzamos), amelyre a terjedés biztosított. A veszteségek miatt a valóságos hullám mindig csillapított.



4.3-6. Ábra. Szigetelő réteg hullámvezető jellemzőinek grafikus meghatározása

4.3-2.3. Az egymódusú terjedés feltétele

A szigetelő tápvonal méreteit, ill. a frekvenciát gyakran célszerű úgy megválasztani, hogy csak a TE_0 és a TM_0 módus terjedhessen csillapítatlanul. Ennek az a feltétele, hogy az (54) szerinti kör sugara $\pi/2$ -nél kisebb legyen. Ebből

$$(k_0 d)_{\max} = \frac{\pi}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (4.3-56)$$

Ha $(n_2/n_1)^2 = 0,9$, akkor $n_1 (k_0 d)_{\max} \approx 4,97$.

Általánosabban: az $\sqrt{n_1^2 - n_2^2} k_0 d = m \pi/2$ feltételből $k_0 = 2\pi f/c$ felhasználásával az m -edik módus határfrekvenciája (vágási frekvenciája) amely alatt a módus nem csillapítatlan

$$f_{h,m} = \frac{m}{4 c d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} ; m = 1, 2, \dots \quad (4.3-58)$$

Ezen a frekvencián $k_1 d = \pi/2$ és $\kappa_2 = 0$, így $\beta = k_1 = n_2 k_0$. A $\kappa_2 = 0$ azt jelenti, hogy ekkor a héjban a térerőségek x tengely irányában nem változnak (elméletileg nem "tűnnek el").

Rögzített méretek és anyagjellemzők esetén a frekvencia, ill. a vele arányos k_0 növelésével az $m = 0$ indexű módus után sorra megjelenhetnek az $m = 1, 2, \dots$ indexű módusok. A 6. ábra alapján ez úgy értelmezhető, hogy a körök sugara egyre nagyobb, tehát a kör egyre több görbét metsz.

4.3-2.4. Az erőtér eloszlása a magban

Ha a TE_m módusra a csillapítatlan terjedés feltételei ki vannak elégítve, akkor (48) és (49) értelmében $r_{TE} = e^{j2\varphi}$, ahol φ a $k_1 + j\kappa_2$ komplex szám szöge. Ezzel a jelöléssel $2k_1 d = 2\varphi + m\pi$. Ebből következően

$$E_{1y}^- = r_{TE} e^{-j2k_1 d} E_{1y}^+ = e^{-jm\pi} E_{1y}^+ = (-1)^m E_{1y}^+$$

Az elektromos térerősség eloszlása a magban ezek szerint

$$E_y(x, z) = E_{1y}^+ (e^{-jk_1 x} + (-1)^m e^{-jk_1 x}) e^{-j\beta z}$$

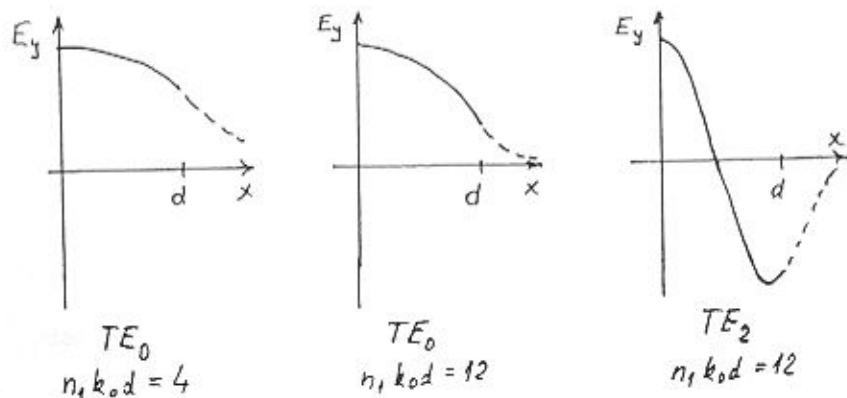
Az eloszlás x -ben páros, ha m páros és x -ben páratlan, ha m páratlan:

$$TE_m : E_y(x, z) = E_0 \cos k_1 x e^{-j\beta z}, \quad |x| < d, \quad m = 0, 2, 4, \dots \quad (4.3-59)$$

$$TE_m : E_y(x, z) = E_0 \sin k_1 x e^{-j\beta z}, \quad |x| < d, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

ahol $\beta = \beta_m$ az (50) megoldása, majd $k_1 = k_{1m}$ a (49)-ből számítható. Analóg a TM módusra $H_y(x, z)$ kifejezése. A köpenyben a térerőségek exponenciálisan csökkennek. Két TE módusra E_y változást rögzített z

mellett (pl. $z = 0$ esetére) szemlélteti a 7. ábra.



4.3-7. ábra. Az E_y rendező helyfüggése két egyszerű páros módusra

A TE módusra a mágneses térerősség rendezőinek komplex amplitúdója a $\mathbf{j} \omega \mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E}$ összefüggés alapján a magban ($|x| < d$):

$$\begin{aligned} H_x(x, z) &= \frac{-\beta}{\omega \mu} (E_a \cos k_1 x + E_b \sin k_1 x) e^{-j\beta z}, \\ H_y(x, z) &= 0, \\ H_z(x, z) &= \frac{j k_1}{\omega \mu} (E_a \sin k_1 x - E_b \cos k_1 x) e^{-j\beta z}. \end{aligned} \quad (4.3-60)$$

Az (59)-ből már látható, hogy az $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ komplex Poynting vektor z -irányú rendezője valós és pozitív (egyirányú hatásos teljesítmény), x -irányú rendezője képzetes (nem áramlik hatásos teljesítmény), ami megfelel előzetes várakozásainknak.

A körkeresztmetszetű optikai szálban ugyancsak egy vagy több csillapítatlan módus terjedhet. A módusok számítása, de akár csak leírása is sokkal bonyolultabb, a TE_{mn} és TM_{mn} módusok mellett másféle módusok is felléphetnek. A tipikusan alkalmazott szabadtéri hullámhossz $1 \mu\text{m} = 1000 \text{ nm}$ körüli, a frekvencia mintegy $10^{14} \text{ Hz} = 100 \text{ THz}$, a szál átmérője tipikusan $5 \mu\text{m}$, az üvegszál (a mag) n_1 és a köpeny (a héj) n_2 törésmutatójának aránya rendszerint $n_2/n_1 = 0,95$ és $0,99$ közötti érték.

Megemlítjük, hogy a kapott eredmények értelem szerint alkalmazhatók a héj nélküli szigetelő réteg hullámvezetőre, továbbá az "alaplappján" fémréteggel bevont felületi hullámvezetőre. Mindkét

esetben $\epsilon_2 = \epsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$ és ϵ_0/ϵ_1 nem közel egységnyi. A második esetben csak a $0 < x < d$ tartományt kell tekintenünk (az $x = 0$ síkon van a fémbevonat), csak a páratlan indexű TE_m és a páros indexű TM_m módusok léphetnek fel, az elektromos térerősség E_y , ill. E_z rendezőjét y -ban páratlan ($\sin k_1 x$) függvény írja le. Ezek biztosítják, hogy az $x = 0$ síkon az elektromos térerősség tangenciális összetevője nulla legyen. Az ilyen típusú tápvonalakat néhány GHz frekvencián (centiméteres hullámhosszon) szokás használni.

4.4. FELADATOK

4.4-1. A HERTZ DIPÓLUS

4.4-1.1. Egy ℓ hosszúságú Hertz dipólus ideális vezetőnek tekintett sík földön áll e síkra merőlegesen.

Lássa be, hogy a létrehozott erőter a szigetelőben (levegőben) megegyezik egy 2ℓ hosszúságú Hertz dipólus erőterének a szimmetriasík fölötti felével, így a kisugárzott teljesítményre jellemző sugárzási rezisztencia $R_S = 160 \pi^2 (\ell/\lambda)^2 \Omega$, ahol $\ell \ll \lambda$.

4.4-1.2. Egy ℓ hosszúságú Hertz dipólus ideális vezetőnek tekintett sík föld felett m magasságban helyezkedik el, iránya a felületre merőleges.

Lássa be, hogy a szigetelőben az erőter tükrözéssel számítható: a tükrözött (fiktív) Hertz dipólusban az áram iránya az eredetivel megegyező. (Az előző feladat ennek speciális esete.) Ennek alapján fejezze ki az elektromos és a mágneses térerősség távoli összetevőjét a föld felületén.

4.4-1.3. Egy ℓ hosszúságú Hertz dipólus ideális vezetőnek tekintett sík föld felett m magasságban helyezkedik el, iránya a földdel párhuzamos.

Lássa be, hogy a szigetelőben az erőter tükrözéssel számítható: a tükrözött (fiktív) Hertz dipólusban az áram iránya az eredetivel ellentétes. Ennek alapján fejezze ki az elektromos és a mágneses térerősség távoli összetevőjét a föld felületén.

4.4-1.4. Egy ℓ hosszúságú Hertz dipólus ideális vezetők tekintett sík föld felett m magasságban helyezkedik el, tengelye a sík normálisával adott α szöget zár be.

Hogyan határozható meg a szigetelőben az erőtér? Fejezze ki az elektromos és a mágneses térerősség távoli összetevőjét a föld felületén. (Útmutatás. Használja fel az előző két feladat eredményét!)

4.4-1.5. A z-tengely irányában álló Hertz dipólus által létrehozott elektromos térerősség távoli összetevőjének komplex amplitúdója

$$E_R(R, \theta) = 0, \quad E_\theta(R, \theta) = j \frac{\mu v \beta \ell}{4 \pi} I_m \frac{\sin \theta}{R} e^{-j\beta R}, \quad E_\varphi(R, \theta) = 0,$$

ahol $\beta = \omega/v = 2 \pi/\lambda$.

Ellenőrizze ezt a 4.1-4.3. pontban megadottak alapján. Lásza be (pl. geometriai módszerekkel), hogy az x-tengely irányában álló Hertz dipólus távoli terére az elektromos térerősség rendezőinek komplex amplitúdóját a következő összefüggések adják meg:

$$E_R(R, \theta) = 0,$$

$$E_\theta(R, \theta) = -j \frac{\mu v \beta \ell}{4 \pi} I_m \frac{\cos \theta \cdot \cos \varphi}{R} e^{-j\beta R},$$

$$E_\varphi(R, \theta) = j \frac{\mu v \beta \ell}{4 \pi} I_m \frac{\sin \varphi}{R} e^{-j\beta R}.$$

4.4-1.6. Egy Hertz dipólus az origóban a z-tengely irányában, egy másik Hertz dipólus az origóban az x-tengely irányában helyezkedik el. Szinuszos gerjesztő áramuk azonos amplitúdójú és frekvenciájú, fáziskülönbségük 90° .

Határozza meg az elektromos térerősség távoli összetevőjének komplex amplitúdóját az x,z síkban! Lásza be, hogy ez csak az origótól mért távolságtól függ! Határozza meg az elektromos térerősség távoli összetevőjének komplex amplitúdóját az y-tengely mentén! (Célszerű áttérni derékszögű Descartes koordinátákra.) Utóbbi esetre írja fel az időfüggvényeket is. Lásza be, hogy cirkulárisan polarizált elektromos térerősség adódik.

4.4-2. SÍKHULLÁMOK

4.4-2.1. Síkhullám trolitulban terjed ($\epsilon_r = 2.5$; $\mu_r = 1$), frekvenciája $f = 100$ MHz.

Határozza meg a terjedési együtthatót, a hullámimpedanciát, a fázissebességet, a hullámhosszt és ennek arányát a szabadtéri hullámhosszhoz, ha

- (a) a szigetelőt ideálisnak tekintjük.
(b) a veszteségi tényező $10^4 \tan \delta = 4$.

4.4-2.2. A síkhullámot írjuk le E elektromos térerősségével és B mágneses indukciójával.

Igazolja, hogy ekkor a közeg E_x/B_y "hullámimpedanciájára" a v fázissebesség (vákuumban c) adódik.

4.4-2.3. A Napról a Földre érkező elektromágneses sugárzás teljesítményének átlagos felület szerinti sűrűsége 1300 W/m^2 .

Határozza meg azt az elektromos és mágneses térerősséget, amelyhez ugyanekkora Poynting vektor tartozik. Fellép-e a Föld felületén olyan síkhullám, amelyet ekkora térerősségek jellemeznek? (Gondoljon a szivárványra!)

4.4-2.4. Egy síkhullámnak a z-tengely pozitív, ill. negatív irányában terjedő összetevőjéhez tartozó komplex Poynting vektort jelölje $S_z^+ = \frac{1}{2} E_x^+ (H_y^+)^*$, ill. $S_z^- = \frac{1}{2} E_x^- (H_y^-)^*$.

Fejezze ki S_z^- és S_z^+ kapcsolatát az illető helyre vonatkozó reflexiós tényező $r = E_x^-/E_x^+$ ismeretében. A következő állítások közül:

(I) $S_z = S_z^+ + S_z^-$

(II) $\text{Re } S_z = \text{Re } S_z^+ + \text{Re } S_z^-$

(III) $\text{Im } S_z = \text{Im } S_z^+ + \text{Im } S_z^-$

melyik érvényes, ill. melyek érvényesek, ha a közeget

- (a) ideális szigetelőnek tekintjük?
(b) veszteséges szigetelőnek tekintjük?

4.4-2.5. Egy haladó elektromágneses síkhullámra az elektromos térerősség kifejezése

$$E(z, t) = E_x(z, t) e_x + E_y(z, t) e_y = E_{xm} \cos(\omega t - \beta z) e_x + E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \theta) e_y.$$

Igazolja, hogy $E_x = E_x(z, t)$ és $E_y = E_y(z, t)$ kapcsolata

(a) $\theta = 0$ esetén: $\frac{E_x}{E_{xm}} - \frac{E_y}{E_{ym}} = 0$ (lineáris polarizáció)

(b) $\theta = 90^\circ$ esetén: $\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 = 1$ (elliptikus polarizáció;

speciálisan $E_{xm} = E_{ym}$ esetén: cirkuláris polarizáció;
a vektor végpontja minden z helyen ellipszisen, ill körön mozog az idő függvényében)

(c) általában: $\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{xm}} \frac{E_y}{E_{ym}} \cos \theta = \sin^2 \theta$, ami ugyancsak elliptikus polarizációt jelent, ami pl. koordinátaforogatással látható be.

4.4-2.6. Levegőben adott irányban terjedő síkhullám Poynting vektorának nagysága $S_0 = 2 \text{ mW/m}^2$. A síkhullám terjedésére merőleges sík felülettel elválasztott ideális szigetelő közeghez érkezik, amelynek hullámellenállása $Z_{02} = 200 \Omega$.

Határozza meg a Poynting vektor, az elektromos és a mágneses térerősség nagyságát a határfelület közelében a levegőben és a másik ideális szigetelőben.

4.4-2.7. A tengervízre $f = 10 \text{ MHz}$ frekvencián $\epsilon_r = 76$, $\text{tg } \delta = 60$ és $\mu_r = 1$ (tájékoztató értékek).

Igazolja, hogy a tengervíz ezen a frekvencián "jó" vezetőnek tekinthető. Határozza meg a csillapítási és a fázis együtthatót, a hullámhosszat, a fázissebességet és a hullámimpedanciát. Tekintse adottnak a levegőből érkező síkhullám elektromos térerősségének amplitúdóját. Határozza meg a beeső és a visszavert elektromos és mágneses térerősség komplex amplitúdóját a levegő és a víz határfelületén, ha a beesési szög

- (a) 90° .
(b) 45° .
(c) 30° .

4.4-2.8. Levegőben terjedő, lineárisan polarizált síkhullám ideális szigetelőnek tekinthető közeg ($\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$) határfelületére esik. Az elválasztó sík merőleges a hullám terjedési irányára. Adott a beeső síkhullám elektromos térerősségének $E_1^+ = 20 \text{ V/m}$ térerőssége és $f = 150 \text{ MHz}$ frekvenciája.

Határozza meg az elektromos és a mágneses térerősséget az elválasztó felület mindkét oldalán, továbbá az elválasztó felülettől $\lambda/4$ és $\lambda/2$ távolságban mindkét irányban. Írja fel a térerősségek komplex amplitúdójának helyfüggését. Írja fel a térerősségek hely-időfüggvényét mindkét közegben.

4.4-2.9. Levegőben terjedő, lineárisan polarizált síkhullám ideálisnak tekinthető vezető felületére esik az elválasztó síkra merőlegesen. Adott a beeső síkhullám elektromos térerősségének E_m amplitúdója és ω körfrekvenciája.

Határozza meg az elektromos és a mágneses térerősséget az elválasztó felület mindkét oldalán, továbbá az elválasztó felülettől $\lambda/4$ és $\lambda/2$ távolságban mindkét irányban.

4.4-2.10. Levegőben terjedő lineárisan polarizált síkhullám ideális szigetelőnek tekinthető, d vastagságú falra esik, amelyre $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$. A fal másik oldalán is levegő van. Az elválasztó síkok párhuzamosak az E és H vektorokkal. Adott a beeső síkhullám elektromos térerősségének $E^+ = 20 \text{ V/m}$ amplitúdója és $f = 2 \text{ MHz}$ frekvenciája.

Határozza meg az elektromos és a mágneses térerősség komplex amplitúdóját a fal mindkét szélénél, ha a fal vastagsága (a) $d = \lambda/4$; (b) $d = \lambda/2$; (c) d tetszőleges érték, ahol λ a falban értelmezett hullámhossz.

4.4-2.11. Oldja meg az előző feladatot, ha a fal másik oldalán ideálisnak tekinthető vezető helyezkedik el. Milyen feltételek mellett nem kell ismerni a vezető bevonat vastagságát?

4.4-2.12. Egy $Z_{01} = 250 \Omega$ hullámellenállású ideális szigetelőben $f = 120 \text{ MHz}$ frekvenciájú lineárisan polarizált síkhullám terjed a szigetelő határfelületére merőlegesen. A szigetelő közeget levegő határolja.

Határozza meg a reflexiós tényezőt a határfelületen. Helyezzen egy d vastagságú, $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{2r}$ permittivitású, $\mu_2 = \mu_0$ permeabilitású ideális szigetelő réteget a határfelületre. Válassza meg d és ϵ_{2r} értékét úgy, hogy

- (a) az 1. és a 2. közeg határán a reflexiós tényező nulla legyen.
 (b) a levegőből érkező hullám esetén a levegő és a 2. réteg határán a reflexiós tényező nulla legyen.

4.4-2.13. Lineárisan polarizált síkhullám levegőből merőlegesen d_2 vastagságú szigetelő rétegre esik, amelynek másik oldalán levegő van, a szigetelő komplex permittivitása $\epsilon_2 = (6 - j 0,03) \epsilon_0$. A beeső térerősség amplitúdója $E_1^+ = 3$ kV/m, frekvenciája $f = 2,5$ GHz.

Határozza meg a Poynting vektort a réteg egyik, ill. másik oldalán, ha (a) $d = \lambda_2$ (a hullámhossz a szigetelőben); (b) $d = 2\lambda_2$; (c) $d = 2$ cm. Határozza meg a hasáb egy $A = 25$ cm² alapterületű részében a hővé váló teljesítményt. (Mikrohullámú hevítés erősen egyszerűsített modellje.)

4.4-2.14. Az előző feladat elrendezésében a réteg másik oldalától $d_0 = 2$ cm távolságban ideális vezetőknek tekinthető test van.

Határozza meg a hasábban hővé váló teljesítményt. Vizsgálja meg mindkét elrendezésben a beeső hatásos teljesítmény eloszlását.

4.4-2.15. Polarizált síkhullám visszaverődését és törését nem csak az r reflexiós tényezővel, hanem a t transzmissziós tényezővel is szokás jellemezni. Ennek definíciója TE, ill. TM típusú hullámra

$$t_{TE} = \frac{E_2^+}{E_1^+}, \quad t_{TM} = \frac{H_2^+}{H_1^+}$$

Igazolja, hogy $t_{TE} = 1 + r_{TE}$ és $t_{TM} = 1 + r_{TM}$. (Meggjegyezzük, hogy a TM típusra használatosak az $r'_{TM} = E_1^-/E_1^+$ és $t'_{TM} = E_2^+/E_1^+$ definíciók is. Ekkor t'_{TM} és $1 + r'_{TM}$ nem egyeznek meg.)

4.4-2.16. Lineárisan polarizált síkhullám $\epsilon_1 = 2,5 \epsilon_0$; $\mu_1 = \mu_0$ anyagjellemzőjű közegből ϵ_0 , μ_0 anyagjellemzőjű közeg sík határához érkezik.

Határozza meg a θ_1 beesési szögek azon értéktartományát, amelyre

teljes visszaverődés lép fel. Fellephet-e teljes visszaverődés fordított irányú terjedés esetén?

4.4-2.17. Két közeg egyike levegő, a másik is ideális szigetelő, amelyre $\epsilon_r = 3$ és $\mu_r = 1$.

Lássa be, hogy a Brewster szög 60° , ill. 30° attól függően, hogy a hullám a levegő felől, ill. a levegő felé esik be. Milyen típusú polarizált hullámra értelmezett ez a feladat?

4.4-2.18. Két közeg egyike levegő, a másik is ideális szigetelő, amelyre $\epsilon_r = 3$ és $\mu_r = 1$.

Határozza meg a teljes reflexióra a beesés határszögét. Milyen típusú polarizált hullámra értelmezett ez a feladat?

4.4-2.19. Egy üveglemez felületére levegőből síkhullám érkezik θ_1 beesési szöggel, ahol θ_1 a Brewster szög.

Igazolja, hogy az üveglemez másik felületén a levegőbe kilépő hullámra a reflexiós tényező nulla.

4.4-20. Egy alumínium hasáb ($\sigma = 35 \cdot 10^6$ S/m) szélessége 2 cm, hossza 3 m.

Határozza meg a hasáb rezisztenciáját a hosszirányban folyó árammal szemben 10 kHz frekvencián, ha

- (a) a hasáb végtelenül vastagnak tekinthető.
 (b) a hasáb vastagsága 2 mm.
 (c) a hasáb vastagsága 0,2 mm.
 (d) a hasáb vastagsága olyan, hogy R minimális.

4.4-2.21. Végtelen vastagnak tekinthető fémhasábban egyirányban szinuszosan változó áram folyik.

Határozza meg a fellépő veszteség eloszlását a mélység függvényében. Milyen mélységű rétegben lép fel a teljesítmény fele?

4.4-2.22. Rézből készült vezeték ($\sigma = 57 \cdot 10^6$ S/m) átmérője 2 mm, hossza 2 km, a benne folyó szinuszos áram amplitúdója 5 A, frekvenciája 25 kHz.

Határozza meg a vezetékben fellépő veszteséget. Mekkora a hiba, ha a veszteséget egyenletes árameloszlás feltételezésével számítjuk?

4.4-2.23. Egy transzformátorlemezre $\sigma = 7,2 \text{ S} \cdot \text{mm}^2/\text{m}$, $\mu_r = 3000$, a vastagság $d = 0,5 \text{ mm}$.

Határozza meg a térfogategységre vonatkoztatott átlagos veszteségsűrűséget, ha a mágneses indukció térbeli középértékének amplitúdója, ill. frekvenciája

(a) $B_k = 1 \text{ T}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

(b) $B_k = 1,2 \text{ T}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

(c) $B_k = 1 \text{ T}$, $f = 5 \text{ kHz}$.

4.4-2.24. Oldja meg az előző feladatot, ha $d = 0,35 \text{ mm}$.

4.4-3. VEZETETT HULLÁMOK

4.4-3.1. Levegővel kitöltött, téglalap keresztmetszetű csőtápvonal méretei $a = 2 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$. A frekvencia $f = 12 \text{ GHz}$.

Határozza meg a TE_{10} módusra a határhullámhosszat, a határfrekvenciát, a fázisgyűltíthatót, a fázissebességet, a csoportsebességet és a hullámimpedanciát. Határozza meg az átáramló hatásos teljesítményt, ha $|E|_{\max} = 10 \text{ kV/cm}$. Oldja meg a megadott méretekkel a feladatot TE_{01} módusra is, ill. TE_{10} módusra, ha $a = 1 \text{ cm}$ és $b = 2 \text{ cm}$. Mi a kapcsolat e két utóbbi feladat között?

4.4-3.2. Levegővel kitöltött, téglalap keresztmetszetű csőtápvonal méretei $a = 2 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$.

Milyen frekvenciákon használható e csőtápvonal úgy, hogy csak egyetlen csillapítatlan módus lépjen fel benne? Oldja meg a feladatot, ha a csőtápvonalat kitöltő ideális szigetelőre $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$.

4.4-3.3. Téglalap keresztmetszetű csőtápvonal méretei $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$. A csőben $f = 6 \text{ GHz}$ frekvenciájú, $P = 200 \text{ W}$ hatásos teljesítményű csillapítatlan elektromágneses hullámot akarunk átvinni.

Határozza meg az elektromos és a mágneses térerősség rendezőit, a fázisgyűltíthatót és a fázissebességet

(a) TE_{01} módusra.

(b) TE_{10} módusra.

Melyik módusú átvitel a kedvezőbb?

4.4-3.4. Téglalap keresztmetszetű csőtápvonalra adott a TE_{01} módusban átvendő P hatásos teljesítmény, a tápvonalban megengedett E_M maximális elektromos térerősség, a λ szabadtéri hullámhossz, továbbá a $p = \lambda_{h,01}/\lambda > 1$ arány.

Fejezze ki ezekkel a keresztmetszet irányú a és b méreteket. (Útmutatás. Az előző feladathoz hasonlóan meg kell határozni P és E_M kapcsolatát.)

4.4-3.5. Egy téglalap keresztmetszetű közlekedési alagút méretei: szélessége 12 m , magassága 5 m . Feltételezzük, hogy minden oldala ideális vezetőknek tekinthető.

Milyen módusú és frekvenciájú az a leghosszabb rádióhullám, amely az alagúton csillapítatlanul át tud haladni? (Tájékoztatás. Az AM adások frekvenciája 550 kHz és 1600 kHz közötti, az FM adásoké 88 MHz és 108 MHz közötti.)

4.4-3.6. Levegővel kitöltött, téglalap keresztmetszetű csőtápvonalon adott λ szabadtéri hullámhosszúságú elektromágneses hullámot akarunk átvinni TE módusban.

Határozza meg a tápvonal a és b méreteit úgy, hogy $\lambda_{h,10} = p \cdot \lambda$ és $\lambda_{h,11} = \lambda/q$ legyen, ahol $p = q = \sqrt{2}$.

4.4-3.7. Oldja meg az előző feladatot általános $p > 1$ és $q > 1$ paraméterekkel. Megoldható-e a feladat bármely p és q esetén?

4.4-3.8. Egy téglalap keresztmetszetű csőtápvonal határhullámhossza valamely módusban λ_h . A csőben mért Λ hullámhossz e módusra megegyezik a λ szabadtéri hullámhosszal.

Fejezze ki a szigetelő ϵ_r relatív permittivitását, ha $\mu_r = 1$.

4.4-3.9. Levegővel kitöltött, hasáb alakú üregrezonátor méretei $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$.

Határozza meg mindazokat a módusokat, amelyekre a saját hullámhossz $\lambda_{mnp} > 5 \text{ cm}$. (Útmutatás. A három indexnek a 0, 1 és 2 értékeit ele-
gendő megvizsgálni, ami 17 - és nem 27 - értelmes lehetőséget jelent;
ezek közül 8 tesz eleget a feltételnek, 10 módus - nem 16 - létezik.)

4.4-3.10. Szigetelő réteg hullámvezető relatív permittivitásai $\epsilon_{1r} = 2,250$ és $\epsilon_{2r} = 2,205$.

Határozza meg az egymódusú terjedés feltételét $\lambda = 1500 \text{ nm}$ szabad-
téri hullámhossz esetén.

4.4-3.11. Egy szigetelő réteg hullámvezető adatai $d = 1000 \text{ nm}$,
 $\epsilon_{1r} = 2,250$ és $\epsilon_{2r} = 2,205$. A szabadtéri hullámhossz $\lambda = 1000 \text{ nm}$. Az
erőtér a héjban 2830 nm mélységben csökken e -ed részére.

Határozza meg a terjedés irányában a hullámhosszát.

4.4-3.12. Tekintse az előző feladatban szereplő hullámvezetőt.
Hány módus terjedhet csillapítatlanul ebben a hullámvezetőben?

4.4-3.13. Váolja fel a szigetelő réteg hullámvezető elektromos
térerősségének eloszlását $m = 1$ módusindexre a határfrekvencián.

IRODALOMJEGYZÉK

- AKHIEZER, A. I. - AKHIEZER, I. A.: Elektromagnetizm i elektromagnitnye
volny. Vys. Shkola, 1985
- BALANIS, C. A.: Advanced Engineering Electromagnetics. Wiley, 1989
- BAUDOUX, P.: Précis d'électricité fondamentale. Presse Universitaires
de Bruxelles, 1970
- BECKER, R.: Theorie der Elektrizität I.-III. Teubner, 1969-1973
- CHEN, C. H.: Theory of Electromagnetic Waves. McGraw-Hill, 1983
- ERŐ J. - SCHMIDT GY.: Elektrosztatika (példatár). Tankönyvkiadó, 1954
- FLÜGGE, S.: Handbuch der Physik XVI. Elektrische Felder und Wellen,
Springer, 1958
- FODOR GY.: Kvázistacionárius terek (példatár). Tankönyvkiadó, 1954
- FODOR GY.: Elméleti elektrotechnika I.-II. Tankönyvkiadó, 1970
- FOURNET, G.: Électromagnétisme. Masson, 1979
- GARDIOL, F.: Electromagnétisme. St-Saphorin, 1979
- HAYT, W. H. JR.: Engineering Electromagnetics. McGraw-Hill, 1981
- IDA, N. - BASTOS, J. P. A.: Electromagnetics and Calculation of
Fields. Springer, 1992
- IRODOV, I. E.: Osnovnye zakony elektromagnetizma. Vys. Shkola, 1983
- JOHNK, C.T.A.: Engineering Electromagnetic Fields and Waves. Wiley,
1988
- JOUGET, M.: Traité d'électricité théorique I.-III. Gauthiers-Villars,
1952-1960
- KALANTAROV, P.L. - NEYMAN, L. P.: Teoreticheskie osnovy elektro-
tekhnik. Energeticheskoe Izd. 1951
- KRAVCHENKO, I. T.: Teoriya volnovykh protsessov. Vys. Shkola, 1985
- KÜPFMÜLLER, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik.
Springer, 1990
- LAUTZ, G.: Elektromagnetische Felder. Teubner, 1985

MATVEEV, A. N.: Electricity and Magnetism. Mir, 1986

MESHKOV, I. N. - CHIRIKOV, B.V.: Elektromagnitnoye pole I.-II. Nauka, 1987

NEYMAN, L. P. - DEMIRCHYAN, K. S.: Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. Izd. Energia, 1965

POINCELOT, P.: Précis d'électromagnétisme théorique. Dunod, 1963

POLIVANOV, K.: The Theory of Electromagnetic Field. Mir, 1983

SCHELKUNOFF, S. A.: Electromagnetic Waves. D. van Nostrand, 1944

SIMONYI K.: Elméleti villamosságatan. Tankönyvkiadó, 1992

SIMONYI K.: Villamosságatan. Akadémiai Kiadó, 1973

SIMONYI K. - FODOR GY. - VÁCÓ I.: Elméleti villamosságatan példatár. Tankönyvkiadó, 1980

SMYTHE, W. R.: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill, 1950

SOLYMÁR L.: Elektromágneses térelmélet és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, 1980

STRATTON, J. A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill, 1941

SVETOV, B.S. - GUBATENKO, V. P.: Analiticheskie resheniya elektrodinamicheskikh zadach. Nauka, 1988

TAMM, E.: Osnovy teorii elektrichestva. Moskva, 1949

URBANEK J.: Bevezetés a műszaki elméleti villamosságatanba. Tankönyvkiadó, 1952

VAJNSTEIN, L. A.: Elektromagnitnye volny. Radio i Svyaz, 1988

VASSALO, C.: Electromagnétisme classique dans la matière. Dunod, 1980

ZOMBORY L. - KOLTAI M.: Elektromágneses terek gépi analízise. Műszaki Könyvkiadó, 1969

TÁRGYMUTATÓ

A, Á

állandó mágnes + permanens mágnes

állóhullámarány 182

általánosított Biot - Savart törvény 225

amper (A) 16

Ampère törvény 16

antenna + Hertz dipólus

áram (elektromos) 16

áramsűrűség 16, 34

áramsűrűség, felületi + felületi áramsűrűség

áramsűrűség, totális + totális áramsűrűség

átmeneti folyamat

távvezetéken 192

átviteli 183

B

beesési sík 245

beeső hullám 246

behatolási mélység 251

beiktatott térerősség 33

belső öninduktivitás 72, 254, 257

bemeneti impedancia 183, 186

Biot - Savart törvény 148, 225

Brewster szög 249

C, Cs

cirkuláris polarizáció 288

coulomb (C) 14

Coulomb mérték 221

Coulomb törvény 13

csatolási tényező 76

csillapítás 183

csillapítási együttható 168

csomósík 275

csoportsebesség 171, 251, 271

csőtápvonal 262

D

dipólus + Hertz dipólus

Dirichlet feltétel 122

diszperziós egyenlet 245, 281

E

egyesített indukció törvény 90

egymódusú terjedés 282

elektrodinamika felosztása 49

elektromágneses hullámok 50

elektromos áram + áram

elektromos eltolás 28

elektromos energia 94, 141

elektromos erőhatás 97

elektromos feszültség 21

elektromos fluxussűrűség + elektromos eltolás

elektromos polarizáció 32

elektromos potenciál 23, 120

elektromos szuszceptibilitás 32

elektromos térerősség 20, 33

elektromos töltés + töltés

elektromos vektorpotenciál 263

elektrosztatika 50

elemi dipólus + Hertz dipólus

elliptikus polarizáció 288
 elosztott paraméterű
 hálózat 163
 eltolás +
 elektromos eltolás
 eltolási áram 28, 90
 eltolási áramsűrűség 28
 eltűnő tér 243
 energia +
 elektromos energia,
 mágneses energia
 energiamérleg 36, 41
 energiasűrűség 36, 38
 erőhatás 97, 99, 103
 erősűrűség 105
 erővonal 27

F
 fajlagos vezetés + konduktivitás
 Faraday törvény 24
 fázisegülthető 168
 fázissebesség 168, 240, 251, 271
 felületi áramsűrűség 17
 felületi töltésűrűség 15
 fénysebesség 11
 fluxus + mágneses fluxus
 fluxus megmaradása 24
 folytonossági egyenlet 18
 folytonossági feltétel 44
 forgatás 183
 főkapacitás 65
 földkapacitás 65
 frekvenciafüggetlen folyamat
 távvezetéken 192
 Fresnel képlet 249
 funkcionál 135

G
 Gauss törvény 27
 gerjesztési törvény 27
 gerjesztettségi mennyiségek 29
 gerjesztő mennyiségek 13
 gömbkondenzátor 54
 grafikus megoldás 126

H
 haladóhullámarány 182
 hasáb 252
 határfeltételei 45
 határfelületre ható erő 103
 határfrekvencia 271
 határhullámhossz 271
 héj 278
 Helmholtz egyenlet 167, 222,
 236, 263
 hengeres elektródák 61
 hengeres kondenzátor 60
 Hertz dipólus 226
 hiszterézis 39
 hullámegyenlet 222, 235
 hullámimpedancia 11, 167
 hullámhossz 169

I
 ideális távvezeték 171
 illesztés 175
 indukálás 86, 88
 indukció, mágneses + mágneses
 indukció
 indukció törvény 24, 90
 induktivitás számítása 150
 integrálegyenlet alak 125
 izotrop közeg 30

J
 Joule törvény 40

K
 karakterisztikus impedancia +
 hullámimpedancia
 késleltetett potenciál +
 retardált potenciál
 kétkapu karakterisztika 183
 kettősvezeték 61, 72, 164
 Kirchhoff törvényei 52
 kisveszteségű vezeték 172, 209
 koaxiális kábel 60, 71, 164
 komplex permittivitás 35, 242
 komplex szuszceptibilitás 34
 kondenzátor energiája 94
 konduktív áramsűrűség 34
 konduktivitás 33
 konvektív áramsűrűség 34
 köráram 21
 körkeresztmetszetű vezeték 257
 közeli tér 226
 kvázistacionárius
 közelítés 50, 158, 224

L
 Lagrange sűrűség 42
 Laplace egyenlet 121
 Laplace egyenlet grafikus
 megoldása 126
 Laplace egyenlet numerikus
 megoldása 128, 132
 Laplace egyenlet variációs
 feladata 134
 Lecher vezeték + kettősvezeték
 lemez 258

Liebmann módszer + rácsmódszer
 lezárt vezeték 181, 202
 lineáris áramsűrűség + felületi
 áramsűrűség
 lineáris közeg 30
 lineáris mágneses kör 77
 lineáris polarizáció 237
 Lorentz mérték 221
 Lorentz törvény 20

M
 mag 278
 mágneses ellenállás 78
 mágneses energia 24, 96, 156
 mágneses erőhatás 99
 mágneses feszültség 78
 mágneses fluxus 21, 23
 mágneses fluxussűrűség +
 mágneses indukció
 mágneses gerjesztés 79
 mágneses indukció 20
 mágneses kör 77, 81
 mágneses Ohm törvény 78
 mágneses polarizáció 32
 mágneses pólus 145
 mágneses skalárpotenciál 144
 mágneses szuszceptibilitás 32
 mágneses vektorpotenciál +
 vektorpotenciál
 mágneses vezetés 78
 mágnesezettség 32
 mágnesezési görbe 82
 magnetosztatika 50
 Maxwell egyenletek 43
 Maxwell reláció 241
 megtört hullám 246

menetdiagram 196
 módus 266
 momentum 21
 Monte Carlo módszer 132
 mozgási indukálás 88
 munkasűrűség 38

N, Ny
 nemlineáris közeg 31
 nemlineáris mágneses kör 81
 Neumann feltétel 122
 Neumann képlet 151
 numerikus megoldás 128
 nyereség 233
 nyílt feladat 47
 nyugalmi indukálás 86

O, Ó, Ő, Ő
 örvényáram 258
 összetett vezetékek 185, 198

P
 peremfeltétel 45
 permanens mágnes 84
 permeabilitás 11, 16, 30
 permeancia 78
 permittivitás 11, 13, 30
 permittivitás, komplex 35, 242
 Poisson egyenlet 121, 123
 Poisson egyenlet,
 vektoriális 144
 polarizáció + elektromos,
 mágneses polarizáció
 polarizált hullám 237
 potenciál + elektromos potenciál
 Poynting vektor 36, 40, 92

R
 rácsmódszer 128, 132
 reaklanca, vezetéké 186
 reaktanciával lezárt vezeték 177
 reflexiómentes lezáras 177
 reflexiós tényező 175, 247
 reluktancia 78
 részkapacitás 64
 részkonduktancia 66
 retardált potenciál 224
 rétegezett kondenzátor 58
 rezgőkör 188
 rövidrezárt vezeték 179

S, Sz
 síkhullám 237
 síkhullám szigetelőben 240
 síkhullám visszaverődése 246
 síkhullám vezetékben 250
 síkkondenzátor 57
 síkprobléma 123
 skalár potenciál +
 elektromos potenciál,
 mágneses skalárpotenciál
 Snellius - Descartes
 törvény 249
 stacionárius áramlás 50
 stacionárius elektromos tér 120
 stacionárius mágneses tér 50
 sugárzási ellenállás 232
 sugárzási karakterisztika 233
 szabad(tér) hullámhossz 169
 szabad végű vezeték 178
 szakadással lezárt vezeték 178
 szigetelő réteg hullámvezető 278
 szkinmélység + behatolási mélység

szolenoid 76, 149
 szórási tényező 78
 sztatikus elektromos tér 119
 szuszceptibilitás 32
 szuszceptibilitás, komplex 34

T
 táviró egyenlet 166
 távoli tér 226, 230
 távvezeték 163
 távvezeték analógia 238
 távvezeték mint kétkapú 183
 távvezeték + vezeték szakasz
 TE módus 264, 268
 TE típus 244, 280
 tekercs energiája 96
 telegráf egyenlet 166
 teljesítményáramlás 92
 teljesítményáram-sűrűség +
 Poynting vektor
 teljesítménysűrűség 36, 40
 teljes visszaverődés 248, 279
 tércerősség, elektromos +
 elektromos tércerősség
 térfogati töltéssűrűség 14
 térintenzitások 20, 26
 terjedési együttható 167, 236,
 250
 tesla 20
 tg δ + veszteségi tényező
 TM módus 264
 TM típus 244, 281
 toroid 74
 totális áramsűrűség 29, 35
 töltés (elektromos) 13
 töltés megmaradása 18

töltéssűrűség, felületi 15
 töltéssűrűség, térfogati 14
 töltéssűrűség, vonalmenti 15
 törésmutató 241
 töréstörvény 47
 transzverzális hullám 237,
 244, 264
 tükrözés 66

U, Ú, Ű, Ű
 univerzális állandók 11
 Üregrezonátor 277

V
 vágási frekvencia 271, 283
 vákuum jellemzői 11
 váltakozóáramú
 rezisztencia 254, 257
 variációs feladat 134
 vasmag + mágneses kör
 vektoriális Poisson
 egyenlet 144
 vektorpotenciál 143, 147,
 220, 262
 vektorpotenciál, elektromos 263
 veszteségi szög 35
 veszteségi tényező 35, 242
 veszteségmentes távvezeték +
 ideális távvezeték
 vezetékparaméterek 173
 vezeték szakasz
 mint reaktancia 186
 vezeték szakasz
 mint rezgőkör 188
 vezetőképesség +
 konduktivitás

visszaverődési tényező +
 reflexiós tényező
 visszavert hullám 246
 volt 22
 vonalmenti áramsűrűség + felületi
 áramsűrűség
 vonalmenti töltéssűrűség 15
 vonalszerű vezető 147

W

weber (Wb) 22

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. **Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:**

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetkészítői díjazást kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyűjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság*

A jegyzet címe: **ELEKTROMÁGNESES TEREK**

A jegyzet szerzője: **Fodor György**

A jegyzet azonosítója: **55019**

Melyik tárgyhöz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:

(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: ürügy, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túlóldalon folytatható)