Távvezetékek (tápvonalak):

Villamosságtanban koncentrált paraméterű hálózatokkal foglalkoztunk. Ez akkor alkalmazható, ha a modellezendő objektum méretei sokkal kisebbek, mint a gerjesztés frekvenciájához tartozó λ hullámhossz ($\lambda = c/f$). Egyenáramon és alacsonyfrekvenciás váltakozó áramon ez nagyon jó modellezés, hiszen $L \ll \lambda$, ahol L az objektum mérete (pl. a legnagyobb befogó átmérő).

Ha a frekvencia nő, a hullámhossz csökken, s előbb-utóbb összemérhető lesz L-lel. Ekkor a koncentrált modell nem alkalmazható, az ún. elosztott paraméterű hálózati modellel kell dolgozni.

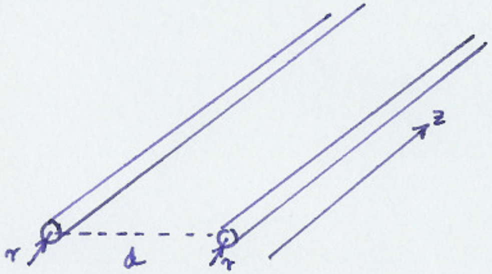
Koncentrált paraméterű hálózatnál külön térrészben tárolódik az elektromos energia (kondenzátor), s külön térfogatban a mágneses energia (tekercs). A források ismét egy térfogatban adják az energiát, s pl. az ellenálláson hővé alakul. Elosztott paraméterű hálózatban minden pontban energia tárolódik, s energiaátalakulás megy végbe. Az áramerősség és a feszültség egy adott t időpillanatban a vezeték hossza mentén is változik, míg konc. par. h. esetén ez nem így van!

A vezetőknek véges ellenállása van. A két vezető hurkot alkot, ami induktivitást eredményez. A két fémes vezető közt kapacitás mérhető, s a köztes dielektrikum véges vezetése miatt átvezetés is van: $[R] = \Omega/m$, $[L] = H/m$, $[C] = F/m$, $[G] = S/m$. Ez eloszlik a vezeték mentén! Hosszegységre vonatkoztatott adatok.

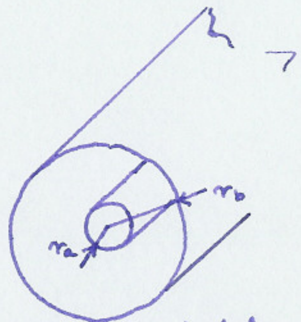
Miért változik az áram a vezető mentén? A vezetők közti kapacitáson és átvezetésen áram folyik.
Miért változik a feszültség a vezető mentén? A vezető ellenállása és induktivitása miatt.

Számításukkal később foglalkozunk, itt fogadjuk el, hogy R, L, G, C adatok mérhetők. Léteznek módszerek a mérésükre, s vannak képletek a számításukra.

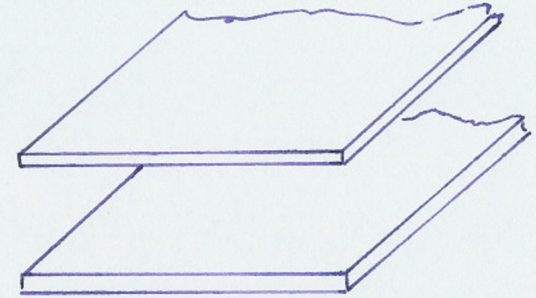
Távvezeték példák: két párhuzamos vezetőből áll.



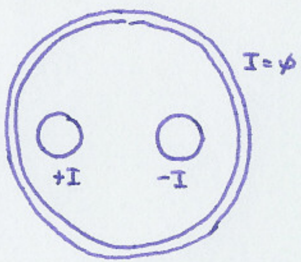
Kettősvezeték
Lecher-vezeték



koaxiális kábel



két párhuzamos sík lap
szalagtápvonal.

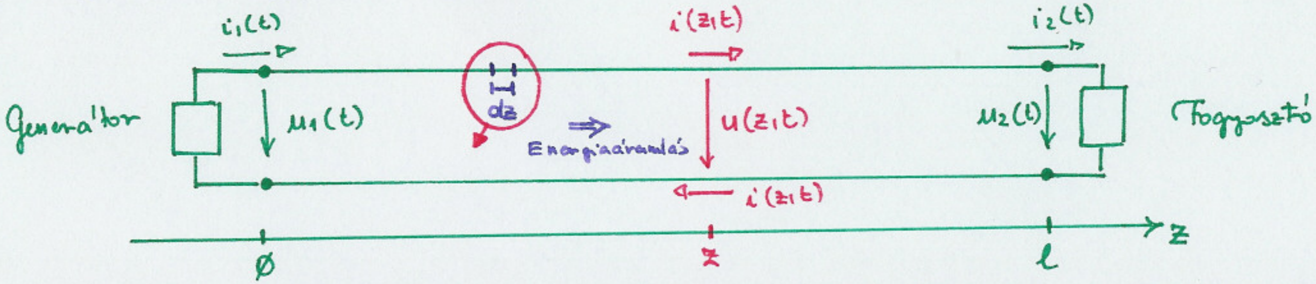


szimmetrikus táplálás

....

A telegráf-egyenlet (távíróegyenlet):

A távvezeték általános elrendezése:

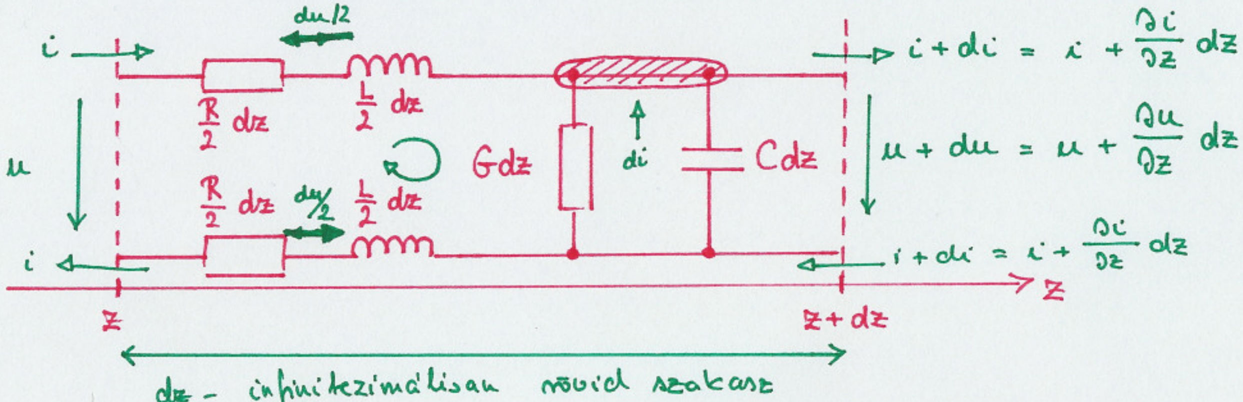


Az áram és a feszültség változik a távvezeték mentén!

$u_1(t) = u(0,t)$ $\quad i_1(t) = i(0,t)$

$u_2(t) = u(l,t)$ $\quad i_2(t) = i(l,t)$

Az áram és a feszültség változik a hossz mentén. Pontosan azért, mert minden egyes dz szakaszon van R, L, G, C. Minden pici dz szakasz modellezhető koncentrált paraméterű elemekkel:



A dz szakaszra jutó R, L, G, C értéke: Rdz, Ldz, Gdz, Cdz.

Fel tudunk írni egy csomóponti törvényt:

$$-i + G\,dz\,u + C\,dz\,\frac{du}{dt} + i + \frac{\partial i}{\partial z}dz = \emptyset \;\mapsto$$

Fel tudunk írni egy huroktörvényt is:

$$R\,dz\,i + L\,dz\,\frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial z}dz - u = \emptyset \;\mapsto$$

TELEGRÁF EGYENLETEK:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial z} &= -Gu - C\frac{du}{dt} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -Ri - L\frac{di}{dt} \end{aligned}}$$

Az áram a hossz mentén valóban a G és a C miatt változik.

A feszültség pedig valóban R és L miatt.

u $\quad \frac{du}{dt}$

úgy tekintjük, hogy ezen a dz szakaszon a feszültség és áram állandó, ezért nem az $u + \frac{\partial u}{\partial z}dz$ feszültséggel számolunk ott! Ezt a kis változást elhanyagoljuk.

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -Gu - C\frac{du}{dt}$$ ~ az áram egy része elfolyik az átvezetésen, egy része pedig mint töltés halmozódik fel

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -Ri - L\frac{di}{dt}$$ ~ a vezető ohmos ellenállásán feszültség esik, csakúgy mint az induktivitáson.

Általában szinuszos gerjesztéssel foglalkozunk:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial z} &= -(G + j\omega C)\,U \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= -(R + j\omega L)\,I \end{aligned}}$$

$Y_p = G + j\omega C$ – hosszegységre jutó párhuzamos admittancia

$Z_s = R + j\omega L$ – hosszegységre jutó soros impedancia

A telegráf egyenletek megoldása szinuszos gerjesztés mellett:

A komplex mennyiségeket itt nem jelöljük külön! A felülhúzás ebben a tárgyban a térvektor jele lesz!

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial z} = -(G+j\omega C)\,U & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial z} = -(R+j\omega L)\,I & (2) \end{cases}$$

Itt tehát $I = I(z)$ és $U = U(z)$ komplex amplitúdók, melyek függenek a helytől! $i(z,t) = \mathrm{Re}\{I(z)\,e^{j\omega t}\}$; $u(z,t) = \mathrm{Re}\{U(z)\,e^{j\omega t}\}$.

(2) - ből: $I = -\dfrac{1}{R+j\omega L}\dfrac{\partial U}{\partial z} \longmapsto \dfrac{\partial I}{\partial z} = -\dfrac{1}{R+j\omega L}\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, s ez vissza (1) - be:

$$-\frac{1}{R+j\omega L}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -(G+j\omega C)\,U$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (R+j\omega L)(G+j\omega C)\,U$$

$$\boxed{\gamma^2 = (R+j\omega L)(G+j\omega C)}$$ terjedési együttható: γ

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \gamma^2 U = \emptyset}$$

Helmholtz-típusú egyenlet, ha U ebből számítható, I is meghatározható (2) - ből.

Fordítva is elindulhatunk: (1) - ből: $U = -\dfrac{1}{G+j\omega C}\dfrac{\partial I}{\partial z} \longmapsto \dfrac{\partial U}{\partial z} = -\dfrac{1}{G+j\omega C}\dfrac{\partial^2 I}{\partial z^2}$, s ezt vissza (2) - be:

$$-\frac{1}{G+j\omega C}\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -(R+j\omega L)\,I$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \gamma^2 I = \emptyset.}$$

ha ebből a Helmholtz-egyenletből I számítható, U is meghatározható (1) - ből.

Az U-ra vonatkozó Helmholtz-egyenlet megoldásával foglalkozunk!

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \gamma^2 u = \emptyset \qquad \underset{\text{terjedési együttható}}{\gamma} = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \underset{\text{csillapítási tényező}}{\alpha} + j\underset{\text{fázistényező}}{\beta}$$

γ komplex szám általában.

Általános megoldása: $u_h = M e^{\lambda z}$, mint a tranziens keresésekor, de itt homogén általános megoldásnak hívjuk, nem tranziensnek.

$$\frac{\partial u_h}{\partial z} = \lambda M e^{\lambda z} \qquad \frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2} = \lambda^2 M e^{\lambda z}, \quad \text{azaz:}$$

$$\lambda^2 M e^{\lambda z} - \gamma^2 M e^{\lambda z} = \emptyset$$

$\lambda^2 = \gamma^2 \longmapsto \underline{\underline{\lambda_{1,2} = \pm\gamma}}$ a két sajátérték.

Így a homogén általános megoldás: $\boxed{u(z) = \overset{u^+(z)}{U^+ e^{-\gamma z}} + \overset{u^-(z)}{U^- e^{\gamma z}}}$

U^+ és U^- a +irányba és a − irányba haladó hullámok komplex csúcsértéke a $z = \emptyset$ helyen.

Itt U^+ és U^- később meghatározandó állandók, mint M_1 és M_2 volt a villamos hálózatoknál.

$$u(z,t) = \mathrm{Re}\left\{U^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t \underbrace{-\beta z}_{\text{fázistol.}})} + U^- e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}\right\} =$$

$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta} \text{ – fázissebesség}}$

$$= \mathrm{Re}\left\{U^+ \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{z-ben valóban csillapít}} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)} + U^- e^{\alpha z} e^{j\omega\left(t + \frac{z}{v}\right)}\right\}.$$

v sebességgel haladó hullám

$u(z,t)$ tehát két haladó hullám összege: az első tag a +z irányba halad csillapodva, a második tag pedig a −z irányba csillapodik, mindkettő v sebességgel halad.

A vezetéken mért hullámhossz:

$$\omega t - \beta z + 2\pi = \omega t - \beta (z - \lambda)$$

2π a fázisban pontosan λ a távolságban a cosinus argumentumában.

$$\omega t - \beta z + 2\pi = \omega t - \beta z + \beta\lambda$$

$$2\pi = \beta\lambda \quad \mapsto \quad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

Vizsgáljuk meg az áram alakját:

$$I = -\frac{1}{R+j\omega L}\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{R+j\omega L}\left(-\gamma U^+ e^{-\gamma z} + \gamma U^- e^{\gamma z}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{R+j\omega L} U^+ e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{R+j\omega L} U^- e^{\gamma z} = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}, \quad \text{azaz}$$

$$\boxed{I(z) = \underbrace{\frac{U^+}{Z_0}}_{I^+} e^{-\gamma z} - \underbrace{\frac{U^-}{Z_0}}_{I^-} e^{\gamma z} = \underbrace{I^+ e^{-\gamma z}}_{I^+(z)} + \underbrace{I^- e^{\gamma z}}_{I^-(z)}}$$

$$\xrightarrow{+v} \qquad \xleftarrow{+v}$$

Az áram is két haladó hullám szuperpozíciója-ként írható fel.

$$\frac{\gamma}{R+j\omega L} = \sqrt{\frac{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}{(R+j\omega L)^2}} = \sqrt{\frac{G+j\omega C}{R+j\omega L}} \longrightarrow \boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \text{ a hullám}\cancel{\text{ellenállás}}\text{impedancia}}$$

$Y_0 = \dfrac{1}{Z_0}$ hullámadmittancia.

Z_0 és $\gamma \cdot l$ a hullámparaméterek

Az egy irányban terjedő feszültség hullám és áram hullám hányadosa:

$$\frac{U^+(z)}{I^+(z)} = \frac{U^+ e^{-\gamma z}}{\frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z}} = Z_0$$

tehát tetszőleges z pontban a pozitív és negatív irányba terjedő feszültség hullám és áramhullám komplex amplitúdóinak hányadosa a Z_0 hullámimpedancia!

$$\frac{U^-(z)}{I^-(z)} = \frac{U^- e^{\gamma z}}{-\frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}} = -Z_0$$

$$Z_0 = \begin{cases} U^+(z) / I^+(z) \\ -U^-(z) / I^-(z) \end{cases}$$

A vezetéken kialakuló feszültség és áram komplex értéke :

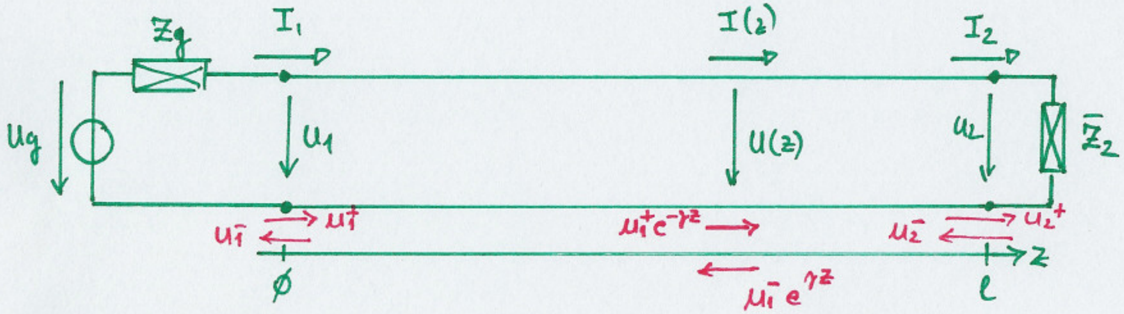
(1) $$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$$

(2) $$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$ számítható, $Z_0 = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$ is.

Kérdés még: U^+, U^- !

U^+ és U^- definíció szerint a pozitív és a negatív z irányba terjedő hullám komplex értéke a $z = \emptyset$ helyen, azaz a távvezeték elején.



Primer oldal: generátor

Szekunder oldal: fogyasztó

A szekunder oldalon (1) és (2) alakja (itt $z = l$):

(3) $$U_2 = U(l) = U_1^+ e^{-\gamma l} + U_1^- e^{\gamma l} = U_2^+ + U_2^-$$

(4) $$I_2 = I(l) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{\gamma l} = \frac{U_2^+}{Z_0} - \frac{U_2^-}{Z_0}$$

U_1^+ és U_1^- a $z = \emptyset$ helyen a $\pm$ haladó hullám, U_2^+ és U_2^- a $z = l$ helyen a + és − irányban haladó hullám

$$\frac{U_2}{I_2} = Z_2 = \frac{U_2^+ + U_2^-}{\frac{U_2^+}{Z_0} - \frac{U_2^-}{Z_0}} \mapsto \underline{Z_2 = Z_0 \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-}}$$

U_2^+ és U_2^- viszonyát tehát Z_0 és Z_2 határozza meg.

A $z=l$ helyen tehát van egy <u>U_2^+ beeső</u> feszültség hullám és egy <u>visszaverődő U_2^-</u> feszültség hullám, továbbá és <u>U_2^+/Z_0</u> és <u>$-U_2^-/Z_0$</u> <u>beeső</u>- és <u>visszaverődő</u> áramhullám/ visszaverődő = reflektált/.

$\boxed{\text{Reflexiós tényező: } r = \frac{U_2^-}{U_2^+}}$ r általában komplex! Ez a definíció.

Így: $Z_2 = Z_0 \dfrac{1 + U_2^-/U_2^+}{1 - U_2^-/U_2^+} \mapsto \boxed{Z_2 = Z_0 \cdot \frac{1+r}{1-r}}$

Innen:

$$Z_2 (1-r) = Z_0 \cdot (1+r)$$

$$Z_2 - rZ_2 = Z_0 + rZ_0$$

$$Z_2 - Z_0 = r(Z_2 + Z_0) \mapsto \boxed{r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}}$$

r tehát a lezárástól és a vezeték hullámimpedanciájától függ!

a 2 index a kimenetre utal.

r segítségével $U_2^- = r\,U_2^+$, azaz U_2^- eliminálható a szekunder oldali lezárás ismeretében, s így egyetlen ismeretlen, az U_2^+.

Az (1) és (2) egyenletek átírhatók:

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

(3)-ból: $U_2^+ = U_1^+ e^{-\gamma l} \;\mapsto\; U_1^+ = U_2^+ e^{\gamma l}$

$U_2^- = U_1^- e^{\gamma l} \;\mapsto\; U_1^- = U_2^- e^{-\gamma l} = r\,U_2^+ e^{-\gamma l}$

$U_1^+ \; U_1^- \longleftrightarrow U_2^+ \; U_2^-$ egymásba átszámítható, azaz a távvezeték elején és végén lévő + és − irányba haladó hullámok egymásba átszámíthatóak!

Így:

$$U(z) = U_2^+ e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma z} + r\,U_2^+ e^{-\gamma l} e^{\gamma z}$$

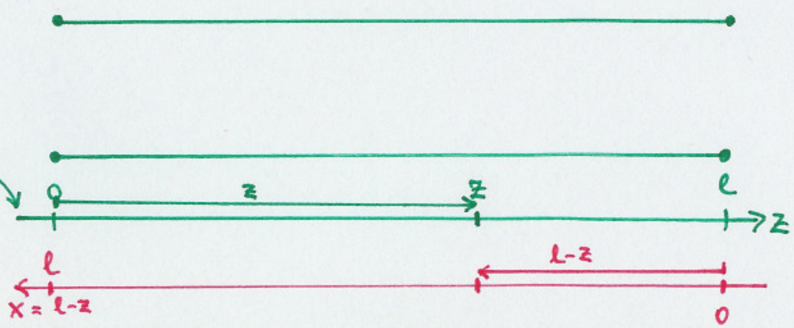
$$I(z) = \frac{U_2^+ e^{\gamma l}}{Z_0} e^{-\gamma z} - r\,\frac{U_2^+ e^{-\gamma l}}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} U(z) &= U_2^+ \left[e^{\gamma(l-z)} + r\,e^{-\gamma(l-z)} \right] \\ I(z) &= \frac{U_2^+}{Z_0} \left[e^{\gamma(l-z)} - r\,e^{-\gamma(l-z)} \right] \end{aligned}}$$

Ebben már csak egy ismeretlen szerepel: U_2^+. A következőkben megvizsgáljuk, hogy lehet azt kiszámolni, de előtte egy fontos rajz:

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{\gamma(l-z)} + r\,e^{-\gamma(l-z)} \right]$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left[e^{\gamma(l-z)} - r\,e^{-\gamma(l-z)} \right]$$



$$U(z) = U_2^+ \left[e^{\gamma x} + r\,e^{-\gamma x} \right]$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left[e^{\gamma x} - r\,e^{-\gamma x} \right]$$

Néha a vezeték végétől írják fel a fenti egyenletet:
itt: $x = l - z$

Ideális vezeték:

- a vezeték végtelen jó vezető, azaz $\underline{\underline{R = \varnothing}}$; és a szigetelés tökéletes, azaz $\underline{\underline{G = \varnothing}}$

Ekkor:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \Rightarrow \underline{\underline{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}}$$ a hullámellenállás tiszta valós

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = j\omega\sqrt{LC}}}$$ a terjedési együttható tiszta képzetes, így

$$\underline{\underline{\alpha = 0}}$$ a vezeték tehát nem csillapít, de

$$\underline{\underline{\beta = \omega\sqrt{LC}}}$$ miatt fázist forgat.

$$\underline{\underline{v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}}$$ a fázissebesség, melynek maximális értéke a fénysebesség lehet, mert LC nem csökkenthető minden határon túl! Ezt később fogjuk belátni!

Ez nem a Thomson-képlet, bár alakra ugyanaz!

$$\underline{\underline{\lambda}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi f\sqrt{LC}} = \underline{\underline{\frac{1}{f\sqrt{LC}}}} = \frac{v}{f}$$

Egyéb esetek is léteznek: kis csillapítású vezeték, torzításmentes vezeték, de azokat külön nem tárgyaljuk.

a.) Ha a távvezeték végén ismert U_2:

$$U_2 = U(\ell) = U_2^+ \left[1 + r \right] \mapsto U_2^+ = \frac{U_2}{1+r}$$ ⊛

Azaz:

$$U(z) = \frac{U_2}{1+r} \left[e^{\gamma(\ell-z)} + r\, e^{-\gamma(\ell-z)} \right]$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{U_2}{1+r} \left[e^{\gamma(\ell-z)} - r\, e^{-\gamma(\ell-z)} \right]$$

b.) Ha a távvezeték végén ismert I_2, azaz a lezáráson folyó áram:

- $U_2 = Z_2 \cdot I_2$, s így vissza a) - hoz, mert U_2 ismert.
- $I_2 = I(\ell) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left[1 - r \right] \mapsto U_2^+ = \frac{Z_0 \cdot I_2}{1-r}$ ⊛

Azaz:

$$U(z) = \frac{Z_0 I_2}{\cancel{(1+r)}(1-r)} \left[e^{\gamma(\ell-z)} + r\, e^{-\gamma(\ell-z)} \right]$$

$$I(z) = \frac{1}{\cancel{Z_0}} \cdot \frac{\cancel{Z_0} \cdot I_2}{1-r} \left[e^{\gamma(\ell-z)} - r\, e^{-\gamma(\ell-z)} \right]$$

⊛ A két U_2^+ meg kell egyezzen, hiszen a feladat ugyanaz: a lezáráson ismert vagy az U_2 vagy az I_2, de ezek nem függetlenek egymástól!

$$\frac{U_2}{1+r} = \frac{Z_2 I_2}{1+r} = \frac{Z_0 \cdot I_2}{1-r} \mapsto Z_2 = Z_0 \cdot \frac{1+r}{1-r}$$, ezt pedig a reflexiós tényező bevezetésénél beláttuk.

c.) A bemenetre u_g forrás csatlakozik:

$$u_g = u(0) = u_2^+ \left[e^{\gamma l} + r e^{-\gamma l} \right] \mapsto u_2^+ = \frac{u_g}{e^{\gamma l} + r e^{-\gamma l}}$$

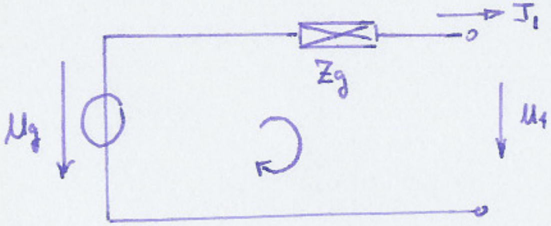
$$\boxed{\begin{aligned} u(z) &= \frac{u_g}{e^{\gamma l} + r e^{-\gamma l}} \left[e^{\gamma(l-z)} + r e^{-\gamma(l-z)} \right] \\ I(z) &= \frac{u_g / Z_0}{e^{\gamma l} + r e^{-\gamma l}} \left[e^{\gamma(l-z)} - r e^{-\gamma(l-z)} \right] \end{aligned}}$$

d.) A bemenetre I_g forrás csatlakozik:

$$I_g = I(0) = \frac{u_2^+}{Z_0} \left[e^{\gamma l} - r e^{-\gamma l} \right] \mapsto u_2^+ = \frac{I_g Z_0}{e^{\gamma l} - r e^{-\gamma l}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(z) &= \frac{I_g Z_0}{e^{\gamma l} - r e^{-\gamma l}} \left[e^{\gamma(l-z)} + r e^{-\gamma(l-z)} \right] \\ I(z) &= \frac{I_g}{e^{\gamma l} - r e^{-\gamma l}} \left[e^{\gamma(l-z)} - r e^{-\gamma(l-z)} \right] \end{aligned}}$$

e.) A bemenetre a kiindulásnál szereplő Thévenin-generátor csatlakozik:



$$\circlearrowright \quad Z_g I_1 + U_1 - U_g = 0$$

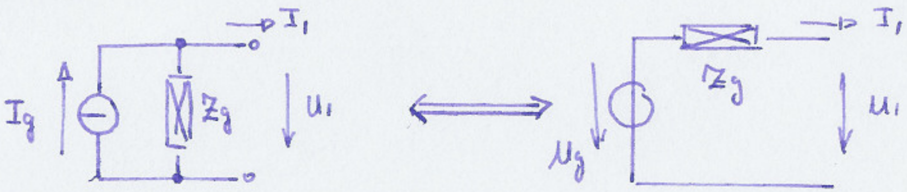
$$U_g = U_1 + Z_g I_1 = U(0) - Z_g I(0)$$

$$U_g = U_2^+ \left[e^{\gamma l} + r e^{-\gamma l} \right] + U_2^+ \frac{Z_g}{Z_0} \left[e^{\gamma l} - r e^{-\gamma l} \right]$$

innen U_2^+ kifejezhető, s visszahelyettesíthető a kiindulási egyenletekbe!

f.) A bemenetre Norton-ekvivalens csatlakozik:

Norton $\leftrightarrow$ Thévenin:



Z_g ugyanaz

$U_g = Z_g I_g$ átszámítható, s használható az e.) pontban bemutatott elv.

Az a)–f.) pontokban az elv a lényeg, a végképleteket nem érdemes megtanulni, mert van két kiindulási képletünk $U(z)$ és $I(z)$, és U_2^+ kifejezése a cél, ami a fenti elvet megértése után elvégezhető!

Néhány speciális lezárás:

a.) Lezárás hullámimpedanciával : $Z_2 = Z_0$

$$r = \left.\frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}\right|_{Z_2 = Z_0} = \underline{\underline{\emptyset}}$$! azaz nincs reflektált hullám, annak amplitúdója nulla, így:

$$\begin{cases} U(z) = U_2^+ e^{\gamma(l-z)} \\ I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma(l-z)} \end{cases}$$

A vezeték minden pontján $Z_0 = \frac{U(z)}{I(z)}$. Ez haladó hullám.

Illesztett lezárásnak is hívjuk, de ez nem a teljesítményillesztés! Ez általában csak egy frekvenciasávban, közelítőleg végezhető el. Ideális távvezetéknél $Z_2 = Z_0 = \sqrt{L/C}$, ami egy rezisztencia, s így frekvencia független.

b.) Ideális távvezeték lezárása rövidzárral:

$$r = \left.\frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}\right|_{Z_2 = 0} = \underline{\underline{-1}}$$

Ideális esetben: $\gamma = j\sqrt{LC}$ ($j\beta$; $\alpha = 0$)

Ekkor:

$$U(z) = U_2^+\left[e^{\gamma(l-z)} - e^{-\gamma(l-z)}\right] = U_2^+\left[e^{j\beta(l-z)} - e^{-j\beta(l-z)}\right]\underbrace{\frac{2j}{2j}}_{1} = \underline{\underline{j2U_2^+ \sin\beta(l-z)}}$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0}\left[e^{\gamma(l-z)} + e^{-\gamma(l-z)}\right] = \frac{U_2^+}{Z_0}\left[e^{j\beta(l-z)} + e^{-j\beta(l-z)}\right]\cdot\underbrace{\frac{2}{2}}_{1} = \underline{\underline{2U_2^+/Z_0 \cos\beta(l-z)}}$$

Írjuk fel ezek idő függvényeit:

$$\begin{cases} u(z,t) = \underbrace{2U_2^+ \sin\beta(l-z)}_{\text{csúcsérték}} \cdot \cos(\omega t + 90^\circ) \\ i(z,t) = \underbrace{2U_2^+ / Z_0 \cdot \cos\beta(l-z)}_{\text{csúcsérték}} \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

i és u időfüggvényei 90°-kal vannak eltolva egymáshoz képest!

Nézzük meg a csúcsértékeket, mert azok helyfüggők, méghozzá sin és cos szerint periodikusan. Van tehát zérushelye, ahol értéke nulla, s van maximumhelye és minimumhelye.

- $\sin\beta(l-z) = \sin\beta x = \emptyset \mapsto \beta x_k = k\pi \; ; \; k = 0, 1, 2, \dots$

  érdemes átírni x-re, azaz mérjük a távolságot a lezárástól.

$$x_k = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\pi}{2\pi/\lambda} = k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

- $\sin\beta x = \pm 1 \mapsto \beta x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \; ; \; k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_k = \frac{(2k+1)\pi/2}{2\pi/\lambda} = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

A feszültség csúcsértéknek tehát - a rövidzár miatt - a távvezeték végén az értéke nulla, s a lezárástól mérve az x távolságot, $k \cdot \lambda/2$ távolságonként zérushelyek vannak, $(2k+1)\lambda/4$ távolságokra pedig felváltva, maximum és minimumhelyek váltakoznak, s a vezeték mentén a szinuszos törvény szerint alakul.

Az áram csúcsértéke hasonlóképp alakul, de a távvezeték végén maximuma van (rövidzár).

Ezek állóhullámok.

A feszültség és áram hányadosa z függvényében:

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{j\,2\,U_2^+ \sin\beta(l-z)}{\frac{2U_2^+}{Z_0}\cos\beta(l-z)} = \underline{\underline{j Z_0 \,\mathrm{tg}\,\beta(l-z)}}$$

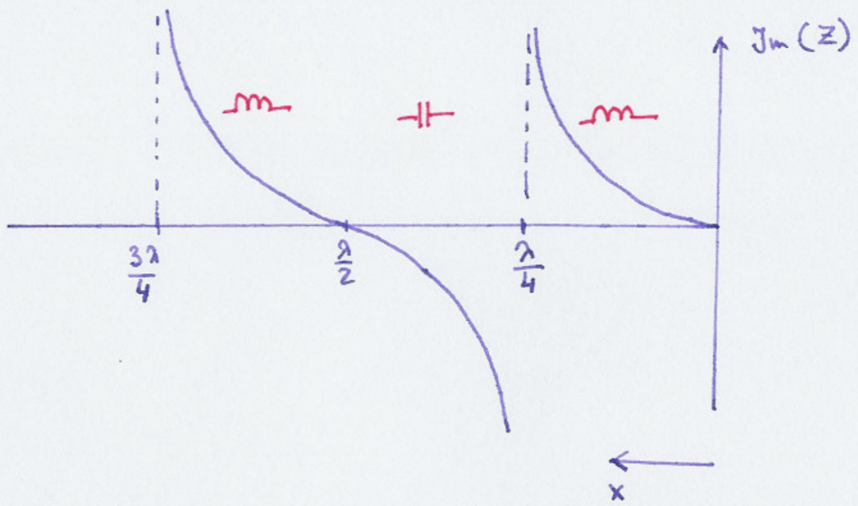
vagy: $\underline{\underline{Z(x) = j Z_0 \,\mathrm{tg}\,\beta x}}$

tiszta képzetes!

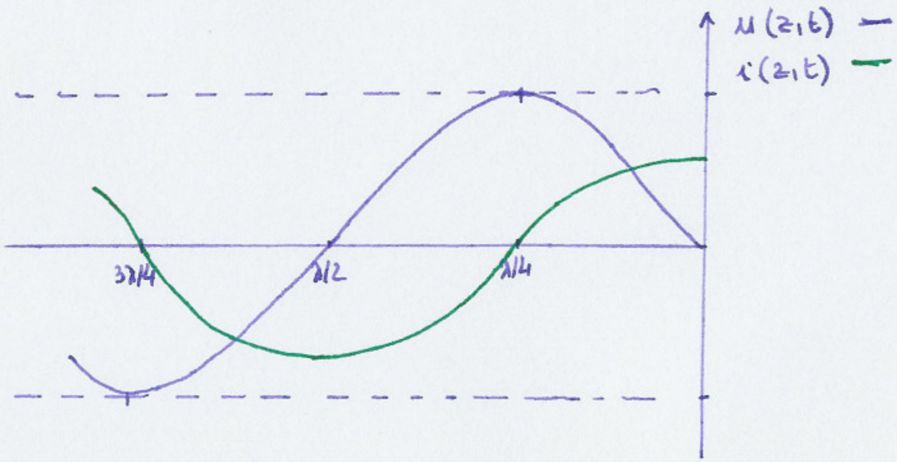
$\Downarrow$

reaktancia: jX

X előjele váltakozik



Így lehet a mikrohullámú technikában (λ kicsi!) induktivitást és kapacitást készíteni.



Adott t időpillanatban!
(l. mozi)

c.) Ideális távvezeték lezárása szakadással:

$$r = \left.\frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}\right|_{Z_2 \to \infty} = \frac{1 - Z_0/Z_2}{1 + Z_0/Z_2} = \underline{\underline{1}}$$

Ekkor:

$$U(z) = U_2^+\left[e^{\gamma(l-z)} + e^{-\gamma(l-z)}\right] = U_2^+\left[e^{j\beta(l-z)} + e^{-j\beta(l-z)}\right]\frac{2}{2} = \underline{\underline{2U_2^+ \cos\beta(l-z)}}$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0}\left[e^{\gamma(l-z)} - e^{-\gamma(l-z)}\right] = \frac{U_2^+}{Z_0}\left[e^{j\beta(l-z)} - e^{-j\beta(l-z)}\right]\frac{2j}{2j} = \underline{\underline{\frac{j2U_2^+}{Z_0}\sin\beta(l-z)}}$$

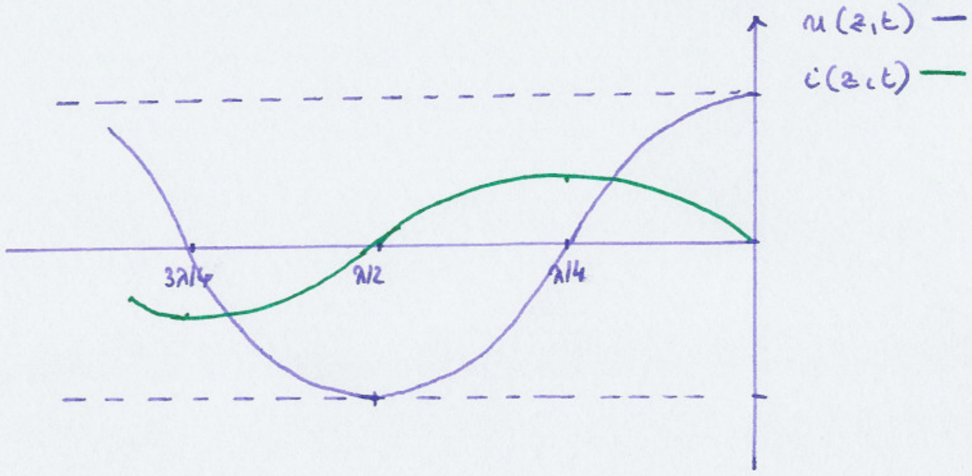
A feszültség és az áram időfüggvénye tehát az alábbi:

$$\begin{cases} u(z,t) = 2U_2^+ \cos\beta(l-z)\cos(\omega t) \\ i(z,t) = \dfrac{2U_2^+}{Z_0}\sin\beta(l-z)\cos(\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

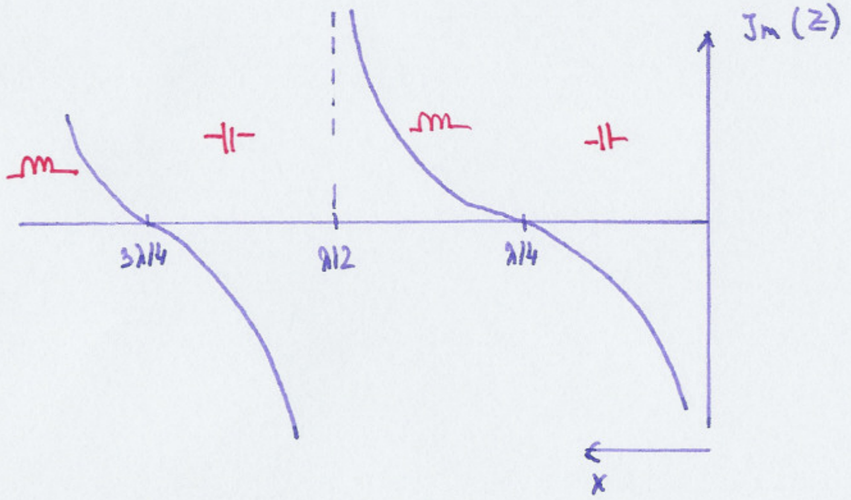
$u(z,t)$ és $i(z,t)$ alakulása a vezeték mentén itt is állóhullámot eredményez, s fordítva viselkedik u és i itt, mint a b.) pontban. Ez a lezárásnak tudható be, hiszen szakadáson áram nem folyik (végén csomópont, zérushely), de a feszültség maximális.

Az impedancia a vezeték mentén:

$$Z(z) = \frac{2U_2^+\cos\beta(l-z)}{j\dfrac{2U_2^+}{Z_0}\sin\beta(l-z)} = \underline{\underline{-jZ_0\,\mathrm{ctg}\,\beta(l-z)}}, \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{Z(x) = -jZ_0\,\mathrm{ctg}\,\beta x}}$$



Egy adott időpillanatban
(l. mozi)



b.) és c.) eseteknél teljes reflexió jön létre, mert $|r| = 1$.

teljes reflexió és ideális távvezeték → állóhullám.

Az állóhullámok alkalmazására a rezgőkörrel még visszatérünk, amikoris megvizsgáljuk, hogy az ideális vezeték hogy viselkedik, mint rezgőkör.

d.) Lezárás általános Z_2 impedanciával:

$$r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = |r|\, e^{j\delta} \qquad \gamma = \alpha + j\beta \ \text{ általános eset, így:}$$

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{\gamma(\ell - z)} + r\, e^{-\gamma(\ell - z)} \right] = U_2^+ \left[e^{\alpha(\ell-z)} \cdot e^{j\beta(\ell-z)} + |r|\, e^{j\delta}\, e^{-\alpha(\ell-z)}\, e^{-j\beta(\ell-z)} \right] =$$

$$= U_2^+ \left[e^{\alpha(\ell-z)} \cdot e^{j\beta(\ell-z)} + |r|\, e^{j\delta}\, e^{-\alpha(\ell-z)}\, e^{-j\beta(\ell-z)} \underbrace{- |r|\, e^{-\alpha(\ell-z)}\, e^{+j\beta(\ell-z)} + |r|\, e^{-\alpha(\ell-z)}\, e^{+j\beta(\ell-z)}}_{\emptyset} \right] =$$

$$= U_2^+ \left[\left\{ e^{\alpha(\ell-z)} - |r|\, e^{-\alpha(\ell-z)} \right\} e^{j\beta(\ell-z)} + |r|\, e^{-\alpha(\ell-z)} \left\{ e^{j\beta(\ell-z)} + e^{j\delta}\, e^{-j\beta(\ell-z)} \right\} \right] =$$

$$= U_2^+ \left[\left\{ e^{\alpha(\ell-z)} - |r|\, e^{-\alpha(\ell-z)} \right\} e^{j\beta(\ell-z)} + |r|\, e^{-\alpha(\ell-z)}\, e^{j\frac{\delta}{2}} \left\{ \underbrace{e^{j\beta(\ell-z)} \cdot e^{-j\frac{\delta}{2}}}_{e^{j[\beta(\ell-z) - \delta/2]}} + \underbrace{e^{-j\beta(\ell-z)} \cdot e^{j\frac{\delta}{2}}}_{e^{-j[\beta(\ell-z) - \delta/2]}} \right\} \right] =$$

$$= U_2^+ \left[\left\{ e^{\alpha(\ell-z)} - |r|\, e^{-\alpha(\ell-z)} \right\} e^{j\beta(\ell-z)} + 2|r|\, e^{-\alpha(\ell-z)}\, e^{j\frac{\delta}{2}} \cos\left[\beta(\ell-z) - \frac{\delta}{2} \right] \right]$$

Az áram alakulása hasonló hosszadalmas módon írható fel. Itt az átalakítás bemutatása volt a cél.

A feszültség két hullám szuperpozíciójaként áll elő! Az első tag haladó hullám, a második állóhullám.

e.) Egyszerűsítsünk le egy fontos speciális esetre!

<u>Lezárás reaktanciával ($Z_2 = jX$) és a távvezeték ideális ($\alpha = \emptyset$):</u>

$$r = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = 1 \cdot e^{j\delta}$$

(a számláló és a nevező egymás konjugáltja: $-\frac{Z_0 - jX}{Z_0 + jX}$)

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{j\beta(l-z)} + \underline{e^{j\delta}}\, e^{-j\beta(l-z)} \right] = U_2^+ \underline{e^{j\delta/2}} \left[e^{j\beta(l-z)} \underline{e^{-j\delta/2}} + \underline{e^{j\delta/2}} e^{-j\beta(l-z)} \right] =$$

$$= U_2^+ e^{j\delta/2} \left[e^{j[\beta(l-z) - \delta/2]} + e^{-j[\beta(l-z) - \delta/2]} \right] =$$

$$= \underline{\underline{2U_2^+ e^{j\delta/2} \cos[\beta(l-z) - \delta/2]}}$$

$$\underline{\underline{I(z) = \frac{j2U_2^+}{Z_0} e^{j\delta/2} \sin[\beta(l-z) - \delta/2]}}$$

(a levezetés hasonló, de a [ ]-ben $e^{j\delta}$ előtt negatív előjel szerepel, emiatt szinusz.)

Időfüggvények:

$$u(z,t) = 2U_2^+ \cos[\beta(l-z) \underline{- \delta/2}] \cos(\omega t + \delta/2)$$

$$i(z,t) = \frac{2U_2^+}{Z_0} \sin[\beta(l-z) \underline{- \delta/2}] \cos(\omega t + \delta/2 + 90^\circ)$$

Láthatóan itt is állóhullámok alakulnak ki, de a $\underline{-\delta/2}$ tag fontos szerepet játszik!

A vezeték végén $z = l$:

$$\left.\begin{aligned} u(l,t) &= 2U_2^+ \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \\ i(l,t) &= -\frac{2U_2^+}{Z_0} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2} + 90^\circ\right) \end{aligned}\right\} \mapsto$$

Ha $\delta > \emptyset$, akkor a feszültség siet 90°-kal az áramhoz képest.

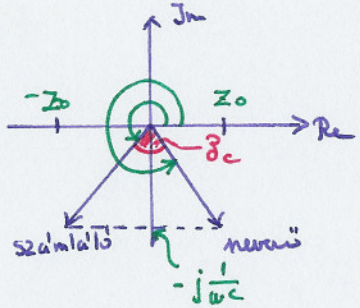
Ha $\delta < 0$, akkor az áram siet 90°-kal.

A $-\delta/2$ tag miatt – mivel az fázistolás a vezeték mentén – a vezeték végén nincs zérushelye sem az áramnak, sem a feszültségnek. Vizsgáljuk meg mit okoz ez az additív tag!

Két eset van:

- lezárás kapacitással:

$$r = \frac{-j\frac{1}{\omega C} - Z_0}{-j\frac{1}{\omega C} + Z_0} = -\frac{Z_0 + j\frac{1}{\omega C}}{Z_0 - j\frac{1}{\omega C}} = |r|\, e^{j\delta_C}$$

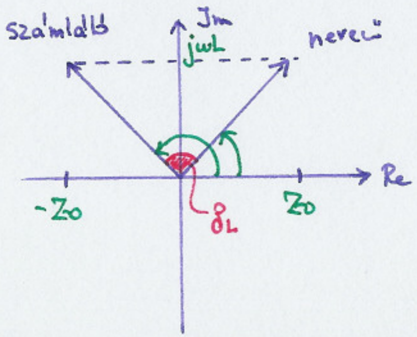


számláló fázisa – nevező fázisa láthatóan negatív lesz

$$\delta_C = -2\,\mathrm{arctg}\,\omega C Z_0$$

- lezárás induktivitással:

$$r = \frac{j\omega L - Z_0}{j\omega L + Z_0} = -\frac{Z_0 - j\omega L}{Z_0 + j\omega L} = |r|\, e^{j\delta_L}$$



$$\delta_L = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{Z_0}{\omega L}$$

Vizsgáljuk most meg a $\cos[\beta(l-z) - \delta/2]$ fgv. argumentumát:

$$\beta x - \frac{\delta}{2} = \beta\left(x - \frac{\delta}{2\beta}\right)$$

$\delta_C < 0$

$$\beta\left(x + \frac{|\delta_C|}{2\beta}\right)$$

$\Downarrow$

Olyan, mintha szakadással lenne lezárva egy $|\delta_C|/2\beta$-val hosszabb távvezeték.

$\delta_L > 0$

$$\beta\left(x - \frac{\delta_L}{2\beta}\right)$$

$\Downarrow$

Olyan mintha ~~rövidre~~ szakadással lenne lezárva egy $\delta_L/2\beta$-val rövidebb távvezeték.

Úgyis felfogható, hogy a rövidrezárt vezeték $\frac{180° - \delta_L}{2\beta}$-val hosszabb.
(l. 40. példa)

A lezárás függvényében vagy haladó hullám ($r=0$, illesztés) vagy állóhullám ($|r|=1$, szakadás, rövidzár, tekercs, kondenzátor), vagy haladó hullám és állóhullám összege (általános eset) jöhet létre.

Az illesztés mérőszámai:

- állóhullámarány:

$$\sigma = \frac{|U|_{max}}{|U|_{min}} = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

- haladóhullámarány:

$$k = \frac{|U|_{min}}{|U|_{max}} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1-|r|}{1+|r|}$$

Ha csak haladó hullám van ($r = 0$), akkor $\sigma = 1$, $k = 1$.
Ha csak állóhullám van ($|r| = 1$), akkor $\sigma = \infty$, $k = 0$.
$|U|_{max}$ és $|U|_{min}$ könnyen mérhető, így σ számítható, ahonnan $|r|$ is.

Mikrohullámú technikában az impedanciamérés állóhullámarány mérésén alapszik.

A távvezeték bemeneti impedanciája:

$$U(z) = U_2^+ \left[e^{\gamma(l-z)} + r\, e^{-\gamma(l-z)} \right]$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} \left[e^{\gamma(l-z)} - r\, e^{-\gamma(l-z)} \right]$$

A z helyen fellépő impedancia: $Z(z) = U(z) / I(z)$.

Ha $z = \emptyset$, akkor a bemeneti impedanciát kapjuk:

$$Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{e^{\gamma l} + r\, e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - r\, e^{-\gamma l}} = Z_0 \frac{e^{\gamma l} + \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} e^{-\gamma l}} = Z_0 \frac{(Z_2 + Z_0) e^{\gamma l} + (Z_2 - Z_0) e^{-\gamma l}}{(Z_2 + Z_0) e^{\gamma l} - (Z_2 - Z_0) e^{-\gamma l}} =$$

$$= Z_0 \frac{Z_2 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) + Z_0 (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{Z_0 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) + Z_2 (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})} \Rightarrow$$

$$\mathrm{ch}\,\gamma l = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \qquad \mathrm{sh}\,\gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}$$

cosinus hiperbolicus — sinus hiperbolicus.

$$\boxed{Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2\, \mathrm{ch}\,\gamma l + Z_0\, \mathrm{sh}\,\gamma l}{Z_0\, \mathrm{ch}\,\gamma l + Z_2\, \mathrm{sh}\,\gamma l}}$$

Ha:
- $Z_2 = Z_0 \Rightarrow Z_{be} = Z_0$, azaz a generátor közvetlenül a fogyasztót látja (illesztés)
- $Z_2 = \emptyset \Rightarrow Z_{be} = Z_0\, \mathrm{th}\,\gamma l$
- $Z_2 \to \infty \Rightarrow Z_{be} = Z_0 / \mathrm{th}\,\gamma l$

A hullámimpedancia tehát úgy mérhető, hogy meghatározzuk a bemeneti impedanciát rövidzár és szakadás mellett, majd:

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{Z_{rz} \cdot Z_{sz}}}$$

Ezzel a generátor által leadott teljesítmény számítható.

$$\mathrm{ch}\,\gamma l = \mathrm{ch}\,\alpha l \cdot \cos\beta l + j \cdot \mathrm{sh}\,\alpha l \cdot \sin\beta l$$

$$\mathrm{sh}\,\gamma l = \mathrm{sh}\,\alpha l \cdot \cos\beta l + j \cdot \mathrm{ch}\,\alpha l \cdot \sin\beta l \Rightarrow$$

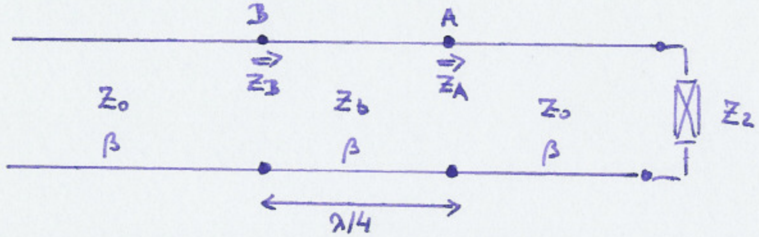
Ideális távvezeték:

$$\boxed{Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cos\beta l + Z_0 j \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l + Z_2 j \sin\beta l} \Rightarrow \quad Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + j Z_0\, \mathrm{tg}\,\beta l}{Z_0 + j Z_2\, \mathrm{tg}\,\beta l}}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ch}\,\gamma l &= \cos\beta l \\ \mathrm{sh}\,\gamma l &= j \sin\beta l \end{aligned}\right\} \alpha = \emptyset$$

Távvezeték illesztése λ/4 hosszúságú impedancia transzformátorral:

Illesztés: $r = 0$, azaz $\sigma = 1$.



A nem illesztett távvezetékbe iktassunk egy $\lambda/4$ hosszúságú szakaszt, melynek hullámimpedanciáját kell hangolni.

Szorítkozzunk ideális távvezetékre, β azonos mindegyik szakaszon.

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad tg\,\pi/2 \to \infty$$

$$Z_B = Z_t \cdot \frac{Z_A + j\,tg\,\beta l \cdot Z_t}{Z_t + j\,tg\,\beta l \cdot Z_A} = \frac{Z_t^2}{Z_A}$$

($tg\,\beta l \to \infty$, ezért a számlálót is, nevezőt is osszuk el, s vegyük így a határértéket.)

Illesztés esetén: $r = 0$, azaz $Z_B = Z_0$

$$Z_t = \sqrt{Z_A \cdot Z_B} \;\to\; \boxed{Z_t = \sqrt{Z_A \cdot Z_0}}$$

- Z_A ismert érték, valós
- Z_0 is ismert, valós érték
- $Z_t = \sqrt{Z_A Z_0}$ -val a B pontban $r = 0$ érhető el, azaz illesztés.

Az illesztés egy frekvencián jön létre, de ez általánosítható. Itt az elv a lényeg! Illesztés más módon is elvégezhető, szaktárgyban lesz róla szó. A $\lambda/4$ szakaszt oda illeszthetjük, ahol a mérhető Z_A valós! Z_A bemeneti impedancia, vannak olyan helyek βl szerint, ahol az valós! Tehát azt meg kell határozni.

Egy a gyakorlat számára fontos összefüggés:

$$r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \quad \text{a kimeneten számolható}$$

Definíció alapján:

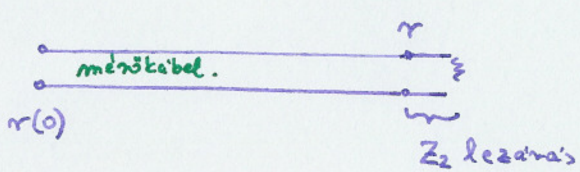
$$\boxed{r(z) = \frac{U_1^- e^{\gamma z}}{U_1^+ e^{-\gamma z}}} = \frac{U_1^-}{U_1^+} e^{\gamma 2z} = \frac{U_2^- e^{-\gamma l}}{U_2^+ e^{\gamma l}} e^{\gamma 2z} = \underbrace{\frac{U_2^-}{U_2^+}}_{r \text{ a lezárásnál}} e^{-\gamma 2l} e^{\gamma 2z} \Leftarrow \begin{array}{l} U_2^- = U_1^- e^{\gamma l} \\ U_2^+ = U_1^+ e^{-\gamma l} \end{array}$$

$$r(z) = r\, e^{-2\gamma l} e^{\gamma 2z} = r\, e^{-2(\gamma [l-z])}$$

$$\boxed{r(z) = r\, e^{-2\gamma(l-z)} = r\, e^{-2\gamma x}}$$

Ha $z = \emptyset$: $\boxed{r(0) = r\, e^{-2\gamma l}}$

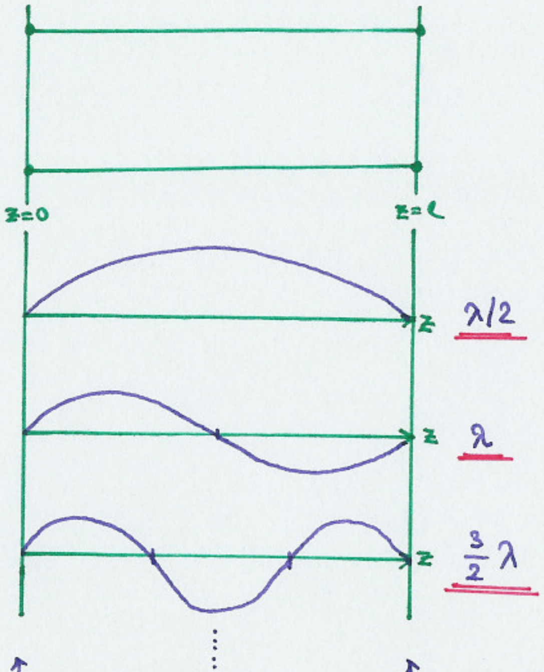
Mire jó ez?



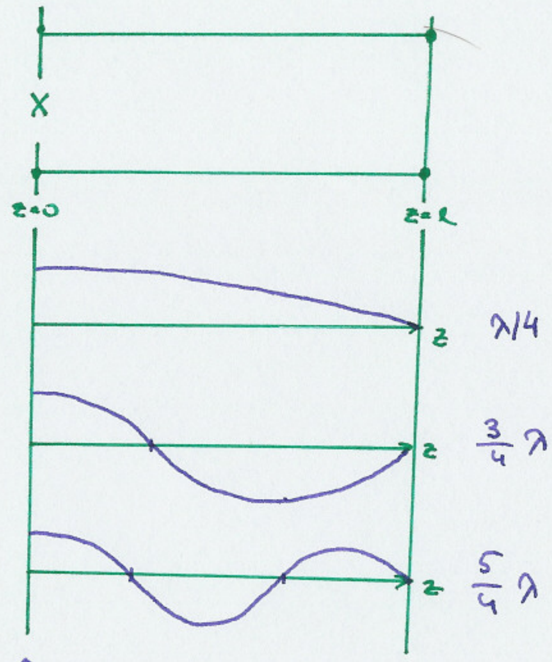
Mérés során a lezárás viselkedésére, pl. Z_2 impedanciájára, vagy az r reflexiós tényezőre vagyunk kíváncsiak, de a mérés egy mérőkábelen keresztül történik, azaz $r(0)$-t tudjuk mérni. A mérésből r tehát számítható! A mérőkábel – a rövid is – nagy frekvenciákon távvezetékként számolandó!

Az ideális vezetékszakasz, mint rezgőkör: a rövidzárral, szakadással lezárt ideális vezetéken állóhullám alakul ki.

Ezek a rezgések elméletileg korlátlan ideig fennmaradnak!



feszültség nulla, áram max.



áram nulla, feszültség max.

feszültség nulla, áram max.

$$l = k \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Downarrow$$

$\lambda = \frac{2l}{k}$	$f = \frac{v \cdot k}{2l}$

Ezen a frekvenciákon jöhet létre állóhullám, ha l ismert.

$$l = \frac{2k+1}{4} \cdot \lambda \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

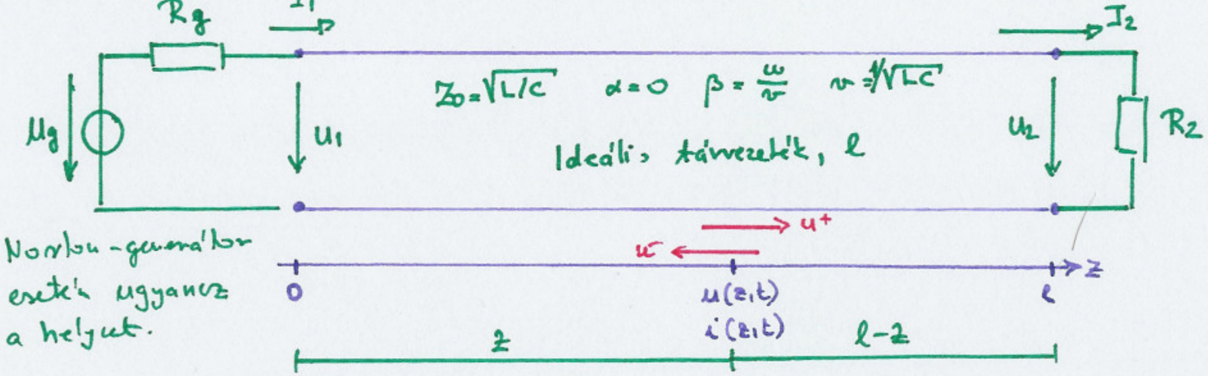
$$\Downarrow$$

$\lambda = \frac{4l}{2k+1}$	$f = \frac{v \cdot (2k+1)}{4l}$

A nem ideális vezetékek rezgőkörként való alkalmazása nehezebb, bonyolultabb. Itt ezzel nem foglalkozunk!

Átmeneti folyamatok alapjai:

Ez általános esetben numerikus oldható meg, egy szoftver segítségével. Láttuk, a számítások hosszadalmasak, itt csak ideális távvezetékkel foglalkozunk, de az elv általánosítható. A lezárás ellenállás lesz.



Norton-generátor esetén ugyanez a helyzet.

- A v terjedési sebesség véges, ezért idő kell a hullám távvezetéken történő áthaladásához.

$$u^+(z,t) = u_1\left(t-\frac{z}{v}\right)$$
$$i^+(z,t) = \frac{1}{Z_0}\,u_1\left(t-\frac{z}{v}\right)$$

a feszültség ugyanolyan lefolyású bármely z pontban, de később jelenik ott meg $\Delta t = z/v$-vel később.

- A hullám $\Delta t = l/v$ idő elteltével a távvezeték végéhez ér. Ezt az időt τ-val jelöljük: $\tau = l/v$. Ott reflexió történik: $r_2 = (R_2 - Z_0)/(R_2+Z_0)$ szerint. Így:

$$u^-(z,t) = r_2\,u_1\left(t-\tau-\frac{l-z}{v}\right)$$
$$i^-(z,t) = -\frac{1}{Z_0}\,r_2\,u_1\left(t-\tau-\frac{l-z}{v}\right)$$

- Ez a hullám eléri a generátort, ahol szintén reflexiót szenved $r_1 = (R_g - Z_0)/(R_g+Z_0)$ szerint, s:

$$u^+(z,t) = u_1\left(t-2\tau-\frac{z}{v}\right)\cdot r_2\cdot r_1$$
$$i^+(z,t) = -\frac{1}{Z_0}\,u_1\left(t-2\tau-\frac{z}{v}\right) r_2 r_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{és így tovább.}$$

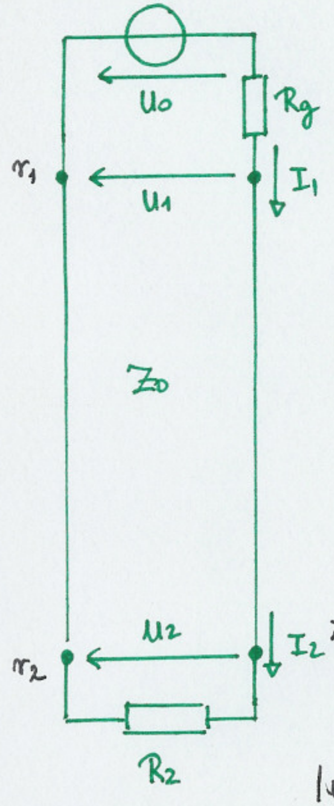
Bármely z helyen tehát a feszültség és az áram reflektált hullámok szuperpozíciójaként áll elő, hiszen a fenti reflektált hullámokat össze kell adni.

Csak a legegyszerűbb esettel foglalkozunk: minden frekvenciafüggetlen, a vezeték tehát ideális, a lezárások ellenállások.

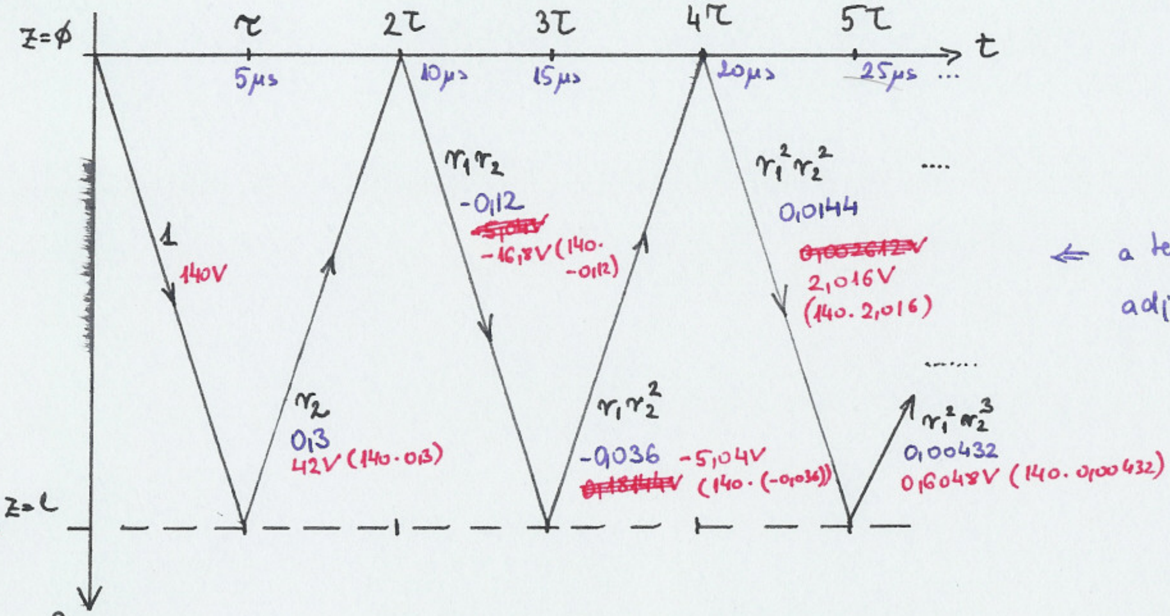
Bonyolultabb esetben a Laplace-transzformáció alkalmazható.

A problémakört egy illusztratív példán vizsgáljuk meg, amikor egyenáramú forrást kapcsolunk a bemenetre.

Példa: részletezés l. köv. oldalak! Ezt az oldalt színesben érdemes nézni!

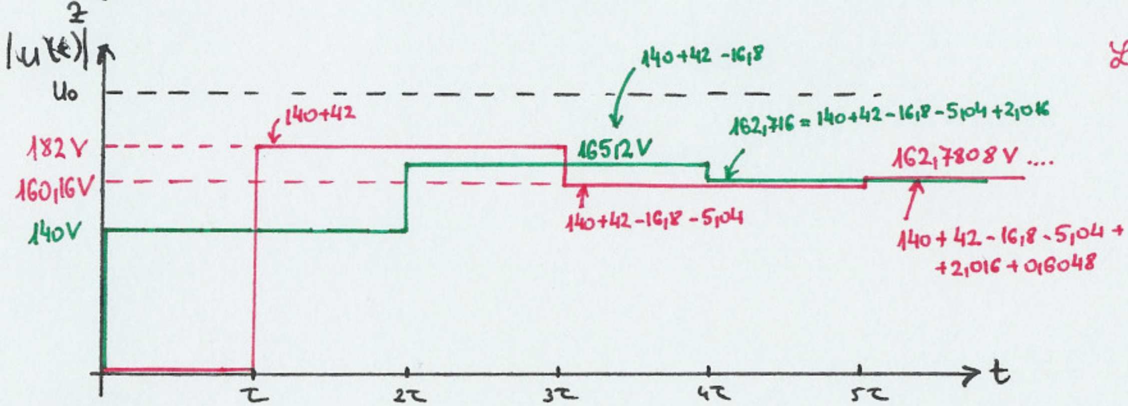


Menetdiagram



$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{1500}{3\cdot 10^8} = 5\,\mu s$$

⇐ a terjedő hullám relatív amplitúdóját adja meg, l. leírás köv. lapon.



Legyen: $Z_0 = 700\,\Omega$

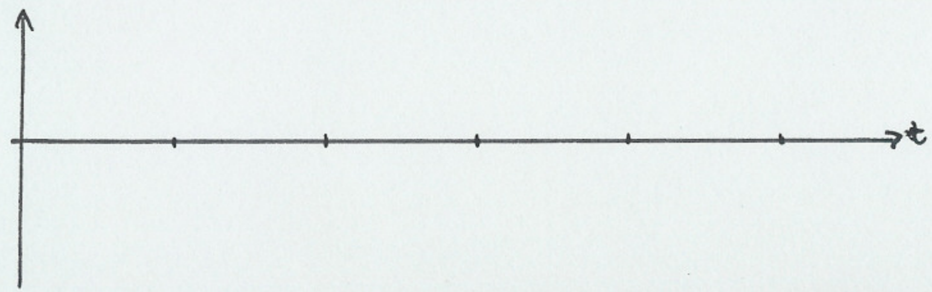
$l = 1500\,m$

$R_2 = 1300\,\Omega$

$v = c = 3\cdot 10^8\,m/s$

$U_0 = 200\,V$

$R_g = 300\,\Omega$ $(R_1 = R_g)$



- a $t=0$ időponttól kezdve a vezetéken U_0 amplitúdójú feszültség hullám halad v sebességgel, a vezeték végén τ ideig $\varnothing$ a feszültség.

- τ idő múlva eléri a végét és reflektálódik, az $r_2 U_0$ hullám halad visszafelé, a generátor felé, azaz az eredő hullám $U_0 + r_2 U_0$, hiszen U_0 már rajta volt, s most arra ül rá az $r_2 U_0$. Ezt a menetet lehet nyomonkövetni a menetdiagramon.

- az $r_2 U_0$ ismételt τ idő után visszaér a generátorhoz, ahol reflektálódik, azaz egy $r_1 r_2 U_0$ hullám indul el a fogyasztó felé, s odaér 3τ idővel a bekapcsolás után. A vezetéken eső szuperponálódó feszültség tehát: $U_0 + r_2 U_0 + r_1 r_2 U_0$, a menetdiagram tehát a reflexiókat jelöli

- Majd ott reflektálódik, azaz: $U_0 + r_2 U_0 + r_1 r_2 U_0 + r_1 r_2^2 U_0$ ....

A primer oldali reflexiós tényező: $r_1 = \dfrac{R_1 - Z_0}{R_1 + Z_0} = \dfrac{300 - 700}{300 + 700} = \underline{\underline{-0{,}4}}$

A szekunder oldali: $r_2 = \dfrac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0} = \dfrac{1300 - 700}{1300 + 700} = \underline{\underline{0{,}3}}$

$|r| < 1 \mapsto$ a visszaverődő hullám amplitúdója fokozatosan csökken, l. menetdiagram.

Vigyázat! A $t=0$ időpillanatban a hullám „nem tudja" mi van a távvezeték végén, csak a Z_0-t „látja", azaz:

$$\boxed{u_1 = u_0 \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + R_g}} = 200 \frac{700}{700 + \cancel{1}300} = \cancel{70V} \quad \underline{\underline{140V}}$$

(ha R_g nincs: $u_1 = 200V$)
(ha I_g adott és $R_g = \emptyset \mapsto u_1 = I_g Z_0$)

Ez a 140V $\tau = 5\,\mu s$ múlva ér a vezeték végére.

A reflexióval előálló feszültség: $r_2 \cdot 140 = 0{,}3 \cdot 140 = \underline{42V}$.

Ez ráül a 140V-ra, így $\underline{182V}$ indul vissza.

A 42V-os hullám reflektálódik a primer oldalon: $r_1 \cdot 42 = -0{,}4 \cdot 42 = \underline{-16{,}8V}$

Ez ráül a kialakult 182V-ra, azaz $182 - 16{,}8 = \underline{165{,}2}$ alakul ki.

A $\underline{-16{,}8V}$ a végen reflektálódik, így: $165{,}2 - 0{,}3 \cdot 16{,}8 = \underline{160{,}16V}$

A $-0{,}3 \cdot 16{,}8 = \underline{-5{,}04V}$ indul vissza, majd az elején reflektálódik: $-0{,}4 \cdot (-5{,}04) = 2{,}016V$, azaz $160{,}16 + 2{,}016 = \underline{162{,}176V}$ lesz a végeredmény, amikor a hullám visszafordul a generátortól. Végül: $0{,}3 \cdot 2{,}016 = \underline{0{,}6048V}$, ami még kifér az ábrára, azaz: $162{,}176 + 0{,}6048 = \underline{162{,}7808V}$

A végeredmény láthatóan konvergál, hiszen $|r_1| < 1$ és $|r_2| < 1$, s így a reflektálódó hullám egyre kisebb lesz.

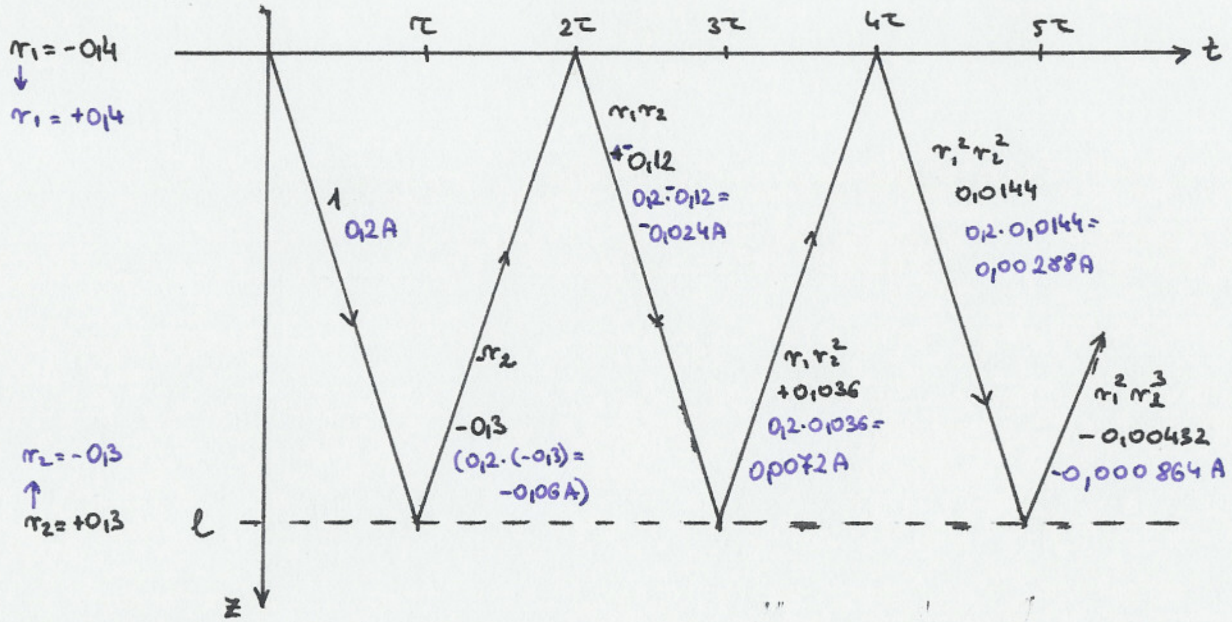
Végeredmény: $\boxed{u_2 = u_0 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_g}} = 200 \frac{1300}{1300 + 300} = \underline{\underline{162{,}5V}}$

Azaz a tranziens lezajlása után a generátor közvetlenül a fogyasztót „látja", mivel a távvezeték ideális.

Most érdemes áttanulmányozni a grafikonra írt értékeket, hogy mikor hogy kell összeadni a részeredményeket!

Csinálja végig a feladatot, ha $R_g = \emptyset$! (Ilyenkor: $u_1 = 200V$, $r_1 = -1$).

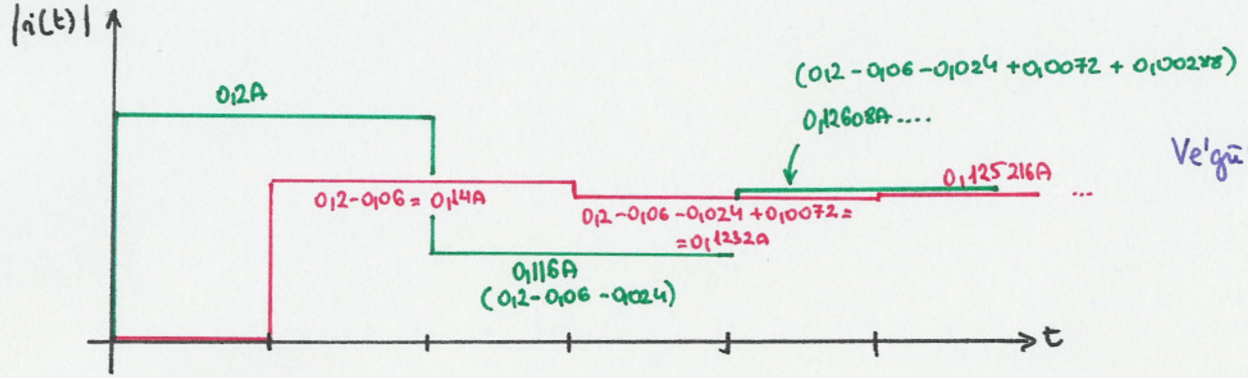
Az áram alakulása hasonló módon számítható :



$$U_1 = U_0 \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + R_g} = 140V$$

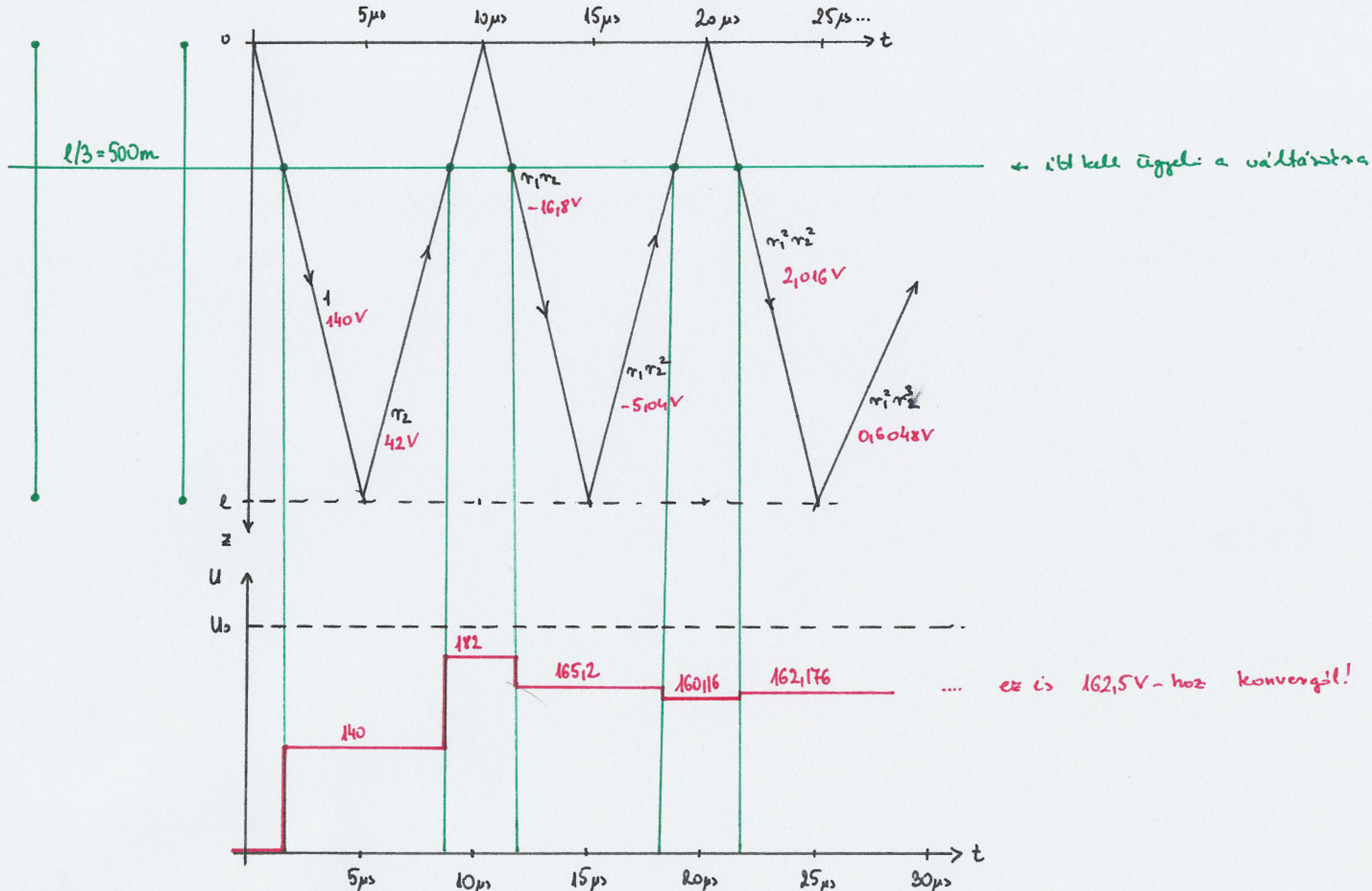
$$I_1 = \frac{U_1}{Z_0} = 0,2A$$ ami elindul a $t=0$ időpillanatban.

A különbség annyi, hogy mindkét r előjelet vált !



Végül: $I_2 = \frac{162,5}{1300} = 0,125A$ kell legyen.

Rajzoljuk fel az időfüggvényt a távvezeték $z = l/3 = 500\ m$ helyén is!



.... ez is 162,5V-hoz konvergál!

Készítse el az ábrát a $z = l/2$ helyről, valamint a $z = \frac{3}{4} l$-ről is!

Számítsa ki az áramot is!