

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
VILLAMOSMÉRNÖKI KAR

Dr. Fodor György – Dr. Vágó István

VILLAMOSSÁGTAN

10. füzet

TÁVVEZETÉKEK

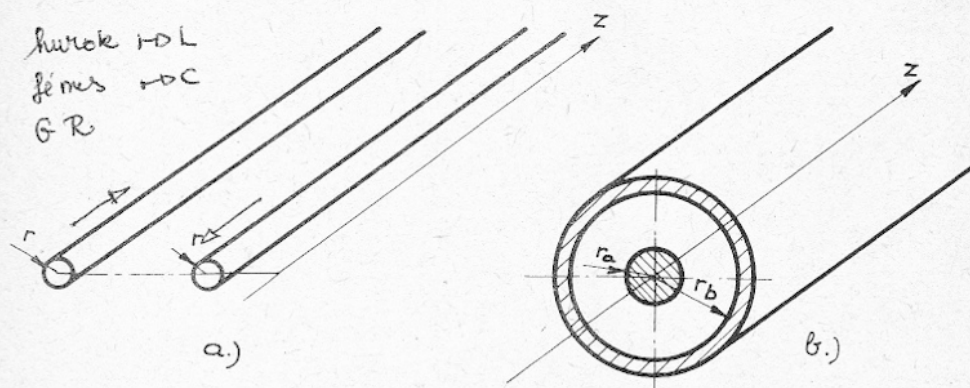


KÉZIRAT

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1974

1. A TÁVVEZETÉK ÉS AZ ELOSZTOTT PARAMÉTERŰ HÁLÓZAT FOGALMA

A távvezeték (tápvonal) két egymással párhuzamos vezetőből áll. Így pl. távvezeték lehet két azonos sugaru hengeres vezetőből álló Lecher vezetőkör (1.1 a ábra), koaxiális kábel (1.1 b ábra). A vezetőknek véges ellenállása van. A két vezető hurkot alkot, amelynek induktivitása van. A két vezető között kapacitás és - a vezetők közötti dielektrikum véges vezetőképessége miatt - átvezetés is fellép.



1.1 ábra

A vezetők árama, a vezetők közötti feszültség a z helykoordináta és a t idő függvénye. Az egyik vezető árama a z helyen $i(z, t)$, a másiké $-i(z, t)$. A két vezető közötti feszültség $u(z, t)$. Az áram és feszültség időtől való függését a távvezetékre kapcsolt gerjesztő jel időbeli változása adja meg.

A vezetők árama azért függ a helytől, mert a vezetők közötti kapacitáson és átvezetésen is folyik áram és ez a helytől és időtől függő feszültség függvénye. A feszültség viszont a vezetők ellenállásán és induktivitásán fellépő feszültségesés miatt függ a helytől. A vezetőkön fellépő feszültségesés az áram függvénye. Minthogy az áram és a feszültség a távvezeték mentén a helytől függ, a vezetők ellenállása, induktivitása, kapacitása, átvezetése elosztva és együttesen fejezi ki hatását, az egyenletek felírásánál ezeket együttesen kell figyelembe venni. Az ilyen hálózatot elosztott para-

méterü hálózatnak hívjuk az eddigiekben tárgyalt koncentrált paraméterü hálózatokkal szemben. Az elosztott paraméterü hálózatok közül a gyakorlatban legfontosabb a távvezeték. Ténylegesen valamennyi hálózat – felépítése következtében – elosztott paraméterü, azonban sok esetben koncentrált paraméterü hálózattal jól közelíthető. Ennek feltételét a későbbiekben megvizsgáljuk.

Egy veszteséges tekercsben az ellenállás és az induktivitás együttesen jelentkezik. Ha egyéb hatásoktól eltekintünk, akkor a tekercset – árama és feszültsége közötti kapcsolat szempontjából – egy veszteségmentes induktivitás és egy ellenállás soros kapcsolásával modellezhetjük. Ha azonban a veszteséges tekercsnél a menetek közötti kapacitást is figyelembe kell vennünk, akkor részletesebb vizsgálat alapján dönthető el, hogy a kérdéses esetben a tekercset elosztott paraméterü hálózatként kell-e számításba venni, vagy található-e olyan koncentrált paraméterekkel jellemezhető számítási modell, amelynek alapján jó közelítéssel adódik a tekercs árama és feszültsége közötti kapcsolat.

Egyes esetekben a távvezeték is jól modellezhető koncentrált paraméterü hálózattal. A következőkben a távvezeték elosztott paraméterü hálózatként kezeljük. A távvezetékot ahosszegységrevonatkoztatott R ellenállásával, L induktivitásával, C kapacitásával és G átvezetésével – az ugynevezett vezetékparaméterekkel – szokás jellemezni. Ezek egysége sorra Ω/m , H/m , F/m , S/m .

2. A TÁVÍRÓ EGYENLETEK

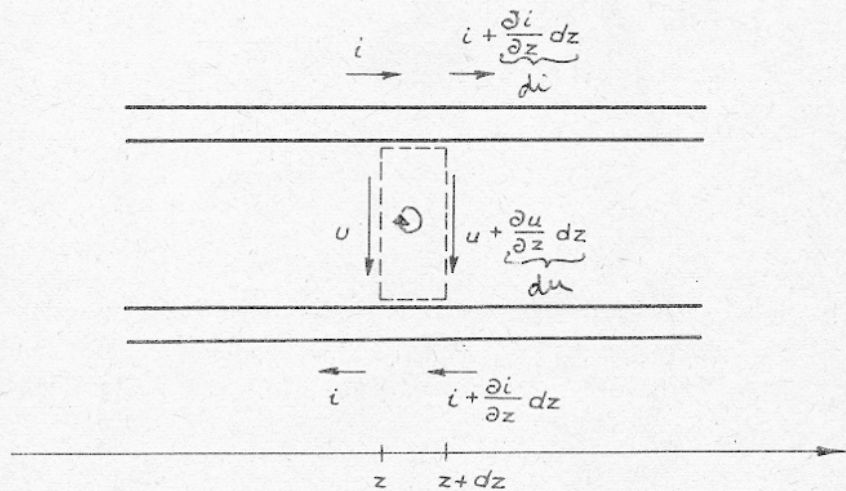
2.1 AZ ÁRAMKÖRI EGYENLETEK FELÍRÁSA

A távvezeték feszültségére és áramára vonatkozó egyenletek felírásához válasszunk a vezetők tengelyével párhuzamos koordináta tengelyt. Jelöljük ezt a koordinátát z -vel (2.1 ábra). Minthogy a távvezeték elosztott paraméterű hálózat, a differenciális dz hosszúságú darabjára írhatók fel a Kirchhoff-egyenletek. A z koordinátaéhoz tartozó helyen (2.1 ábra) a feszültség $u(z, t)$, az áram $i(z, t)$, a $z + dz$ helyen $u + du = u + \frac{\partial u}{\partial z} dz$, ill. $i + di = i + \frac{\partial i}{\partial z} dz$. A dz hosszúságú szakaszra jutó ellenállás $R dz$, az induktivitás $L dz$. Írjuk fel a 2.1 ábrán szaggatott vonallal jelölt dz szélességű téglalap alakú hurokra a Kirchhoff-egyenletet:

$$-u + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz + R dz i + L dz \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

amiből

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.2)$$



2.1 ábra

A dz hosszúságu vezetőre jutó kapacitás $C dz$ és az átvezetés $G dz$. A csomóponti törvény tehát a következőképpen írható fel:

$$-i + i + \frac{\partial i}{\partial z} dz + G dz u + C dz \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

Ebből

$$- \frac{\partial i}{\partial z} = G u + C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.4)$$

Tehát a távvezeték u feszültségére és i áramára a következő két differenciálegyenletet kaptuk:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial u}{\partial z} &= R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ - \frac{\partial i}{\partial z} &= G u + C \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ezek a távíró egyenletek.

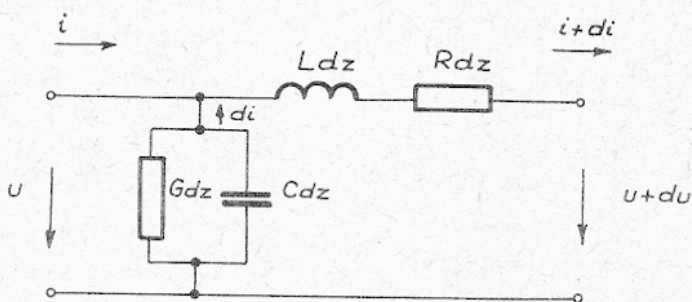
A távíró egyenletek alakja ω körfrekvenciájú időben szinuszos változás esetén a komplex írásmód felhasználásával:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial u}{\partial z} &= (R + j \omega L) i = Z_s i \\ - \frac{\partial i}{\partial z} &= (G + j \omega C) u = Y_p u \end{aligned} \quad (2.6)$$

ahol $Z_s = R + j \omega L$ a hosszegységre jutó soros impedancia, $Y_p = G + j \omega C$ pedig a hosszegységre vonatkozó parallel admittancia. (Megjegyezzük, hogy a következőkben a komplex mennyiségeket jelöléssel nem különböztetjük meg a valóstól.)

A kapott egyenletek alapján a dz hosszúságú távvezetékdarab helyettesítő kapcsolását a 2.2 ábrán tüntettük fel. Az erre felírható egyenletek az előbbieket adják, ha a másodrendűen kicsi tagokat elhanyagoljuk.

A távvezetékktől eltérő típusú lineáris elosztott paraméterű hálózatra is felírhatók a (2.6)-hoz hasonló egyenletek. Vagyis szinuszosan változó feszültség és áram esetén a feszültség helykoordináta szerinti változása az árammal, továbbá az áram helykoordináta szerinti változása a feszültséggel kifejezhető. Az ilyen összefüggésekben szereplő soros impedancia és parallel admittancia természetesen eltér a távvezetékre felírható Z_s és Y_p kifejezésétől. A differenciálegyenletek megoldása a táviró egyenletek megoldásához hasonló, azonban ezekben Z_s és Y_p helyére a megfelelő soros impedancia és parallel admittancia kifejezése kerül.



2.2 ábra

2.2 A TÁVIRÓ EGYENLETEK MEGOLDÁSA

A további számításokat időben szinuszos változás esetére végezzük el. Ekkor a táviró egyenletek:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} = (R + j \omega L) i \quad (2.7)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G u + C \frac{\partial u}{\partial t} = (G + j \omega C) u \quad (2.8)$$

Differenciáljuk a két egyenletet z szerint és küszöböljük ki az egyikből i -t, a másikkól u -t. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (R C + G L) \frac{\partial u}{\partial t} - R G u = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (R + j \omega L) (G + j \omega C) u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Z_s Y_p u = 0 \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - L C \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (R C + G L) \frac{\partial i}{\partial t} - R G i = \\ = \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - (R + j \omega L) (G + j \omega C) i = \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - Z_s Y_p i = 0 \quad (2.10) \end{aligned}$$

Két, egydimenziós, azaz egyetlen térbeli koordinátától függő hullámegyenletet kaptunk. Vezessük be a

$$\gamma^2 = (R + j \omega L) (G + j \omega C) = Z_s Y_p \quad (2.11)$$

jelölést, ebből

$$\boxed{\gamma = \sqrt{Z_s Y_p} = \alpha + j \beta} \quad (2.12)$$

a terjedési együttható. γ komplex mennyiség. Valós részét α -val jelöljük és neve csillapítási tényező, képzetes része β , a fázistényező. Az elnevezéseket a későbbiek során indokoljuk.

A feszültségre vonatkozó differenciálegyenlet tehát:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \gamma^2 u = 0 \quad (2.13)$$

Ennek megoldásával megkapjuk a feszültség komplex csúcserőértékét, amely a z koordináta függvénye:

$$u(z) = U^{(+)} e^{-\gamma z} + U^{(-)} e^{\gamma z} \quad (2.14)$$

ahol $U^{(+)}$ és $U^{(-)}$ állandó. Ezeket a későbbiek során határozzuk meg. Vegyük figyelembe (2.12)-t és a feszültség időbeli változását is. Így kapjuk, hogy

$$u(z, t) = U^{(+)} e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} + U^{(-)} e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} \quad (2.15)$$

Az áram komplex csúcsertékére vonatkozó megoldáshoz helyettesítjük (2.14)-et (2.7)-be. Ebből

$$i(z) = \frac{\gamma}{Z_s} U^{(+)} e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{Z_s} U^{(-)} e^{\gamma z} \quad (2.16)$$

Vezessük be a

$$Z_o = \frac{Z_s}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (2.17)$$

jelölést. Z_o neve hullámimpedancia. Fizikai jelentését a későbbiekben tárgyaljuk. Z_o és γl az l hosszúságu távvezeték hullámparaméterei.

A továbbiakban a távvezeték jellemzésére az R , L , G , C paraméterek helyett az ezekből kiszámítható hullámparamétereket használjuk. Z_o helyett sok esetben az

$$Y_o = \frac{1}{Z_o} = \sqrt{\frac{Y_p}{Z_s}} \quad (2.18)$$

hullámadmittanciát célszerű alkalmazni.

Z_o bevezetésével (2.16) így írható:

$$i(z) = \frac{U^{(+)}}{Z_o} e^{-\gamma z} - \frac{U^{(-)}}{Z_o} e^{\gamma z} \quad (2.19)$$

Figyelembe véve (2.12)-t és az időtől való függést, kapjuk, hogy

$$i(z, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_o} e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} - \frac{U^{(-)}}{Z_o} e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} \quad (2.20)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a feszültségre és az áramra kapott megoldás milyen fizikai folyamatot ír le. Ehhez tételezzük fel először, hogy

$$U^{(-)} = 0 \quad \text{és} \quad \alpha = 0 \quad (2.21)$$

(A későbbi tárgyalás során látni fogjuk, hogy ezek a feltételek milyen esetben teljesülnek.) Ekkor

$$u(z, t) = U^{(+)} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (2.22)$$

Adott z és t érték mellett u értékét ennek valós része adja. Válasszuk a $t = 0$ időpontot úgy, hogy $U^{(+)}$ valós érték legyen. Ekkor

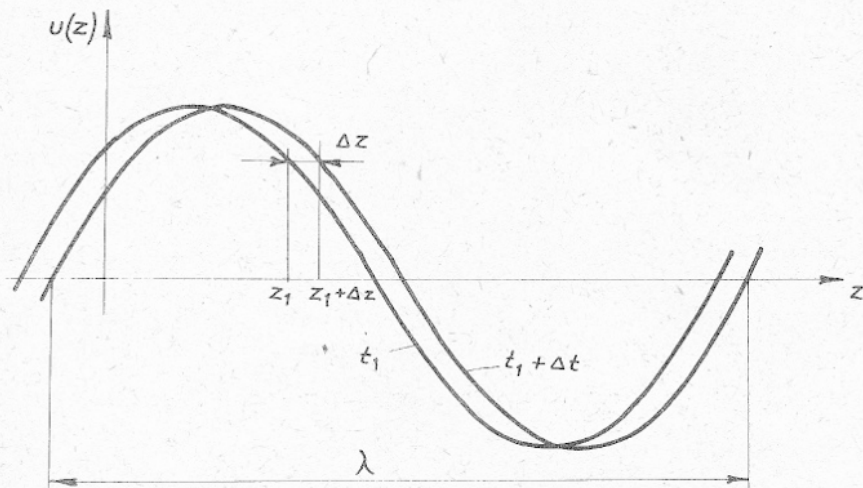
$$\operatorname{Re} u(z, t) = U^{(+)} \cos(\omega t - \beta z) \quad (2.23)$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a feszültség mind a t idő, mint a z hely függvényében periódikusan változik. Ábrázoljuk a feszültség z -től való függését a $t = t_1$ időpontban (2.3 ábra)! Vizsgáljuk ezután a feszültség z -től való függését a $t_2 = t_1 + \Delta t$ pillanatban. Ekkor az előbbihez képest

Δz -vel eltoltt görbét kapunk (2.3 ábra). A jelenség úgy írható le, hogy a feszültséget a z függvényében ábrázoló görbe Δt idő alatt $+z$ irányban Δz -vel eltolódott, vagyis

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (2.24)$$

fázissebességgel halad a $+z$ irányban.



2.3 ábra

Határozzuk meg ezt a v sebességet! A t_1 időpontban a z_1 helyen a feszültség értéke egyezzen meg a $t_1 + \Delta t$ pillanatban a $z_1 + \Delta z$ helyen felvett értékével, vagyis

$$U^{(+)} e^{j(\omega t_1 - \beta z_1)} = U^{(+)} e^{j[\omega(t_1 + \Delta t) - \beta(z_1 + \Delta z)]} \quad (2.25)$$

Ebből

$$\omega t_1 - \beta z_1 + 2k\pi = \omega t_1 + \omega \Delta t - \beta z_1 - \beta \Delta z \quad (2.26)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Igy a $k = 0$ esetet véve (ugyanis ekkor vizsgálunk összetartozó értékeket):

$$\omega \Delta t = \beta \Delta z \quad (2.27)$$

és

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.28)$$

v -re pozitív értéket kaptunk. Ez azt jelenti, hogy a hullám valóban $+z$ irányban halad.

Az olyan jelenséget, amelyet jellemző fizikai mennyiségek helytől és időtől való függését a (2.22)-höz hasonló egyenlet írja le, csillapítatlan haladó hullámnak nevezzük.

A (2.21) alatti feltételeink mellett az áramhullám is hasonló egyenlettel írható le.

$$i(z, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (2.29)$$

Ez is csillapítatlan haladó hullám egyenlete.

Látható, hogy a (2.22)-ből és (2.29)-ből felírható feszültség és áram komplex csúcserőértékének hányadosa bármilyen rögzített z mellett éppen a Z_0 hullámimpedancia.

Meghatározható a terjedő jel λ hullámhossza is (2.3. ábra). Ha ugyanis z értéke λ -val változik, akkor (2.22)-ben, ill. (2.29)-ben a ki-tető változása $-j 2\pi$. Vagyis

$$\omega t - \beta(z + \lambda) = \omega t - \beta z - 2\pi \quad (2.30)$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.31)$$

Látható, hogy a β fázistényező mind a v fázissebesség, mind a λ hullámhossz kifejezésében szerepel.

Vizsgáljuk meg, milyen változást jelent az eddig tárgyalt esethez képest, ha $\alpha \neq 0$. Így a feszültség- és az áramhullám egyenlete:

$$u(z, t) = U^{(+)} e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} \quad (2.32)$$

$$i(z, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} \quad (2.33)$$

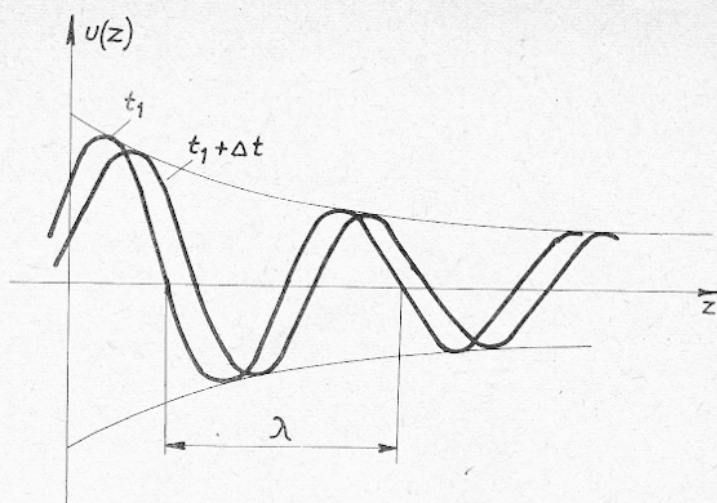
Ezek az egyenletek az $e^{-\alpha z}$ tényezőben térnek el a (2.22)-től és a (2.29)-től. Az előbbieken vizsgált feszültség- és áramértékekhez képest tehát z növekedésével abszolút értékük csökken. Ez azt jelenti, hogy miközben a hullám $+z$ irányban halad, csillapodik (2.4. ábra). Ezért csillapított haladó hullámnak nevezzük. A feszültség és az áram komplex csúcserőértékének hányadosa:

$$\frac{u(z)}{i(z)} = \frac{U^{(+)} e^{-(\alpha + j\beta)z}}{\frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{-(\alpha + j\beta)z}} = Z_0 \quad (2.34)$$

a hullámimpedanciával egyenlő. A hullámimpedancia tehát a pozitív irányban haladó feszültség- és áramhullám komplex csúcserőértékének hányadosa.

Az eddigiekből látható, hogy a haladó hullám csillapítását αz határozza meg. Ezért hívják az α tényezőt csillapítási tényezőnek. A hullám fázisa a $t = 0$ pillanatban βz . Ez magyarázza β elnevezését.

A $\gamma = \alpha + j\beta$ pedig a hullám terjedését jellemzi.



2.4 ábra

Vizsgáljuk ezután azt az esetet, amikor

$$U^{(+)} = 0 \quad \text{és} \quad U^{(-)} \neq 0 \quad (2.35)$$

Ekkor

$$u(z, t) = U^{(-)} e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} \quad (2.36)$$

$$i(z, t) = -\frac{U^{(-)}}{Z_0} e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} \quad (2.37)$$

Ez abban tér el (2.32)-től és (2.33)-tól, hogy $U^{(+)}$ helyébe $U^{(-)}$, $+z$ helyébe $-z$, Z_0 helyébe $-Z_0$ került. Ebből következik, hogy (2.36) és (2.37) a $-z$ irányban haladó, csillapodó hullámok egyenlete. A $-z$ irányban haladó feszültség és áram komplex csúcértékének hányadosa: $-Z_0$.

A feszültség-hullámokra vonatkozó (2.32) és (2.36) egyenletből látható, hogy $U^{(+)}$ a $+z$ irányban haladó hullám amplitúdója a $z = 0$ helyen, $U^{(-)}$ pedig a $-z$ irányban haladó hullám amplitúdója a $z = 0$ helyen.

Összegezve megállapítható, hogy a (2.6) alatti differenciálegyenleteknek mind a feszültségre, mind az áramra vonatkozó megoldása általános esetben két tagból áll: az egyik a +z irányban, a másik a -z irányban haladó csillapodó hullámot ír le.

2.3 A TÁVVEZETÉK PARAMÉTEREK SZÁMITÁSÁRÓL

Az előbbieken kifejeztük a távvezeték Z_0 , γl hullámparamétereit az R, L, G, C vezetékparaméterekkel [(2.11), (2.17)]. Az α csillapítási tényező és a β fázistényező is kifejezhető ezekkel. (2.12) felhasználásával:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta = \\ &= (R + j\omega L)(G + j\omega C)\end{aligned}\quad (2.38)$$

A valós részek egyenlők az egyenlet két oldalán, vagyis

$$RG - \omega^2 LC = \alpha^2 - \beta^2 \quad (2.39)$$

A két oldal abszolút értéke is egyenlő:

$$\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} = \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.40)$$

A (2.39) és a (2.40) egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [RG - \omega^2 LC + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}]} \quad (2.41)$$

A két egyenlet különbségéből pedig:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 LC - RG + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}]} \quad (2.42)$$

Ideálisnak nevezzük a távvezetékét, ha paraméterei közül $R = 0$ és $G = 0$. Ekkor

$$Z_s = j\omega L \quad \text{és} \quad Y_p = j\omega C \quad (2.43)$$

A terjedési együttható ezekből (2.11) alapján:

$$\gamma = \sqrt{Z_s Y_p} = j\omega \sqrt{L C} \quad (2.44)$$

vagyis

$$\alpha = 0 \quad \text{és} \quad \beta = \omega \sqrt{L C} \quad (2.45)$$

továbbá

$$\gamma l = j\omega l \sqrt{L C} \quad (2.46)$$

Ideális távvezetéken tehát a hullám csillapítás nélkül terjed.

Ideális távvezeték hullámimpedanciája valós. Ugyanis (2.17), valamint (2.43) szerint:

$$Z_o = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.47)$$

Ebben az esetben a hullámellenállás elnevezést is szokás használni. A fázissebesség (2.28) alapján:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L C}} \quad (2.48)$$

és a hullámhossz (2.31)-ből:

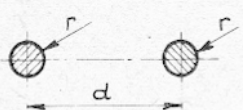
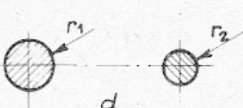
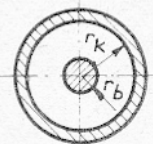
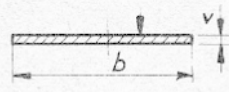
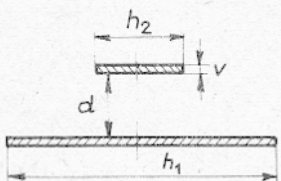
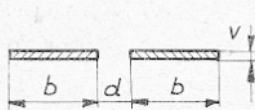
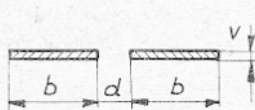
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi f \sqrt{L C}} = \frac{v}{f} \quad (2.49)$$

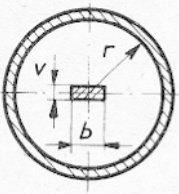
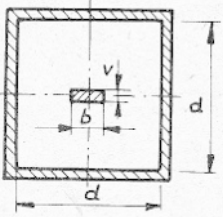
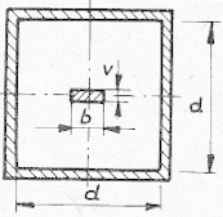
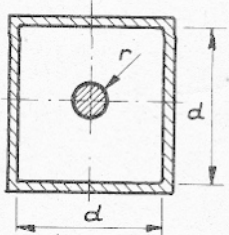
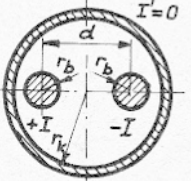
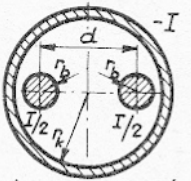
ahol f a távvezeték gerjesztő jelének frekvenciája.

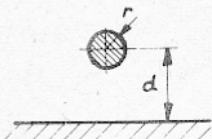
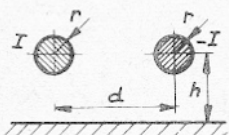
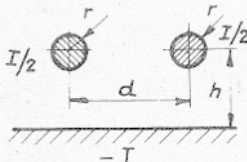
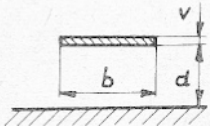
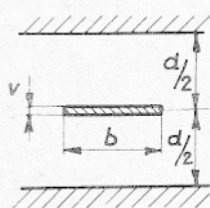
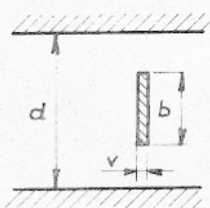
Látni fogjuk (3.4 a) példa), hogy $L C = \mu \epsilon$ (μ a közeg permeabilitása, ϵ a permittivitása) és így (2.48) értelmében ideális távvezetéken a fázissebesség a fény terjedési sebességével egyenlő.

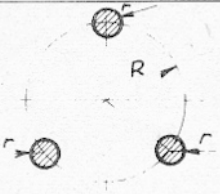
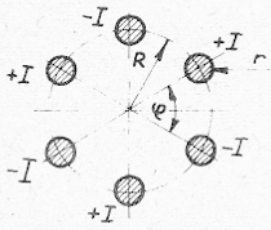
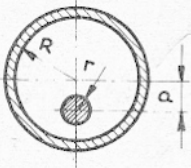
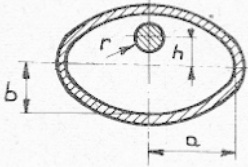
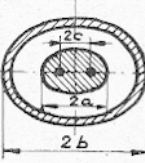
A 2.1 táblázatban feltüntettünk néhány távvezeték elrendezés keresztmetszetét és ideális esetre a hullámimpedanciát. A hullámimpedancia kifejezésében szereplő μ_r a vezetőket körülvevő közeg relatív permeabilitása és ϵ_r a relatív permittivitása. A gyakorlatban itt $\mu_r = 1$ -nek vehető.

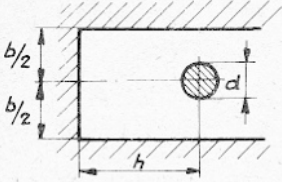
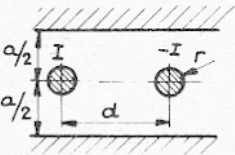
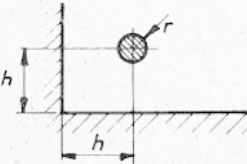
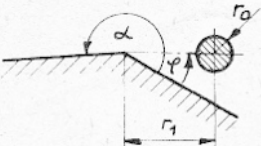
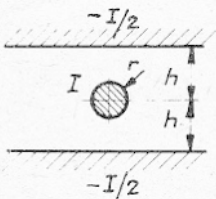
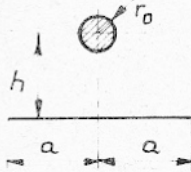
KÜLÖNBÖZŐ ELRENDEZÉSŰ IDEÁLIS TÁPVONALAK HULLÁMELLENÁLLÁSA

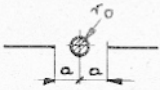
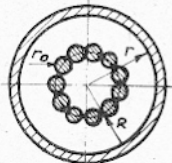
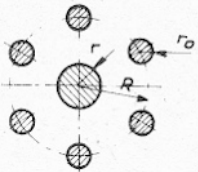
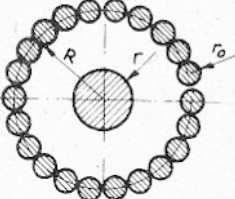
Elrendezés	HullámelLENÁLLÁS
<i>Lechner</i>  $d \gg r$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{d}{r}$
 $d \gg r_1$ $d \gg r_2$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{d}{\sqrt{r_1 r_2}}$
<i>Loas</i> 	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{r_k}{r_b}$
 $d \ll b$ $v \ll d$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \pi \frac{d}{b}$
 $d \gg b$ $v \ll d$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{4d}{b}$
 $d \gg h_1 \gg v$ $d \gg h_2 \gg v$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \left[\ln \frac{16d^2}{h_1 h_2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (h_1/d)^2}}{2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (h_2/d)^2}}{2} \right]$
 $d \ll b$ $v \ll d$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{60 \pi^2}{\ln \left[4 \left(1 + 2 \frac{b}{d} \right) \right]}$
 $d \gg b$ $v \ll b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \left[4 \left(2 + \frac{d}{b} \right) \right]$

Elrendezés	Hullámmellenállás
 $2b \approx r$ $v \ll r$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{15 \pi^2}{\ln \frac{4}{1 - \frac{b}{2r}}}$
 $d \approx b$ $v \ll b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{15 \pi^2}{\ln \frac{3,06}{1 - \frac{b}{d}}}$
 $d \gg b$ $v \ll b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \left(2,16 \frac{d}{b} \right)$
 $d \gg 2r$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \left(0,54 \frac{d}{r} \right)$
 Szimmetrikus táplálás $r_k \gg r_b$ $d \gg r_b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{d}{r_b} \frac{r_k^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}{r_k^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$
 Aszimmetrikus táplálás $r_k \gg r_b$ $d \gg r_b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 30 \ln \frac{r_k^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4}{r_b^2 r_k^2 d}$

Elrendezés		Hullámmellenállás
	$d \gg r$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{2d}{r}$
	$d \gg r$ $h \gg r$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{d}{r \sqrt{1 + (\frac{d}{2h})^2}}$
	$d \gg r$ $h \gg r$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{4h^2 \sqrt{1 + (\frac{d}{2h})^2}}{rd}$
	$d \gg b$ $v \ll b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln (1,75 \frac{d}{b})$
	$d \ll b$ $v \ll d$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{15\pi^2}{\ln(2 + \frac{\pi}{2} \frac{b}{d})}$
	$d \gg b$ $v \ll b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln (\frac{8}{\pi} \frac{d}{b})$
	$d \approx b$ $v \ll b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{15\pi^2}{\ln \frac{8}{\pi(1 - \frac{b}{d})}}$
	$d \gg b$ $v \ll b$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln (\frac{8}{\pi} \frac{d}{b})$

Elrendezés	Hullámellenállás
	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 90 \ln \frac{2,014 R}{r}$
	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \left[\frac{2R}{r} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1) \frac{\varphi}{2}}{\sin k \varphi} \right)^2 \right]$ $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ (n a vezetópárok száma)
 $a < 0,6 R$ $\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \left[60 \ln \frac{R}{r} - 240 \left(\frac{a}{2R} \right)^2 \right]$ $a > 0,6 R$ $\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR}$	
 $h \gg r$ $a \gg r$ $\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{R^2 - H^2}{R_0 R}$ ahol $R = \frac{a+b}{2}$ $R_0 = \frac{r}{1 + \frac{a^2 - b^2}{4H^2}}$ $H = \frac{1}{2} (h + \sqrt{a^2 - b^2 + h^2})$	
	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{a + \sqrt{a^2 - c^2}}$

Elrendezés	Hullámmellenállás
 $h \gg d$ $b \gg d$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \left(\frac{4b}{\pi d} \tanh \frac{\pi h}{b} \right)$
 $a/2 > r$ $a/2 > d$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{\tanh 2\pi \frac{\sqrt{a^2 - 4r^2}}{4a}}{\frac{\pi r}{2c}}$
 $h \gg r$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{1,4h}{r}$
 $r_1 \gg r_0$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \left(\frac{2a}{\pi} \frac{r_1}{r_0} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \right)$
 $h > 2r$ $h > d$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln 1,27 \frac{h}{r}$
 $h \gg r_0$ $a \gg r_0$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \left(\frac{2h}{r_0} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \right)$

Elrendezés	Hullámmellenállás
 $a > r_0$	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{2a}{r_0}$
	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{2r}{2R+r_0}$
	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \left\{ \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{m} \ln \frac{R}{mr_0} \right\}$ m a külső vezetékek száma
	$\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{2R-r_0}{2r}$

Ha ω elég nagy, akkor $\omega L \gg R$ és $\omega C \gg G$ és így a távvezeték sok szempontból megközelítően ideálisnak tekinthető és az ideális távvezeték paramétereire vonatkozó előbbi összefüggések jó közelítéssel alkalmazhatók.

Ha $\omega L \gg R$ és $\omega C \gg G$ esetén pontosabban akarunk számolni, akkor a távvezeték kiscillapításának tekintjük. Ekkor a terjedési együtthatóra a következő közelítő kifejezést írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \\ &= \sqrt{j\omega L \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)} \sqrt{j\omega C \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)} \approx \\ &\approx j\omega \sqrt{LC} \left[\left(1 - \frac{1}{2} j \frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - \frac{1}{2} j \frac{G}{\omega C}\right)\right] \approx \\ &\approx j\omega \sqrt{LC} \left[1 - \frac{1}{2} j \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right)\right] \quad (2.50)\end{aligned}$$

vagyis

$$\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{és} \quad \beta \approx \omega \sqrt{LC} \quad (2.51)$$

A fázissebesség:

$$v = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.52)$$

és a hullámhossz:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{1}{f \sqrt{LC}} \approx \frac{v}{f} \quad (2.53)$$

A fázistényező, a fázissebesség és a hullámhossz közelítő kifejezése egyezik az ideális távvezetékével.

A hullámimpedancia kifejezése:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} \frac{\sqrt{1 + \frac{R}{j\omega L}}}{\sqrt{1 + \frac{G}{j\omega C}}} \quad (2.54)$$

vagyis

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{R}{j\omega L}}{1 + \frac{1}{2} \frac{G}{j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{G}{j\omega C}\right) \quad (2.55)$$

A második és a harmadik tényező második tagjainak szorzatát elhanyagolva:

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - j \frac{1}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)\right] \quad (2.56)$$

A távvezetékek gyakorlatban előforduló vezetékparaméter értékei mellett a távvezetékek a hangfrekvenciás tartományban kiscsillapításúnak vehetők és a fenti közelítések alkalmazhatók. Az α csillapítási tényező (2.51)-ben szereplő közelítő kifejezésének vizsgálatából látható, hogy α -nak L függvényében minimuma van (lásd 2.4 f) példa). Ez a minimum a ténylegesen előforduló L értékeknél nagyobb induktivitásnál van. A csillapítási tényezőt ezért a vezeték induktivitásának mesterséges növelésével szokták csökkenteni.

Míthogy a gyakorlatban előforduló paraméterek mellett $\frac{R}{L} > \frac{G}{C}$, a kiscsillapítású távvezeték hullámimpedanciája – (2.56) alapján – kapacitív jellegű, vagyis a hullámimpedancia képzetes része negatív.

Sok esetben $\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ jó közelítést jelent, mert a $\frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ értéke e mellett elhanyagolható.

2.4 PÉLDÁK ÉS FELADATOK

a) Egy nagyfrekvenciás légszigetelésű vörösréz koaxiális kábel külső vezetőjének belső sugara: $r_2 = 10$ mm (2.5 ábra). Határozzuk meg a belső vezető r_1 sugarát úgy, hogy az ideálisnak tekinthető távvezeték hullámellenállása 60Ω legyen!

A 2.1 táblázat alapján

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 60 \ln \frac{r_2}{r_1} = 60 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

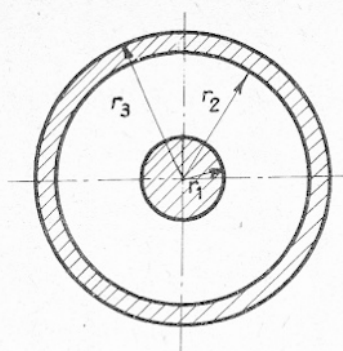
(levegőre u.i. $\mu_r = 1$ és $\epsilon_r = 1$). Vagyis

$$60 \ln \frac{r_2}{r_1} = 60; \quad \ln \frac{r_2}{r_1} = 1;$$

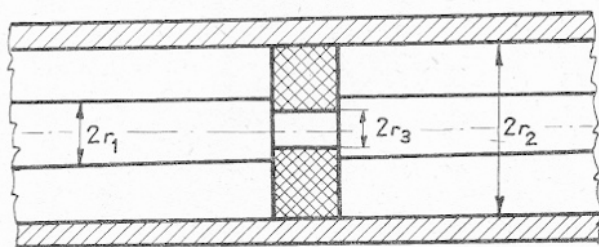
$$\frac{r_2}{r_1} = 2,72 \dots$$

azaz

$$r_1 = \frac{r_2}{2,72} = 3,68 \text{ mm}$$



2.5 ábra



2.6 ábra

b) Az előbbi példában szereplő kábelben a belső vezető kitámasztására helyenként trolitul tárcsákat helyezünk el (2.6 ábra). Számítsuk ki a belső vezető r_3 sugarát úgy, hogy a tárcsáknál 60Ω legyen a hullámellenállás!

A távvezeték ekkor is ideálisnak tekintve és figyelembe véve, hogy a trolitul relatív permittivitása $\epsilon_r = 2,3$, kapjuk, hogy a megtámasztási helyeken:

$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_3} = 60 \Omega$$

vagyis

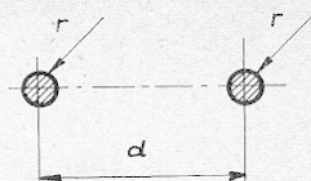
$$\ln \frac{r_2}{r_3} = \sqrt{2,3} = 1,52; \quad \frac{r_2}{r_3} = 4,56$$

$$r_3 = \frac{r_2}{4,56} = \frac{10}{4,56} = 2,19 \text{ mm}$$

c) Határozzuk meg az ideálisnak tekint-
hető szabadvezeték (2.7 ábra) hullámimpedan-
ciáját és terjedési együtthatóját $f = 10$ MHz
frekvenciára, ha $r = 2,5$ mm és $d = 30$ mm.

A 2.1 táblázat alapján:

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} 120 \ln \frac{d}{r} = 120 \ln \frac{30}{2,5} = 300 \Omega$$



2.7 ábra

Mint hogy a távvezeték ideális, a terjedési együttható $\gamma = j\beta$ és a fázis-
sebesség $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Így (2.48) alapján:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{62,8 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 0,209 \text{ m}^{-1}$$

d) Egy távvezeték paraméterei 50 Hz frekvencián:

$$R = 0,2155 \Omega / \text{km} ;$$

$$L = 0,398 \text{ mH/km} ;$$

$$G = 0,28 \mu \text{ S/km} ;$$

$$C = 111,8 \text{ nF/km}.$$

Határozza meg a hullámimpedanciát, a terjedési együtthatót, a csillapítási
és a fázistényezőt!

Megoldás:

$$Z_o = (73,0 - j 42,1) \Omega$$

$$\gamma = (1,47 + j 2,56) 10^{-3} / \text{km}.$$

e) Határozza meg egy légvezeték hullámimpedanciáját és terjedési
együtthatóját 50 Hz, 1 kHz, 10 kHz és 1 MHz frekvenciára, ha kapacitása
 $C = 11,18$ pF/m, az átvezetése elhanyagolható ($G \approx 0$) és ellenállását és
induktivitását a különböző frekvenciákra az alábbi táblázat tartalmazza:

f/kHz	0,05	1	10	1000
$R/\text{m } \Omega \text{ m}^{-1}$	2,79	2,83	5,02	42,1
$\omega L/\text{m } \Omega \text{ m}^{-1}$	0,344	6,87	66,6	6290

(A szkinhatás következtében ugyanis a frekvencia növekedésével a vezeték ellenállása nő, induktivitása pedig csökken. Ezt a 12. füzetben tárgyaljuk.)

Megoldás:

f/kHz	0,05	1	10	1000
Z_o / Ω	671 - j 592	313 - j 64,8	308 - j 11,6	300
$\gamma / 10^{-6} \text{ m}^{-1}$	2,08 + j 2,35	4,43 + j 22,4	7,96 + j 216	71,5 + j 21000

A táblázatból látható, hogy a frekvencia növekedésével a veszteségek befolyása csökken és 1000 kHz-en gyakorlatilag elhanyagolható.

f) Láttuk [(2.51)] , hogy kiscsillapítású távvezetésekre

$$\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Állapítsuk meg L függvényében α minimális értékét és a minimum helyét!

$$\frac{\partial \alpha}{\partial L} = -\frac{R}{4} C^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} + \frac{G}{4} C^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial L} = 0, \text{ ha } \frac{L^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}}{4} [-R L C + G] = 0$$

$$L = \frac{R}{G} C$$

A második derivált:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial L^2} = \frac{3}{8} R C^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}} - \frac{G}{8} C^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$$

Ez az $L = R C/G$ helyen:

$$\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial L^2} \right)_{L = RC/G} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{G^5}{R^3 C^4}} > 0$$

vagyis az $L = RC/G$ -nél α -nak minimuma van és.

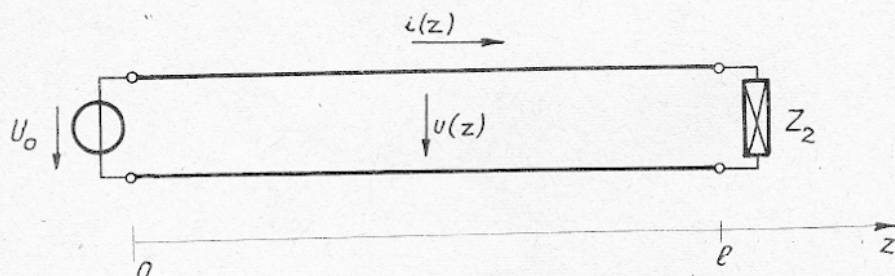
$$\alpha_{\min.} = \sqrt{R G}$$

3. A TÁVVEZETÉK LEZÁRÁSÁNAK FIGYELEMBEVÉTELE

3.1 A TÁVIRÓ EGYENLETEK MEGOLDÁSÁBAN SZEREPLŐ ÁLLANDÓK MEGHATÁROZÁSA

Az előbbieken értelmeztük a távvezeték differenciálegyenletének megoldását, azonban nem határoztuk meg $U^{(+)}$ és $U^{(-)}$ értékét. A következőkben megvizsgáljuk, hogy mitől függenek ezek.

A gyakorlatban a távvezeték végéhez generátort és impedanciát szokás csatlakoztatni. Vizsgáljunk olyan elrendezést, amelynél az l hosszúságú távvezeték egyik (bemeneti) végéhez U_0 forrásfeszültségű, ideális feszültséggenerátor, másik (kimeneti) végéhez Z_2 impedancia csatlakozik (3.1 ábra). Válasszuk a koordináta rendszer kezdőpontját, a $z = 0$ helyet a generátornál, a Z_2 impedancia pedig a $z = l$ helyen csatlakozik a távvezetékhez.



3.1 ábra

Vizsgáljuk először a Z_2 impedanciával lezárt végen a viszonyokat. A $z = l$ helyettesítéssel (2.14)-ből és (2.19)-ből:

$$U_2 = u(l) = U^{(+)} e^{-\gamma l} + U^{(-)} e^{\gamma l} \quad (3.1)$$

$$I_2 = i(l) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^{(-)}}{Z_0} e^{\gamma l} \quad (3.2)$$

ahol γl és Z_0 a távvezeték hullámparaméterei. A Z_2 lezáró impedancia megadja U_2 és I_2 hányadosát:

$$\frac{U_2}{I_2} = Z_2 = Z_0 \frac{U^{(+)} e^{-\gamma l} + U^{(-)} e^{\gamma l}}{U^{(+)} e^{-\gamma l} - U^{(-)} e^{\gamma l}} =$$

$$= Z_0 \frac{1 + \frac{U^{(-)} e^{\gamma l}}{U^{(+)} e^{-\gamma l}}}{1 - \frac{U^{(-)} e^{\gamma l}}{U^{(+)} e^{-\gamma l}}} \quad (3.3)$$

Vezessük be az

$$r_2 = \frac{U^{(-)} e^{\gamma l}}{U^{(+)} e^{-\gamma l}} = \frac{U^{(-)}}{U^{(+)}} e^{2\gamma l} \quad (3.4)$$

reflexiós tényezőt. r_2 jelenti a $-z$ irányban és a $+z$ irányban haladó feszültség hullám lezárás helyén vett értékének a hányadosát. Így (3.3) alapján

$$Z_2 = Z_0 \frac{1 + r_2}{1 - r_2} \quad (3.5)$$

amiből

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \quad (3.6)$$

A lezárás helyén fellépő reflexiós tényező tehát kifejezhető a távvezeték hullámimpedanciájával és lezáró impedanciájával. Így (3.4) alapján az $U^{(-)}/U^{(+)}$ is kiszámítható ezen impedanciák, a távvezeték hossza és terjedési együtthatója ismeretében.

Az r_2 reflexió tényező segítségével küszöböljük ki a feszültség és az áram egyenletéből az $U^{(-)}$ együtthatót. (2.14)-ből és (2.19)-ből (3.4) felhasználásával az időbeli változást is figyelembevéve:

$$u(z, t) = U^{(+)} e^{-\gamma l} [e^{\gamma(l-z)} + r_2 e^{-\gamma(l-z)}] e^{j\omega t} \quad (3.7)$$

$$i(z, t) = \frac{U^{(+)} e^{-\gamma l}}{Z_0} [e^{\gamma(l-z)} - r_2 e^{-\gamma(l-z)}] e^{j\omega t} \quad (3.8)$$

A $+z$ irányban haladó hullámot szokás beeső hullámnak, a $-z$ irányban haladót pedig viSSZaVért (reflektált) hullámnak nevezni. A reflexiós tényező tehát kifejezi, hogy mekkora a reflektált feszültség-hullám és a beeső feszültség-hullám hányadosa. Az áramra vonatkozó reflexiós tényező, vagyis a $-z$ irányban és a $+z$ irányban haladó áramhullám hányadosa a $z = l$ helyen -1 -szerese a feszültségre érvényes reflexiós tényezőnek, mint ez a (3.2)-ből látható. A reflexiós tényezőt a feszültség-hullámokra definiált mennyiséget értjük.

A két hullám hányadosa nemcsak a lezárás helyén, hanem a távvezeték tetszőleges z koordinátájú helyére is kiszámítható. Ilyen módon a reflexiós tényező is értelmezhető a távvezeték tetszőleges helyére:

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{U^{(-)} e^{\gamma z}}{U^{(+)} e^{-\gamma z}} = \frac{U^{(-)}}{U^{(+)}} e^{2\gamma z} = \frac{U^{(-)}}{U^{(+)}} e^{2\gamma l} e^{-2\gamma(l-z)} = \\ &= r_2 e^{-2\gamma(l-z)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Igy a távvezeték bemenetére ($z = 0$):

$$r(0) = r_2 e^{-2\gamma l} = \frac{U^{(-)}}{U^{(+)}} \quad (3.10)$$

Ennek abszolút értéke:

$$|r(0)| = |r_2| e^{-2\alpha l} \leq |r_2| \quad (3.11)$$

Vizsgáljuk ezután, hogy a távvezeték elején milyen határfeltételeknek kell kielégülni.

$$u(0) = U_0 = U^{(+)} + U^{(-)} = U^{(+)} \left(1 + r_2 e^{-2\gamma \ell} \right) \quad (3.12)$$

amiből

$$U^{(+)} = \frac{U_0}{1 + r_2 e^{-2\gamma \ell}} \quad (3.13)$$

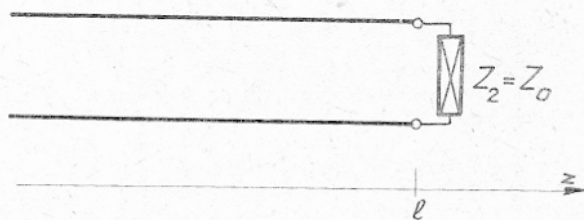
(3.13) és (3. 4) alapján $U^{(+)}$ és $U^{(-)}$ értéke a távvezeték és a lezárások adataiból meghatározható.

3.2 VIZSGÁLATOK NÉHÁNY SPECIÁLIS LEZÁRÁS ESETÉN

A következőkben meghatározzuk, hogyan alakulnak a viszonyok egyes, speciális lezárások esetén.

1. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a távvezeték lezárása a hullámimpedancia (3.2 ábra) vagyis

$$Z_2 = Z_0 \quad (3.14)$$



3.2 ábra

Ekkor (3.6) szerint

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 0 \quad (3.15)$$

A feszültség- és az áramhullám egyenlete így:

$$u(z, t) = U^{(+)} e^{-\gamma z + j\omega t} \quad (3.16)$$

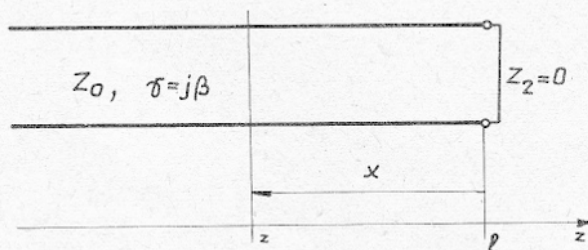
$$i(z, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{-\gamma z + j\omega t} \quad (3.17)$$

A reflektált hullám amplitudója nulla. A feszültség és az áram hányadosa:

$$\frac{u(z)}{i(z)} = Z_0 \quad (3.18)$$

a távvezeték minden helyén a hullámimpedanciával egyenlő.

2. Vizsgáljuk ezután a rövidzárral lezárt ideális távvezeték (3.3 ábra) viszonyait!



3.3 ábra

Ideális távvezetéknel

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\sqrt{LC} \quad (3.19)$$

$$\alpha = 0; \quad \gamma = j\beta$$

Rövidzárás esetén

$$Z_2 = 0 \quad (3.20)$$

Igy

$$r_2 = -1 \quad (3.21)$$

Vezessük be a további számításokhoz az

$$x = \ell - z \quad (3.22)$$

koordinátát, ami a vezeték lezárásától mért távolságot jelenti. A feszültség egyenletének alakja ezzel

$$u(x, t) = U^{(+)} e^{-j\beta \ell} \left[e^{j\beta x} - e^{-j\beta x} \right] e^{j\omega t} = 2j U^{(+)} \sin \beta x \cdot e^{j(\omega t - \beta \ell)} \quad (3.23)$$

Ez olyan feszültség egyenlete, amelynek zérus helyei, maximumai és minimumai az időtől függetlenül ugyanazokon a helyeken lépnek fel. Mégpedig a zérus helyekre:

$$\beta x_k = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.24)$$

vagyis

$$x_k = k \frac{\pi}{\beta} = k \frac{\lambda}{2} \quad (3.25)$$

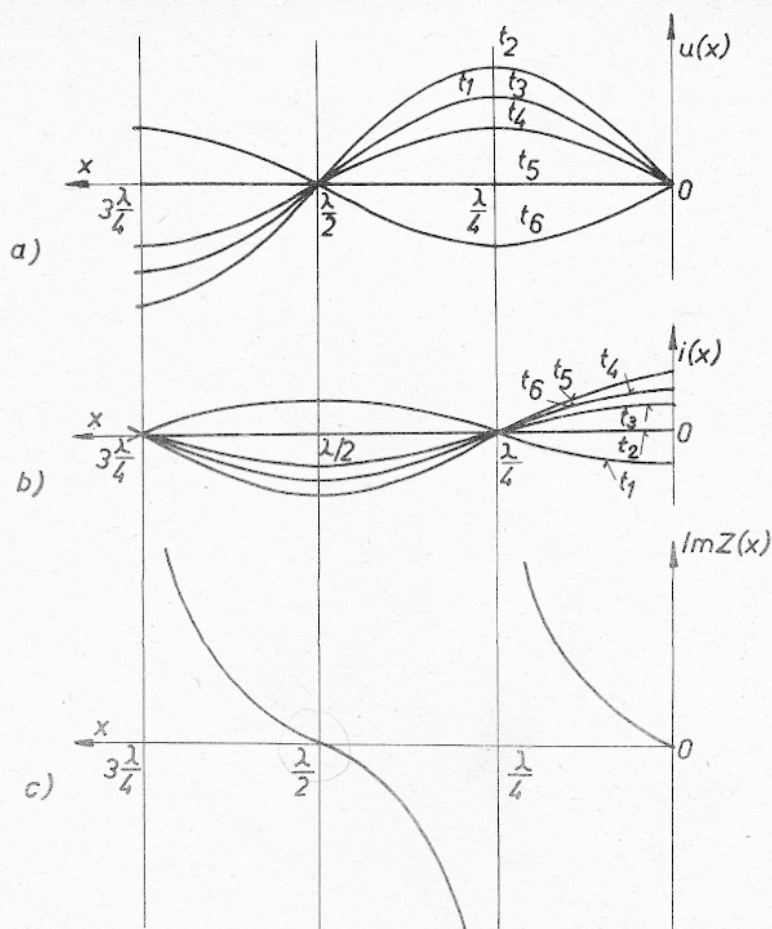
A maximumok és minimumok helyére:

$$\beta x_m = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.26)$$

vagyis

$$x_m = (2m + 1) \frac{\pi}{2\beta} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (3.27)$$

Azok a helyek, amelyeken a feszültség értéke mindig zérus, a csomópontok. Az olyan hullámokat, amelyeknek csomópontjai és szélső értékeinek helye az időtől független, állóhullámoknak nevezzük. A 3.4 a. ábrán a feszültséget x függvényében tüntettük fel $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6$ időpontra.



3.4 ábra

Az áram egyenlete hasonló a feszültségéhez:

$$\begin{aligned}
 i(x, t) &= \frac{U^{(+)} }{Z_0} e^{-j\beta l} \left[e^{j\beta x} + e^{-j\beta x} \right] e^{j\omega t} = \\
 &= 2 \frac{U^{(+)} }{Z_0} \cos \beta x \cdot e^{j(\omega t - \beta l)} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Ez is állóhullámok egyenlete, azonban az áramhullám csomópontjai azokon a helyeken vannak, ahol a feszültséghullámnak szélsőértéke van és az áramhullám szélső értékének helyén a feszültséghullámnak csomópontja van (3.4 b ábra). Rögzített x helyen az áram és a feszültség között időben 90° fáziskülönbség van. (ideális esetben)

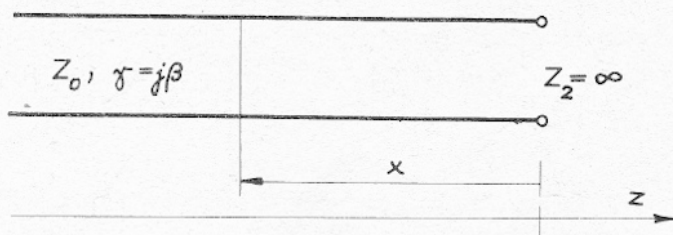
A feszültség és áram hányadosa:

$$Z(x) = \frac{u(x)}{i(x)} = j Z_0 \operatorname{tg} \beta x \quad (3.29)$$

$Z(x)$ tehát minden x helyen képzetes. Az ebből adódó reaktancia értéket mutatja a 3.4 c. ábra. A végén rövidrezárt ideális távvezetékkel reaktanciát lehet realizálni. Ha a végén rövidrezárt ideális távvezeték ℓ hossza a hullámhossz negyedénél kisebb ($\ell < \lambda/4$), akkor induktív jellegű, ha pedig $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$, akkor kapacitív jellegű reaktanciát valósít meg. A reaktancia $\lambda/4$ -enként előjelet vált. Ha a távvezeték hossza:

$\ell = (2k+1) \lambda/4$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), akkor bemeneti impedanciája végtelen nagy, a távvezeték szakadást jelent. Ha $\ell = 2k \lambda/4 = k \lambda/2$, akkor a bemeneti impedancia nulla, vagyis az $\ell = k \lambda/2$ hosszúságú, végén rövidrezárt ideális távvezeték rövidzárat jelent.

(Ilyen távvezetékkel lehet URH vagy mikrohullámu rezgőköröket megvalósítani. Ezt a 4.4 pontban tárgyaljuk.)



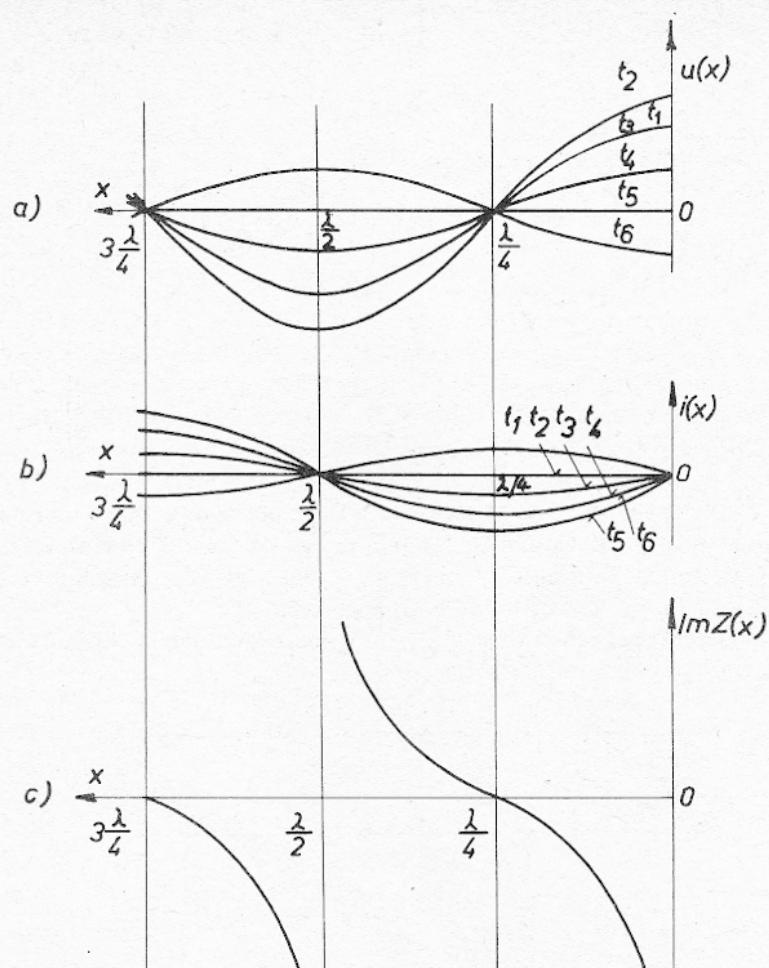
3.5 ábra

3. Vizsgáljuk ezután a nyitott végű, ideális távvezeték (3.5 ábra) feszültség- és áramviszonyait! Itt

$$Z_2 = \infty \quad (3.30)$$

A reflexió tényező értéke:

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{1 - Z_0/Z_2}{1 + Z_0/Z_2} = 1 \quad (3.31)$$



3.6 ábra

Írjuk fel a feszültség és az áram egyenletét! (3.7) és (3.8) alapján

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= U^{(+)} e^{-j\beta\ell} [e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}] e^{j\omega t} = \\
 &= 2 U^{(+)} e^{-j\beta\ell} \cos \beta x \cdot e^{j\omega t}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 i(x, t) &= \frac{U^{(+)} e^{-j\beta l}}{Z_0} \left[e^{j\beta x} - e^{-j\beta x} \right] e^{j\omega t} = \\
 &= 2j \frac{U^{(+)} e^{-j\beta l}}{Z_0} \sin \beta x \cdot e^{j\omega t} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

A feszültségre és az áramra vonatkozó összefüggés ebben az esetben is állóhullámot ír le. A feszültség- és az áramhullám csomópontjai egymáshoz képest $\lambda/4$ -del eltolva lépnek fel (3.6/a és b ábra).

Az impedancia kifejezése:

$$Z(x) = -j Z_0 \operatorname{ctg} \beta x \quad (3.34)$$

Z itt is képzetes és a reaktancia előjele szintén $\lambda/4$ -enként változik (3.6/c ábra). Ha $x = (2k+1)\lambda/4$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), akkor $Z = 0$, ami rövidzárnak felel meg. Ha pedig $x = 2k\lambda/4 = k\lambda/2$, akkor $Z = \infty$, ami szakadást jelent.

A vizsgált két utóbbi esetben a reflexiós tényező abszolút értéke 1. Ennek megfelelően a beeső és a visszavert hullám amplitudója azonos, teljes reflexió jön létre. Teljes reflexió esetén ideális távvezetéken csak állóhullámok keletkeznek.

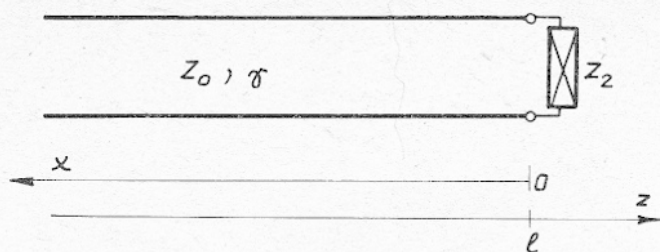
3.3 TÁVVEZETÉK TETSZŐLEGES LEZÁRÁSSAL

Vizsgáljuk meg a következőkben azokat a jelenségeket, amelyek Z_2 impedanciával lezárt távvezetéken (3.7 ábra) lépnek fel. Az r_2 reflexiós tényező általában komplex:

$$r_2 = |r_2| e^{j\delta} \quad (3.35)$$

Az helyre értelmezett reflexiós tényező (3.9) szerint:

$$r(z) = r_2 e^{-2j(\ell - z)} = |r_2| e^{-2\alpha x} e^{j(\delta - 2\beta x)} \quad (3.36)$$



3.7 ábra

Az $u(x)$ feszültség hullám felbontása a következőképpen történhet:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= U^{(+)} e^{-\gamma l} \left[e^{\alpha x} e^{j\beta x} + |r_2| e^{j\delta} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \right] e^{j\omega t} = \\
 &= U^{(+)} e^{-\gamma l} \left[(e^{\alpha x} - |r_2| e^{-\alpha x}) e^{j\beta x} + 2|r_2| e^{-\alpha x + j\frac{\delta}{2}} \cos\left(\frac{\delta}{2} - \beta x\right) \right] e^{j\omega t}
 \end{aligned}
 \quad (3.37)$$

Ideális távvezeték esetén $\alpha = 0$ és így

$$u(x, t) = U^{(+)} e^{-j\beta l} \left[(1 - |r_2|) e^{j\beta x} + 2|r_2| e^{j\frac{\delta}{2}} \cos\left(\frac{\delta}{2} - \beta x\right) \right] e^{j\omega t}
 \quad (3.38)$$

A feszültség hullám egyenletét két olyan tag összegeként írtuk fel, amelyek közül az egyik z irányban haladó hullámot, a másik állóhullámot ír le. Ha $r_2 = 0$, akkor kizárólag haladó hullám, ha $|r_2| = 1$, akkor pedig csak állóhullám lép fel.

Hasonlóképpen bontható fel az áram hullám kifejezése is.

Veszteséges távvezeték esetén a feszültség (és az áram) szintén egy haladó és egy állóhullám összege. A hullámok amplitudóját a csillapítási tényező is befolyásolja: az állóhullám amplitudója a lezárástól távolodva, a haladóhullám amplitudója viszont a lezárás felé haladva csökken.

Határozzuk meg a z helyen fellépő impedanciát. (3.6) felhasználásával:

$$Z(x) = \frac{u(x)}{i(x)} = Z_0 \frac{e^{\gamma x} + r_2 e^{-\gamma x}}{e^{\gamma x} - r_2 e^{-\gamma x}} = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma x + Z_0 \operatorname{sh} \gamma x}{Z_2 \operatorname{sh} \gamma x + Z_0 \operatorname{ch} \gamma x} \quad (3.39)$$

Az $x = \ell$ értéket behelyettesítve kapjuk a távvezeték bemeneti impedanciáját:

$$Z(x = \ell) = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma \ell + Z_0 \operatorname{sh} \gamma \ell}{Z_2 \operatorname{sh} \gamma \ell + Z_0 \operatorname{ch} \gamma \ell} \quad (3.40)$$

Ideális távvezeték esetén $\gamma = j\beta$ és így

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_2 + j Z_0 \operatorname{tg} \beta x}{Z_0 + j Z_2 \operatorname{tg} \beta x} \quad (3.41)$$

Mint hogy a $\operatorname{tg} \beta x$ függvény π szerint periodikus, az impedancia a távvezeték mentén $\lambda/2$ szerint periodikus.

Gyakori, hogy az admittancia értékével egyszerűbb a számítás:

$$Y(x) = \frac{1}{Z(x)} = Y_0 \frac{Y_2 + j Y_0 \operatorname{tg} \beta x}{Y_0 + j Y_2 \operatorname{tg} \beta x} \quad (3.42)$$

ahol $Y_2 = 1/Z_2$.

Ideális távvezeték esetén a feszültség (3.7) alapján a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U^{(+)} e^{-j\beta \ell} \left[e^{j\beta x} + r_2 e^{-j\beta x} \right] e^{j\omega t} = \\ &= U^{(+)} e^{-j\beta (\ell - x)} \left(1 + |r_2| e^{j(\delta - 2\beta x)} \right) e^{j\omega t} \quad (3.43) \end{aligned}$$

Ebből – és hasonlóképpen (3.38)-ből is – látható, hogy a feszültség abszolút értéke maximális, ha

$$\delta - 2 \beta x = 2 k \pi \quad (3.44)$$

és minimális, ha

$$\delta - 2 \beta x = (2 k + 1) \pi \quad (3.45)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

A feszültség abszolút értéke ezeken a helyeken:

$$U_{\max} = |U^{(+)}| (1 + |r_2|) \quad (3.46)$$

ill.

$$U_{\min} = |U^{(+)}| (1 - |r_2|) \quad (3.47)$$

E két érték hányadosa a σ állóhullámarány:

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|} \quad (3.48)$$

Nagyfrekvenciás gerjesztő jel esetén $U_{\max}$ és $U_{\min}$ méréssel határozható meg és a mérési eredményből az állóhullámarány kiszámítható. Ebből a reflexiós tényező abszolút értéke:

$$|r_2| = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \quad (3.49)$$

Az állóhullámarány (3.48) alatti definíciója ideális távvezetékre vonatkozik. Az állóhullámarány azonban veszteséges távvezeték esetére is definiálható, mégpedig (3.48) második kifejezésének megfelelően, vagyis

$$\sigma = \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|} \quad (3.50)$$

Veszteséges távvezetéknel σ a hely függvénye és értéke a csillapítás a fogyasztótól a generátor felé haladva csökken.

Az áram kifejezése is felírható (3.43)-hoz hasonló alakban. (3.8)-ból ideális távvezetékre:

$$i(z, t) = \frac{U^{(+)} }{Z_0} e^{-j\beta z} (1 - r_2 e^{-j2\beta(l-z)}) e^{j\omega t} \quad (3.51)$$

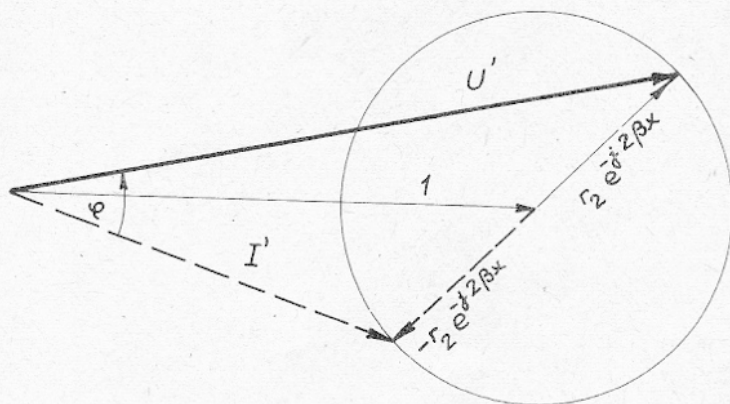
Összekel a feszültség (3.43) alatti kifejezését

$$U^{(+)} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad \text{-vel és (3.51)-et } \frac{U^{(+)} }{Z_0} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \quad \text{-vel.}$$

Igy kapjuk a normalizált U' feszültség és I' áram kifejezését:

$$U' = 1 + r_2 e^{-j2\beta x} \quad \text{és} \quad I' = 1 - r_2 e^{-j2\beta x} \quad (3.52)$$

U' -t és I' -t a 3.8 ábrán tüntettük fel. A Z_2 impedanciával lezárt ideális távvezeték különböző x koordinátájú helyéhez tartozó U' és I' végpontja egy körön van. Az $x = 0$ -ból kiindulva x növelésével U' és I' végpontja ugyanazon kör mentén mozog és $x = \lambda/2$ -nél visszajut az $x = 0$ -hoz tartozó pontba. U' és I' az x függvényében $\lambda/2$ szerint periodikus. A távvezeték x helyéhez tartozó impedancia φ fázisszöge az U' és I' által bezárt szög (3.8 ábra).



3.8 ábra

A φ szög előjelet vált azokon a helyeken, ahol

$$\operatorname{Im} r_2 e^{-j 2 \beta x_k} = \operatorname{Im} |r_2| e^{-j(2 \beta x_k - \delta)} = 0 \quad (3.53)$$

vagyis a

$$2 \beta x_k - \delta = k\pi \quad x_k = k \frac{\lambda}{4} + \frac{\delta}{2\beta} \quad (3.54)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

helyeken. Ebből következik, hogy a $Z(x)$ impedancia fázisszöge $\lambda/4$ -enként előjelet vált, az impedancia $\lambda/4$ hosszanként váltakozva induktív és kapacitív jellegű. Ha pl. az $x = x_1$ helyig induktív jellegű, akkor az $x_1 \leq x \leq x_1 + \lambda/4$ intervallumban kapacitív, az $x_1 + \lambda/4 \leq x < x_1 + 2 \cdot \lambda/4$ intervallumban induktív s i. t.

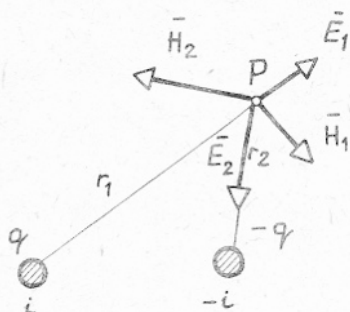
3.4 PÉLDÁK ÉS FELADATOK

a) Igazoljuk, hogy ideális távvezeték esetén

$$LC = \mu \epsilon$$

ahol μ és ϵ a vezetőket körülvevő közeg permeabilitása és permittivitása.

Két igen kis sugarú vezető hosszúságán elhelyezkedő q , ill. $-q$ töltés, a vezetékben folyó i , ill. $-i$ áram a P pontban (3.9 ábra)



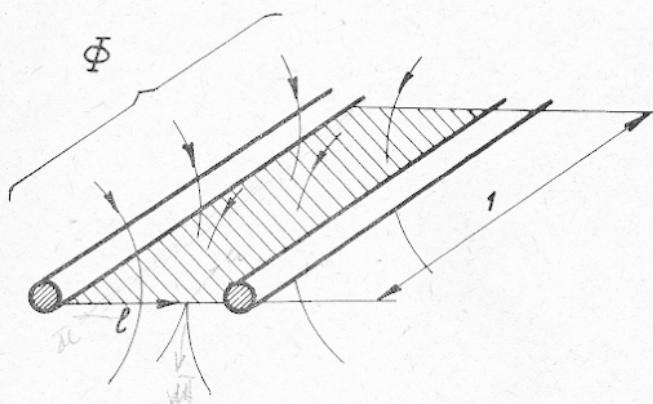
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^2} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^2} \right]$$

3.9 ábra

villamos és

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{i}{2\pi} \vec{e}_z \times \left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^2} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^2} \right] = \epsilon \frac{i}{q} \vec{e}_z \times \vec{E}$$

mágneses térerősséget hoz létre, ahol $\vec{r}_1$ és $\vec{r}_2$ a vezetőtől a P ponthoz mutató vektort, $\vec{e}_z$ pedig a vezető tengelye irányába eső egységvektort jelöl. Tetszőleges keresztmetszetű vezetők tere kissugarú vezetők terének szuperpozíciójával számítható. Ez nem változtat az előbbiekben felírt arányosságon, amely a villamos és a mágneses térerősség abszolút értéke között a kis sugarú vezetők esetén fennáll.



3.10 ábra

Integráljuk a villamos térerősséget a két vezetőt összekötő ℓ erővonal mentén (3.10 ábra):

$$\int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = u$$

a két vezető közötti feszültséget adja.

Határozzuk meg az ℓ görbe mentén egységnyi szélességben elhelyezkedő, a vezetők tengelyén áthaladó A felület fluxusát:

$$\psi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \int_A \vec{H} \cdot d\vec{A} = \mu \epsilon \frac{1}{q} \int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \mu \epsilon \frac{1}{q} u$$

vagyis

$$\mu \epsilon = \frac{\psi}{i} \frac{q}{u}$$

$$\frac{\Psi}{i} = L \quad \text{és} \quad \frac{q}{u} = C$$

az előbbi összefüggés

$$\mu \varepsilon = L C$$

alakban írható.

Ideális távvezetésekre (2.48), (2.49) és előbbi eredményünk felhasználásával

$$v = \frac{1}{\sqrt{L C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad \text{és} \quad \lambda = \frac{2}{\omega \sqrt{L C}} = \frac{2 \pi}{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}$$

a fázissebesség és a hullámhossz kifejezése. v a távvezeték körülvevő közegben a fény terjedési sebességével egyenlő.

b) Az l hosszúságu, Z_0 és γ hullámparaméterekkel bíró, Z_2 impedanciával lezárt távvezeték impedanciája a bemeneti pontokon (3.40) szerint

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_0 \operatorname{sh} \gamma l}{Z_2 \operatorname{sh} \gamma l + Z_0 \operatorname{ch} \gamma l}$$

Ha a távvezeték a kimeneten rövidrezárjuk ($Z_2 = 0$), akkor a rövidzárási bemeneti impedanciát kapjuk:

$$Z_{1r} = Z_0 \operatorname{th} \gamma l$$

Ha pedig a távvezeték szakadással zárjuk le ($Z_2 = \infty$), az üreszárási bemeneti impedanciára a

$$Z_{1ü} = Z_0 \operatorname{cth} \gamma l$$

összefüggés áll fenn.

Z_{1r} és $Z_{1ü}$ ismeretében az előbbi két összefüggés alapján Z_0 és γ meghatározható. A két egyenlet szorzatából:

$$Z_o = \sqrt{Z_{lr} Z_{lü}}$$

Hányadosából pedig:

$$\text{th } \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{lr}}{Z_{lü}}}$$

A gyökvonásnál mindkét esetben a nem negatív valós részü gyököt kell venni. Így kapunk ugyanis fizikailag reális értéket.

Míthogy a rövidzárási és az üresjárási bemeneti impedancia megmérhető, az előbbi két kifejezés alapján mérés útján meghatározható a távvezeték hullámimpedanciája és terjedési együtthatója.

c) Egy $l = 50$ km hosszú távvezeték rövidzárási és üresjárási bemeneti impedanciája 500 Hz frekvencián:

$$Z_{lr} = 242,5 e^{j30^\circ} \Omega ; \quad Z_{lü} = 660 e^{-j50^\circ} \Omega .$$

Határozza meg a távvezeték hullámparamétereit!

Megoldás:

$$Z_o = 400 e^{-j10^\circ} \Omega$$

$$\gamma l = 0,415 + j 0,445$$

$$\gamma = (8,29 + j 8,89) \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

d) Határozzuk meg, hogy a hullámimpedancia a komplex számsík melyen tartományában vehet fel értékeket!

A hullámimpedancia:

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{|Z| e^{j\varphi}}{|Y| e^{j\psi}}} = \sqrt{\frac{|Z|}{|Y|}} e^{\frac{j(\varphi - \psi)}{2}}$$

ahol

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} ; \quad |Y| = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2} ;$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} ; \quad \psi = \arctg \frac{\omega C}{G}$$

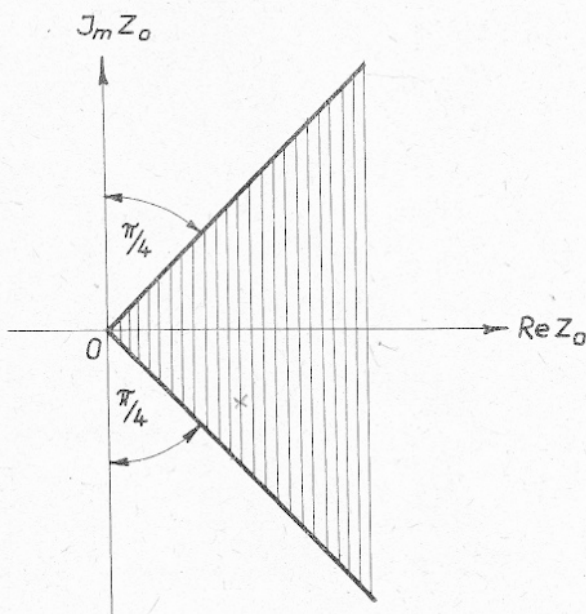
Ennek megfelelően:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

Igy Z_0 fázisszögének értéktartománya:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\varphi - \psi}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

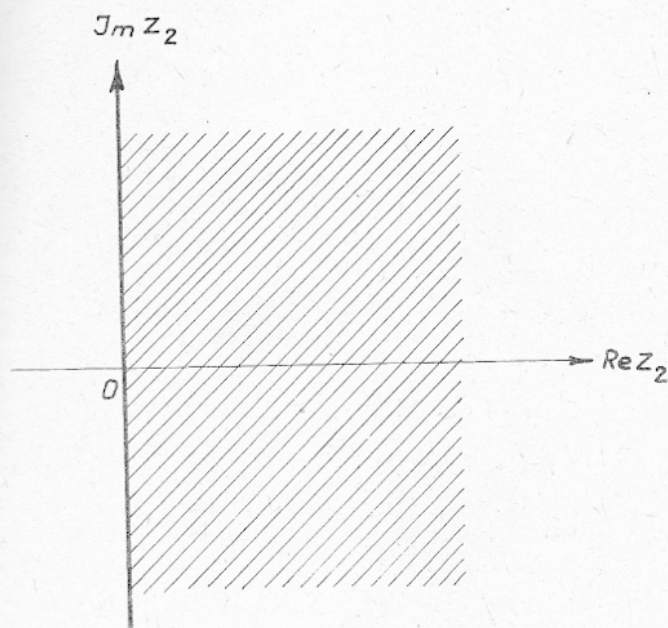
Ez azt jelenti, hogy a hullámimpedancia a komplex számsíknak a 3.11 ábrán vonalkázottan jelölt tartományában vehet fel értékeket.



3.11 ábra

e) Vizsgáljuk meg, hogy impedanciával történő lezárásnál a reflexiós tényező a komplex számsík milyen tartományában vehet fel értékeket!

A $Z_2 = |Z_2| e^{j\varphi_2}$ lezáró impedancia valós része nem negatív, vagyis értékei a zárt jobb félsíkba esnek (3.12 ábra vonalkázott rész) és így $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$.



3.12 ábra

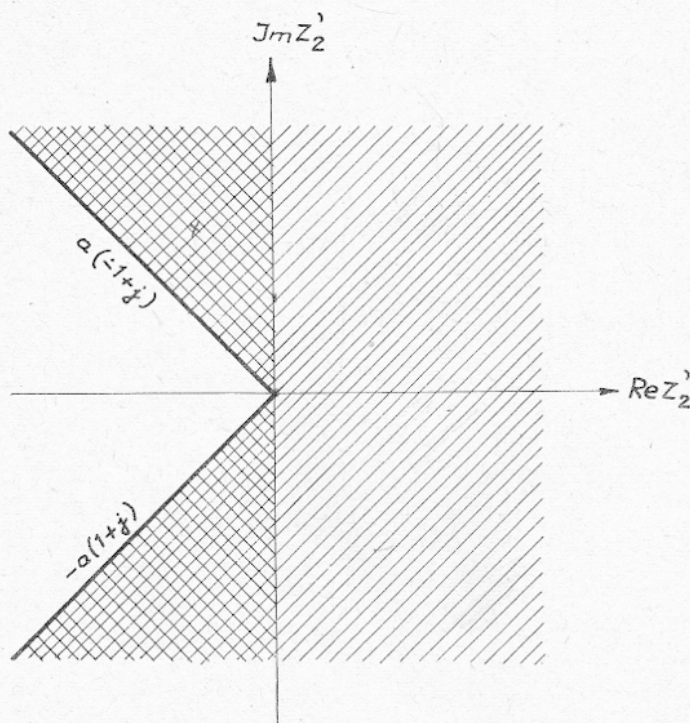
A reflexiós tényező értéktartományának meghatározásához vizsgáljuk először a

$$Z'_2 = \frac{Z_2}{Z_0} = \frac{|Z_2|}{|Z_0|} e^{j(\varphi_2 + \frac{\psi - \varphi}{2})}$$

normalizált lezáró impedancia értéktartományát. Itt $\frac{\varphi - \psi}{2}$ a Z_0 hullámimpedancia fázisszöge. (Ez utóbbi értéktartományát a d) példában vizsgáltuk.) φ_2 és $\frac{\varphi - \psi}{2}$ értéktartományának figyelembevételével Z'_2 fázisszögére a

$$-\frac{3\pi}{4} \leq \varphi_2 + \frac{\psi - \varphi}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek alapján Z_2' értéktartományát (3.13 ábra) a képzetes tengelytől jobbra eső teljes félsík és a balra eső félsík egy része, mégpedig a pozitív képzetes tengely és az a $(-1+j)$ egyenes által határolt rész, továbbá a negatív képzetes tengely és a $-a(1+j)$ egyenes által határolt rész képezi ($a > 0$ valós).

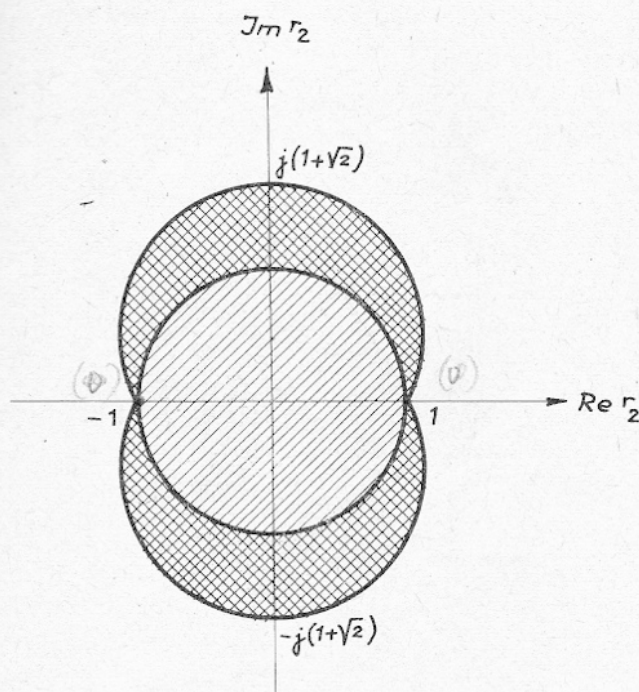


3.13 ábra

A reflexiós tényező a normalizált lezáró impedanciával a következőképpen fejezhető ki:

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{Z_2' - 1}{Z_2' + 1}$$

Ez az összefüggés a Z'_2 -nek megfelelő pontokat az r_2 -nek megfelelő pontokba képezi le. Ennél a leképezésnél a $\operatorname{Re} Z'_2 \geq 0$ félsík az egységnyi sugara körbe és annak belsejébe, az $a(-1+j)$ és a $-a(1+j)$ egyenes pedig egy-egy körbe megy át (3.14 ábra). A három kör közös pontja az $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ pont. Ezek felelnek meg a Z'_2 sík origójának és végtelen távoli pontjának. Az $a(-1+j)$, ill. $-a(1+j)$ egyenesnek megfelelő kör a $-j(1+\sqrt{2})$, ill. $j(1+\sqrt{2})$ pontban metszi a képzetes tengelyt. Ezen pontok alapján a r_2 és r_2 értéktartománya megszerkeszthető (3.14 ábra vonalkázott rész).



3.14 ábra

Látható, hogy a tartomány egy részében (a 3.14 ábrán $\otimes$ vonalkázott rész) $|r_2| > 1$. Ez a 3.13 ábra $\otimes$ vonalkázott részének felel meg. Erről leolvasható, hogy itt

$$\operatorname{Re} Z'_2 < 0$$

és

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 + \frac{\psi - \varphi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{vagy} \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \varphi_2 + \frac{\psi - \varphi}{2} \leq -\frac{\pi}{2}$$

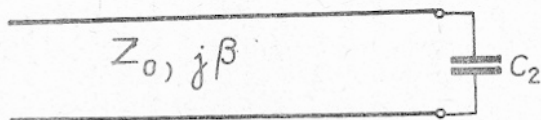
f) Állapítsa meg, hogy induktivitással lezárt olyan távvezetékre, amelynél

$$\frac{\omega L}{R} < \frac{\omega C}{G}$$

az r_2 reflexiós tényező abszolút értéke 1-nél nagyobb vagy kisebb.

Megoldás:

Az e) példa alapján $|r_2| > 1$.



3.15 ábra

g) Vizsgáljuk meg a feszültség alakulását kondenzátorral lezárt ideális távvezeték esetén (3.15 ábra)!

A reflexiós tényező a lezárásnál (3.6) alapján:

$$r_2 = \frac{\frac{1}{j\omega C_2} - Z_0}{\frac{1}{j\omega C_2} + Z_0} = \frac{1 - j\omega C_2 Z_0}{1 + j\omega C_2 Z_0}$$

Ebben a számláló a nevezőnek konjugáltja. Bevezetve a

$$k = \sqrt{1 + \omega^2 C_2^2 Z_0^2} \quad \text{és} \quad \frac{\varphi}{2} = \arctan \omega C_2 Z_0$$

jelölést

$$r_2 = \frac{k e^{-j \frac{\varphi}{2}}}{k e^{j \frac{\varphi}{2}}} = e^{-j \varphi}$$

vagyis a reflexiós tényező abszolút értéke 1, azaz

$$|U^{(+)}| = |U^{(-)}|$$

A feszültség tehát (3.37) alapján a következő alakban írható fel ($|r_2| = 1$; $\vartheta = -\varphi$):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U^{(+)} 2 e^{j(\omega t - \frac{\varphi}{2} - \beta l)} \cos\left(\beta x + \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= 2 U^{(+)} e^{j(\omega t - \frac{\varphi}{2} - \beta l)} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(x + \frac{\lambda \varphi}{4\pi}\right) \end{aligned}$$

Állóhullám jön létre. A

$$d = \frac{\lambda \varphi}{4\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \arctg \omega C_2 Z_0$$

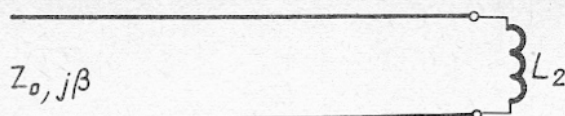
jelöléssel

$$u(x, t) = 2 U^{(+)} e^{j(\omega t - \frac{\varphi}{2} - \beta l)} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + d)$$

A feszültség kifejezése hasonló a nyitott végű ideális távvezetékéhez,

azonban $U^{(+)}$ helyett $U^{(+)} e^{-j \frac{\varphi}{2}}$ szerepel és az állóhullám olyan, mintha a reflexió nem a lezárás helyén, hanem d -vel távolabb jönne létre. (A távvezeték d -vel meghosszabbítva és ott szakadással lezárva képzelhetjük.)

h) Vizsgálja meg – az előbbihez hasonlóan – az induktivitással lezárt ideális távvezeték (3.16 ábra) feszültségviszonyait:



3.16 ábra

Megoldás:

$$r_2 = \frac{j \omega L - Z_0}{j \omega L + Z_0} = e^{j(\pi - \varphi)}$$

ahol

$$\frac{\varphi}{2} = \arctan \frac{\omega L}{Z_0}$$

és (3.37) alapján:

$$u(x, t) = 2 j U^{(+)} e^{j(\omega t - \frac{\varphi}{2} - \beta l)} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(x + \frac{\lambda \varphi}{2\pi} \right)$$

Ez a rövidrezárt ideális távvezeték feszültségének egyenletéhez hasonló. A kialakuló állóhullám a $d = \frac{\lambda \varphi}{2\pi}$ -vel meghosszabbított, rövidzárral lezárt ideális távvezeték kialakulóhoz hasonló.

i) A mikrohullámu frekvenciatartományban az impedancia állóhullámmérés útján határozható meg. Az állóhullámmérő olyan Z_0 hullámellenállású ideális távvezeték, amely mentén a feszültség mérhető.

A Z impedancia meghatározásához két mérést kell végezni. Először meghatározzuk a Z impedanciával lezárt állóhullámmérőre a σ állóhullámarányt és a mérés során megállapítjuk egy vagy több feszültségminimum helyét. Ezután a Z impedancia helyett az állóhullámmérőt rövidzárral zárjuk le és megkeressük néhány feszültségminimum helyét. Ezek az előző mérésnél tapasztalt feszültségminimumok helyéhez képest Δ távolsággal eltolódtak. A σ állóhullámarány és a Δ eltolódás ismeretében a Z impedancia a következőképpen számítható ki.

Az állóhullámarányból (3.49) szerint:

$$|r_2| = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$$

A feszültség helytől és időtől való függése (3.38) szerint:

$$u(x, t) = U^{(+)} e^{-j\beta l} \left[(1 - |r_2|) e^{j(\omega t + \beta x)} + 2|r_2| e^{j(\omega t + \frac{\delta}{2} + (\cos \frac{\delta}{2} - \beta x))} \right]$$

A feszültség abszolút értékének minimuma van (3.45) szerint, ahol az állóhullám zérus, vagyis

$$\delta - 2\beta x_k = (2k+1)\pi \quad \beta x_k = \frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{2} - k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Rövidzárral történő lezárásnál $r_2 = -1$, vagyis a feszültség (3.23) alapján

$$u_r(x, t) = 2j U^{(+)} e^{j(\omega t - \beta l)} \sin \beta x$$

Ez olyan állóhullám, amely a

$$\beta x_n = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

helyeken zérus amplitúdójú. A Z-vel, ill. a rövidzárral lezárt távvezetékben két feszültségminimum Δ távolságára tehát:

$$\beta(x_n - x_k) = \beta \Delta = (n+k)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$$

Ha a lezáró impedancia rövidzár, akkor $r_2 = -1$ és így $\delta = \pi$, továbbá $\Delta = 0$, vagyis

$$k + n = 0$$

Rövidzártól különböző lezáró impedancia esetén ehhez képest a

$$\delta = \pi - 2\beta\Delta$$

összefüggésnek megfelelően tolódik el a minimum helye. A reflexiók tétele alapján a mérés útján meghatározott σ és Δ ismeretében:

$$r_2 = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} e^{j(\pi - 2\beta\Delta)} = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} e^{-j2\beta\Delta}$$

A Z impedancia értéke pedig (3.5) alapján:

$$Z = Z_0 \frac{1 + r_2}{1 - r_2} = Z_0 \frac{1 + \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} e^{-j2\beta\Delta}}{1 - \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} e^{-j2\beta\Delta}} =$$

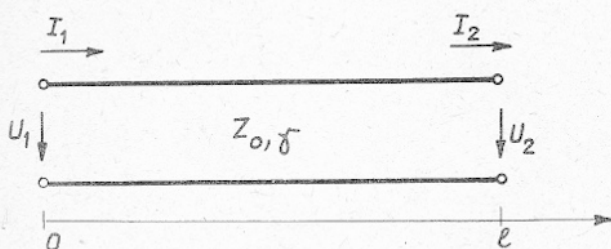
$$= Z_0 \frac{1 + j\sigma \operatorname{tg}\beta\Delta}{\sigma + j\operatorname{tg}\beta\Delta}$$

A számításhoz olyan Δ -t kell választani, amely a lezárástól a generátor felé mutat.

4. TÁVVEZETÉK SZAKASZ VIZSGÁLATA

4.1 A TÁVVEZETÉK SZAKASZ KÉTKAPU PARAMÉTEREI

A távvezeték szakasz kétkapunak is tekinthető és így a szakasz elején és végén fellépő feszültség és áram szempontjából kétkapú paraméterekkel jellemezhető.



4.1 ábra

Írjuk fel a távvezeték elején ($z = 0$) és végén ($z = l$) fellépő feszültség és áram értékét (2.14) és (2.19) alapján. A távvezeték elején (4.1 ábra):

$$U_1 = U^{(+)} + U^{(-)} \quad (4.1)$$

$$I_1 = \frac{U^{(+)}}{Z_0} - \frac{U^{(-)}}{Z_0} \quad (4.2)$$

Ezt mátrix egyenlet alakjában is felírhatjuk:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(+)} \\ U^{(-)} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A lezárás helyén figyelembe véve a 4.1 ábrán felvett vonatkozási irányokat

$$U_2 = U^{(+)} e^{-\gamma l} + U^{(-)} e^{\gamma l} \quad (4.4)$$

$$I_2 = \frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^{(-)}}{Z_0} e^{\gamma l} \quad (4.5)$$

vagy mátrix egyenletben:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(+)} \\ U^{(-)} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

amiből

$$\begin{bmatrix} U^{(+)} \\ U^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Helyettesítsük ezt (4.3)-ba:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

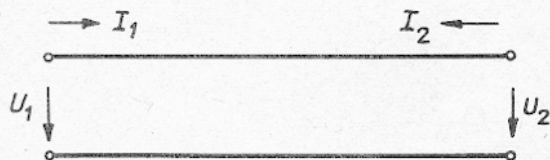
vagyis a távvezeték szakasz láncparaméter mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & Z_0 \operatorname{sh} \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma l & \operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Vegyük fel a vonatkozási irányokat a kétkapuknál szokásos módon (4.2 ábra). Ekkor (4.4) és (4.5) helyett a következő egyenleteket kapjuk:

$$U_2 = U^{(+)} e^{-\gamma l} + U^{(-)} e^{\gamma l} \quad (4.10)$$

$$I_2 = -\frac{U^{(+)} e^{-\gamma l}}{Z_0} + \frac{U^{(-)} e^{\gamma l}}{Z_0} \quad (4.11)$$



4.2 ábra

Ezekből az összefüggésekből a láncparaméterek mátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & -Z_0 \operatorname{sh} \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma l & -\operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Határozzuk meg a távvezeték szakasz impedancia és admittancia paraméter mátrixát is! (4.1), (4.2), (4.10) és (4.11) alapján:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(+)} \\ U^{(-)} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

és

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(+)} \\ U^{(-)} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Ezekből az

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Z}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

egyenletben szereplő $\underline{\underline{Z}}$ impedancia paraméter mátrix:

$$\underline{\underline{Z}} = Z_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{Z_0}{\operatorname{sh} \gamma l} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & 1 \\ 1 & \operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Az admittancia paraméter mátrix ennek inverze:

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Z}}^{-1} = \frac{1}{Z_0 \operatorname{sh} \gamma l} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & -1 \\ -1 & \operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

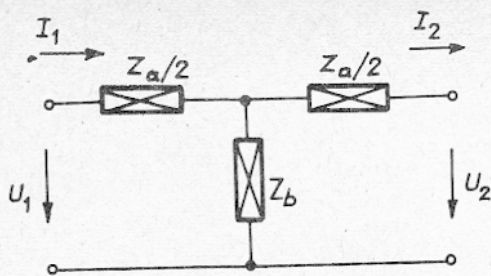
A távvezetéknel szokásos vonatkozási irányok használatánál (4.1 ábra) az előbbi összefüggésekben I_2 helyébe $-I_2$ -t kell írni. Ekkor az impedancia, ill. admittancia paraméter mátrix:

$$\underline{\underline{Z}} = \frac{Z_0}{\operatorname{sh} \gamma l} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & -1 \\ 1 & -\operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\underline{\underline{Y}} = \frac{1}{Z_0 \operatorname{sh} \gamma l} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & -1 \\ 1 & -\operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

4.2 Távvezeték szakasz helyettesítése koncentrált elemű hálózattal

A távvezeték szakasz elején és végén fellépő feszültségek és áramok szempontjából adott ω körfrekvencián a távvezeték szakasz helyettesíthető koncentrált elemekből felépített kétkapuvval. Az impedancia paraméter mátrixból látható, hogy a távvezeték szakasz szimmetrikus kétkapunak tekinthető. Határozzunk meg olyan szimmetrikus T- és Π -tagot (4.3 és 4.4 ábra), amellyel a távvezeték szakasz helyettesíthető.



4.3 ábra

A távvezeték szakasz és a T-tag, ill. a Π -tag impedancia paramétereit összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Z_a &= 2 Z_0 \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{\operatorname{sh} \gamma l} ; \\ Z_b &= \frac{Z_0}{\operatorname{sh} \gamma l} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ill.

$$Z_\alpha = Z_0 \operatorname{sh} \gamma l ; \quad Z_\beta = \frac{Z_0 \operatorname{sh} \gamma l}{2 (\operatorname{ch} \gamma l - 1)} \quad (4.21)$$

esetén a kétkapú a $Z_0, \gamma l$ hullámparaméterekkel jellemzett távvezetékkel az U_1, I_1, U_2, I_2 kapcsolata szempontjából egyenértékű.

Olyan frekvenciasávra, amelyben $|\gamma l| \ll 1$, megadhatunk Z_a és Z_b , ill. Z_α és Z_β impedanciára közelítő kifejezéseket úgy, hogy a hiperbolikus függvényeket Taylor-soruk első néhány tagjával helyettesítjük.

Elsőfoku közelítésben:

$$\operatorname{ch} \gamma l \approx 1 ; \quad \operatorname{sh} \gamma l \approx \gamma l \quad (4.22)$$

Igy a T-helyettesítő kapcsolásban

$$Z_a \approx 0 \quad \text{és} \quad Z_b \approx \frac{Z_0}{\gamma l} \quad (4.23)$$

A Π -kapcsolásban:

$$Z_\alpha \approx Z_0 \gamma l \quad \text{és} \quad Z_\beta \approx \infty \quad (4.24)$$

Fejezzük ki a $Z_0 \gamma \ell$ és $Z_0 / \gamma \ell$ mennyiséget a távvezeték R , L , G , C paramétereivel!

$$Z_0 \gamma \ell = \ell \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = (R + j\omega L) \ell \quad (4.25)$$

$$\frac{Z_0}{\gamma \ell} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \frac{1}{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} = \frac{1}{(G + j\omega C) \ell} \quad (4.26)$$

Igy a helyettesítő T-tagban az első foku közelítést felhasználva:

$$Z_a \approx 0 \quad Z_b \approx \frac{1}{(G + j\omega C) \ell} \quad (4.27)$$

A π -tag elemei pedig ugyancsak az elsőfoku közelítést alkalmazva:

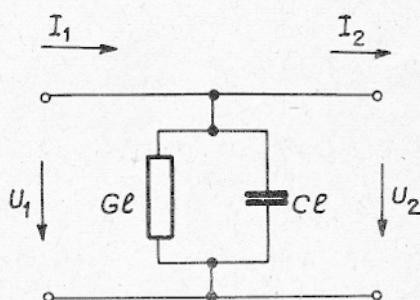
$$Z_\alpha \approx (R + j\omega L) \ell \quad Z_\beta \approx \infty \quad (4.28)$$

Ezen eredmények alapján egy-egy közelítő helyettesítő kapcsolást állítottunk fel a 4.5 és 4.6 ábrán.

Jobb közelítő kapcsolást kapunk, ha a hiperbolikus függvények másodfoku közelítését alkalmazzuk:

$$\cosh \gamma \ell \approx 1 + \frac{(\gamma \ell)^2}{2} \quad \text{és} \quad \sinh \gamma \ell \approx \gamma \ell$$

(4.29)

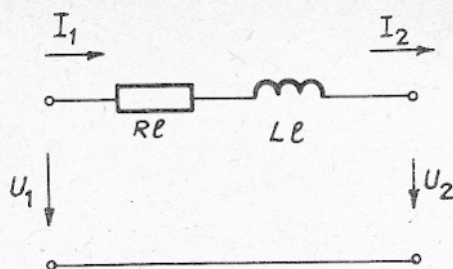


4.5 ábra

Ezt behelyettesítve (4.20)-ba, ill. (4.21)-be:

$$Z_a \approx Z_0 \gamma \ell = (R + j\omega L) \ell \quad ; \quad Z_b \approx \frac{Z_0}{\gamma \ell} = \frac{1}{(G + j\omega C) \ell} \quad (4.30)$$

$$Z_\alpha \approx Z_0 \gamma \ell = (R + j\omega L) \ell \quad ; \quad Z_\beta \approx \frac{Z_0}{\gamma \ell} = \frac{1}{(G + j\omega C) \ell} \quad (4.31)$$



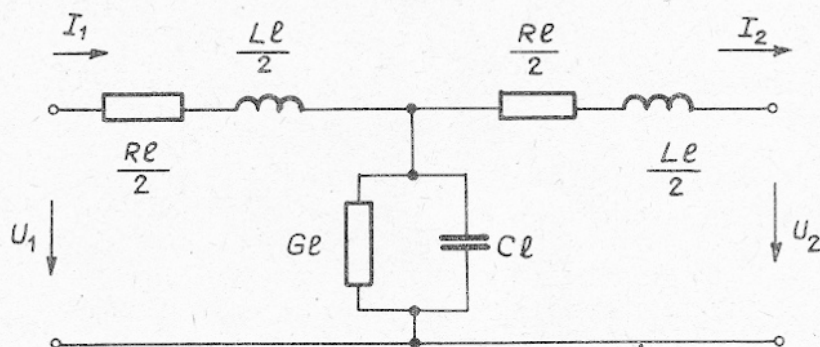
4.6 ábra

Ilyen adatokkal bíró helyettesítő kapcsolást mutatunk be a 4.7 és 4.8 ábrán. A soros Z_a , ill. Z_α impedancia megegyezik a távvezeték teljes ohmos és induktív ellenállásával, a Z_b , ill. Z_β kereszttag pedig az átvezetés és a kapacitív reaktancia párhuzamos kapcsolása.

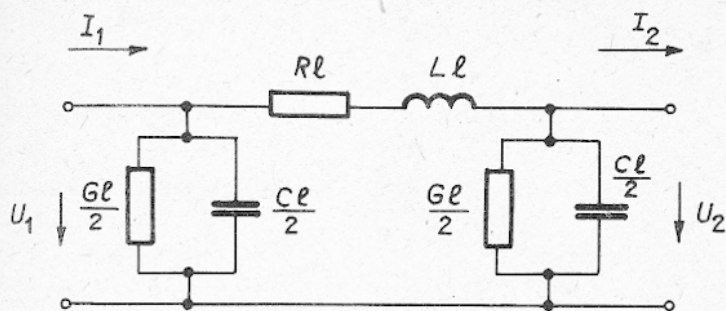
A hiperbolikus függvények sorából több tag figyelembevételével a távvezeték szakasz további

helyettesítő kapcsolása állapítható meg. Ezek a helyettesítő kapcsolások jól használhatók egyetlen frekvenciára. Alkalmazhatók olyan frekvenciatartományban is, amelyben $|\gamma \ell| \ll 1$, vagyis $\ell \ll \lambda$. Ez a feltétel azt jelenti, hogy a távvezeték rövid azokhoz a hullámhosszakhoz képest, amelyek a távvezetéken átvitt frekvenciákhoz tartoznak. Ha pl. a távvezetékét 50 Hz frekvenciájú jel átvitelére használjuk, akkor - mivel

$\lambda = 3 \cdot 10^8 / 50 = 6 \cdot 10^6$ m - a 6000 km-hez képest rövid távvezetéseket helyettesíthetjük koncentrált elemű kétkapuval. A fenti közelítések nem alkalmazhatók pl. transziens jelenségek számításánál, ugyanis ilyenkor a fellépő jelek spektrumában rendszerint számottevő nagyfrekvenciás komponens is van. Ekkor tehát a távvezetékét elosztott paraméterű hálózatként kell kezelni. Általában a hálózatok abban a frekvenciasávban kezelhetők koncentrált paraméterűnek, ha a méretek az alkalmazott hullámhosszakhoz képest kicsinyek.



4.7 ábra



4.8 ábra

4.3 TÁVVEZETÉK ILLESZTÉSE

Számos gyakorlati esetben el kell érni, hogy a távvezetéken jó közepességgel $\sigma = 1$ legyen az állóhullámarány. Ekkor a távvezeték illesztettnek mondjuk. A következőkben két egyszerű illesztési módszert mutatunk be. Ezekkel a módszerekkel egyetlen frekvencián érhető el illesztés. A számítást ideális távvezetékre végezzük, azonban az eljárás veszteséges távvezetékénél is alkalmazható. Az ismertetésre kerülő módszerek továbbfejlesztése módot ad távvezeték szélesebb frekvenciasávban történő illesztésére.

4.3.1 Illesztés $\lambda/4$ hosszúságú impedanciáttranszformátorral

A nem illesztett Z_0 hullámimpedanciájú ideális távvezetékbe lánckapcsolásban iktassunk be Z_t hullámimpedanciájú, $\ell = \lambda/4$ hosszúságú ideális távvezeték szakaszt (4.9 ábra). A β fázistényező értéke a Z_0 és a Z_t hullámimpedanciájú távvezetékre legyen azonos. Ez a szakasz az A és B jelű pontok között helyezkedik el. Az A helyen a távvezeték impedanciája Z_A . Vizsgáljuk meg a B helyen fellépő Z_B impedanciát, vagyis azt, hogy a beiktatott szakasz a Z_A impedanciát hogyan transzformálja. Figyelembe véve, hogy $\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$, (3.41) alapján:

$$Z_B = Z_t \frac{Z_A + j Z_t \operatorname{tg} \beta \frac{\lambda}{4}}{Z_t + j Z_A \operatorname{tg} \beta \frac{\lambda}{4}} = Z_t \frac{\frac{Z_A}{\operatorname{tg} \pi/2} + j Z_t}{\frac{Z_t}{\operatorname{tg} \pi/2} + j Z_A} = \frac{Z_t^2}{Z_A} \quad (4.32)$$

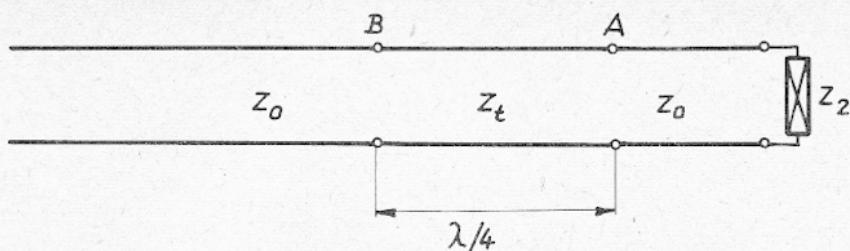
$$Z_t = Z_0$$

$$Z_t = Z_0$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_L \cosh \alpha x + Z_0 \sinh \alpha x}{Z_0 \cosh \alpha x + Z_L \sinh \alpha x}$$

$$\alpha = j\beta$$

$$\beta \text{ a fázistényező}$$



4.9 ábra

Illesztés esetén $\Gamma = 1$, $r = 0$. Ez akkor lehetséges, ha $Z_B = Z_0$. Minthogy Z_0 és Z_2 valós, illesztés akkor valósítható meg, ha Z_A is valós. Az illesztéshez tehát meg kell határozni olyan A helyet, ahol Z_A valós. Itt a 4.9 ábra szerinti módon (4.32)-ből

$$Z_t = \sqrt{Z_A Z_B} = \sqrt{Z_A Z_0}$$

hullámellenállásu, $\lambda/4$ hosszúságú távvezeték szakaszt beiktatva illesztést érhetünk el.

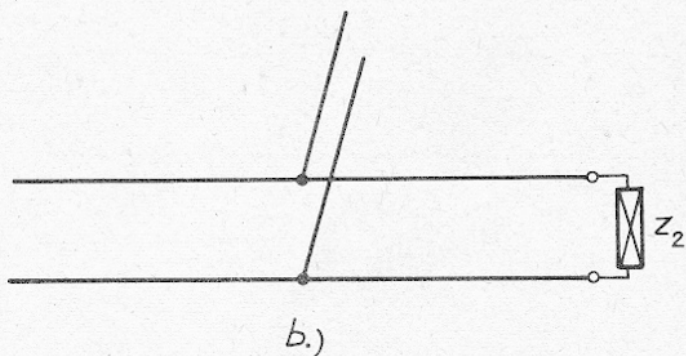
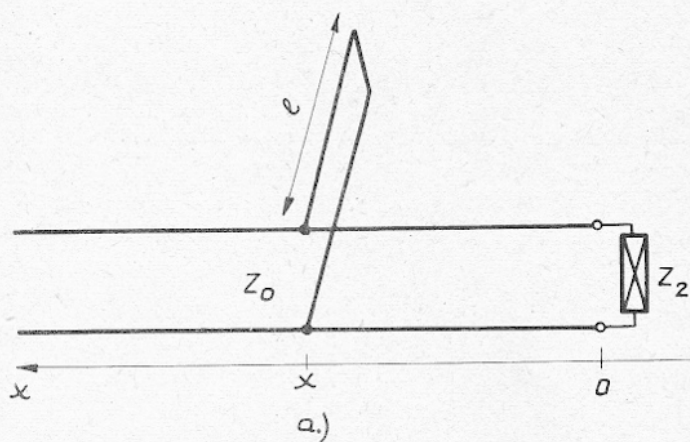
4.3.2 Illesztés csönkkel

Illesztés érhető el a lezárástól számított megfelelő helyen elhelyezett rövidzárral vagy szakadással lezárt távvezeték szakasszal, ún. illesztő csönkkel. A csönköt párhuzamosan (4.10 a és b ábra) vagy sorosan (4.11 a és b ábra) lehet kapcsolni a távvezetékkel. Az állóhullámarány frekvenciától való függésének jellege az egyes esetekben különböző. Ez figyelembe vehető egy illesztési feladat megoldásánál.

A következőkben részletesebben megvizsgáljuk a párhuzamosan kapcsolt, végén rövidrezárt csönkkel (4.10 a ábra) való illesztést.

Legyen a csönk hullámimpedanciája és terjedési együtthatója az ideális távvezeték $Z_0 = 1/Y_0$ hullámimpedanciájával és $j\beta$ terjedési együtthatójával egyenlő. Az illesztés feltétele, hogy az illesztés helyétől a lezárásig terjedő távvezeték szakasz $Z_x = 1/Y_x$ bemeneti impedanciájának és az ezzel párhuzamosan kapcsolt csönk $Z_{cs} = 1/Y_{cs}$ impedanciájának eredője megegyezzen a távvezeték hullámimpedanciájával, vagyis

$$\frac{1}{Z_o} = \frac{1}{Z_x} + \frac{1}{Z_{cs}} ; \quad Y_o = Y_x + Y_{cs} \quad (4.34)$$

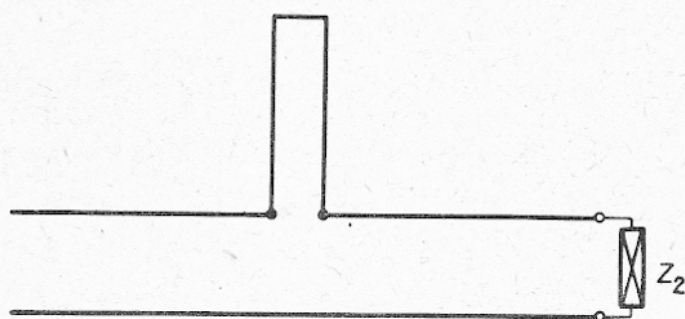


4.10 ábra

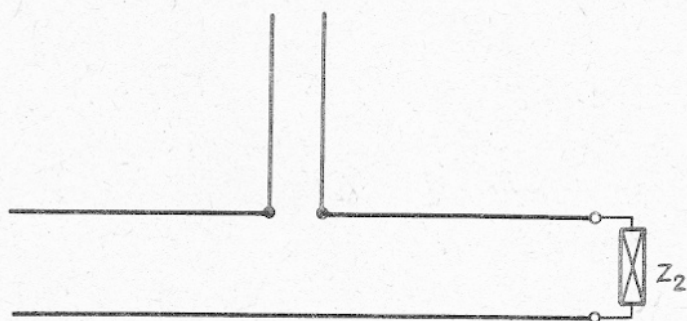
Ez a feltétel az x helyen beiktatott ℓ hosszúságú csonkkal elégíthető ki. Meg kell tehát határoznunk x és ℓ értékét. (3.41) alapján:

$$Z_{cs} = j Z_o \operatorname{tg} \beta \ell ; \quad Y_{cs} = -j Y_o \operatorname{ctg} \beta \ell \quad (4.35)$$

$$Z_x = Z_o \frac{Z_2 + j Z_o \operatorname{tg} \beta x}{Z_2 + j Z_o \operatorname{tg} \beta x} ; \quad Y_x = Y_o \frac{Y_2 + j Y_o \operatorname{tg} \beta x}{Y_o + j Y_2 \operatorname{tg} \beta x} \quad (4.36)$$



a.)



b.)

4.11 ábra

Ezeket (4.34)-be helyettesítve:

$$Y_o = Y_o \frac{Y_2 + j Y_o \operatorname{tg} \beta x}{Y_o + j Y_2 \operatorname{tg} \beta x} - j Y_o \operatorname{ctg} \beta \ell \quad (4.37)$$

Ebből az $Y_2 = G_2 + j B_2$ jelölést bevezetve kapjuk, hogy

$$Y_o - B_2 \operatorname{tg} \beta x + j G_2 \operatorname{tg} \beta x = G_2 + G_2 \operatorname{tg} \beta x \operatorname{ctg} \beta \ell + \\ + j (B_2 + B_2 \operatorname{tg} \beta x \operatorname{ctg} \beta \ell + Y_o \operatorname{tg} \beta x - Y_o \operatorname{ctg} \beta \ell) \quad (4.38)$$

Ezért, ill. a képzetes részek egyenlőségéből:

$$Y_0 - B_2 \operatorname{tg} \beta x = G_2 + G_2 \operatorname{tg} \beta x \operatorname{ctg} \beta l \quad (4.39)$$

$$G_2 \operatorname{tg} \beta x = B_2 + Y_0 \operatorname{tg} \beta x - Y_0 \operatorname{ctg} \beta l + B_2 \operatorname{tg} \beta x \operatorname{ctg} \beta l \quad (4.40)$$

Az (4.39)-ből $\operatorname{ctg} \beta l$ -et kifejezve és (4.40)-be helyettesítve $\operatorname{tg} \beta x$ és $\operatorname{ctg} \beta l$ kifejezhető.

$$\operatorname{tg} \beta x = \frac{Y_0 B_2 + \sqrt{Y_0^2 B_2^2 - (G_2^2 - Y_0 G_2 + B_2^2)(Y_0^2 - Y_0 G_2)}}{G_2^2 - Y_0 G_2 + B_2^2} \quad (4.41)$$

$$\operatorname{ctg} \beta l = \frac{Y_0 - B_2 \operatorname{tg} \beta x - G_2}{G_2 \operatorname{tg} \beta x}$$

(4.41)-ből x és l meghatározható. Látható, hogy x -re és l -re több lehetséges érték adódhat. Ezzel a 4.10 a ábrán vázolt elrendezés illesztő csomkjának helyét és hosszát meghatároztuk. Hasonlóan tárgyalható a 4.10 b, 4.11 a és b ábrán vázolt elrendezéssel történő illesztés (lásd 4.5 e) feladat).

4.4 TÁVVEZETÉK SZAKASZ, MINT REZGŐKÖR

4.4.1 Ideális távvezeték szakasz

A végén rövidrezárt Z_0 hullámimpedanciájú ideális távvezetéken – mint láttuk – állóhullámok alakulnak ki. A távvezeték impedanciája a leírásból x távolságban (3.41) szerint

$$Z(x) = j Z_0 \operatorname{tg} \beta x \quad (4.42)$$

Enek értéke zérus, ha

$$\beta x_m = m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.43)$$

azaz az

$$x_m = m \frac{\pi}{\beta} = m \frac{\lambda}{2} = m \pi \frac{v}{\omega_0} \quad (4.44)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

helyeken. Az x_m hosszúságu távvezeték impedanciája az ω függvényében a

$$Z = j Z_0 \operatorname{tg} \frac{\omega}{v} x_m \quad (4.45)$$

összefüggésnek megfelelően előjelet vált. A távvezeték szakasz impedanciája ω_0 környezetében tehát egy ideális soros rezgőköréhez hasonlóan viselkedik.

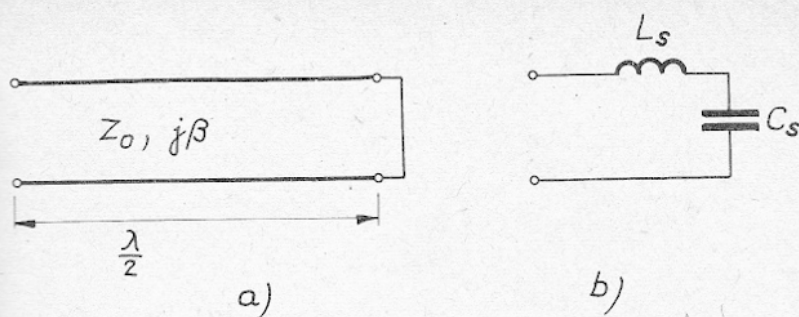
A rövidrezárt ideális távvezeték szakasz rezgőkörnek tekinthető. Villamos energiája a feszültségével, mágneses energiája az áramával fejezhető ki. Láttuk, hogy a feszültség és az áram között 90° fáziskülönbség van a távvezeték bármely x koordinátájú helyén, vagyis ha pl. a feszültségnek szélső értéke van, akkor az áram zérus. Ez annak a pillanatnak felel meg, amikor a tárolt teljes energia villamos energia és a mágneses energia zérus. Amikor a feszültség zérus, akkor az áramnak van szélső értéke és a teljes energia mágneses energia formájában kerül tárolásra. A villamos és a mágneses energia hasonlóan alakul át egymásba, mint koncentrált elemű ideális soros rezgőkör esetén.

Azon az ℓ helyen, ahol a rövidrezárt ideális távvezeték bemeneti impedanciája zérus, a távvezeték két vezetőjét rövidzárral összeköthetjük anélkül, hogy ez a távvezeték mentén a feszültség- és az áramértékeket befolyásolná. Az ilyen elrendezés rezonancia frekvenciája:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2\ell} \quad m = \frac{m}{2\ell \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.46)$$

vagyis – a koncentrált elemű rezgőkörrel ellentétben – az elosztott paraméterű rezgőkörnek végtelen sok rezonancia frekvenciája van.

Az előbbiek szerint az $\ell = \lambda/2$ hosszúságu, végén rövidrezárt ideális távvezeték (4.12 a ábra) az $\omega_0 = \beta v$ körfrekvencia környezetében egyenértékű egy soros rezgőkörrel (4.12 b ábra). A soros rezgőkör L_s induktivitását és C_s kapacitását a következőképpen határozhatjuk meg.



4.12 ábra

A soros rezgőkör rezonancia körfrekvenciája ugyancsak ω_0 , vagyis

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (4.47)$$

Induljunk ki továbbá abból, hogy a távvezeték és a rezgőkör bemeneti reaktanciájának ω szerinti deriváltja $\omega = \omega_0$ -nál legyen egyenlő. A rezgőkör bemeneti reaktanciája:

$$X_r = \omega L_s - \frac{1}{\omega C_s} \quad (4.48)$$

A távvezetéké:

$$X_t = Z_0 \operatorname{tg} \beta \frac{\lambda}{2} = Z_0 \operatorname{tg} \frac{\omega}{v} \frac{\lambda}{2} \quad (4.49)$$

Ezekből

$$\frac{dX_r}{d\omega} = L_s + \frac{1}{\omega^2 C_s} \quad (4.50)$$

$$\frac{dX_t}{d\omega} = \frac{\lambda}{2v} \frac{Z_0}{\cos^2\left(\frac{\omega}{v} \frac{\lambda}{2}\right)} \quad (4.51)$$

Igy (4.47) felhasználásával:

$$\left(\frac{d X_r}{d \omega} \right)_{\omega=\omega_0} = L_s + \frac{1}{\omega_0^2 C_s} = 2 L_s \quad (4.52)$$

és

$$\left(\frac{d X_t}{d \omega} \right)_{\omega=\omega_0} = Z_0 \frac{\lambda}{2 v} = \pi \frac{Z_0}{\omega_0} \quad (4.53)$$

Feltételünk teljesül tehát, ha

$$2 L_s = \pi \frac{Z_0}{\omega_0} \quad (4.54)$$

vagyis ha

$$L_s = \frac{\pi}{2} \frac{Z_0}{\omega_0} \quad \text{és} \quad C_s = \frac{2}{\pi Z_0 \omega_0} \quad (4.55)$$

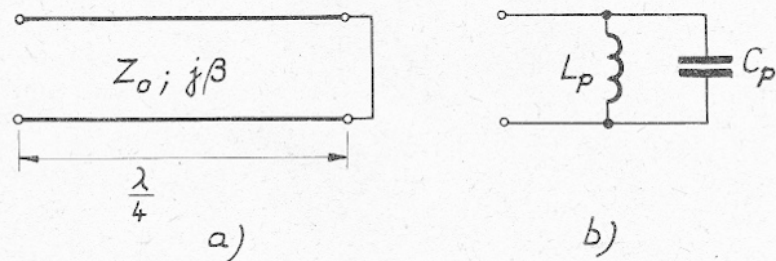
(4.42) szerint a végén rövidrezárt ideális távvezeték impedanciája végtelenné válik, ha

$$\beta x_n = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.56)$$

vagyis a lezárástól számított

$$x_n = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad (4.57)$$

helyeken. Az impedancia az ω függvényében itt is előjelet vált. Az ilyen hosszúságú, végén rövidrezárt, bemenetén szakadással lezárt ideális távvezeték párhuzamos rezgőkörhöz hasonlóan viselkedik.



4.13 ábra

Az $\ell = \lambda/4$ hosszúságú rövidrezárt ideális távvezetékkel (4.13 a ábra) az $\omega = \omega_0$ környezetében egyenértékű párhuzamos rezgőkör (4.13 b ábra) L_p és C_p elemeit ebből a feltételből határozhatjuk meg, hogy a bemeneti szuszceptancia ω szerinti deriváltja az $\omega = \omega_0$ helyen legyen egyenlő és természetesen az ω_0 antirezonancia körfrekvencia (pólus) is egyezzen meg. A rezgőkörre:

$$B_r = \omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \quad (4.58)$$

a távvezetékre pedig:

$$B_t = -Y_0 \operatorname{ctg} \beta \frac{\lambda}{4} = -Y_0 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{v} \frac{\lambda}{4} \quad (4.59)$$

$$\frac{d B_r}{d \omega} = C_p + \frac{1}{\omega^2 L_p} \quad (4.60)$$

$$\frac{d B_t}{d \omega} = \frac{\lambda}{4 v} \frac{Y_0}{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} \frac{\lambda}{4} \right)} \quad (4.61)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}} \quad (4.62)$$

összeftigés felhasználásával:

$$\left(\frac{d B_r}{d \omega} \right)_{\omega = \omega_0} = C_p + \frac{1}{\omega_0^2 L_p} = 2 C_p \quad (4.63)$$

és

$$\left(\frac{dB_t}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{\lambda}{4v} Y_0 = \frac{\pi}{2\omega_0 Z_0} \quad (4.64)$$

A feltétel teljesül, ha

$$2C_p = \frac{\pi}{2\omega_0 Z_0} \quad (4.65)$$

vagyis

$$C_p = \frac{\pi}{4\omega_0 Z_0} \quad \text{és} \quad L_p = \frac{4Z_0}{\pi\omega_0} \quad (4.66)$$

Ezzel a $\lambda/4$ hosszúságú, végén rövidrezárt ideális távvezetékkel az anti-rezonancia környezetében egyenértékű párhuzamos rezgőkör adatait kiszámítottuk.

Vizsgáljuk ezután a nyitott végű ideális távvezetékét. Ennek impedanciája:

$$Z(x) = -j Z_0 \operatorname{ctg} \beta x \quad (4.67)$$

A bemeneti impedancia értéke zérus, ha

$$\beta x_p = (2p+1) \frac{\pi}{2} \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.68)$$

Az ennek megfelelő $x_p = (2p+1) \frac{\lambda}{4}$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) hosszúságú távvezeték az előbbieken tárgyalt, a bemenetén szakadással, a kimenetén rövidzárral lezárt távvezetékhez hasonlóan soros rezgőkörként viselkedik.

A (4.67) impedancia kifejezése végtelenné válik, ha

$$\beta x_q = q\pi \quad (q = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.69)$$

vagyis $x_q = q \frac{\lambda}{2}$ ($q = 1, 2, 3, \dots$) hosszúságú szakadással lezárt ideális távvezeték szintén ideális párhuzamos rezgőkörként viselkedik.

4.4.2 Veszteséges távvezeték szakasz, mint rezgőkör

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy Z_0 hullámimpedanciájú, γ terjedési együtthatójú, kiscsillapítású, végén rövidrezárt távvezetéken milyen $\lambda/4$ körüli hosszúság esetén van antirezonancia.

A bemeneti impedancia (3.40) alapján:

$$Z(x=l) = Z_0 \operatorname{th} \gamma l = Z_0 \operatorname{th} (\alpha + j\beta)l \quad (4.70)$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\operatorname{th} (\alpha + j\beta)l = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha l + j \sin 2\beta l}{\operatorname{ch} 2\alpha l + \cos 2\beta l} \quad (4.71)$$

és kis csillapítás esetén:

$$\operatorname{sh} 2\alpha l \approx 2\alpha l \quad (4.72)$$

$$\operatorname{ch} 2\alpha l \approx 1 + 2\alpha^2 l^2 \quad (4.73)$$

$\alpha l = \lambda/4 - x$ jelölés bevezetésével és feltételezve, hogy $x \ll \frac{\lambda}{4\pi}$:

$$\sin 2\beta l = \sin \left(\pi - 4\pi \frac{x}{\lambda} \right) = \sin 4\pi \frac{x}{\lambda} \approx 4\pi \frac{x}{\lambda} \quad (4.74)$$

$$\cos 2\beta l = \cos \left(\pi - 4\pi \frac{x}{\lambda} \right) = -\cos 4\pi \frac{x}{\lambda} \approx -1 + 8\pi^2 \frac{x^2}{\lambda^2} \quad (4.75)$$

Igy

$$\operatorname{th} (\alpha + j\beta)l \approx \frac{\alpha l + j 2\pi \frac{x}{\lambda}}{\alpha^2 l^2 + 4\pi^2 \frac{x^2}{\lambda^2}} = \frac{1}{\alpha l - j 2\pi \frac{x}{\lambda}} \quad (4.76)$$

Kiscsillapítású távvezetékénél (2.56) szerint a hullámimpedancia:

$$Z_0 \approx Z'_0 (1 - j\zeta) \quad (4.77)$$

ahol

$$Z'_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{és} \quad \zeta = \frac{R}{2\omega L} - \frac{G}{2\omega C} \quad (4.78)$$

A bemeneti impedancia tehát a következőképpen írható fel:

$$Z(x=l) \approx Z'_0 \frac{1 - j\zeta}{\alpha l - j2\pi \frac{x}{\lambda}} \quad \text{Im} = 0 \quad (4.79)$$

Antirezonancia esetén a bemeneti impedancia valós, vagyis

$$\zeta = \frac{2\pi \frac{x}{\lambda}}{\alpha l} = \frac{2\pi \frac{x}{\lambda}}{\alpha \left(\frac{\lambda}{4} - x \right)} \quad (4.80)$$

Ebből

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha \zeta \frac{\lambda}{4}}{\frac{2\pi}{\lambda} + \alpha \zeta} = \lambda^2 \frac{\alpha \zeta}{4(2\pi + \alpha \zeta \lambda)} \approx \\ &\approx \lambda^2 \frac{\alpha \zeta}{8\pi} \left(1 - \lambda \frac{\alpha \zeta}{2\pi} \right) \approx \lambda^2 \frac{\alpha \zeta}{8\pi} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Felhasználva α -nak (2.51) alatti kifejezését kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ x &\approx \frac{\lambda^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{4\omega} \left(\frac{R^2}{L} \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{G^2}{C} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) = \\ &= \left(\frac{\lambda}{4} \right)^3 \frac{1}{\pi^2} \frac{2\omega}{\lambda} \left(R^2 \cdot \frac{C}{L} - G^2 \cdot \frac{L}{C} \right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

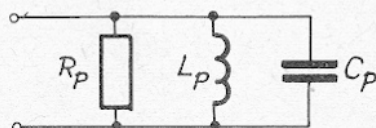
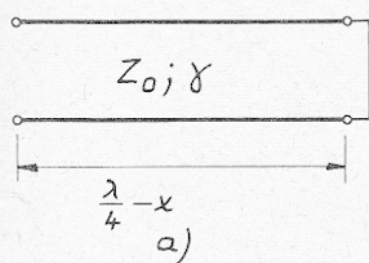
Antirezonancia lép fel az $l = \frac{\lambda}{4} - x$ hossz esetén. Látható, hogy

$$l \approx \frac{\lambda}{4}, \quad \text{ha } x \approx 0, \quad \text{azaz} \quad R^2 \frac{C}{L} = G^2 \frac{L}{C},$$

$$\ell > \frac{\lambda}{4}, \text{ ha } x < 0, \text{ azaz } R^2 \frac{C}{L} < G^2 \frac{L}{C},$$

$$\ell < \frac{\lambda}{4}, \text{ ha } x > 0, \text{ azaz } R^2 \frac{C}{L} > G^2 \frac{L}{C}.$$

Az ilyen távvezeték szakasszal (4.14 a ábra) az ω_0 antirezonancia körfrekvencia környezetében egyenértékű párhuzamos rezgőkör (4.14 b ábra) (lásd 2. füzet) elemeinek értéke a következőképpen határozható meg: L_p és C_p értékét a veszteség figyelmen kívül hagyásával számítjuk ki, vagyis a (4.66) eredményt használjuk fel, azonban Z_0 helyébe Z'_0 -t kell írni.



4.14 ábra

R_p értéke a távvezeték bemeneti impedanciájával egyenlő az antirezonancia körfrekvencián. Vagyis (4.79) alapján

$$\begin{aligned} R_p = \frac{Z'_0}{\alpha \ell} &\approx \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda}{4} - x} \approx Z_0'^2 \frac{8}{(R + G Z_0')^2} = \\ &= Z_0'^2 \frac{\beta}{R + G Z_0'^2} \frac{4}{\pi} \end{aligned} \quad (4.83)$$

A jósági tényező ω_0 -nál tehát:

$$Q_o = \omega_o R_p C_p = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{Z_o'}{R + G Z_o'^2} = \beta \frac{1}{\frac{R}{Z_o'} + G Z_o'} \quad (4.84)$$

Ha a távvezeték átvezetése elhanyagolható ($G \approx 0$), akkor

$$R_p \approx \frac{Z_o'^2}{R} \beta \frac{4}{\pi} \quad \text{és} \quad Q_o \approx \beta \frac{Z_o'}{R} \quad (4.85)$$

Hasonlóan tárgyalhatók a $\lambda/4$ körüli hosszúságu, végén szakadással lezárt, továbbá a $\lambda/2$ körüli hosszúságu, végén rövidrezárt, ill. szakadással lezárt veszteséges távvezetéken fellépő rezgési jelenségek és meghatározhatók a távvezeték szakasszal egyenértékű koncentrált paraméterű rezgőkörök adatai. Ilyen számítást mutat be a 4.5 j) példa.

4.5 PÉLDÁK ÉS FELADATOK

$$Z_o = 60 \Omega$$

a) Ideálisnak tekinthető távvezeték hullámimpedanciája: $Z_2 = (40 - j 30) \Omega$. Határozzuk meg azokat a helyeket, ahol a távvezeték mentén az impedancia valós és számítsuk ki az értékét!

Az impedancia a lezárástól x távolságban a $Z_2 = R_2 + j X_2$ jelöléssel:

$$\begin{aligned} Z &= Z_o \frac{R_2 + j X_2 + j Z_o \operatorname{tg} \beta x}{Z_o + j (R_2 + j X_2) \operatorname{tg} \beta x} = Z_o \frac{R_2 + j (X_2 + Z_o \operatorname{tg} \beta x)}{Z_o - X_2 \operatorname{tg} \beta x + j R_2 \operatorname{tg} \beta x} = \\ &= Z_o \frac{R_2}{Z_o - X_2 \operatorname{tg} \beta x} \frac{1 + j (X_2 + Z_o \operatorname{tg} \beta x) / R_2}{1 + j R_2 \operatorname{tg} \beta x / (Z_o - X_2 \operatorname{tg} \beta x)} \end{aligned}$$

Z valós tehát, ha

$$\frac{X_2 + Z_o \operatorname{tg} \beta x}{R_2} = \frac{R_2 \operatorname{tg} \beta x}{Z_o - X_2 \operatorname{tg} \beta x}$$

Ebből $\operatorname{tg} \beta x$ kiszámítható. Rendezve ezt az egyenletet:

$$Z_0 X_2 \operatorname{tg}^2 \beta x + (R_2^2 + X_2^2 - Z_0^2) \operatorname{tg} \beta x - Z_0 X_2 = 0$$

$$\operatorname{tg} \beta x = \frac{Z_0^2 - R_2^2 - X_2^2 \pm \sqrt{(Z_0^2 - R_2^2 - X_2^2)^2 + 4 Z_0^2 X_2^2}}{-2 Z_0 X_2} = \frac{44 \pm \sqrt{1417}}{-36}$$

$$\operatorname{tg} \beta x_1 = -1,351$$

$$\operatorname{tg} \beta x_2 = 0,740$$

$$\beta x_1 = k_1 \pi + 2,208$$

$$\beta x_2 = k_2 \pi + 0,637$$

$$\beta = 2\pi$$

$$(k_1 = 0, 1, 2, \dots; \quad k_2 = 0, 1, 2, \dots)$$

A lezáráshoz legközelebb eső helyek ezek közül a $k_1 = k_2 = 0$ -hoz tartozók.
Ebből

$$x_1 = \frac{2,208}{\beta} = \frac{2,208}{6,28} \lambda = 0,351 \lambda; \quad x_2 = \frac{0,637}{6,28} \lambda = 0,101 \lambda$$

A két távolság különbsége a hullámhossz negyede.

$$x_1 - x_2 = \frac{\lambda}{4} = 0,25 \lambda$$

Az x_1 , ill. x_2 helyen mérhető ellenállás:

$$Z(x_1) = Z_0 \frac{R_2}{Z_0 - X_2 \operatorname{tg} \beta x_1} = 23,87 \Omega; \quad Z(x_2) = 63,49 \Omega$$

b) $f = 100$ MHz-en ideálisnak tekinthető, $Z_0 = 60 \Omega$ hullámmellenállású légszigetelésű távvezeték lezárása: $Z_2 = (40 - j 30) \Omega$. Illesszük ezt a távvezetékhez $\lambda/4$ hosszúságú impedancia transzformátorral!

Az impedancia transzformátort éppen az a) példában kiszámított helyekre lehet elhelyezni. Válasszuk ezek közül a lezáráshoz legközelebb esőt, vagyis helyezzük a $\lambda/4 = 3/4$ m hosszúságú impedancia transzformátort a lezárástól $x_2 = 0,101 \lambda = 0,303$ m távolságra. Az impedancia transzformátor hullámimpedanciája (4.33) és az a) példa értelmében

$$f \rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$

$$Z_t = \sqrt{63,49 \cdot 60} = 61,72 \Omega$$

kell, hogy legyen.

c) Oldjuk meg a b) példában szereplő illesztést 60Ω hullámellenállásu a végén rövidrezárt illesztő csomaggal, amelyet a távvezetékkel párhuzamosan kapcsolunk.

Meg kell tehát határoznunk a csomaggal lezárástól számított x távolságát és a csomaggal l hosszát. Ehhez szükséges $Y_0 = 1/Z_0$ és $Y_2 = 1/Z_2 = G_2 + jB_2$ meghatározása. Az adatokból:

$$Y_0 = \frac{1}{60} \text{ S}; \quad Y_2 = \frac{40 + j30}{2500} = (16 + j12) \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

Ezek felhasználásával (4.41) alapján:

$$\operatorname{tg} \beta x_1 = 0,02805$$

$$\operatorname{tg} \beta x_2 = 2,92$$

$$\operatorname{ctg} \beta l_1 = 0,735$$

$$\operatorname{ctg} \beta l_2 = -0,735$$

A csomaggal helyére és hosszára két-két értéksorozatot kapunk. A lezáráshoz legközelebbi két hely:

$$x_1 = \frac{0,02805}{\beta} = \frac{0,02805}{6,28} \cdot 3 = 0,01342 \text{ m}; \quad x_2 = \frac{1,247}{6,28} = 0,595 \text{ m}$$

és a két legkisebb hossz:

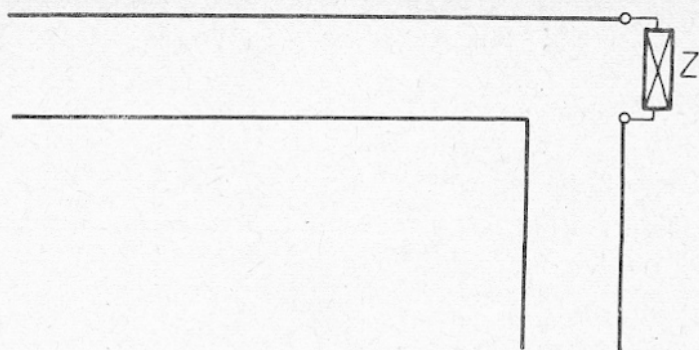
$$l_1 = \frac{0,9358}{6,28} \cdot 3 = 0,446 \text{ m}; \quad l_2 = \frac{2,205}{6,28} \cdot 3 = 1,05 \text{ m}$$

d) 200Ω hullámimpedanciájú, légszigetelésű ideális távvezeték az $f_1 = 80 \text{ MHz}$ és $f_2 = 100 \text{ MHz}$ közötti frekvenciasávban működő antennát táplál. Az antenna impedanciája 80 MHz -en $(190 + j60) \Omega$, 100 MHz -en $(190 - j60) \Omega$ és $f_0 = 89,5 \text{ MHz}$ -en 200Ω . Az állóhullámaránynak a két sávszélen való javítása céljából egy sorbakapcsolt csomaggal iktatunk a lezárásnál a távvezetékbe (4.15 ábra). Méretezzük a csomaggal!

Válasszuk a csomaggal $\lambda_0/4$ hosszúságúnak, ahol $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$.

Végeit nyitvahagyva a csomaggal bemeneti impedanciája (3.34) szerint:

$$Z_{cs} = -j Z_{ocs} \operatorname{ctg} \beta \frac{\lambda_0}{4} = -j Z_{ocs} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)$$



4.15 ábra

Ebből látható, hogy – mivel Z_{ocs} valós – Z_{cs} reaktanciát jelent mégpedig

$$Z_{cs} = 0 \quad , \quad \text{ha } \lambda = \lambda_0 \quad (\lambda_0 = c/f_0)$$

$$Z_{cs} = j X_{cs1} \quad , \quad X_{cs1} < 0, \text{ ha } \lambda = \lambda_1 < \lambda_0 \quad (\lambda_1 = c/f_1)$$

$$Z_{cs} = j X_{cs2} \quad , \quad X_{cs2} > 0, \text{ ha } \lambda = \lambda_2 > \lambda_0 \quad (\lambda_2 = c/f_2)$$

vagyis a csomak reaktanciájával az impedancia képzetes része kompenzálható, ha $X_{cs1} = -60 \Omega$ és $X_{cs2} = 60 \Omega$. A Z_{cs} -re felírt összefüggésből:

Ami azt jelenti, hogy a csomak reaktanciájával az impedancia képzetes része kompenzálható.

$$X_{cs1} = -60 = -Z_{ocs} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) = -Z_{ocs} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{f_0}{f_1} \right) =$$

$$= -Z_{ocs} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{80}{89,5} \right) = -Z_{ocs} 0,1694$$

amiből

$$Z_{ocs} = \frac{60}{0,1694} = 354 \Omega$$

A csomak alkalmazása nélkül a reflexiós tényező:

$$r_2 = \frac{190 + j 60 - 200}{190 + j 60 + 200} = 0,154 e^{+j 89^\circ 20'}$$

A csomk alkalmazásával pedig:

$$r_{2cs} = \frac{190 - 200}{190 + 200} = -0,0256$$

Látható, hogy a javulás számottevő.

e) Határozza meg a távvezetékkel sorba kapcsolt, végén nyitott csomk l hosszát és a lezárástól való x távolságát, ha a Z_0 hullámimpedanciájú, $j\beta$ terjedési együtthatóju csomkkal az ugyanilyen paraméterekkel bíró ideális távvezeték és a $Z_2 = R_2 + jX_2$ lezáró impedancia illesztését kívánjuk elérni.

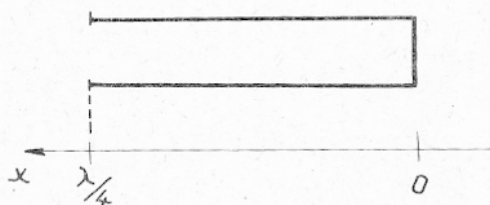
Megoldás:

x és l a következő egyenletek megoldása útján kapható:

$$(R_2 Z_0 - R_2^2 - X_2^2) \operatorname{tg}^2 \beta x + 2 Z_0 X_2 \operatorname{tg} \beta x + Z_0 (Z_0 + R_2) = 0$$

$$\operatorname{ctg} \beta l = \frac{(R_2 - Z_0) \operatorname{tg} \beta x - X_2}{Z_0 - X_2 \operatorname{tg} \beta x}$$

f) Mutassuk ki, hogy egyik végén rövidrezárt, másik végén nyitott $l = \lambda/4$ hosszúságú ideális távvezeték villamos és mágneses energiájának összege rezgés esetén az időben állandó.



4.16 ábra

A távvezeték mentén (4.16 ábra) a feszültség és áram (3.23) és (3.28) alapján annak valós részével írható le:

$$u(x, t) = -U_0 \sin \beta x \sin \omega t$$

$$i(x, t) = \frac{U_0}{Z_0} \cos \beta x \cos \omega t$$

A távvezeték dx hosszú darabjának energiája kifejezhető a távvezeték jellemző L és C vezetékparaméterek felhasználásával, így a $\lambda/4$ hosszúságú szakasz energiája:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\lambda/4}^0 (C u^2 + L i^2) dx$$

Behelyettesítve a feszültség és áram kifejezését:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} U_o^2 \int_{\lambda/4}^0 \left[C \sin^2 \omega t \sin^2 \beta x + \frac{L}{Z_o^2} \cos^2 \omega t \cos^2 \beta x \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} U_o^2 C \sin^2 \omega t \frac{\lambda}{8} + \frac{1}{2} U_o^2 \frac{L}{Z_o^2} \cos^2 \omega t \frac{\lambda}{8} \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $Z_o^2 = L/C$, kapjuk, hogy

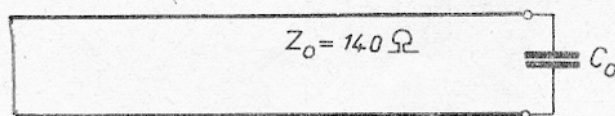
$$W = \frac{1}{2} C U_o^2 \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{1}{2} L I_o^2 \frac{\lambda}{8}$$

ahol az $I_o = U_o / Z_o$ jelölést alkalmaztuk.

g) Mutassa ki, hogy mindkét végén rövidrezárt $l = \lambda/2$ hosszúságú ideális távvezetéken a villamos és mágneses energia összege rezgés esetén állandó.

A megoldás az f) példához hasonlóan történhet.

h) Egy $C_o = 10$ pF kapacitású elektroncsőhöz $Z_o = 140 \Omega$ hullámimpedanciájú, légszigetelésű, egyik végén rövidrezárt ideális távvezetékűből 20 MHz rezonancia frekvenciára rezgőkört kívánunk méretezni (4.17 ábra). Határozzuk meg a csók szükséges hosszát és az első két felharmonikus frekvenciáját!



4.17 ábra

Láttuk (3.4 pont g) példa), hogy a kapacitással történő lezárás következtében a távvezeték

$$d = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \omega C_0 Z_0$$

darabbal hosszabb, szakadással lezárt távvezetéként vehető figyelembe. Példánkban az alapharmonikus esetén:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{20 \cdot 10^6} = 15 \text{ m}; \omega_0 = 125,6 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

és így

$$d_0 = \frac{15}{6,28} \arctan 0,1758 = 0,416 \text{ m}$$

A 4.3.2 pontban foglaltak és az előbbiek alapján a vezetékcsomók szükséges hossza:

$$l = \frac{\lambda_0}{4} - d_0 = 3,75 - 0,416 = 3,33 \text{ m}$$

A felharmonikusok hullámhossza – és így a frekvenciája – abból határozható meg, hogy a felharmonikusnak megfelelő d -vel meghosszabbított vezetéken a felharmonikusok hullámhosszának negyede páratlanszor mérhető fel, vagyis

$$l + d = l + \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \omega C_0 Z_0 = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Ebből a $\lambda = c/f$ és $\omega = 2\pi f$ összefüggés felhasználásával:

$$\arctan 2\pi f C_0 Z_0 = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{l}{c} f$$

vagyis

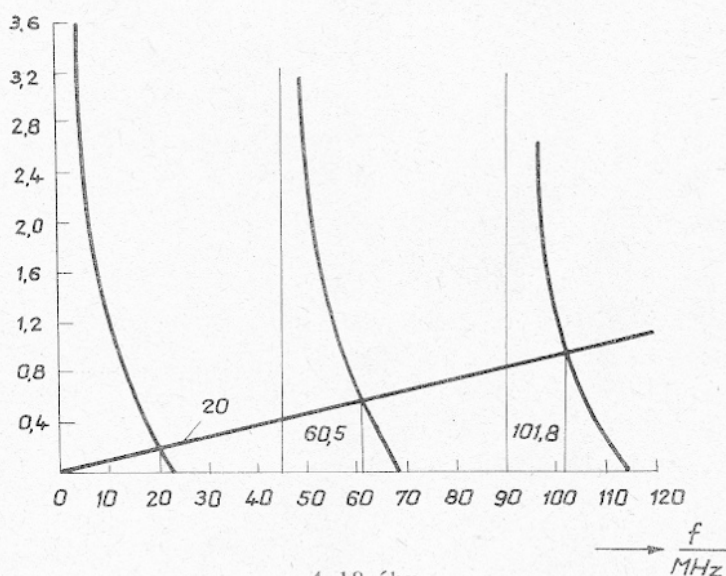
$$2\pi f C_0 Z_0 = \tan \left[(2n + 1) \frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{l}{c} f \right] = \cotg 2\pi \frac{l}{c} f$$

Behelyettesítve az adatokat kapjuk, hogy

$$6,28 \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 140 f = \operatorname{ctg} \frac{6,28 \cdot 2,33}{3 \cdot 10^8} f$$

$$8,8 \cdot 10^{-9} f = \operatorname{ctg} 69,8 \cdot 10^{-9} f$$

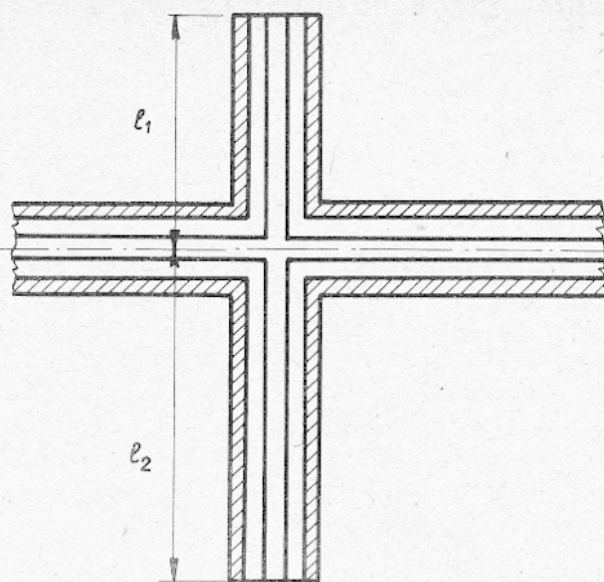
Ezt az egyenletet grafikusan oldjuk meg. A 4.18 ábrán az origón áthaladó egyenes az egyenlet bal oldalát ábrázolja. A cotangens görbékkel való metszéspont abszcisszája adja a felharmonikusokat. A 4.18 ábrán három metszéspont látható. Ezekből az első 20 MHz, vagyis az alapharmonikus, a második 60,5 MHz, a harmadik 101,8 MHz abszcisszája a kapacitással lezárt távvezeték felharmonikusainak megfelelően. Ezek az értékek nem sokkal térnek el a kapacitás nélküli nyitott végű tápvonal (3.20 = 60 MHz és 5.20 = 100 MHz) felharmonikusaitól.



4.18 ábra

i) Hogyan válasszuk a 4.19 ábrán vázolt, végén rövidrezárt két csonc hosszát, ha azt kívánjuk, hogy a csoncok az f_1 frekvencián rövidzárat jelentsenek, az f_2 frekvenciájú hullámot pedig csillapítás nélkül átengedjék.

A távvezeték és a csoncok azonos hullámimpedanciával és terjedési együtthatóval rendelkező ideális tápvonalak.



4.19 ábra

$$Z(x) = -jZ_0 \tan \beta x = 0$$

$x = l_1$

Ha $l_1 = \lambda_1/2$ ($\lambda_1 = c/f_1$), akkor az l_1 hosszúságú csomk (3.29) értelmében az f_1 frekvencián rövidzárat jelent.

A két csomknak együttesen f_2 frekvencián zérus admittanciájúnak kell lennie, vagyis

$$Y_1 + Y_2 = -j Y_0 (\operatorname{ctg} \beta l_1 + \operatorname{ctg} \beta l_2) = 0$$

ahogy a csomk

ahol $Y_0 = 1/Z_0$ a hullámadmittancia. Ebből

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta l_1 + \operatorname{ctg} \beta l_2 &= \frac{\cos \beta l_1 \sin \beta l_2 + \cos \beta l_2 \sin \beta l_1}{\sin \beta l_1 \sin \beta l_2} = \\ &= \frac{\sin \beta (l_1 + l_2)}{\sin \beta l_1 \sin \beta l_2} = 0 \end{aligned}$$

vagyis

$$\beta (l_1 + l_2) = k \pi;$$

$$\beta l_1 \neq k_1 \pi; \quad \beta l_2 \neq k_2 \pi$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots ; \quad k_1 = 1, 2, 3, \dots ; \quad k_2 = 1, 2, 3, \dots)$$

Igy

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} (\ell_1 + \ell_2) = k\pi ; \quad \ell_1 + \ell_2 = k \frac{\lambda_2}{2}$$

$k = 1$ esetén:

$$\ell_1 + \ell_2 = \lambda_2/2 \quad (\lambda_2 = c/f_2)$$

vagyis $\ell_1 = \lambda_1/2$ -t figyelembevéve:

$$\ell_2 = \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1}{2}$$

Ha ebből ℓ_2 -re negatív érték adódik, akkor a $k = 2$ választással az

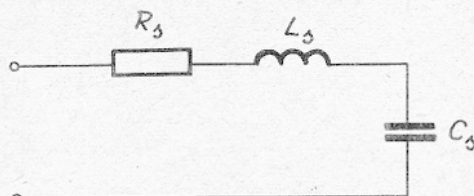
$$\ell_1 + \ell_2 = \lambda_2$$

összefüggésből

$$\ell_2 = \lambda_2 - \lambda_1/2$$

j) Határozzuk meg, hogy a Z_0 hullámimpedanciájú, γ terjedési együtthatójú, kiscsillapítású, végén rövidrezárt távvezetéken milyen $\lambda/2$ körüli hosszúság esetén van rezonancia. Számítsuk ki a rezonancia frekvencia környezetében ezzel egyenértékű soros rezgőkör R_s , C_s , L_s elemeinek értékét (4.20 ábra)!

(4.70), (4.71), (4.77) és (4.78) felhasználásával a bemeneti impedancia:



4.20 ábra

$$Z(x = \ell) = Z'_0 \frac{\operatorname{sh} 2 \alpha \ell + j \sin 2 \beta \ell}{\operatorname{ch} 2 \alpha \ell + \cos 2 \beta \ell} (1 - j \xi)$$

Az $l = \lambda/2 - x$ jelölés bevezetésével:

$$\sin 2\beta l = \sin \left(2\pi - 4\pi \frac{x}{\lambda} \right) = -\sin 4\pi \frac{x}{\lambda}$$

és felhasználva a kis csillapítás esetén fennálló

$$\operatorname{sh} 2\alpha l \approx 2\alpha l$$

közelítést:

$$\begin{aligned} Z(x=l) &\approx Z'_0 \frac{(2\alpha l - j \sin 4\pi \frac{x}{\lambda})(1 - j\zeta)}{\operatorname{ch} 2\alpha l + \cos 2\beta l} = \\ &= Z'_0 \frac{2\alpha l - \zeta \sin 4\pi \frac{x}{\lambda} - j(2\alpha l\zeta + \sin 4\pi \frac{x}{\lambda})}{\operatorname{ch} 2\alpha l + \cos 2\beta l} \end{aligned}$$

Rezonancia esetén a bemeneti impedancia valós, vagyis

$$2\alpha(\lambda/2 - x)\zeta + \sin \frac{4\pi x}{\lambda/2 - x} = 0$$

Ez x -re egy transzcendens egyenlet, amelynek megoldásával a távvezeték hosszát meghatározhatjuk.

A rezonancia környezetében ezzel egyenértékű rezgőkör (4.20 ábra) L_s és C_s értéke a (4.55)-ben felírttal egyenlő, R_s ellenállása pedig rezonanciánál a távvezeték bemeneti impedanciájával egyenlő, vagyis

$$R_s = Z'_0 \frac{2\alpha(\lambda/2 - x) - \zeta \sin \frac{4\pi x}{\lambda/2 - x}}{\operatorname{ch} 2\alpha(\lambda/2 - x) + \cos 2\beta(\lambda/2 - x)}$$

k) Milyen rezgések lehetségesek olyan Z_0 hullámimpedanciájú l hosszúságú ideális távvezetékénél, amelyet mindkét végén ellenállás zár le (4.21 ábra)?

Ha a kör eredő impedanciája zérus, akkor rezgés jön létre. Vagyis

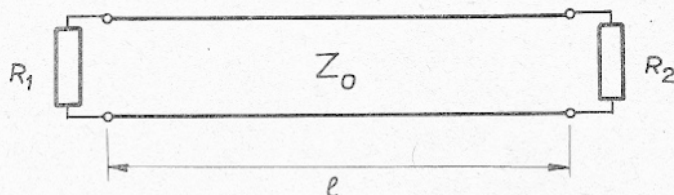
$$Z_0 \frac{R_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_0 \operatorname{sh} \gamma l}{R_2 \operatorname{sh} \gamma l + Z_0 \operatorname{ch} \gamma l} + R_1 = Z_0 \frac{R_2 + Z_0 \operatorname{th} \gamma l}{Z_0 + R_2 \operatorname{th} \gamma l} + R_1 =$$

összefüggésből indulhatunk ki. Ideális távvezetékénél szinuszos gerjesztés esetén:

$$\gamma \ell = j\beta \ell = j\omega \sqrt{LC} \ell = j\omega T$$

ahol a $T = \ell \sqrt{LC}$ jelölést alkalmaztuk. Feltételezhetjük, hogy csillapított szinuszos rezgés jön létre és így $j\omega$ helyébe a $p = \alpha + j\omega$ komplex mennyiség írható, vagyis

$$\gamma \ell = p T$$



4.21 ábra

Helyettesítsük ezt az eredő impedancia kifejezésébe és fejezzük ki az egyenlethől $\text{th } pT$ -t.

$$\begin{aligned} \text{th } pT &= \text{th} (\alpha T + j\omega T) = \frac{\text{sh } 2\alpha T}{\text{ch } 2\alpha T + \cos 2\omega T} + j \frac{\sin 2\omega T}{\text{ch } 2\alpha T + \cos 2\omega T} = \\ &= -Z_0 \frac{R_1 + R_2}{Z_0^2 + R_1 R_2} \quad \text{so that } I_{in} = 0 \end{aligned}$$

A képzetes rész a jobb oldalon zérus, szükséges tehát, hogy a bal oldalon is zérus legyen, vagyis

$$\sin 2\omega T = 0 ; \quad 2\omega T = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\omega = k \frac{\pi}{2} \frac{1}{\ell \sqrt{LC}}$$

körfrekvenciájú rezgés jöhet létre. Behelyettesítve a

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

összefüggésbe kapjuk, hogy

$$l = k \lambda / 4$$

Ha $k = 2n$ páros szám, akkor

$$\omega = \frac{n \pi}{l \sqrt{LC}} ; \quad l = n \lambda / 2$$

Igy $\cos 2\omega T = 1$ és

$$\operatorname{th} pT = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha T}{\operatorname{ch} 2\alpha T + 1} = \operatorname{th} \alpha T$$

Mint hogy α valós, $|\operatorname{th} \alpha T| < 1$.

Ha $k = 2n + 1$ páratlan szám, akkor

$$\omega = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{1}{l \sqrt{LC}} ; \quad l = (2n + 1) \lambda / 4$$

Igy $\cos 2\omega T = -1$ és

$$\operatorname{th} pT = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha T}{\operatorname{ch} 2\alpha T - 1} = \operatorname{cth} \alpha T$$

Mint hogy α valós, $|\operatorname{cth} \alpha T| > 1$.

Vizsgáljuk meg a határesetet is, tehát amikor

$$|\operatorname{th} pT| = |\operatorname{th} \alpha T| = |\operatorname{cth} \alpha T| = Z_0 \frac{R_1 + R_2}{Z_0^2 + R_1 R_2} = 1$$

Ekkor $\alpha = \pm \infty$, a csillapítás végtelen nagy, rezgés nem jön létre.
Ez akkor teljesül, ha

$$R_1 = Z_0 \text{ vagy } R_2 = Z_0 \text{ vagy } R_1 = R_2 = Z_0$$

vagyis ha a távvezeték legalább egyik végén nincs reflexió és így állóhullám nem keletkezik.

Az eredményeket a következőkben foglalhatjuk össze:

A rezgési állapot vizsgálatához meg kell határozni a

$$\operatorname{th} pT = - Z_0 \frac{R_1 + R_2}{Z_0^2 + R_1 R_2}$$

egyenlet gyökeihez tartozó p értékeket, amelyek megadják a rezonanciákhoz tartozó α és ω nagyságát.

Ha $|\operatorname{th} pT| < 1$, akkor

$$p = \alpha + j\omega = -\frac{1}{T} \operatorname{ar} \operatorname{th} Z_0 \frac{R_1 + R_2}{Z_0^2 + R_1 R_2} + j \frac{n\pi}{\ell\sqrt{LC}}$$

Ha $|\operatorname{th} pT| > 1$, akkor

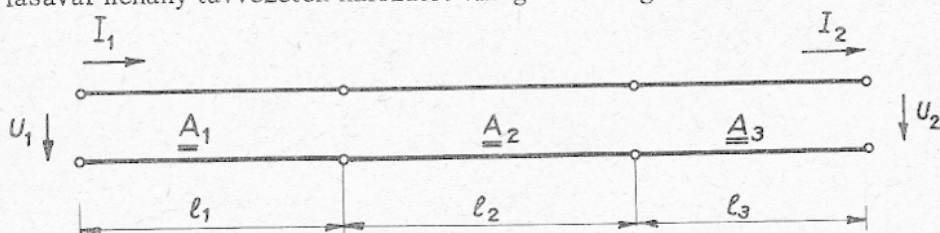
$$p = \alpha + j\omega = -\frac{1}{T} \operatorname{ar} \operatorname{cth} Z_0 \frac{R_1 + R_2}{Z_0^2 + R_1 R_2} + j \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{\ell\sqrt{LC}}$$

Határesetben nem jön létre rezgés.

5. TÁVVEZETÉK HÁLÓZATOK

5.1 NÉHÁNY EGYSZERŰ ELRENDEZÉS

Távvezeték szakaszok, kétpólusok, kétkapuk összekapcsolásával távvezeték hálózatot kapunk. A következőkben eddigi eredményeink felhasználásával néhány távvezeték hálózatot vizsgálunk meg.



5.1 ábra

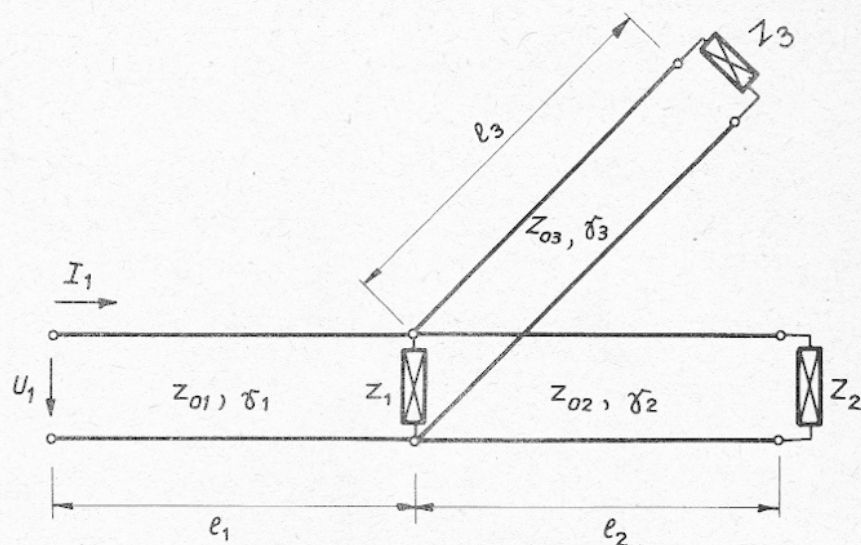
Láncba kapcsolt (5.1 ábra) távvezeték szakaszok láncmátrixa – láncba kapcsolt kétkapukéhoz hasonlóan – az egyes szakaszok láncmátrixának megfelelő sorrendben vett szorzatával egyenlő. Például az 5.1 ábrán látható három szakasz láncmátrixa sorra $\underline{\underline{A}}_1$, $\underline{\underline{A}}_2$, $\underline{\underline{A}}_3$, az elrendezés eredő láncmátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_3$$

Távvezeték szakaszokból és kétpólusokból álló kapcsolást tüntettünk fel az 5.2 ábrán. Az elrendezés $Z_{be} = U_1/I_1$ bemeneti impedanciáját (3.40) ismételt alkalmazásával kapjuk meg. Az 5.2 ábrán jelöltük az egymáshoz csatlakozó távvezetékek Z_{01} , Z_{02} , Z_{03} hullámimpedanciáját, l_1 , l_2 , l_3 hosszát és az egyes szakaszokhoz kapcsolt Z_1 , Z_2 , Z_3 impedanciát. Az l_2 , ill. l_3 hosszúságu szakasz bemeneti impedanciája:

$$Z_{2be} = Z_{02} \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma_2 l_2 + Z_{02} \operatorname{sh} \gamma_2 l_2}{Z_2 \operatorname{sh} \gamma_2 l_2 + Z_{02} \operatorname{ch} \gamma_2 l_2}$$

$$Z_{3be} = Z_{03} \frac{Z_3 \operatorname{ch} \gamma_3 \ell_3 + Z_{03} \operatorname{sh} \gamma_3 \ell_3}{Z_3 \operatorname{sh} \gamma_3 \ell_3 + Z_{03} \operatorname{ch} \gamma_3 \ell_3}$$



5.2 ábra

Ezek és Z_1 párhuzamos eredője jelenti az ℓ_1 hosszúságú szakaszt lezáró Z_t impedanciát:

$$Z_t = Z_1 \times Z_{2be} \times Z_{3be}$$

Ennek ismeretében a Z_{be} bemeneti impedancia:

$$Z_{be} = Z_{01} \frac{Z_t \operatorname{ch} \gamma_1 \ell_1 + Z_{01} \operatorname{sh} \gamma_1 \ell_1}{Z_t \operatorname{sh} \gamma_1 \ell_1 + Z_{01} \operatorname{ch} \gamma_1 \ell_1} = Z_{01} \frac{Z_t + Z_{01} \operatorname{th} \gamma_1 \ell_1}{Z_{01} + Z_t \operatorname{th} \gamma_1 \ell_1}$$

A bemutatott példákhoz hasonlóan vizsgálható számos más egyszerű hálózat is.

5.2 GRÁFELMÉLET ALKALMAZÁSA TÁVVEZETÉK HÁLÓZATOK SZÁMITÁSÁRA

A következőkben olyan számítási módszert mutatunk be, amely távvezetésekből és ezek csatlakozási helyéhez kapcsolódó kétpólusokból álló hálózat analiziséhez gráfelméleti fogalmakat használ fel.

5.2.1 A távvezeték hálózat gráfja

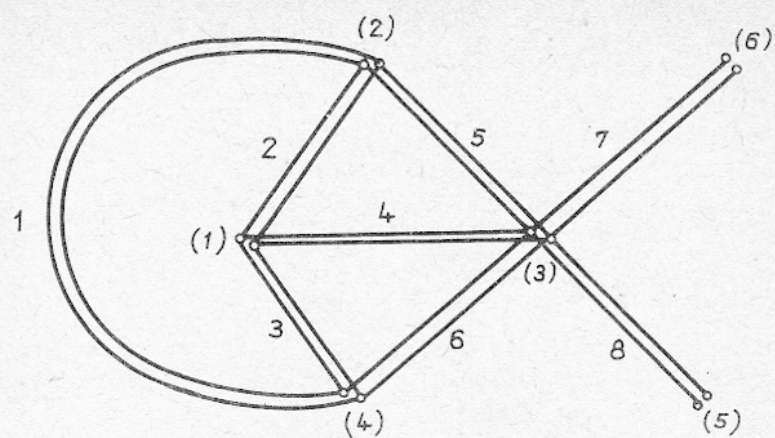
Távvezeték hálózatokhoz úgy rendelünk gráfot, (lásd 6. füzet) hogy az egyes távvezeték szakaszoknak a gráf egy ága feleljen meg. Így pl. az 5.3 a ábrán vázolt távvezetékrendszer gráfja az 5.3 b ábrán látható. A távvezeték szakaszok összekapcsolási helyét csucsoknak fogjuk nevezni. Ezeknek a gráf egy-egy csomópontja felel meg.

A csucsokhoz a távvezetéseken kívül impedanciák és generátorok csatlakozhatnak. Számításainkban a csucsokhoz csatlakozó kétpólust az 5.4 ábrán látható helyettesítő képpel vesszük figyelembe.

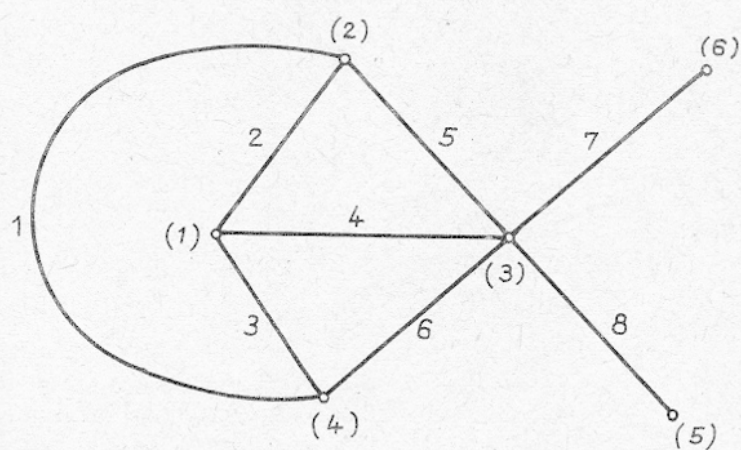
A számítás során a csucsokhoz csatlakozó források forrásfeszültségét, forrásáramát és az impedanciákat ismertnek tételezzük fel. Amennyiben egy csucshoz kizárólag impedancia csatlakozik, úgy a megfelelő forrásfeszültség, forrásáram zérus. Hasonlóképpen ha kizárólag feszültséggenerátor kapcsolódik a csucshoz, akkor a forrásáram zérus, s i. t. Ismertnek tekintjük továbbá a távvezeték szakaszok hullámimpedanciáját, terjedési együtthatóját és hosszát. Feladatunk a távvezeték szakaszok végén fellépő feszültségek és áramok meghatározása. Ezekből – az ismert módon – bármely távvezeték szakasz tetszőleges helyére a feszültség és az áram kiszámítható.

A távvezeték hálózat gráfja – ellentétben a korábbiakban tárgyalt koncentrált elemű hálózatok gráfjával – sok esetben végelemeket is tartalmaz. Az ilyen gráf jellemzésére a csomóponti mátrix alkalmas.

A hálózat egyenleteinek felírásához a gráf egyes ágait – és ennek megfelelően az egyes távvezeték szakaszokat – irányítással kell ellátni. Ez tetszőlegesen választható. Így pl. az 5.3 b ábrán látható gráf ágai irányításának egy lehetséges esetét tünteti fel az 5.5 ábra. A dezaktivizált hálózatban a csucsok lezárása lehet extrém, mégpedig rövidzár vagy szakadás is. Amennyiben a dezaktivizált hálózatban a csucsok lezárása között rövidzár és szakadás egyaránt előfordul, a csucsokat a későbbiek során ismertetésre kerülő módon sorszámozzuk. Egyébként a csucsok számozása tetszőleges.

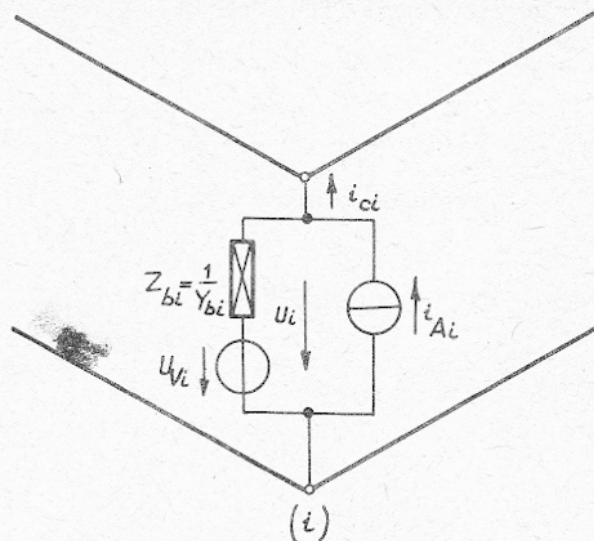


a.)

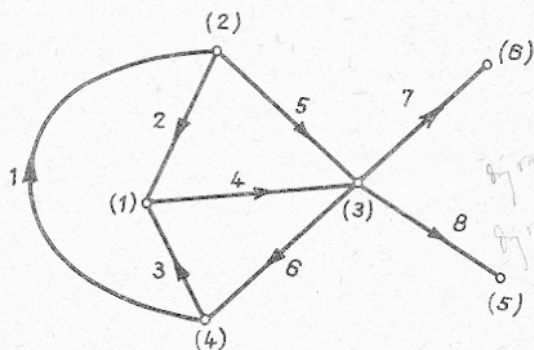


b.)

5.3 ábra



5.4 ábra



5.5 ábra

A következőkben felhasználjuk a gráf irányítást is feltüntető $\underline{\underline{A}}$ és az irányítást figyelmen kívül hagyó $\underline{\underline{A}}_i$ csomóponti mátrixát, továbbá az $\frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}_i + \underline{\underline{A}})$ és az $\frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}_i - \underline{\underline{A}})$ mátrixot is. Az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{A}}_i$ mátrix felírásának módját, néhány tulajdonságát a korábbiakban (6. füzet) megismertük. Könnyen belátható, hogy az

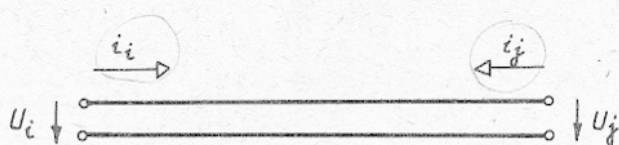
$\frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}_i + \underline{\underline{A}})$ mátrixban az i -edik sor j -edik eleme $a_{ij} = 1$, ha az (i) csúcs és a j ág illeszkedik és j irányítása (i) -től elmutat, egyébként $a_{ij} = 0$. Az $\frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}_i - \underline{\underline{A}})$ mátrixban $a_{ij} = 1$, ha az (i) csúcs és a j ág illeszkedik és j az (i) felé mutat, egyébként $a_{ij} = 0$. Az $\frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}_i + \underline{\underline{A}})$ és az $\frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}_i - \underline{\underline{A}})$ mátrix minden egyes oszlopában egy elem 1, a többi pedig 0.

5.2.2 Az ágak jellemzése

Az egyes távvezeték szakaszokat a Z_0 hullámimpedanciával, a γ terjedési együtthatóval és az l hosszal jellemezhetjük. Több, egymással összekapcsolt távvezeték szakaszt tartalmazó hálózatban legtöbbször egy-egy szakasz egyik vége sem kitüntetett. Ennek megfelelően a vonatkozási irányokat az 5.6 ábrán látható módon vesszük fel. A hálózatban az ugyanazon csúcshoz csatlakozó végeken a feszültségek vonatkozási iránya legyen egyező. Az ág jellemzésére két feszültség (u_i, u_j) és két áram (i_i, i_j) kapcsolatot kell megadni. Ilyen szempontból az ágot pl. az admittancia mátrixa jellemzi. Az m -edik ág admittancia paraméter mátrixa (4.17) szerint:

$$Y_m = Y_{om} \begin{bmatrix} \operatorname{cth} \gamma_m l_m & -\frac{1}{\operatorname{sh} \gamma_m l_m} \\ -\frac{1}{\operatorname{sh} \gamma_m l_m} & \operatorname{cth} \gamma_m l_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_m & r_m \\ r_m & p_m \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

ahol Y_{om} az m -edik ág hullámadmittanciája, γ_m a terjedési együtthatója és l_m a hossza.



5.6 ábra

Alkossunk a távvezeték hálózat egyes ágaira jellemző p_m , ill. r_m ($m = 1, 2, \dots, b$) (b a hálózatot alkotó távvezeték szakaszok száma) értékekből egy-egy diagonál mátrixot:

$$\underline{P} = \langle p_1 \ p_2 \ \dots \ p_b \rangle; \quad \underline{R} = \langle r_1 \ r_2 \ \dots \ r_b \rangle \quad (5.2)$$

A továbbiakban a hálózat távvezeték szakaszainak jellemzésére a $\underline{P}$ és $\underline{R}$ mátrixot használjuk.

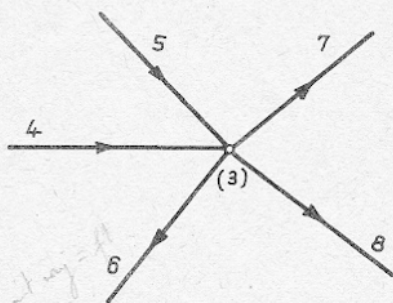
5.2.3 Az áramköri egyenletek

A következőkben felírjuk a hálózat Kirchhoff-egyenleteit.

Az áramköri egyenleteket a következőkben úgy írjuk fel, hogy a feszültségekre vonatkozó egyenletek automatikusan teljesüljenek és így n számú független csomóponti egyenlet felírása szükséges. (Egy csúcstól két csomópontjára felírható Kirchhoff-egyenletek ugyanis nem függetlenek egymástól.) Az egyenletekben a csúcspontok feszültségét tekintjük ismeretleneknek. Ezek száma szintén n , tehát a csomóponti egyenletekből a csúcspontok feszültsége meghatározható.

A csúcspontok feszültségének ismeretében kiszámítható a távvezeték szakaszok végén folyó áram, továbbá a csúcspontokban levő impedanciák árama.

Valamelyik csúcstól egyik csomópontjából kifolyó vagy a csomópontba befolyó áramokat három csoport összegeként írjuk fel. Az első csoportba tartoznak azok az áramok, amelyek iránya a megfelelő ág irányításával megegyezik. A másodikba tartoznak azok, amelyeknek iránya a megfelelő ág irányításával ellentétes. Végül a harmadik csoportban szerepelnek a csúcstól két csomópontja közötti generátorok, impedanciák árama.



5.7 ábra

A számítási módszert az 5.3 a ábrán vázolt hálózaton mutatjuk be. A (3) jelű csomóponthoz a 4, 5, 6, 7, 8 jelű ág illeszkedik (5.7 ábra). A csomóponti törvényt arra a csomópontra írjuk fel, amelyiktől a csúcstól feszültsége elmutat. A csúcstól elmutat a 6, 7, 8 ág irányítása. Az előbbieket értelmében ezek áramának összegét írjuk fel az első csoportban. A 4 és 5 ág irányítása a (3) felé mutat. Ezen ágak áramát írjuk fel a második csoportban. Végül a csúcstól két csomópontja között levő kétpólus árama adja a harmadik csoportot.

A csomóponti egyenletet a hálózat valamennyi csúcspontjának egyik csomópontjára felírjuk.

Ha az m ág az (i) és (j) csúcshoz illeszkedik és irányítása az (i) -től (j) felé mutat, akkor az ág első csoportba tartozó árama:

$$i_{mi} = p_m u_i + r_m u_j \quad (5.3)$$

Hasonló egyenletet írhatunk fel valamennyi ágra. Az így nyert egyenletrendszer a következő mátrix egyenletben foglalható össze:

$$\underline{I'} = \frac{1}{2} \underline{P} (\underline{A}_1^+ + \underline{A}_1^-) \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{R} (\underline{A}_1^+ - \underline{A}_1^-) \underline{U} \quad (5.4)$$

ahol $\underline{U}$ a csucok feszültségéből alkotott oszlop mátrix.

A csucok feszültségéből alkotott oszlop mátrix az 5.3 ábrán vázolt hálózatban:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

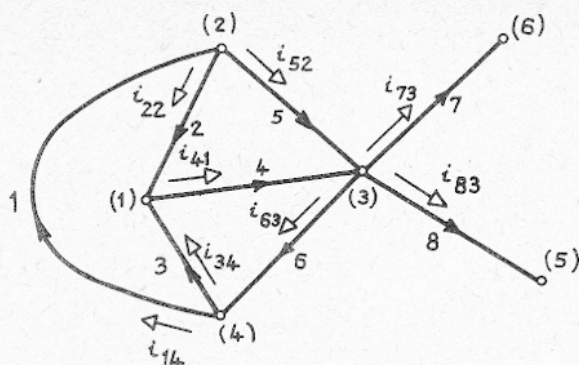
Igy (5.4) alapján az első csoportba tartozó áramokból alkotott oszlop mátrix:

$$\underline{I'} = \begin{bmatrix} i_{14} \\ i_{22} \\ i_{34} \\ i_{41} \\ i_{52} \\ i_{63} \\ i_{73} \\ i_{83} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 u_4 + r_1 u_2 \\ p_2 u_2 + r_2 u_1 \\ p_3 u_4 + r_3 u_1 \\ p_4 u_1 + r_4 u_3 \\ p_5 u_2 + r_5 u_3 \\ p_6 u_3 + r_6 u_4 \\ p_7 u_3 + r_7 u_6 \\ p_8 u_3 + r_8 u_5 \end{bmatrix}$$

$\underline{I'}$ elemei az (5.3)-ban felírtak felenek meg. A $\underline{I'}$ -t képező áramokat az 5.8 ábrán tüntettük fel.

Az m -edik ágra a második csoportba tartozó áram:

$$i_{mj} = r_m u_i + p_m u_j \quad (5.5)$$



5.8 ábra

Ilyen egyenletet írhatunk fel valamennyi ágra. Ez az egyenletrendszer a következő:

$$\underline{I'} = \frac{1}{2} \underline{R} (\underline{A}_i^+ + \underline{A}_i^-) \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{P} (\underline{A}_i^+ - \underline{A}_i^-) \underline{U} \quad (5.6)$$

Példánkban:

$$\underline{I'} = \begin{bmatrix} r_1 u_4 + p_1 u_2 \\ r_2 u_2 + p_2 u_1 \\ r_3 u_4 + p_3 u_1 \\ r_4 u_1 + p_4 u_3 \\ r_5 u_2 + p_5 u_3 \\ r_6 u_3 + p_6 u_4 \\ r_7 u_3 + p_7 u_6 \\ r_8 u_3 + p_8 u_5 \end{bmatrix}$$

A második csoporthoz tartozó áramokat az 5.9 ábrán jelöltük.

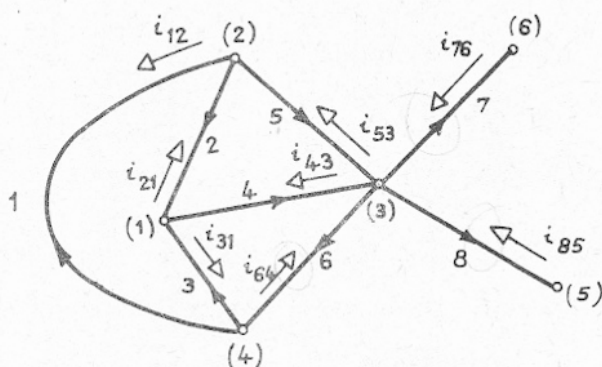
Meg kell még határozni a csucsokban elhelyezett generátorok és impedanciák áramát. Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a csucs csomópontjai között az 5.4 ábrán vázolt kapcsolás található. Az (i) csucsra írható, hogy

$$i_{ci} = Y_{bi} (u_{Vi} - u_i) + i_{Ai} \quad (5.7)$$

Ilyen egyenletet valamennyi csucsra felírhatunk és ezeket az

$$\underline{I}_c = \underline{Y}_b (\underline{U}_V - \underline{U}) + \underline{I}_A \quad (5.8)$$

alakban foglalhatjuk össze, ahol $\underline{I}_c$ a csucsookban levő kétpólusok áramából, $\underline{U}_V$ a feszültségforrások forrásfeszültségéből, $\underline{I}_A$ az áramforrások forrásáramából alkotott oszlopmátrix, $\underline{Y}_b$ pedig olyan diagonálmátrix, amelynek főátlójában a csucsookban levő admittanciák értéke van.



5.9 ábra

Az áramoknak ki kell elégíteniök a csomóponti egyenletet. A csucsok egyik csomópontjából elfolynak az $\underline{I}'$ -ben felírt áramok. Jelöljük az egyes csucsokhoz tartozók összegéből alkotott oszlopmátrixot $\underline{I}'_c$ -vel:

$$\underline{I}'_c = \frac{1}{2} (\underline{A}_i + \underline{A}) \underline{I}' \quad (5.9)$$

Példánkban erre a következőt kapjuk:

$$\underline{I}'_c = \begin{bmatrix} p_4 u_1 + r_4 u_3 \\ p_2 u_2 + r_2 u_1 + p_5 u_2 + r_5 u_3 \\ p_6 u_3 + r_6 u_4 + p_7 u_3 + r_7 u_6 + p_8 u_3 + r_8 u_5 \\ p_1 u_4 + r_1 u_2 + p_3 u_4 + r_3 u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{I}'$ -t alkotó ágak áramok a csucsok egyik csomópontjából kifolynak. Az egy csucsból elfolyó áramok összegéből képezzük az $\underline{I}'_{\underline{c}}$ oszlop mátrixot:

$$\underline{I}'_{\underline{c}} = \frac{1}{2} (\underline{A}_{\underline{i}} - \underline{A}) \underline{I}' \quad (5.10)$$

Írjuk fel ezt is a tárgyalt példánkra:

$$\underline{I}'_{\underline{c}} = \begin{bmatrix} r_2 u_2 + p_2 u_1 + r_3 u_4 + p_3 u_1 \\ r_1 u_4 + p_1 u_2 \\ r_4 u_1 + p_4 u_3 + r_5 u_2 + p_5 u_3 \\ r_6 u_3 + p_6 u_4 \\ r_8 u_3 + p_8 u_5 \\ r_7 u_3 + p_7 u_6 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{I}_{\underline{c}}$ -ben szereplő áramok a csucs azon csomópontja felé folynak, amelyből $\underline{I}'_{\underline{c}}$ és $\underline{I}'$ megfelelő árama kifolyik (5.4 ábra). Így a csomóponti törvény mátrixos alakja (5.9), (5.10), (5.8), továbbá (5.4) és (5.6) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \underline{I}'_{\underline{c}} + \underline{I}'_{\underline{c}} - \underline{I}_{\underline{c}} &= \frac{1}{4} (\underline{A}_{\underline{i}} + \underline{A}) \left[\underline{P}(\underline{A}_{\underline{i}}^+ + \underline{A}^+) + \underline{R}(\underline{A}_{\underline{i}}^+ - \underline{A}^+) \right] \underline{U} + \\ &+ \frac{1}{4} (\underline{A}_{\underline{i}} - \underline{A}) \left[\underline{P}(\underline{A}_{\underline{i}}^+ - \underline{A}^+) + \underline{R}(\underline{A}_{\underline{i}}^+ + \underline{A}^+) \right] \underline{U} - \underline{Y}_{\underline{b}} \underline{U}_{\underline{V}} + \underline{Y}_{\underline{b}} \underline{U} - \underline{I}_{\underline{A}} = 0 \end{aligned}$$

Rendezés után kapjuk, hogy

$$(\underline{Y}_{\underline{c}} + \underline{Y}_{\underline{b}}) \underline{U} = \underline{I}_{\underline{A}} + \underline{Y}_{\underline{b}} \underline{U}_{\underline{V}} \quad (5.12)$$

ahol az

$$\underline{Y}_{\underline{c}} = \frac{1}{2} \underline{A}_{\underline{i}} (\underline{P} + \underline{R}) \underline{A}_{\underline{i}}^+ + \frac{1}{2} \underline{A} (\underline{P} - \underline{R}) \underline{A}^+ \quad (5.13)$$

Ezt csucsadmittancia mátrixnak nevezhetjük.

Írjuk fel ezt példánkra:

$$\underline{Y} = \underline{c} = \begin{bmatrix} p_2+p_3+p_4 & r_2 & r_4 & r_3 & 0 & 0 \\ r_2 & p_1+p_2+p_5 & r_5 & r_1 & 0 & 0 \\ r_4 & r_5 & p_4+p_5+p_6+p_7+p_8 & r_6 & r_8 & r_7 \\ r_3 & r_1 & r_6 & p_1+p_3+p_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_8 & 0 & p_8 & 0 \\ 0 & 0 & r_7 & 0 & 0 & p_7 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy ez a mátrix szimmetrikus. A főátlóban azon ágakhoz tartozó p értékek összege szerepel, amelyek a sornak (oszlopnak) megfelelő csucshoz illeszkednek. A többi elem a sornak és az oszlopnak megfelelő csucsot összekötő ághoz tartozó r érték. Ha a két csucsot nem köti össze ág, akkor 0 a mátrix megfelelő eleme.

(5.12)-ből

$$\underline{U} = (\underline{Y}_c + \underline{Y}_b)^{-1} (\underline{Y}_b \underline{U}_V + \underline{I}_A) \quad (5.14)$$

vagyis a csucskok $\underline{U}$ feszültségét az adott mennyiségekkel kifejeztük.

Ha a csucskok között van olyan, amelynek lezárásában a belső impedancia rövidzár és nincs olyan, amelynek lezárásában a belső impedancia szakadás, akkor $\underline{Y}_b$ helyett a $\underline{Z}_b$ mátrixot alkalmazzuk és így (5.12) helyett

$$(\underline{Z}_b \underline{Y}_c + \underline{I}) \underline{U} = \underline{Z}_b \underline{I}_A + \underline{U}_V \quad (5.15)$$

egyenletből határozhatjuk meg a csucskok $\underline{U}$ feszültségét.

Ha a dezaktivizált hálózat csucsaiban lezárásként rövidzár is és szakadás is szerepel, akkor a hálózat csucsait három csoportba soroljuk a következőképpen. Az első csoportba tartozzanak azok a csucskok, amelyek lezárásában a belső impedancia szakadás. $\underline{Y}_c = 0$
Az ilyen csucskok száma n_1 . A második csoportba soroljuk azokat a csucskokat, amelyek nem tartoznak az első csoportba és csomópontjaik között nincs rövidzár. (A csomópontok közötti impedancia és a feszültségforrás forrásfeszültsége közül legalább az egyik nem zérus.) Az ilyen csucskok számát jelöljük n_2 -vel. A harmadik csoportba kerüljenek azok a csucskok, amely csomópontjai között rövidzár van. (A csomópontok közötti impedancia is a feszültségforrás forrásfeszültsége egyaránt zérus.) Ezek száma n_3 .

Vezessük be az

jelölést és particionáljuk $\underline{Y}_c - t$, $\underline{Y}_b - t$, $\underline{U} - t$ és $\underline{I}_g - t$ a csucok három csoportjának megfelelően:

- 102 -

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} \quad \underline{I}_g = \begin{bmatrix} -I_{A1} \\ -I_{A2} + Y_{b2} \underline{U}_{V2} \\ Y_{b3} \underline{U}_{V3} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

ahol $\underline{U}_3 = \underline{U}_{V3}$ ismert mennyiség.

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_{V3} \neq 0$$

A particionált mátrixokkal (5.12) a következőképpen írható fel:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_{V3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Y_{b2} \underline{U}_2 \\ Y_{b3} \underline{U}_{V3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{A1} \\ -I_{A2} + Y_{b2} \underline{U}_{V2} \\ Y_{b3} \underline{U}_{V3} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Ebből

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} + Y_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{A1} \\ -I_{A2} + Y_{b2} \underline{U}_{V2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \end{bmatrix} \underline{U}_{V3} \quad (5.20)$$

vagyis a rövidzártól különböző lezárással bíró csucspont feszültsége:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} + Y_{b2} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -I_{A1} \\ -I_{A2} + Y_{b2} \underline{U}_{V2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \end{bmatrix} \underline{U}_{V3} \right\} \quad (5.21)$$

5.2.4 A hálózatot jellemző mátrixok meghatározása

Vizsgáljunk a következőkben olyan hálózatot, amelyben a csucok két csomópontja között levő kétpólus passzív. (Az 5.4 ábrán vázolt kétpólusban a forrásáram és a forrásfeszültség egyaránt zérus.) Kapcsoljunk ismert forrásáramu áramforrást az ilyen hálózatban azokra a csucokra, amelyeknél a vizsgált hálózat más hálózatokhoz csatlakozhat. Ekkor (5.20) a következő alakban írható:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} + Y_{b2} \begin{bmatrix} U_{-1} \\ U_{-2} \end{bmatrix} = Y_t \begin{bmatrix} U_{-1} \\ U_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{-A1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

A hálózatban ugyanis feszültséggenerátor nincs ($U_{V3} = 0$) és áramgenerátor kizárólag az első csoportba tartozó csucokban van. (5.22)-ből

$$\begin{bmatrix} U_{-1} \\ U_{-2} \end{bmatrix} = Y_t^{-1} \begin{bmatrix} I_{-A1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

ahol U_{-1} azoknak a csucoknak a feszültsége, amelyeknél más hálózathoz való csatlakozás lehetséges.

Particionáljuk Y_t^{-1} -et az (5.23)-ban szereplő particionált oszlop mátrixoknak megfelelően:

$$Y_t^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Igy

$$U_{-1} = Z_{11} I_{-A1} \quad (5.25)$$

vagyis $Z_{11} = Z_{11}$ a hálózat impedancia mátrixa. Ennek inverze a hálózat admittancia mátrixa:

$$Y_{11} = Z_{11}^{-1} \quad (5.26)$$

A hálózat reflexiós mátrixának meghatározásához definiáljuk a csatlakozási helyekhez illeszkedő ágak hullámadmittanciájából képzett diagonál mátrixot:

$$\underline{Y}_0 = \begin{pmatrix} Y_{01} & Y_{02} & \dots & Y_{0n} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

A hullámadmittanciák sorszáma azon csúcs sorszámaival egyezik meg, amelyhez az ág illeszkedik. Amennyiben egy csúcshoz két vagy több ág csatlakozik, az ágak hullámadmittanciájának összege kerül az (5.27) mátrixban a csúcshoz megfelelő helyre.

Bontsuk fel az $\underline{U}_1$ és az $\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_1$ oszlop mátrixot egy beeső és egy visszavert hullámot leíró oszlop mátrix összegére:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}^{(+)} + \underline{U}^{(-)} \quad (5.28)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}^{(+)} + \underline{I}^{(-)} \quad (5.29)$$

ahol

$$\underline{I}^{(+)} = \underline{Y}_0 \underline{U}^{(+)} \quad (5.30)$$

$$\underline{I}^{(-)} = - \underline{Y}_0 \underline{U}^{(-)} \quad (5.31)$$

vagyis

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_0 (\underline{U}^{(+)} - \underline{U}^{(-)}) = \underline{Y}_1 (\underline{U}^{(+)} + \underline{U}^{(-)}) \quad (5.32)$$

Ebből

$$(\underline{Y}_0 - \underline{Y}_1) \underline{U}^{(+)} = (\underline{Y}_0 + \underline{Y}_1) \underline{U}^{(-)} \quad (5.33)$$

és így

$$\underline{U}^{(-)} = (\underline{Y}_0 + \underline{Y}_1)^{-1} (\underline{Y}_0 - \underline{Y}_1) \underline{U}^{(+)} \quad (5.34)$$

Az $\underline{S}$ reflexiós mátrixot az

$$\underline{U}^{(-)} = \underline{S} \underline{U}^{(+)} \quad (5.35)$$

összefüggés definiálja. Ezt (5.34)-gyel összevetve kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{Y}}_0 + \underline{\underline{Y}}_1)^{-1} (\underline{\underline{Y}}_0 - \underline{\underline{Y}}_1) \quad (5.36)$$

a reflexiós mátrix kifejezése.

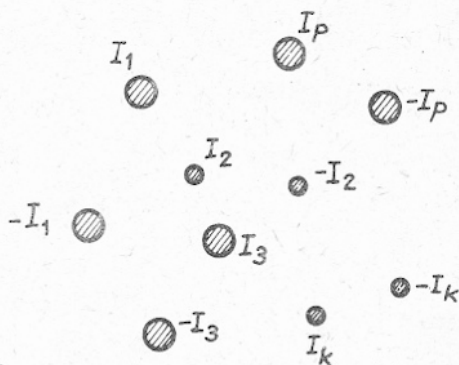
Szokás az $\underline{\underline{S}}$ reflexiós mátrixot szórási mátrixnak is nevezni. Megjegyezzük azonban, hogy az előbbieken levezetett $\underline{\underline{S}}$ nem azonos az 5. füzetben szereplő szórási mátrixszal. A kapuknál fellépő feszültségek és áramok mindkét esetben két összetevőre vannak felbontva: az 5. füzetben tárgyalt esetben az összetevők normalizálása úgy történik, hogy a szórási mátrix egyes elemei a teljesítményekkel vannak kapcsolatban, a távvezetéseknél pedig a beeső és a visszavert hullámra való felbontást alkalmazzuk. Az 5. füzet szerinti szórási mátrix távvezetésekre is meghatározható. Ha a távvezetékek ideálisak, akkor a számításban szereplő g tényezőnek a távvezetékek hullámmellenállása felel meg.

6. CSATOLT TÁVVEZETÉK RENDSZEREK

6.1 A RENDSZER DIFFERENCIÁLEGYENLETEI

A következőkben felírjuk az egymással párhuzamosan elhelyezett p számú hengeres vezetópárból álló, egymással csatolásban levő távvezeték rendszerre (6.1 ábra) vonatkozó differenciálegyenletrendszer ω körfrekvenciájú szinuszos gerjesztés esetére. (Egy vezetópár egyik vezetőjében folyó áram a másik vezetőben folyik vissza.)

A vezetópárok közötti csatolást a vezetópárok impedanciájával és kölcsönös impedanciájával, admittanciájával és kölcsönös admittanciájával lehet figyelembe venni, mégpedig (2.6) átlalánosításával a j -edik vezetópár u_j feszültségére:



6.1 ábra

$$-\frac{du_j}{dz} = Z_{j1}i_1 + Z_{j2}i_2 + \dots + Z_{jj}i_j + \dots + Z_{jk}i_k + \dots + Z_{jp}i_p \quad (6.1)$$

és a k -adik vezetópár i_k áramára:

$$-\frac{di_k}{dz} = Y_{k1}u_1 + Y_{k2}u_2 + \dots + Y_{kj}u_j + \dots + Y_{kk}u_k + \dots + Y_{kp}u_p \quad (6.2)$$

ahol Z_{jj} a j -edik vezetópár soros impedanciája, Y_{kk} a k -adik vezetópár parallel admittanciája, Z_{jk} és Y_{kj} ($j, k = 1, 2, \dots, p$) pedig a vezetópárok közötti csatolást veszi figyelembe. (Ezek meghatározására a 12. fejezetben visszatérünk.) A (6.1)-hez és (6.2)-hez hasonló egyenlet valamennyi vezetópárra felírható. Ezek a

$$-\frac{d}{dz} \underline{u} = \underline{Z}_s \underline{i} \quad (6.3)$$

$$-\frac{d}{dz} \underline{i} = \underline{Y}_p \underline{u} \quad (6.4)$$

mátrixegyenletekben foglalhatók össze, ahol $\underline{u}$ a vezetópárok feszültségéből, $\underline{i}$ a vezetópárok áramából alkotott oszlop mátrix, $\underline{Z}_s$ a soros és kölcsönös impedanciákból, $\underline{Y}_p$ a parallel és kölcsönös admittanciákból álló kvadratikus mátrix.

6.2 AZ EGYENLETEK MEGOLDÁSA

(6.3) és (6.4) z szerinti deriváltjából kapható $\underline{u}$ -ra és $\underline{i}$ -re egy-egy differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2}{dz^2} \underline{u} = \underline{Z}_s \underline{Y}_p \underline{u} = \underline{\Gamma}^2 \underline{u} \quad (6.5)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \underline{i} = \underline{Y}_p \underline{Z}_s \underline{i} = \underline{\Gamma}^{+2} \underline{i} \quad (6.6)$$

($\underline{\Gamma}^+$ a $\underline{\Gamma}$ transzponáltja.)

Ezek az egyenletek a távvezeték rendszerre általánosított táviró egyenletek. Az ezekben szereplő $\underline{\Gamma}$ terjedési együttható mátrixra a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}^2 &= \underline{Z}_s \underline{Y}_p & \underline{\Gamma}^{+2} &= \underline{Y}_p \underline{Z}_s \\ \underline{\Gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_s \underline{Y}_p} & \underline{\Gamma}^+ &= \sqrt{\underline{Y}_p \underline{Z}_s} \end{aligned} \quad (6.7)$$

!!! (A transzponált mátrix felírásánál figyelembe vettük, hogy $\underline{Y}_p$ és $\underline{Z}_s$ szimmetrikus és így transzponáltja önmagával egyenlő.

Oldjuk meg a (6.5) és a (6.6) differenciál egyenletet! (6.5) megoldását

$$\underline{u}(z) = e^{-\underline{\Gamma} z} \underline{U}^{(+)} + e^{\underline{\Gamma} z} \underline{U}^{(-)} \quad (6.8)$$

alakban írhatjuk fel, ahol $\underline{U}^{(+)}$, ill. $\underline{U}^{(-)}$ a +z, ill. -z irányban haladó feszültségek z = 0 helyen felvett értékéből alkotott oszlop mátrix. Képezzük $\underline{u}(z)$ -nek z szerinti deriváltját és az így kapott egyenletet szorozzuk balról $\underline{Z}_s^{-1}$ -gyel. Így kapjuk, hogy

$$\underline{u}'(z) = \underline{Y}_0 \left[e^{-\underline{\Gamma} z} \underline{U}^{(+)} - e^{\underline{\Gamma} z} \underline{U}^{(-)} \right] \quad (6.9)$$

ahol

$$\underline{Y}_0 = \underline{Z}_s^{-1} \underline{\Gamma} \quad (6.10)$$

a hullámadmittancia mátrix.

Az $e^{\pm \underline{\Gamma} z}$ kifejezést a mátrix-függvényekre vonatkozó összefüggések alapján kaphatjuk meg. (Ennek elvi alapjait a 6. füzetben tárgyaltuk.) Ehhez először $\underline{\Gamma}^2$ sajátértékeit kell kiszámítani. Jelöljük ezeket

γ_i^2 -tel ($i = 1, 2, \dots, p$). Ezek a

$$\det \left| \underline{\Gamma}^2 - \gamma^2 \underline{1} \right| = 0 \quad (6.11)$$

egyenlet gyökei. ($\underline{1}$ a p-edrendű egység mátrix.) Ennek az egyenletnek általában p darab gyöke van. Az egymástól különböző gyökökhöz a távvezetéken terjedő hullám egy-egy módusa tartozik.

A sajátértékek ismeretében előállíthatók $\underline{\Gamma}^2$ Lagrange-polinomjai.

Ezek p-edrendű mátrixok:

$$L_k(\Gamma) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p \frac{\Gamma^2 - \gamma_j^2}{\gamma_k^2 - \gamma_j^2} \quad (6.12)$$

és Γ^2 felbontható a Lagrange-polinomok szerint:

$$\Gamma^2 = \sum_{k=1}^p \gamma_k^2 L_k(\Gamma^2) \quad (6.13)$$

Hasonlóan előállítható Γ^2 -nek $f(\Gamma^2)$ függvénye is

$$f(\Gamma^2) = \sum_{k=1}^p f(\gamma_k^2) L_k(\Gamma^2) \quad (6.14)$$

Ennek alapján:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^p \gamma_k L_k(\Gamma^2) \quad (6.15)$$

Γ ismeretében pedig (6.10) alapján az Y_0 hullámadmittancia mátrix meghatározható.

(6.14) értelmében:

$$e^{\pm \Gamma z} = \sum_{k=1}^p e^{\pm \gamma_k z} L_k(\Gamma^2) \quad (6.16)$$

Helyettesítsük ezt (6.8)-ba és (6.9)-be:

$$\underline{u}(z) = \sum_{k=1}^p L_k(\Gamma^2) \left[e^{-\gamma_k z} \underline{u}^{(+)} + e^{\gamma_k z} \underline{u}^{(-)} \right] \quad (6.17)$$

$$\underline{i}(z) = \underline{Y}_0 \sum_{k=1}^P \underline{L}_k (\underline{\Gamma}^2) [e^{-\gamma_k z} \underline{U}^{(+)} - e^{\gamma_k z} \underline{U}^{(-)}] \quad (6.18)$$

Ezen összefüggések alapján a csatolt távvezeték rendszerre általánosított táviró egyenletek megoldása a következőképpen értelmezhető. Mind a feszültségre, mind az áramra vonatkozó megoldás két részből áll.

Az egyik a $+z$, a másik a $-z$ irányban haladó, általában csillapított hullámokból tevődik össze. Az összeg egyes tagjai egy-egy módusnak felelnek meg. Minden módushoz két terjedési együttható tartozik, amelyek csak előjelben térnek el egymástól a $+z$ és a $-z$ irányban haladó hullámnak megfelelően. A módusok száma általában megegyezik a vezetők párok szá-

mával. Ha $\underline{\Gamma}^2$ karakterisztikus egyenletének - (6.11)-nek - egybeeső gyökei is vannak, úgy a módusok száma kisebb a vezetők párok számánál.

Mindkét irányban terjedő hullámcsomag felbontható az egyes módusok összegére. A j -edik módushoz tartozó $\underline{u}_j(z)$ feszültség oszlop mátrix a (6.17) alatti összeg j -edik tagja:

$$\underline{u}_j(z) = \underline{L}_j (\underline{\Gamma}^2) [e^{-\gamma_j z} \underline{U}^{(+)} + e^{\gamma_j z} \underline{U}^{(-)}] = e^{-\gamma_j z} \underline{U}_j^{(+)} + e^{\gamma_j z} \underline{U}_j^{(-)} \quad (6.19)$$

ahol $\underline{U}_j^{(+)}$ és $\underline{U}_j^{(-)}$ a $\underline{\Gamma}^2$ mátrix sajátvektora, vagyis $\underline{u}(z)$ -nek a módusok szerinti felbontása a sajátvektorok szerinti felbontást jelenti.

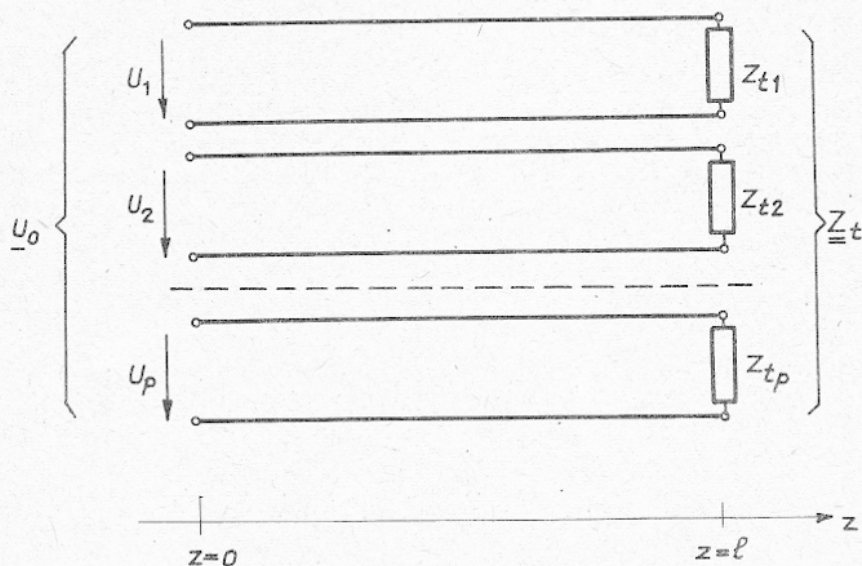
Ha a módusok száma megegyezik a vezetők párok számával, akkor az egyes vezetők párok adott módushoz tartozó feszültségének egymáshoz való viszonya meghatározott értékű, vagyis egy vezetők pár feszültségének felvételével a többi vezetők pár feszültsége is meghatározott. Ha egy módushoz egybeeső gyökök tartoznak, akkor ezen módushoz tartozó feszültségek közül annyinak az értéke választható szabadon, ahányszoros a gyök.

Hasonlóan bontható fel $\underline{i}(z)$ is a módusok szerint és erre a felbontásra is az előbbiekhöz hasonló megállapítások vonatkoznak.

Vizsgáljuk meg ezután, hogyan vehető figyelembe a távvezetékek lezárása.

Határozzuk meg ehhez a viszonyokat a következő határfeltételek esetére. A vezetők párok egyenlő hosszúságúak. A távvezeték rendszer elejére az $\underline{U}_0$ oszlop mátrixszal megadott feszültséget kapcsolunk. A távvezeték rendszer végén levő lezárást a $\underline{Z}_t$ impedancia mátrixszal jellemezzük

(6.2 ábra). A z koordináta kezdőpontját a távvezeték rendszerre kapcsolt generátoroknál vesszük fel.



6.2 ábra

A $\underline{Z}_t$ mátrix diagonális, elemeit az egyes vezetópárok Z_{tk} ($k = 1, 2, \dots, p$) lezáró impedanciái adják. A lezárás helyén az Ohm-törvény a következő mátrixegyenlettel írható fel:

$$\underline{U}_2 = \underline{u}(l) = \underline{Z}_t \underline{i}(l) = \underline{Z}_t \underline{I}_2 \quad (6.20)$$

Mint ahogy

$$\sum_{k=1}^p \underline{L}_k (\underline{\Gamma}^2) = \underline{I} \quad (6.21)$$

csak akkor, amikor a távvezeték?

(6.17)-ből és (6.18)-ból a $z = 0$ helyre:

$$\underline{u}(0) = \underline{U}_0 = \sum_{k=1}^p \underline{L}_k (\underline{\Gamma}^2) (\underline{U}^{(+)} + \underline{U}^{(-)}) = \underline{U}^{(+)} + \underline{U}^{(-)} \quad (6.22)$$

$$\underline{i}(0) = \underline{I}_1 = \underline{Y}_0 (\underline{U}^{(+)} - \underline{U}^{(-)}) \quad (6.23)$$

és hasonlóképpen a $z = \ell$ helyre:

$$\underline{u}(\ell) = \underline{U}_2 = e^{-\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(+)} + e^{\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(-)} \quad (6.24)$$

$$\underline{i}(\ell) = \underline{I}_2 = \underline{Y}_0 \left[e^{-\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(+)} - e^{\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(-)} \right] \quad (6.25)$$

(6.20) figyelembevételével ez utóbbi két egyenlethől:

$$e^{-\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(+)} + e^{\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(-)} = \underline{Z}_t \underline{Y}_0 \left[e^{-\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(+)} - e^{\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(-)} \right] \quad (6.26)$$

Vezessük be az $\underline{S}$ reflexió mátrixot a következő összefüggéssel:

$$e^{\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(-)} = \underline{S} e^{-\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(+)} \quad (6.27)$$

Ezt (6.26)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$\underline{S} = (\underline{Z}_t \underline{Y}_0 + \underline{1})^{-1} (\underline{Z}_t \underline{Y}_0 - \underline{1}) \quad (6.28)$$

Az áramra vonatkozó $\underline{S}_1$ reflexió mátrix meghatározásához vezessük be az $\underline{I}^{(+)}$ és $\underline{I}^{(-)}$ jelölést az alábbiak szerint:

$$e^{-\underline{\Gamma}\ell} \underline{I}^{(+)} = \underline{Y}_0 e^{-\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(+)} \quad (6.29)$$

és

$$e^{\underline{\Gamma}\ell} \underline{I}^{(-)} = -\underline{Y}_0 e^{\underline{\Gamma}\ell} \underline{U}^{(-)} \quad (6.30)$$

Igy (6.27) felhasználásával

$$\begin{aligned} e^{\underline{\Gamma} \ell} \underline{I}^{(-)} &= - \underline{Y}_0 \underline{S} e^{-\underline{\Gamma} \ell} \underline{U}^{(+)} = - \underline{Y}_0 \underline{S} \underline{Y}_0^{-1} e^{-\underline{\Gamma} \ell} \underline{I}^{(+)} = \\ &= \underline{S}_i e^{-\underline{\Gamma} \ell} \underline{I}^{(+)} \end{aligned} \quad (6.31)$$

vagyis (6.28)-at figyelembe véve és az $\underline{Y}_0^{-1} = \underline{Z}_0$ jelölést alkalmazva:

$$\underline{S}_i = - \underline{Y}_0 \underline{S} \underline{Y}_0^{-1} = - (\underline{Z}_t + \underline{Z}_0)^{-1} (\underline{Z}_t - \underline{Z}_0) \quad (6.32)$$

A reflexió mátrix tehát $\underline{Z}_0$ és $\underline{Z}_t$ ismeretében meghatározható és ezzel $\underline{U}^{(+)}$ -ből és $\underline{I}^{(+)}$ -ből $\underline{U}^{(-)}$ és $\underline{I}^{(-)}$ kifejezhető.

Amennyiben $\underline{U}_0$ adott, akkor (6.22)-ből

$$\underline{U}^{(+)} = \left(e^{\underline{\Gamma} \ell} + \underline{S} e^{-\underline{\Gamma} \ell} \right)^{-1} e^{\underline{\Gamma} \ell} \underline{U}_0, \quad (6.33)$$

A reflexió mátrix segítségével $\underline{U}^{(+)}$ -ből $\underline{U}^{(-)}$ is kiszámítható és így $\underline{u}(z)$ kifejezésében szereplő valamennyi mennyiséget meghatároztuk.

Vizsgáljuk még meg, hogy a táplálás helyén fellépő $\underline{U}_0$ feszültség és $\underline{I}_{-1}$ áram között milyen összefüggés áll fenn. Az előbbieket szerint:

$$\underline{I}(0) = \underline{Y}_0 \left(\begin{pmatrix} -\underline{\Gamma} \ell & -\underline{\Gamma} \ell \\ 1 - e & \underline{S} e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\Gamma} \ell & -\underline{\Gamma} \ell \\ e & +\underline{S} e \end{pmatrix}^{-1} \underline{\Gamma} \ell \right) e \underline{U}_0 \quad (6.34)$$

Ebből az

$$\underline{I}(0) = \underline{Y}_1 \underline{U}_0 = \underline{Z}_1^{-1} \underline{U}_0 \quad (6.35)$$

összefüggés alapján az $\underline{Y}_1$ bemeneti admittancia és a $\underline{Z}_1$ bemeneti impedancia mátrix:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_0 \left(\underline{1} - e^{-\underline{\Gamma} \ell} \underline{S} e^{-\underline{\Gamma} \ell} \right) \left(e^{\underline{\Gamma} \ell} + \underline{S} e^{-\underline{\Gamma} \ell} \right)^{-1} e^{\underline{\Gamma} \ell} \quad (6.36)$$

és

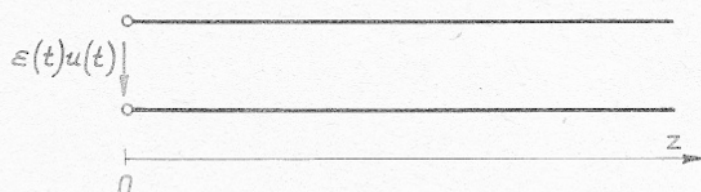
$$\underline{Z}_1 = e^{-\underline{\Gamma} \ell} \left(e^{\underline{\Gamma} \ell} + \underline{S} e^{-\underline{\Gamma} \ell} \right)^{-1} \left(\underline{1} - e^{-\underline{\Gamma} \ell} \underline{S} e^{-\underline{\Gamma} \ell} \right)^{-1} \underline{Z}_0 \quad (6.37)$$

A bemeneti impedancia vagy admittancia mátrix ismeretében adott $\underline{U}_0$ esetén $\underline{I}_1$ meghatározható.

7. TÁVVEZETÉK ÁLTALÁNOS IDŐFÜGGVÉNYŰ GERJESZTÉSEL

7.1 A FOURIER-INTEGRÁL ALKALMAZÁSA

Kapcsoljunk egy távvezetékre a $z = 0$ helyen $\varepsilon(t) u(t)$ feszültséget (7.1 ábra) és vizsgáljuk meg a jel terjedését a Fourier-integrál felhasználásával.



7.1 ábra

A távvezetékre kapcsolt feszültség Fourier-integrálja (lásd 4. füzet):

$$U(0, j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t) u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.1)$$

A gerjesztő jel hatására a távvezetéken $+z$ irányban feszültség- és áramhullám indul. A feszültség hullám spektruma a z helyen:

$$U(z, j\omega) = U(0, j\omega) e^{-\gamma(j\omega)z} = U(0, j\omega) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (7.2)$$

Igy a feszültség időfüggvénye:

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(0, j\omega) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} d\omega \quad (7.3)$$

Ideális távvezeték esetén $\alpha = 0$ és $\gamma = j\beta = j\omega/v$. Így ekkor

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(0, j\omega) e^{j\omega(t - \frac{z}{v})} d\omega =$$

$$= u(0, t - \frac{z}{v}) \quad (7.4)$$

Ez azt jelenti, hogy ideális távvezetéken a feszültség hullám torzítatlanul és csillapítatlanul terjed

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.5)$$

fázissebességgel.

A +z irányban haladó áramhullám:

$$i(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(0, j\omega)}{Z_0(j\omega)} e^{-\gamma z} e^{j\omega t} d\omega \quad (7.6)$$

ahol Z_0 a távvezeték hullámimpedanciája.

Ideális távvezeték esetén $Z_0 = \sqrt{L/C}$, vagyis a hullámimpedancia ω -tól független és így

$$i(z, t) = \frac{1}{2\pi Z_0} \int_{-\infty}^{+\infty} U(0, j\omega) e^{j\omega(t - \frac{z}{v})} d\omega =$$

$$= \frac{1}{Z_0} u(0, t - \frac{z}{v}) \quad (7.7)$$

vagyis ideális távvezetéken az áramhullám is torzítatlanul terjed v sebességgel +z irányban.

A feszültség- és az áramhullám a távvezeték végén visszaverődik. A feszültség-hullámra vonatkozó reflexió tényező:

$$r_2(j\omega) = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \quad (7.8)$$

ahol Z_2 a lezáró impedancia, Z_0 pedig az ideális távvezeték hullámimpedanciája. A reflektált hullám Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned} U^{(-)}(z, j\omega) &= r_2(j\omega) U(0, j\omega) e^{-\gamma \ell} e^{\gamma z} = \\ &= r_2 U(0, j\omega) e^{-\alpha(\ell-z)} e^{-j\beta(\ell-z)} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Hasonlóképpen felírható a reflektált áramhullám Fourier-transzformáltja is:

$$I^{(-)}(z, j\omega) = -r_2 \frac{U(0, j\omega)}{Z_0(j\omega)} e^{-\alpha(\ell-z)} e^{-j\beta(\ell-z)} \quad (7.10)$$

Amennyiben a távvezeték bemenetére kapcsolt generátor Z_1 belső impedanciája nem egyezik meg a távvezeték hullámimpedanciájával, úgy a reflektált hullám a generátorhoz érkeve

$$r_1(j\omega) = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad (7.11)$$

reflexió együtthatóval újabb reflexiót szenved, s i. t.

Az állandósult állapotban fellépő feszültség és áram végtelen sok reflexió után a hullámok eredőjének tekinthető. Ezek Fourier-transzformáltja az előbbieket alapján viszonylag egyszerűen felírható:

$$\begin{aligned} U(z, j\omega) &= U(0, j\omega) \left[e^{-\gamma z} + r_2 e^{-\gamma(\ell-z)} + \right. \\ &\quad \left. + r_1 r_2 e^{-\gamma(2\ell+z)} + r_1 r_2^2 e^{-\gamma(3\ell-z)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$I(z, j\omega) = \frac{U(0, j\omega)}{Z_0(j\omega)} \left[e^{-\gamma z} - r_2 e^{-\gamma(l-z)} + \right. \\ \left. + r_1 r_2 e^{-\gamma(2l+z)} - r_1 r_2^2 e^{-\gamma(3l-z)} + \dots \right] \quad (7.13)$$

A feszültség és az áram inverz Fourier-transzformáltját ezekből a kifejezésekből igen körülményes meghatározni.

7.2 A JEL TERJEDÉSI SEBESSÉGE ÉS A CSOPORTSEBESSÉG

Láttuk, hogy szinuszos gerjesztő jel esetén a feszültségeloszlás a t_1 pillanatban a távvezeték mentén szinuszos. A $t_1 + \Delta t$ pillanatban vizsgálva a feszültségeloszlást olyan képet kapunk, mintha az előbbi hullámkép Δz -vel elmozdult volna: a hullám v fázissebességgel terjed.

Vizsgáljuk most egy meghatározott ideig tartó jel terjedését. A jel Fourier-transzformáltjából folytonos spektrumot kapunk. Ennek megfelelően az ilyen jelet hullámcsomagnak is nevezzük. Általában a hullámcsomag terjedése során eltorzul, alakja megváltozik, így terjedési sebességének csak közelítő értéke értelmezhető. Ha a jel torzulása elhanyagolható, akkor ábrázolva a távvezeték mentén a t_1 pillanatban, majd a $t_1 + \Delta t$

pillanatban fellépő feszültségeloszlást, közelítően úgy vehető, hogy a hullámcsomag a távvezeték mentén Δz -vel elmozdult. Ennek az elmozdulásnak a sebességét a jel terjedési sebességének nevezzük. Minthogy a hullámcsomag terjedésekor torzulást szenved, ez a terjedési sebesség csak közelítőleg határozható meg.

Számításaink során tételezzük fel, hogy a távvezeték csillapítási tényezője elhanyagolható, vagyis $\alpha \approx 0$. Olyan sávkorlátozott gerjesztő jel esetére szorítkozunk, amelynek $U(0, j\omega)$ Fourier-transzformáltja kizárólag az $\omega_0 - \omega_1$ és $\omega_0 + \omega_1$ közé eső tartományban zérustól különböző.

Ebben az esetben a távvezeték z koordinátájú helyén fellépő feszültség időfüggvénye:

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \omega_1}^{\omega_0 + \omega_1} U(0, j\omega) e^{-j\beta z} e^{-j\omega t} d\omega \quad (7.14)$$

Ennek meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy a β fázistényező általában ω függvénye. Az integrál közelítő értékének kiszámításához fejtsük sorba $\beta(\omega)$ -t az ω_0 hely környezetében. A másod- és ennél magasabbrendű tagok elhanyagolásával:

$$\beta(\omega) \approx \beta(\omega_0) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta \omega \quad (7.15)$$

Vezessük be a $\Delta \omega = \Omega$ jelölést és az

$$\Omega = \omega_0 - \omega$$

$$(-\omega_1 \leq \Omega \leq \omega_1)$$

új változót. Ezt és (7.15)-öt (7.14)-be helyettesítve $u(z, t)$ -re a következő kifejezést kapjuk:

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} U(0, j\omega) e^{-j[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t]} e^{-j\left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\omega_0 z \Omega - \Omega t\right]} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-j[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t]} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} U(0, j(\omega_0 - \Omega)) e^{j\Omega t} e^{-j\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\omega_0 z \Omega} d\Omega$$

$$= e^{-j[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t]} u(0, t - \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)\omega_0 z) \quad (7.16)$$

Az eredményből látható, hogy a hullám csomag terjedési sebessége: közelítőleg

$$v_t = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (7.17)$$

Ez a kifejezés tehát sávkorlátozott jelre kis torzulás esetén adja meg a terjedési sebességet. Általánosságban a

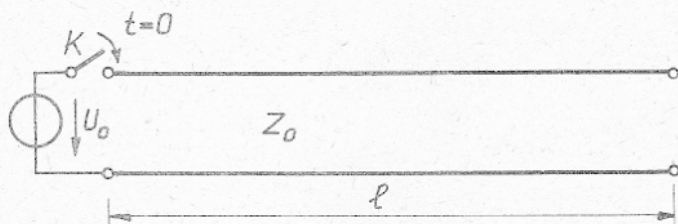
$$v_{cs} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} \quad (7.18)$$

kifejezést tekintjük a csoportsebesség definíciójának és ez az előbbi feltételek mellett megegyezik a jel terjedési sebességével. Egyetlen állandósult szinuszhullám esetén a fázissebesség, a jel terjedési sebessége és a csoportsebesség megegyezik egymással. Fizikai értelme általában csak a jel terjedési sebességének van. Így a fázissebesség és a csoportsebesség a fény terjedési sebességénél nagyobb is lehet.

7.3 NÉHÁNY SPECIÁLIS ESET

A következőkben megvizsgálunk néhány, egyszerű módon tárgyalható tranziens jelenséget.

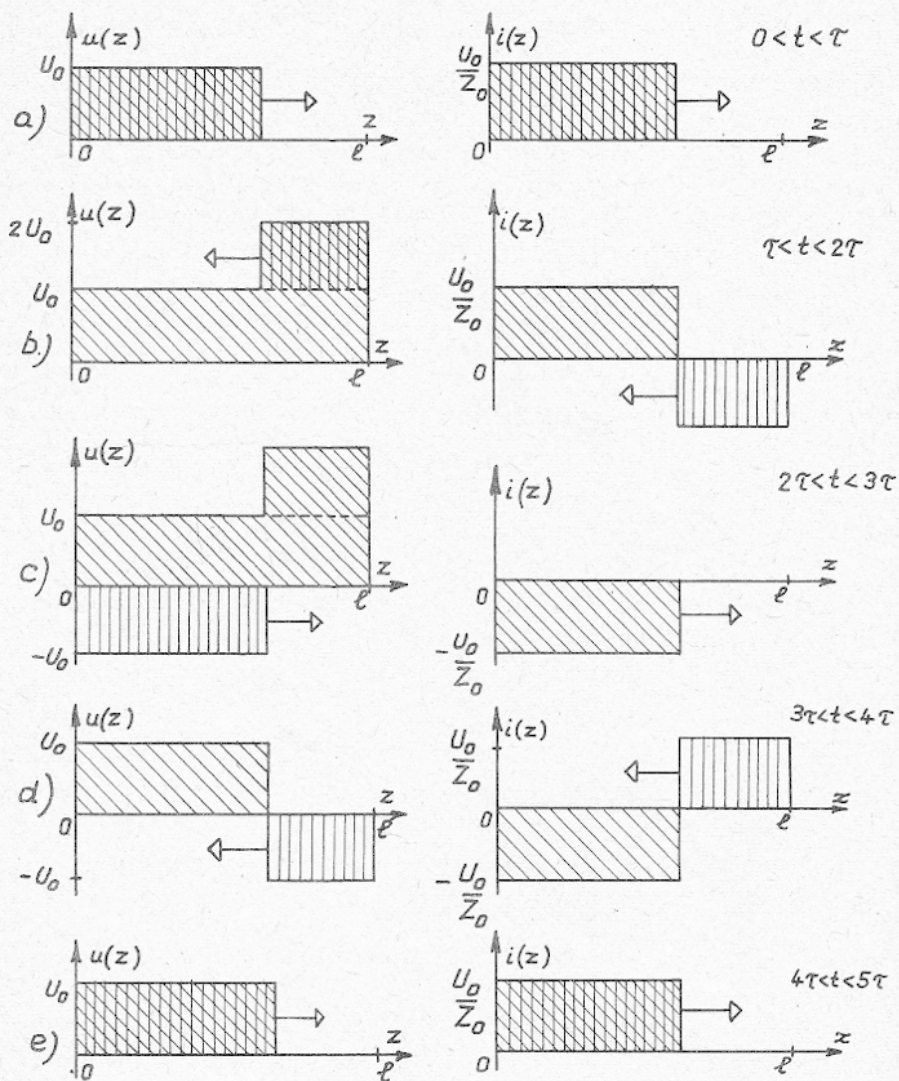
Nézzük meg először azt a folyamatot, amely ℓ hosszúságú, végén nyitott ideális távvezetéken észlelhető, ha a távvezeték elejére a $t = 0$ pillanatban U_0 egyenfeszültségű ideális generátort kapcsolunk (7.2 ábra).



7.2 ábra

Az előbbieken tárgyaltak szerint a jel torzítatlanul, és csillapítatlanul $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sebességgel halad a távvezetéken és így $\tau = \frac{\ell}{v}$ idő alatt jut el a távvezeték végéhez. A feszültség-hullám nagysága U_0 , az áram-hullámé U_0/Z_0 , ha a távvezeték hullámimpedanciája Z_0 (7.3 a ábra).

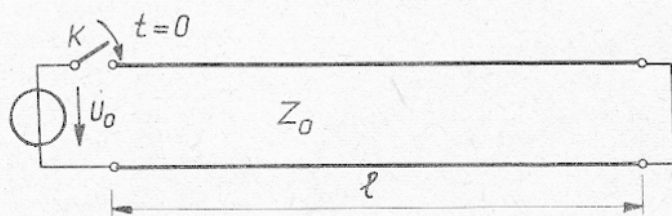
A távvezeték elején a reflexió tényező: $r_1 = -1$, a végén: $r_2 = 1$. (Az eredő feszültséget és áramot ferde, a terjedő hullám amplitudóját függőleges vonalkázással jelöltük az ábrán.)



7.3 ábra

A távvezeték végén a $t = \tau$ időpontban teljes reflexió jön létre. A reflektált feszültség hullám nagysága $r_2 U_0 = U_0$, az áram hullámé $-r_2 U_0 / Z_0 = -U_0 / Z_0$. A reflektált hullám hatására így a feszültség a távvezeték mentén $2 U_0$ -ra nő, az áram pedig nullára csökken (7.3 b ábra). A távvezeték elején a $t = 2\tau$ pillanatban ismét reflexió lép fel. A reflektált feszültség hullám nagysága $r_1 U_0 = -U_0$, az áram hullámé $(-r_1) (-U_0 / Z_0) = -U_0 / Z_0$. Az így reflektált hullámok következtében a távvezeték mentén az eredő feszültség U_0 , az áram $-U_0 / Z_0$ nagyságú lesz (7.3 c ábra). A $t = 3\tau$ időpontban a távvezeték végén bekövetkező újabb reflexió hatására $-U_0$ nagyságú feszültség hullám és U_0 / Z_0 nagyságú áram hullám indul a távvezeték végéről, amely a távvezetéken végighaladva azt eredményezi, hogy az eredő feszültség és áram nulla lesz (7.3 d ábra). A $t = 4\tau$ időpontban reflektált hullám a $t = 0$ pillanatban fellépett hullámmal azonos hatást hoz létre (7.3 e ábra) és így a jelenség 4τ periódusidővel ismétlődik.

Vizsgáljuk ezután az ℓ hosszúságú, végén rövidre zárt ideális, Z_0 hullámellenállású távvezetéken lejátszódó jelenséget, ha a távvezeték elejére a $t = 0$ pillanatban U_0 egyenfeszültségű, nulla belső ellenállású generátort kapcsolunk (7.4 ábra). A lezárások figyelembevételével a reflexiók tényező a távvezeték elején: $r_1 = -1$ és a végén: $r_2 = -1$.

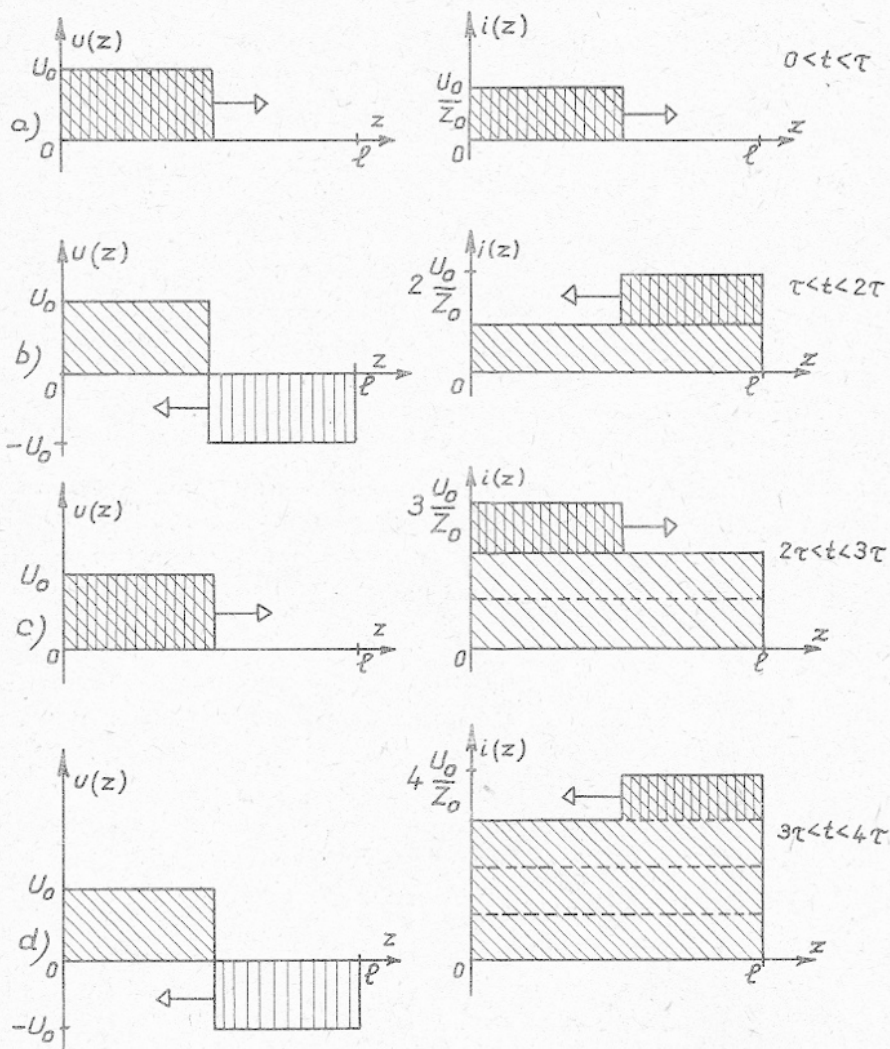


7.4 ábra

A feszültség és áram a távvezetéken v sebességgel, torzítatlanul és csillapítás mentesen halad. Az U_0 nagyságú feszültség hullámmal együtt

$I_0 = U_0 / Z_0$ nagyságú áram hullám halad a távvezetéken (7.5 a ábra).

A $t = \tau = \frac{\ell}{v}$ időpontban a távvezeték végén a feszültség hullám -1 -szerese, az áram hullám $+1$ -szerese reflektálódik. Ennek következtében a távvezetéken a feszültség 0 , az áram $2I_0$ nagyságú lesz (7.5 b ábra).

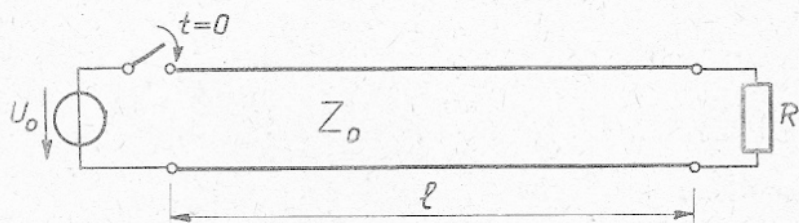


7.5 ábra

A $t = 2\tau$ időpontban a távvezeték elején történik visszaverődés. A reflektált feszültség hullám amplitudója U_0 , az áram hullámé I_0 . Az eredő feszültség ennek következtében U_0 , az áram $3I_0$ (7.5 c ábra). A $t = 3\tau$ időpontban fellépő reflexió után a kialakuló feszültség 0, az áram $4I_0$ a távvezetéken.

Látható, hogy az áram minden egyes reflexió után nő és ha $t \rightarrow \infty$, az áram is végtelenné válik. Ez természetes, hiszen a feszültséggenerátor rövidzárlatban van. A távvezeték bármely helyén a feszültség 2τ periódusidővel periódikusan változik.

A következőkben ℓ hosszúságú, R ellenállással lezárt, ideális távvezetéken lejátszódó folyamatot vizsgálunk, ha a Z_0 hullámellenállású távvezeték elejére a $t = 0$ pillanatban U_0 egyenfeszültségű ideális feszültséggenerátort kapcsolunk (7.6 ábra). Ekkor a feszültségre vonatkozó reflexió tényező a távvezeték elején $r_1 = -1$, a végén $r_2 = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}$ valós értékű.



7.6 ábra

Az állandósult állapot végtelen sok reflexió után alakul ki. Számítsuk ki az ilyen módon létrejövő áramot a sorozatos visszaverődés figyelembevételével:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{U_0}{Z_0} (1 - r_2 - r_2^2 + r_2^2 + r_2^2 - r_2^3 - r_2^3 + r_2^4 + \dots) = \\
 &= \frac{U_0}{Z_0} [1 - 2r_2 (1 - r_2 + r_2^2 - r_2^3 + \dots)] \quad (7.19)
 \end{aligned}$$

A végtelen geometriai sor összegképletének felhasználásával:

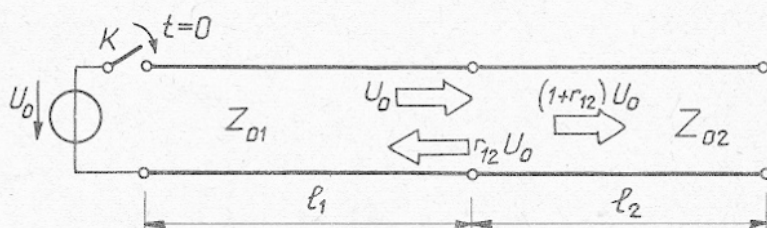
$$I = \frac{U_0}{Z_0} (1 - 2r_2 \frac{1}{1+r_2}) = \frac{U_0}{Z_0} \frac{1-r_2}{1+r_2} \quad (7.20)$$

Helyettesítsük be r_2 kifejezését:

$$I = \frac{U_0}{Z_0} \frac{1 - \frac{R - Z_0}{R + Z_0}}{1 + \frac{R - Z_0}{R + Z_0}} = \frac{U_0}{R} \quad (7.21)$$

ami a triviálisan helyes eredmény.

Vizsgáljuk meg ezután, hogyan alakul a feszültség és az áram egymáshoz csatlakozó ideális távvezetéseken (7.7 ábra), ha a bemenetre a $t = 0$ pillanatban U_0 egyenfeszültségű ideális feszültséggenerátort kapcsolunk és a lezáró impedancia értéke a frekvenciától független.



7.7 ábra

Egymáshoz csatlakozó távvezetékek tranziens jelenségeinek vizsgálatánál figyelembe kell venni, hogy nemcsak a generátornál és a fogyasztónál, hanem a távvezetékek csatlakozási helyein is visszaverődés lép fel. Két, egymáshoz csatlakozó, Z_{01} és Z_{02} hullámellenállású távvezeték csatlakozási helyén fellépő reflexió függ a feszültség- és áramhullám terjedési irányától is. Ha a hullám a Z_{01} hullámellenállású távvezetékből a Z_{02} hullámellenállásúba jut, akkor az utóbbiban tovább haladó hullám feszültségének és áramának hányadosa Z_{02} . Vagyis az előbbi távvezetéken az utóbbi felé haladó hullám szempontjából ez Z_{02} impedanciával történő lezárást jelent. Így az erre vonatkozó reflexiók tényező:

$$r_{12} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (7.22)$$

Ezt a reflexiós tényezőt nem befolyásolja a Z_{o2} hullámellenállású távvezeték lezárása, vagyis a tranziensek szempontjából a második távvezeték bemeneti impedanciája a hullámimpedanciával egyenlő.

Ha a hullám a Z_{o2} hullámellenállású távvezetékéből a Z_{o1} hullámellenállású felé halad, úgy Z_{o1} jelenti a Z_{o2} hullámellenállású távvezeték lezáró impedanciáját és

$$r_{21} = \frac{Z_{o1} - Z_{o2}}{Z_{o1} + Z_{o2}} \quad (7.23)$$

a reflexiós tényező. Ez ideális távvezetékek esetén valós érték.

A kapcsoló zárása után (7.7 ábra) a Z_{o1} hullámellenállású, ℓ_1 hosszúságú távvezetéken U_o nagyságú feszültség-hullám és U_o/Z_{o1} nagyságú áramhullám indul, amely a $\tau_1 = \ell_1/v_1$ pillanatban ér a két távvezeték csatlakozási helyéhez, ha a hullám fázis sebessége ezen a szakaszon v_1 . A csatlakozási helyen reflexió lép fel és a Z_{o1} hullámellenállású távvezetéken $r_{12} U_o$ nagyságú feszültség-hullám és $-r_{12} U_o/Z_{o1}$ nagyságú áramhullám indul a generátor felé. A csatlakozás helyén a τ_1 időpontban $U_o(1 + r_{12})$ lesz a feszültség. Ilyen amplitudójú feszültség-hullám és $\frac{U_o}{Z_{o2}}(1 + r_{12})$ nagyságú áramhullám indul a Z_{o2} hullámellenállású távvezetéken. A csatlakozási pontnál a Z_{o1} hullámellenállású tápvonalon az áram $\frac{U_o}{Z_{o1}}(1 - r_{12})$, a Z_{o2} hullámellenállásun $\frac{U_o}{Z_{o2}}(1 + r_{12})$. Így a csomóponti törvény teljesül. Ha ezen szakasz hossza ℓ_2 és a fázissebesség itt v_2 , akkor ezek a hullámok $\tau_2 = \ell_2/v_2$ idő alatt jutnak a csatlakozási

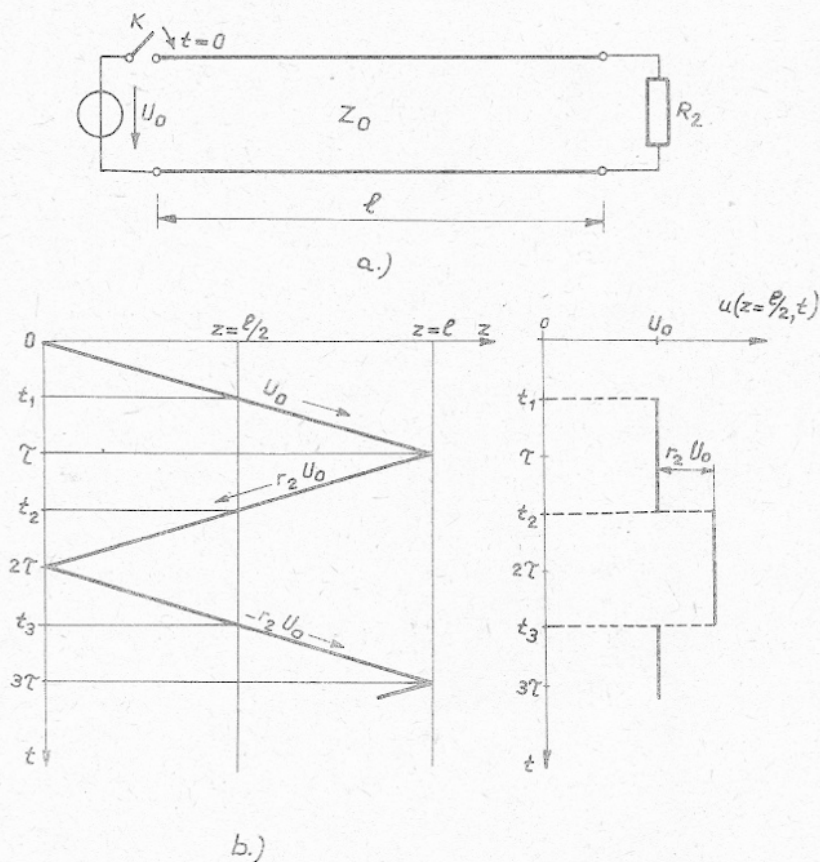
helytől a lezárásig. A lezárásnál $r_2 = \frac{Z_2 - Z_{o2}}{Z_2 + Z_{o2}}$ a reflexiós tényező

értéke. A lezárástól induló feszültség-, ill. áramhullám a csatlakozási helyen az r_{21} , ill. $-r_{21}$ reflexiós tényezővel verődik vissza. Az itt visszaverődött hullám a Z_{o1} hullámellenállású távvezetéken a generátor felé, a Z_{o2} hullámellenállású távvezetéken a lezárás felé halad, ahol ismét visszaverődik s i. t. Ezen feszültség- és áramhullámok szuperpozíciójából adódik a távvezetéken fellépő feszültség és áram.

7.4 FÉLGRAFIKUS MÓDSZER

Az ellenállással lezárt ideális távvezeték bekapcsolási jelenségének vizsgálatára alkalmas az ún. félgrafikus módszer. Az eljárást egy példán mutatjuk be.

A Z_0 hullámellenállású, ℓ hosszúságú, R_2 ellenállással lezárt távvezetékra a $t = 0$ pillanatban U_0 egyenfeszültségű, ideális feszültséggenerátort kapcsolunk (7.8 a ábra). A távvezetéken $v = 1/\sqrt{LC}$ a fázissebesség.



7.8 ábra

A bekapcsolás után a távvezetéken induló feszültség- és áramhullám $\tau = \ell/v$ időpontban ér a lezáráshoz. Kövessük a következőkben a feszültség-hullámot. A feszültség-hullám állandó sebességgel terjed. Így a 7.8 b ábrán látható koordináta rendszerben a kezdőpontot és a $t = \tau$, $z = \ell$

koordinátájú pontot összekötő egyenes pontjai azt mutatják, hogy az U_0 amplitúdójú feszültség hullám a távvezeték különböző z koordinátájú helyére

milyen t időpontban érkezik. A T időpontban a lezárásnál $r_2 = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0}$

reflexiós tényezővel visszaverődik. Az $r_2 U_0$ amplitúdójú hullám ugyancsak v sebességgel halad. A 7.8 b ábrán a $t = \tau$, $z = \ell$ pontot a $t = 2\tau$, $z = 0$ ponttal összekötő egyenesről leolvasható, hogy a visszavert hullám a távvezeték adott helyére melyik időpontban érkezik. A generátornál a reflexiós tényező $r_1 = -1$. Így innen $-r_2 U_0$ nagyságú hullám indul s i. t. A 7.8 b ábra a feszültség hullám "menetdiagramja". A távvezeték z helyén a t időpontban fellépő feszültséget azon feszültség hullámok amplitúdójának összege adja, amelyek a z helyen a t időpontig áthaladnak. Ennek meghatározása a menetdiagram felhasználásával történhet. A 7.8 c ábrán a menetdiagram alapján feltüntetjük a távvezeték $z = \ell/2$ helyén fellépő feszültség időbeli változását.

Hasonlóképpen ábrázolható a távvezeték kijelölt helyén az áram időbeli változása.

A félgrafikus módszer egymáshoz csatlakozó ideális távvezetékek esetén is alkalmazható (lásd 7.6 Példák és feladatok).

7.5 A LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZÁSA

A (2.5) alatti táviró egyenletek általános időfüggvényű gerjesztés esetére vonatkoznak. Vagyis $u(z, t)$ és $i(z, t)$ eleget tesz a

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (7.24)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G u + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

táviró egyenletnek. Tételezzük fel, hogy R , L , G , C állandó. (Megjegyezzük, hogy ez a feltételünk csak közelítőleg igaz.) Vegyük a (7.24) egyenletek Laplace-transzformáltját felhasználva, hogy a z -szerinti differenciálás és a transzformációt jelentő t -szerinti integrálás sorrendje felcserélhető. Így az $\mathcal{L}u(z, t) = U(z, s)$ és $\mathcal{L}i(z, t) = I(z, s)$ Laplace-transzformáltra a következő egyenleteket kapjuk.

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = R I + s L I - L i(z, 0) \quad (7.25)$$

$$- \frac{\partial I}{\partial z} = G U + s C U - C u(z, 0) \quad (7.26)$$

Bekapcsolási jelenségeknél $i(z, 0) = 0$ és $u(z, 0) = 0$. Így

$$- \frac{\partial U}{\partial z} = I(R + s L) \quad (7.27)$$

$$- \frac{\partial I}{\partial z} = U(G + s C) \quad (7.28)$$

Ennek a differenciálegyenlet rendszernek a megoldása (2.6) megoldásához hasonló:

$$U(z, s) = U^{(+)} e^{-\gamma z} + U^{(-)} e^{\gamma z} \quad (7.29)$$

$$I(z, s) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^{(-)}}{Z_0} e^{\gamma z} \quad (7.30)$$

ahol

$$\gamma(s) = \sqrt{(R + s L)(G + s C)} \quad (7.31)$$

az operátoros terjedési együttható és

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{R + s L}{G + s C}} \quad (7.32)$$

az operátoros hullámimpedancia.

Meg kell határozni a határfeltételekből a megoldásban szereplő $U^{(+)}$ és $U^{(-)}$ állandót is. Ehhez vegyük a következő esetet. A távvezetékre kapcsolt generátor feszültségének Laplace-transzformáltja: $U_0(s)$, továbbá a generátor $Z_1(s)$ és a lezárás $Z_2(s)$ operátoros impedanciája ismert (7.9 ábra). Vegyük a z -tengely kezdőpontját a távvezeték bemenetén. (7.29)-ből $z = 0$ -re az

$$r_2 = \frac{U^{(-)}}{U^{(+)}} e^{2\gamma \ell} \quad (7.33)$$

jelöléssel:

$$U(\ell, s) = U^{(+)} e^{-\gamma \ell} + U^{(-)} e^{\gamma \ell} = U^{(+)} e^{-\gamma \ell} (1 + r_2) \quad (7.34)$$

(7.30)-ból

$$I(z, s) = \frac{U^{(+)} e^{-\gamma z}}{Z_0} \left(1 - \frac{U^{(-)} e^{2\gamma z}}{U^{(+)} e^{-\gamma z}} \right) \quad (7.35)$$

Igy $z = \ell$ -re:

$$I(\ell, s) = \frac{U^{(+)} e^{-\gamma \ell}}{Z_0} (1 - r_2) \quad (7.36)$$

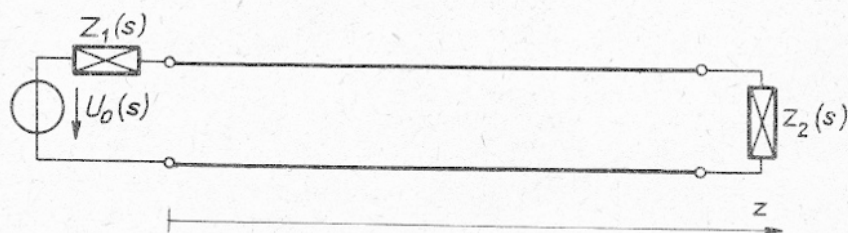
$Z_2(s)$ kifejezhető $U(\ell, s)$ -sel és $I(\ell, s)$ -sel:

$$Z_2(s) = \frac{U(\ell, s)}{I(\ell, s)} = \frac{U^{(+)} (1 + r_2)}{\frac{U^{(+)} e^{-\gamma \ell}}{Z_0} (1 - r_2)} = Z_0 \frac{1 + r_2}{1 - r_2} \quad (7.37)$$

amiből

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \quad (7.38)$$

az operátoros reflexió tényező.



7.9 ábra

$U^{(+)}$ és $U^{(-)}$ meghatározásához további összefüggéseket kapunk a feszültség és az áram transzformáltjának a $z = 0$ helyen felvett értékéből:

$$U(0, s) = U^{(+)}(1 + r_2') = U^{(+)}(1 + r_2 e^{-2\gamma\ell}) = U_0(s) - I(0, s) Z_1(s) \quad (7.39)$$

$$I(0, s) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} (1 - r_2 e^{-2\gamma\ell}) \quad (7.40)$$

Ezt helyettesítsük be (7.39)-be. Így kapjuk, hogy

$$U^{(+)}(1 + r_2 e^{-2\gamma\ell}) = U_0(s) - \frac{U^{(+)}}{Z_0} (1 - r_2 e^{-2\gamma\ell}) Z_1 \quad (7.41)$$

Ebből

$$U_0(s) = U^{(+)} \left[1 + \frac{Z_1}{Z_0} + r_2 e^{-2\gamma\ell} \left(1 - \frac{Z_1}{Z_2} \right) \right] \quad (7.42)$$

Vezessük be az

$$r_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad (7.43)$$

jelölést. Így (7.42)-ből

$$U^{(+)} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \frac{U_0}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma\ell}} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \frac{U_0 e^{\gamma\ell}}{e^{-\gamma\ell} - r_1 r_2 e^{-\gamma\ell}} \quad (7.44)$$

(7.33) alapján ebből $U^{(-)}$ is kiszámítható:

$$U^{(-)} = r_2 e^{-2\gamma\ell} U^{(+)} \quad (7.45)$$

Helyettesítsük be az állandók kifejezését (7.29)-be és (7.30)-ba:

$$U(z, s) = U_0 \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \frac{e^{\gamma(l-z)} + r_2 e^{-\gamma(l-z)}}{e^{\gamma l} - r_1 r_2 e^{-\gamma l}} \quad (7.46)$$

$$I(z, s) = \frac{U_0}{Z_0 + Z_1} \frac{e^{\gamma(l-z)} - r_2 e^{-\gamma(l-z)}}{e^{\gamma l} - r_1 r_2 e^{-\gamma l}} \quad (7.47)$$

Az r_1 -re és r_2 -re vonatkozó (7.43) és (7.38) alatti összefüggést felhasználva:

$$\frac{e^{\gamma(l-z)} + r_2 e^{-\gamma(l-z)}}{e^{\gamma l} - r_1 r_2 e^{-\gamma l}} = \frac{(Z_1 + Z_0)(Z_2 + Z_0)e^{\gamma(l-z)} + (Z_1 + Z_0)(Z_2 - Z_0)e^{-\gamma(l-z)}}{(Z_1 + Z_0)(Z_2 + Z_0)e^{\gamma l} - (Z_1 - Z_0)(Z_2 - Z_0)e^{-\gamma l}} \quad (7.48)$$

és

$$\frac{e^{\gamma(l-z)} - r_2 e^{-\gamma(l-z)}}{e^{\gamma l} - r_1 r_2 e^{-\gamma l}} = \frac{(Z_1 + Z_0)(Z_2 + Z_0)e^{\gamma(l-z)} - (Z_1 + Z_0)(Z_2 - Z_0)e^{-\gamma(l-z)}}{(Z_1 + Z_0)(Z_2 + Z_0)e^{\gamma l} - (Z_1 - Z_0)(Z_2 - Z_0)e^{-\gamma l}} \quad (7.49)$$

Vagyis

$$U(z, s) = U_0 Z_0 \frac{(Z_2 + Z_0)e^{\gamma(l-z)} + (Z_2 - Z_0)e^{-\gamma(l-z)}}{(Z_1 + Z_0)(Z_2 + Z_0)e^{\gamma l} - (Z_1 - Z_0)(Z_2 - Z_0)e^{-\gamma l}} \quad (7.50)$$

$$I(z, s) = U_0 \frac{(Z_2 + Z_0)e^{\gamma(\ell - z)} - (Z_2 - Z_0)e^{-\gamma(\ell - z)}}{(Z_1 + Z_0)(Z_2 + Z_0)e^{\gamma\ell} - (Z_1 - Z_0)(Z_2 - Z_0)e^{-\gamma\ell}} \quad (7.51)$$

Ezeket pedig átírhatjuk a következő alakba:

$$U(z, s) = U_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma(\ell - z) + Z_0 \operatorname{sh} \gamma(\ell - z)}{(Z_1 + Z_2) \operatorname{ch} \gamma\ell + (Z_0 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}) \operatorname{sh} \gamma\ell} \quad (7.52)$$

$$I(z, s) = \frac{U_0}{Z_0} \frac{Z_0 \operatorname{ch} \gamma(\ell - z) - Z_2 \operatorname{sh} \gamma(\ell - z)}{(Z_1 + Z_2) \operatorname{ch} \gamma\ell + (Z_0 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}) \operatorname{sh} \gamma\ell} \quad (7.53)$$

$U(z, s)$ és $I(z, s)$ inverz transzformáltjának meghatározása általában körülményes.

$U(z, s)$ és $I(z, s)$ végtelen sor alakjában is felírható. (7.46) és (7.47) alapján ugyanis

$$U(z, s) = U_0 \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \frac{e^{-\gamma z} + r_2 e^{-\gamma(2\ell - z)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma\ell}} \quad (7.54)$$

$$I(z, s) = \frac{U_0}{Z_0 + Z_1} \frac{e^{-\gamma z} - r_2 e^{-\gamma(2\ell - z)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma\ell}} \quad (7.55)$$

Ha $|r_1 r_2 e^{-2\gamma\ell}| < 1$, akkor

$$\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma\ell}} = 1 + r_1 r_2 e^{-2\gamma\ell} + r_1^2 r_2^2 e^{-4\gamma\ell} + r_1^3 r_2^3 e^{-6\gamma\ell} + \dots \quad (7.56)$$

és így

$$U(z, s) = U_0 \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \left[e^{-\gamma z} + r_2 e^{-\gamma(2l-z)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(2l+z)} + \right. \\ \left. + r_1 r_2^2 e^{-\gamma(4l-z)} + r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma(4l+z)} + r_1^2 r_2^3 e^{-\gamma(6l-z)} + \dots \right] \quad (7.57)$$

továbbá

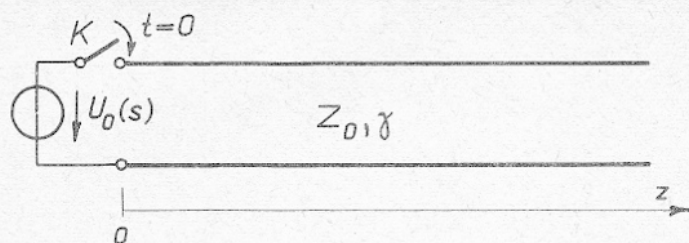
$$I(z, s) = \frac{U_0}{Z_0 + Z_1} \left[e^{-\gamma z} - r_2 e^{-\gamma(2l-z)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(2l+z)} - \right. \\ \left. - r_1 r_2^2 e^{-\gamma(4l-z)} + r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma(4l+z)} - r_1^2 r_2^3 e^{-\gamma(6l-z)} + \dots \right] \quad (7.58)$$

ahol r_1 , r_2 és γ egyaránt az s függvénye.

Vizsgáljunk bekapcsolási jelenséget a távvezeték z helyén olyan időintervallumban, amikor a távvezeték végén visszaverődő hullám nem érkezik meg a vizsgált helyre. Ekkor a távvezeték végtelen hosszúnak tekintjük. Válasszuk a z -tengely 0 helyét a gerjesztésnél (7.10 ábra). Ekkor a (7.27), (7.28) egyenletrendszer megoldásában a $e^{\gamma z}$ nem szerepelhet és így

$$U(z, s) = U^{(+)} e^{-\gamma z} \quad (7.59)$$

$$I(z, s) = \frac{U^{(+)}}{Z_0} e^{-\gamma z} \quad (7.60)$$



7.10 ábra

Ha a távvezeték bemenetére kapcsolt feszültség $u_1(t)$ és $\mathcal{L}u_1(t) = U_1(s)$, akkor $U(0, s) = U_1(s)$ és az előbbieket szerint

$$U^{(+)} = U_1(s) \quad (7.61)$$

vagyis

$$U(z, s) = U_1(s) e^{-\gamma z} \quad (7.62)$$

$$I(z, s) = \frac{U_1(s)}{Z_1(s)} e^{-\gamma z} \quad (7.63)$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a távvezeték ideális. Ekkor

$$\gamma(s) = s \sqrt{L C} = \frac{s}{v} \quad (7.64)$$

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0 \quad (7.65)$$

A feszültség és az áram Laplace-transzformáltja: .

$$U(z, s) = U_1(s) e^{-s \frac{z}{v}} \quad (7.66)$$

$$I(z, s) = \frac{1}{Z_0} U_1(s) e^{-s \frac{z}{v}} \quad (7.67)$$

Ez utóbbi két kifejezést az eltolási tétel felhasználásával visszatranszformálva:

$$u(z, t) = \varepsilon \left(t - \frac{z}{v} \right) u_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad (7.68)$$

$$i(z, t) = \varepsilon \left(t - \frac{z}{v} \right) \frac{1}{Z_0} u_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) \quad (7.69)$$

Ez is azt fejezi ki, hogy ideális távvezetéken a feszültség- és az áramhullám csillapítás nélkül és torzítatlanul terjed.

Második esetként a kisveszteségű (kiscsillapítású) távvezeték egyenleteit határozzuk meg. Tekintsük azt a gyakorlatban előforduló esetet, amikor az átvezetés elhanyagolható, vagyis

$$R \ll |s L|; \quad G = 0 \quad (7.70)$$

Ekkor

$$\gamma(s) = \sqrt{(R + s L) s C} = s \sqrt{L C} \sqrt{1 + \frac{R}{s L}} \approx s \sqrt{L C} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{s L} \right) \quad (7.71)$$

Ez a közelítés $s \rightarrow 0$ -nál nem engedhető meg, $s \rightarrow \infty$ -nél azonban jó közelítést jelent. A tranziens jelenség vizsgálata szempontjából éppen ezt kell figyelembe venni.

Vezessük be a

$$v = \frac{1}{\sqrt{L C}}; \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{v} \frac{R}{L} \quad (7.72)$$

jelöléseket. Így

$$\gamma \approx \frac{s}{v} + \frac{1}{2} \frac{1}{v} \frac{R}{L} = \alpha + \frac{s}{v} \quad (7.73)$$

Írjuk fel a hullámimpedancia közelítő kifejezését is:

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{R + s L}{s C}} = \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{R}{s C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \frac{R}{s L}} \approx Z_0' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{s L} \right) \quad (7.74)$$

ahol

$$Z_o' = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.75)$$

Az előbbiek értelmében

$$v\alpha = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \quad (7.76)$$

Igy

$$Z_o(s) \approx Z_o' \left(1 + \frac{v\alpha}{s}\right) \quad (7.77)$$

és a hullámadmittancia:

$$Y_o(s) = \frac{1}{Z_o(s)} = \frac{1}{Z_o'} \frac{1}{1 + \frac{v\alpha}{s}} \approx \frac{1}{Z_o'} \left(1 - \frac{v\alpha}{s}\right) \quad (7.78)$$

A fentiek alapján a feszültség és az áram Laplace-transzformáltja:

$$U(z, s) = U_1(s) e^{-\gamma z} = U_1(s) e^{-\alpha z} e^{-s \frac{z}{v}} \quad (7.79)$$

$$I(z, s) = \frac{U_1(s)}{Z_o} e^{-\gamma z} = \frac{U_1(s)}{Z_o'} e^{-\alpha z} e^{-s \frac{z}{v}} \left(1 - \frac{v\alpha}{s}\right) \quad (7.80)$$

A feszültség időfüggvénye az eltolási tétel felhasználásával meghatározható:

$$u(z, t) = \mathcal{E}\left(t - \frac{z}{v}\right) u_1\left(t - \frac{z}{v}\right) e^{-\alpha z} \quad (7.81)$$

Ez azt jelenti, hogy a feszültség v sebességgel, torzítatlanul terjed, amplitudója pedig az $e^{-\alpha z}$ tényezővel arányosan csökken.

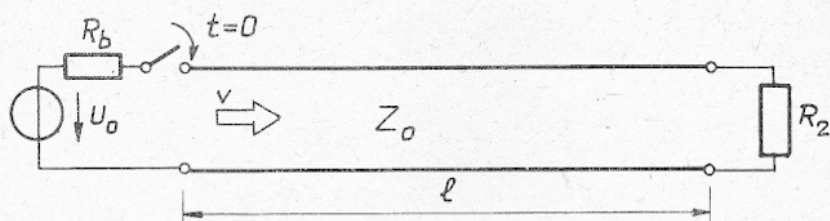
Az áram időfüggvénye:

$$i(z, t) = \varepsilon \left(t - \frac{z}{v} \right) \left[u_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) \frac{e^{-\alpha z}}{Z_0} - \alpha v \int_{\frac{z}{v}}^t \frac{e^{-\alpha \tau}}{Z_0} u_1 \left(\tau - \frac{z}{v} \right) d\tau \right] \quad (7.82)$$

Az áram változását bonyolultabb kifejezés írja le, mint a feszültséget.

7.6 PÉLDÁK ÉS FELADATOK

a) Ideális, $Z_0 = 700 \, \Omega$ hullámellenállás, $\ell = 1500 \, \text{m}$ hosszú távvezeték lezárása: $R_2 = 1300 \, \Omega$ (7.11 ábra). A fázissebesség: $v = 3 \cdot 10^8 \, \text{m/s}$. A távvezeték bemenetére a $t = 0$ pillanatban $U_0 = 200 \, \text{V}$ egyenfeszültségű, $R_b = 300 \, \Omega$ belső ellenállású generátort kapcsolunk. Határozzuk meg a lezáró ellenálláson és a távvezeték bemenetén fellépő feszültség időbeli változását!



7.11 ábra

A távvezeték ideális, így a keresett feszültségek állandósult értéke:

$$U_1 = U_2 = U_0 \frac{R_2}{R_2 + R_b} = 200 \frac{1300}{1600} = 162,5 \, \text{V}$$

A reflexió tényező:

$$r_1 = \frac{R_b - Z_0}{R_b + Z_0} = \frac{-400}{1000} = -0,4$$

$$r_2 = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0} = \frac{600}{2000} = 0,3$$

A távvezetéken a hullám

$$\tau = \frac{\ell}{v} = \frac{1500}{3 \cdot 10^8} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

idő alatt halad végig.

A bekapcsolás pillanatában a távvezeték Z_0 ellenállású fogyasztóként terheli a generátort. Így az első áramhullám nagysága:

$$I^{(1)} = \frac{U_0}{R_b + Z_0} = \frac{200}{1000} = 0,2 \text{ A}$$

Az első feszültséghullámé pedig:

$$U^{(1)} = U_0 - R_b I^{(1)} = U_0 \left(1 - \frac{R_b}{R_b + Z_0}\right) = U_0 \frac{Z_0}{R_b + Z_0} = 140 \text{ V}$$

Ez a feszültséghullám a $t = 5 \cdot 10^{-6}$ s időpontban a távvezeték végére érkezik és ott

$$U^{(2)} = r_2 U^{(1)} = 0,3 \cdot 140 = 42 \text{ V}$$

nagyságú feszültséghullám verődik vissza. A vezetéken kialakuló feszültség ekkor $U^{(1)} + U^{(2)} = 182 \text{ V}$.

Az $U^{(2)}$ amplitudójú feszültséghullám a $t = 10 \cdot 10^{-6}$ s pillanatban a generátornál visszaverődik és

$$U^{(3)} = r_1 U^{(2)} = -0,4 \cdot 42 = -16,8 \text{ V}$$

feszültségű hullám indul a lezárás irányába. A kialakuló feszültség ekkor $182 - 16,8 = 165,2 \text{ V}$.

A számítást hasonlóképpen folytatva, követhető a feszültség alakulása. Állandósult állapotban:

$$\begin{aligned}
 U_1 = U_2 &= U^{(1)} (1 + r_2 + r_2 r_1 + r_2^2 r_1 + r_2^2 r_1^2 + r_2^3 r_1^2 + \dots) = \\
 &= U^{(1)} [1 + r_2 r_1 + (r_2 r_1)^2 + (r_2 r_1)^3 + \dots] + \\
 &+ U^{(1)} r_2 [1 + r_2 r_1 + (r_2 r_1)^2 + (r_2 r_1)^3 + \dots] = \\
 &= U^{(1)} (1 + r_2) \frac{1}{1 - r_1 r_2}
 \end{aligned}$$

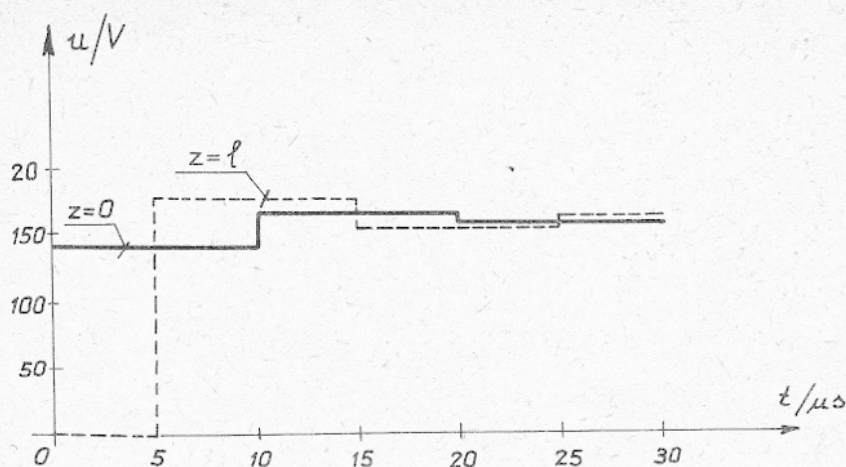
Behelyettesítve $U^{(1)}$, r_1 és r_2 kifejezését:

$$\begin{aligned}
 U_1 = U_2 &= U_0 \frac{Z_0}{R_b + Z_0} \frac{1 + \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0}}{1 - \frac{R_b - Z_0}{R_b + Z_0} \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0}} = \\
 &= U_0 \frac{2 R_2 Z_0}{(R_b + Z_0)(R_2 + Z_0) - (R_b - Z_0)(R_2 - Z_0)} = U_0 \frac{R_2}{R_2 + R_b}
 \end{aligned}$$

előbbi eredményünkkel egyezően.

A 7.12 ábrán vázoltuk a távvezeték lezárásán és bemenetén fellépő feszültség időbeli változását.

b) $Z_0 = 500 \Omega$ hullámellenállású, $\ell = 30$ km hosszú ideális távvezeték, $R_2 = 1500 \Omega$ ellenállással van lezárva. A távvezeték bemenetére a $t = 0$ pillanatban $U_0 = 1000$ V egyenfeszültségű ideális feszültséggenerátort kapcsolunk. A hullám terjedési sebessége a távvezetéken $v = 3 \cdot 10^8$ m/s. Határozza meg félgrafikus eljárással a távvezeték közepén és végén fellépő feszültség időfüggvényét!



7.12 ábra

Megoldás:

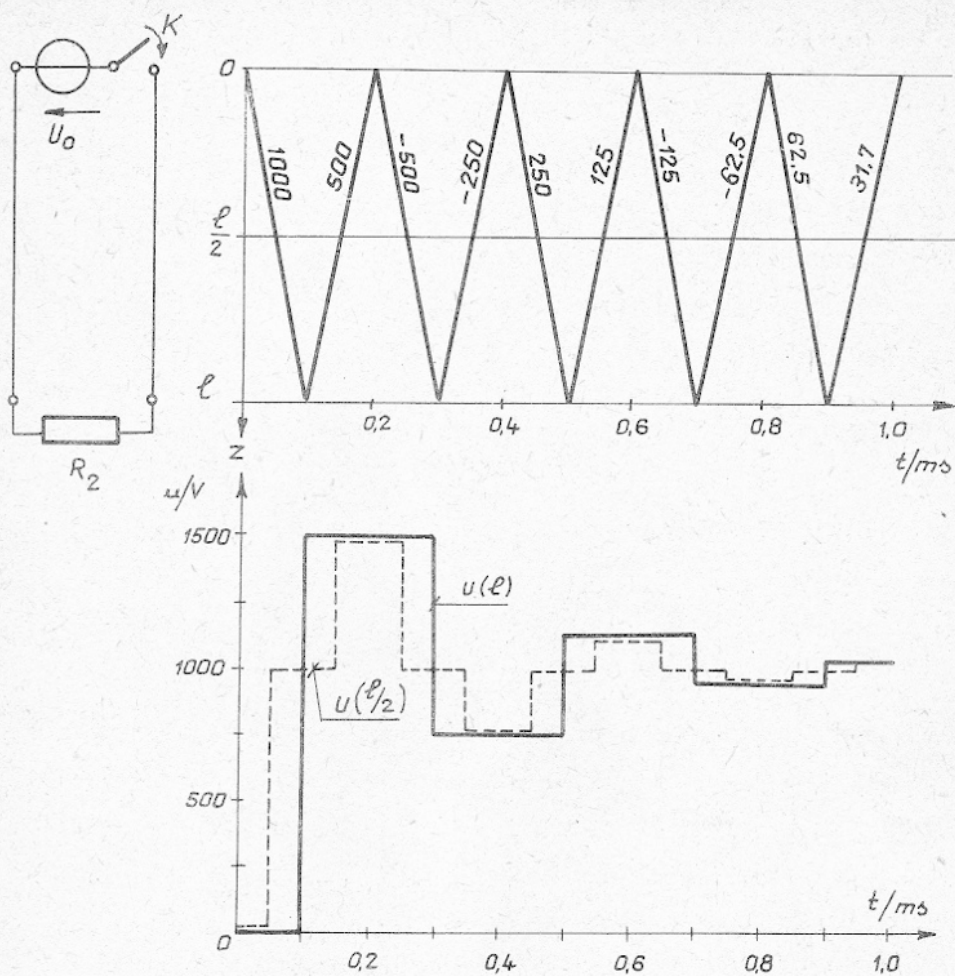
A 7.13 ábrán vázoltuk a menetdiagramot, továbbá ennek alapján $u(\ell/2)$ és $u(\ell)$ időfüggését.

c) A $Z_{01} = 350 \Omega$ hullámellenállású, $\ell_1 = 7,2$ km hosszú ideális légvezetékhez $Z_{02} = 90 \Omega$ hullámellenállású, $\ell_2 = 2,1$ km hosszú veszteségmentes kábel csatlakozik, amely $R_2 = 160 \Omega$ ellenállással van lezárva (7.14 ábra). A bemenetre a $t = 0$ pillanatban $U_0 = 1000$ V egyenfeszültségű ideális feszültséggenerátort kapcsolunk. Határozzuk meg a feszültség időbeli változását a lezáráson és a két vezeték csatlakozási helyén, ha a légvezetéken $v_1 = 300 \cdot 10^3$ km/s, a kábelben $v_2 = 70 \cdot 10^3$ km/s a fázissebesség!

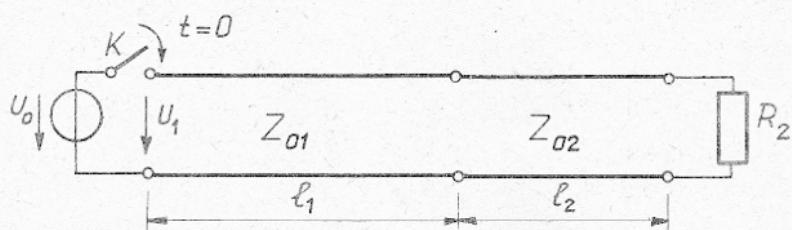
A generátortól induló feszültség-hullám a

$$\tau_1 = \frac{\ell_1}{v_1} = \frac{7,2}{300 \cdot 10^3} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

időpontban reflektálódik a két távvezeték csatlakozási helyén.



7.13-ábra



7.14 ábra

A reflexiós tényező:

$$r_{12} = \frac{Z_{o2} - Z_{o1}}{Z_{o2} + Z_{o1}} = \frac{90-350}{90+350} = -0,591$$

Az $r_{12} U_o$ amplitudójú feszültség hullám a $2\tau_1$ időpontban a generátornál ismét visszaverődik. Itt $r_1 = -1$ a reflexiós tényező.

A kábelben a τ_1 időpontban $U_o(1 + r_{12})$ nagyságú feszültség hullám indul és ez

$$\tau_2 = \frac{\ell_2}{v_2} = \frac{2,1}{70 \cdot 10^3} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

idő múlva a lezáráshoz érkezik. A reflexiós tényező itt

$$r_2 = \frac{R_2 - Z_{o2}}{R_2 + Z_{o2}} = \frac{160-90}{160+90} = 0,28$$

A visszavert hullám újabb τ_2 idő elteltével érkezik a két távvezeték csatlakozási helyéhez, ahol a reflexiós tényező:

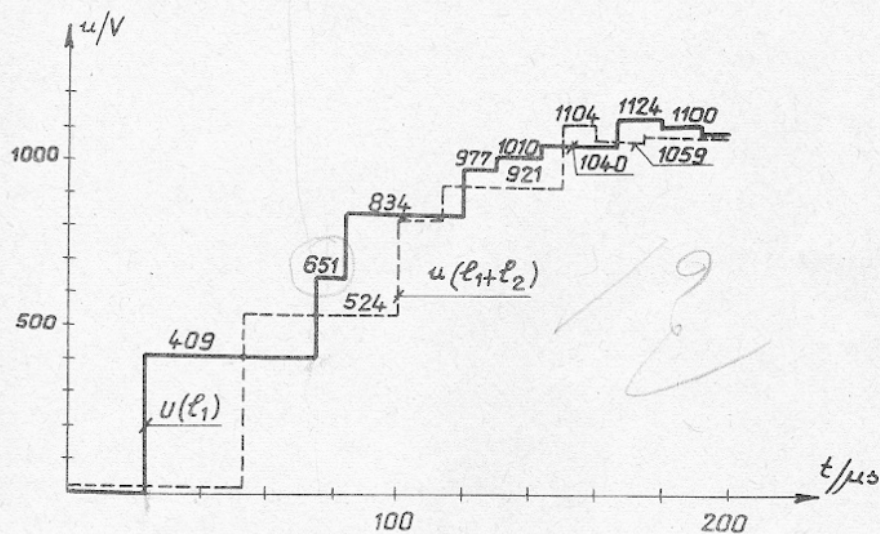
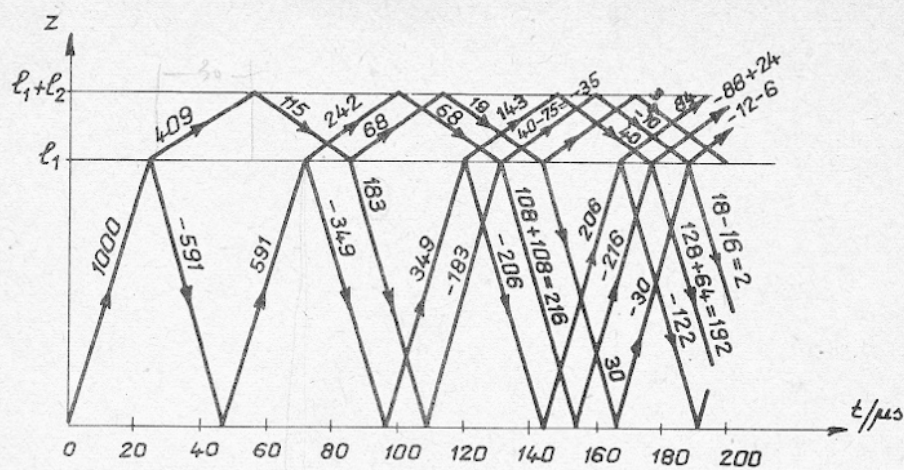
$$r_{21} = -r_{12} = 0,591$$

A feszültség hullám itt visszaverődik egyrészt a lezárás irányában, másrészt az eredő feszültség hullám tovább halad a generátor felé.

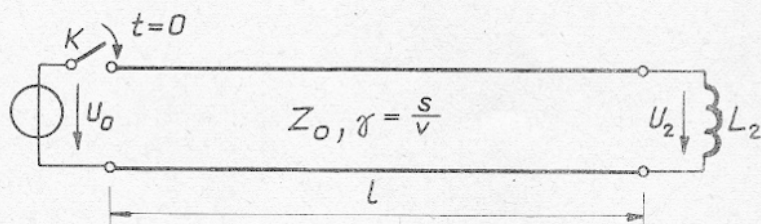
A folyamatot a 7.15 ábrán követhetjük. A két távvezeték csatlakozási helyén és a lezárásnál fellépő feszültség értékét is feltüntettük. Ilyen ábra alapján a távvezeték bármely helyére és tetszőleges időpontra meghatározható a feszültség.

Állandósult állapotban – minthogy mindkét távvezeték ideális – a feszültség mindenütt 1000 V.

d) Z_o hullámellenállású, ℓ hosszúságú ideális távvezeték L_2 induktivitással van lezárva (7.16 ábra). A távvezeték bementére a $t = 0$ pillanatban U_o egyenfeszültségű ideális feszültség generátort kapcsolunk. Határozzuk meg a lezáró induktivitáson megjelenő u_2 feszültség időbeli változását!



7.15 ábra



7.16 ábra

A feladatot a Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg.
Példánkban

$$Z_1(s) = 0$$

$$Z_2(s) = s L_2$$

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$U_0(s) = \frac{U_0}{s}$$

$$\gamma(s) = s \sqrt{L C} = \frac{s}{v}$$

$$r_1(s) = -1$$

$$r_2(s) = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{s - \frac{Z_0}{L_2}}{s + \frac{Z_0}{L_2}} = \frac{s - \zeta}{s + \zeta}$$

ahol

$$\zeta = \frac{Z_0}{L_2}$$

A $\tau = \ell/v$ jelölés bevezetésével (7.57) alapján a feszültség Laplace-transzformáltja a $z = \ell$ helyre a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} U(\ell, s) = U_2(s) &= \frac{U_0}{s} (e^{-s\tau} + r_2 e^{-s\tau} - r_2 e^{-3s\tau} - \\ &- r_2^2 e^{-3s\tau} + r_2^2 e^{-5s\tau} + \dots) = \\ &= \frac{U_0}{s} [(1 + r_2) e^{-s\tau} - r_2(1 + r_2) e^{-3s\tau} + \end{aligned}$$

$$+ r_2^2 (1 + r_2) e^{-5s\tau} - \dots] = U_0 \sum_{n=0}^{\infty} G_n(s) e^{-(2n+1)s\tau}$$

ahol

$$G_n(s) = (-1)^n \frac{r_2^n}{s} (1 + r_2) = (-1)^n \frac{(s - \zeta)^n 2s}{s(s + \zeta)^{n+1}} =$$

$$= (-1)^n \frac{s}{\zeta} \frac{2\zeta}{s} \frac{(s - \zeta)^n}{(s + \zeta)^{n+1}} = (-1)^n \frac{s}{\zeta} F_n(s)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

és

$$F_n(s) = \frac{2\zeta}{s} \frac{(s - \zeta)^n}{(s + \zeta)^{n+1}} =$$

$$= \frac{2\zeta}{s} \frac{(s - \zeta)^{n-1}}{(s + \zeta)^n} - \frac{2\zeta}{s} \left[\frac{(s - \zeta)^{n-1}}{(s + \zeta)^n} - \frac{(s - \zeta)^n}{(s + \zeta)^{n+1}} \right] =$$

$$= \frac{2\zeta}{s} \frac{(s - \zeta)^{n-1}}{(s + \zeta)^n} - \frac{2\zeta}{s + \zeta} \frac{2\zeta}{s} \frac{(s - \zeta)^{n-1}}{(s + \zeta)^n} =$$

$$= F_{n-1}(s) - \frac{2\zeta}{s + \zeta} F_{n-1}(s)$$

$F_n(s)$ inverz transzformáltjára a konvolúció tétel alkalmazásával a következő rekurziós formulát kapjuk:

$$\mathcal{L}^{-1} F_n(s) = f_n(t) = f_{n-1}(t) - 2\zeta e^{-\zeta t} \int_0^t e^{\zeta \tau} f_{n-1}(\tau) d\tau$$

$$f_0(t) = 2(1 - e^{-\zeta t})$$

$f_n(t)$ ismeretében pedig $G_n(s)$ inverz transzformáltja t szerinti differenciálással és a megfelelő állandóval történő szorzással kapható:

$$\mathcal{L}^{-1} G_n(s) = g_n(t) = \frac{(-1)^n}{\zeta^n} \frac{d}{dt} f_n(t)$$

Igy

$$g_0(t) = 2 e^{-\zeta t}$$

$$g_1(t) = 2 (2 \zeta t - 1) e^{-\zeta t}$$

$$g_2(t) = 2 (2 \zeta^2 t^2 - 4 \zeta t + 1) e^{-\zeta t}$$

·
·
·

Az időbeli eltolásokat figyelembe véve a lezáráson fellépő feszültség a következőképpen írható fel:

$$u_2(t) = U_0 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}(t - (2n+1)\tau) g_n(t - (2n+1)\tau)$$

vagy részletesebben:

$$u_2(t) = 0 \quad \text{ha } t < \tau$$

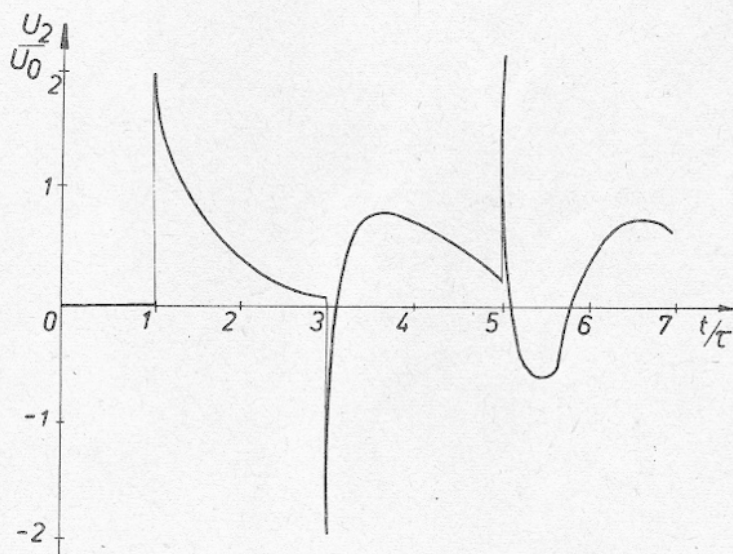
$$u_2(t) = 2 U_0 e^{-\zeta(t - \tau)} \quad \text{ha } \tau < t < 3\tau$$

$$u_2(t) = 2 U_0 \left\{ e^{-\zeta(t - \tau)} + [2 \zeta(t - 3\tau) - 1] e^{-\zeta(t - 3\tau)} \right\}$$

$$\text{ha } 3\tau < t < 5\tau$$

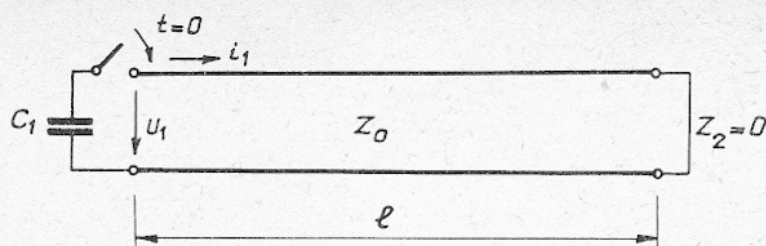
$$u_2(t) = 2 U_0 \left\{ e^{-\xi(t-\tau)} + [2\xi(t-3\tau) - 1] e^{-\xi(t-3\tau)} + \right. \\ \left. + [2\xi^2(t-5\tau)^2 - 4\xi(t-5\tau) + 1] e^{-\xi(t-5\tau)} \right\} \\ \text{ha } 5\tau < t < 7\tau$$

Az $u_2(t)/U_0$ viszonyt t/τ függvényében a 7.17 ábrán tüntettük fel $\xi\tau = 2$ esetre.



7.17 ábra

e) Ideális, ℓ hosszúságú, végén rövidrezárt távvezeték bemenetére a $t = 0$ pillanatban U_0 feszültségre feltöltött, C_1 kapacitású kondenzátort kapcsolunk (7.18 ábra). Határozzuk meg a kondenzátor feszültségének időbeli változását!



7.18 ábra

A számításához a kondenzátort egy U_0 forrásfeszültségű feszültségforrással sorbakapcsolt energiamentes C_1 kapacitású kondenzátorral helyettesítjük és így bekapcsolási jelenségre vezetjük vissza a feladatot.

A kondenzátor feszültsége:

$$u_1(t) = U_0 - \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(\tau) d\tau$$

Ennek kiszámításához az i_1 áramot, ehhez pedig a távvezeték bemeneti impedanciáját kell meghatározni. A Laplace-transzformáltakkal:

$$I_1(s) = \frac{U_V(s)}{Z_{be}(s) + Z_c(s)}$$

ahol

$$U_V(s) = \frac{U_0}{s} \quad Z_c(s) = \frac{1}{s C_1}$$

és

$$Z_{be}(s) = Z_0 \frac{\text{sh } \gamma l}{\text{ch } \gamma l} = Z_0 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} =$$

$$= Z_0(s) \frac{e^{\frac{s}{v}} - e^{-\frac{s}{v}}}{e^{\frac{s}{v}} + e^{-\frac{s}{v}}}$$

Ideális távvezeték esetén (7.64) szerint

$$\gamma(s) = \sqrt{s^2 LC} = \frac{s}{v}$$

Igy

$$I_1(s) = \frac{U_0}{s} \frac{1}{Z_0 \frac{e^{\frac{s}{v}} - e^{-\frac{s}{v}}}{e^{\frac{s}{v}} + e^{-\frac{s}{v}}} + \frac{1}{s C_1}}$$

és

$$U_1(s) = \frac{U_0}{s} - \frac{I_1(s)}{s C_1} = \frac{U_0}{s} \left(1 - \frac{e^{\frac{s}{v}} + e^{-\frac{s}{v}}}{s C_1 Z_0 (e^{\frac{s}{v}} - e^{-\frac{s}{v}}) + e^{\frac{s}{v}} + e^{-\frac{s}{v}}} \right)$$

$$= U_0 \frac{e^{\frac{s}{v}} - e^{-\frac{s}{v}}}{s (e^{\frac{s}{v}} - e^{-\frac{s}{v}}) + \frac{1}{C_1 Z_0} (e^{\frac{s}{v}} + e^{-\frac{s}{v}})} =$$

$$= \frac{U_0}{v} \frac{\operatorname{sh} \frac{s}{v}}{\frac{s}{v} \operatorname{sh} \frac{s}{v} + \frac{1}{C_1 Z_0} \operatorname{ch} \frac{s}{v}}$$

A visszatranszformálást a kifejtési tétel alapján végezzük el. A nevező gyökei az

$$\frac{s}{v} \operatorname{sh} \frac{s}{v} + \frac{1}{C_1 Z_o} \operatorname{ch} \frac{s}{v} = 0$$

vagyis az

$$\frac{s}{v} \operatorname{th} \frac{s}{v} = - \frac{1}{C_1 Z_o}$$

egyenlethől képzetesek, amelyre bevezetjük az

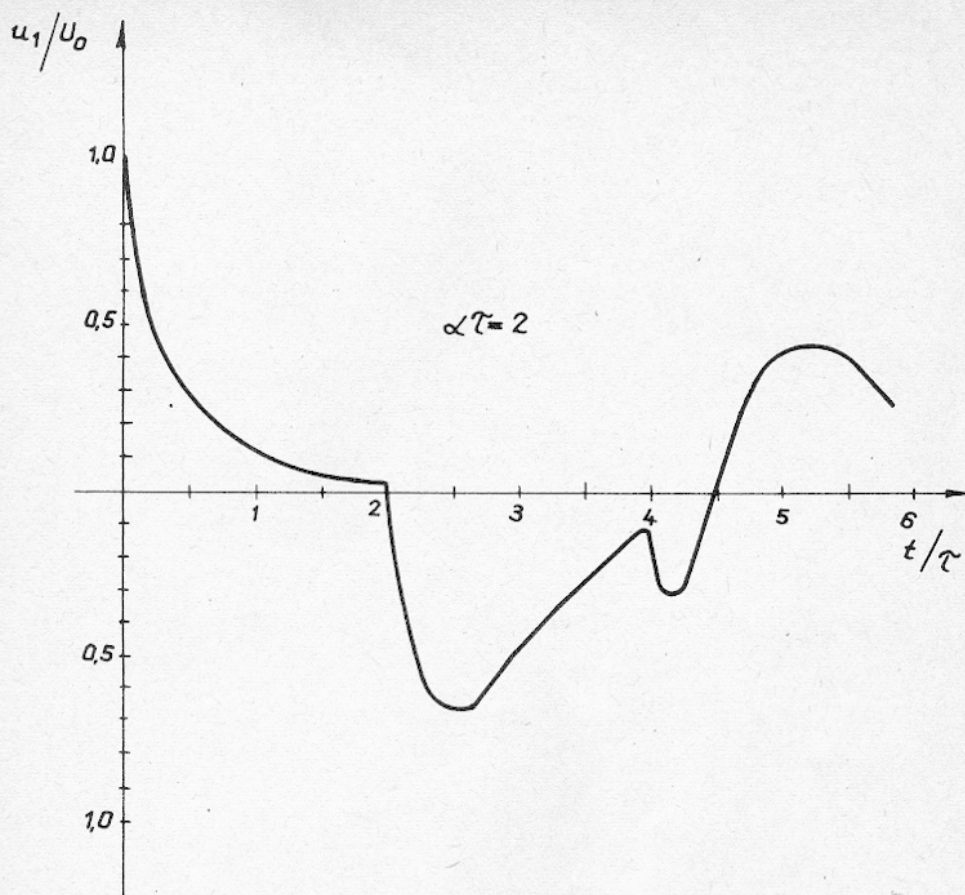
$$\frac{s_n}{v} = j \omega_n \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

jelölést. A visszatranszformáláshoz szükségünk van az $U_1(s)$ nevezőjének deriváltjára:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{v} \operatorname{sh} \frac{s}{v} + \frac{1}{C_1 Z_o} \operatorname{ch} \frac{s}{v} \right) &= \\ &= \frac{1}{v} \operatorname{sh} \frac{s}{v} + \frac{s}{v^2} \operatorname{ch} \frac{s}{v} + \frac{1}{v C_1 Z_o} \operatorname{sh} \frac{s}{v} \end{aligned}$$

A nevező s_n gyökhelyén:

$$\left[\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{v} \operatorname{sh} \frac{s}{v} + \frac{1}{C_1 Z_o} \operatorname{ch} \frac{s}{v} \right) \right]_{s=s_n} = \frac{1}{v} \operatorname{sh} \frac{s_n}{v} \left[1 + \frac{1}{C_1 Z_o} - C_1 Z_o \left(\frac{s_n}{v} \right)^2 \right]$$



7.19 ábra

thien l?

Mint ahogy $\alpha_{-n} = -\alpha_n$, a keresett feszültség:

$$\mathcal{E}(t)u_1(t) = \mathcal{E}(t) \frac{U_0}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j \sin \frac{\alpha_n}{v} \left(e^{j\alpha_n vt} + e^{-j\alpha_n vt} \right)}{\frac{j}{v} \sin \frac{\alpha_n}{v} \left[1 + \frac{1}{C_1 Z_0} + C_1 Z_0 \left(\frac{\alpha_n}{v} \right)^2 \right]} =$$

$$= \mathcal{E}(t) U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j\alpha_n vt} + e^{-j\alpha_n vt}}{1 + \frac{1}{C_1 Z_0} + C_1 Z_0 \left(\frac{\alpha_n}{v} \right)^2} =$$

$$= \varepsilon(t) 2 U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1 Z_0}{1 + C_1 Z_0 + (C_1 Z_0 \frac{\alpha_n^2}{v})} \cos \alpha_n vt$$

A kondenzátor feszültségének időfüggvényét a 7.19 ábrán vázoltuk.

IRODALOM

1. Simonyi K.: Elméleti villamosságatan, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
2. Fodor Gy., Simonyi K., Vágó I.: Elméleti villamosságatan példatár, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
3. Vágó I.: Távvezeték rendszerek (jegyzet) Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
4. Flügge S. (szerkesztő): Handbuch der Physik, 16. kötet, Springer, Berlin, 1958.
5. Koettwitz H., Pundt H.: Mathematische Grundlagen und Netzparameter, Verlag für Grudstoffindustrie, Leipzig, 1968.
6. Johnson W. C.: Transmission lines and networks, McGraw Hill, New York, 1950.
7. Ramo S., Whinnery J. R.: Fields and waves in modern radio, Wiley, New York, 1945.
8. Hayashi S.: Volnū v linijah elektroperedacsi, Goszudarsztvennoe Elektricseszkoje Izdatelsztvo, Moszkva - Leningrád, 1960.
9. Polivanov K. M.: Teoreticeszkie osznovū elektrotechniki, Energija, Moszkva, 1967.

TARTALOMJEGYZÉK

1. A távvezeték és az elosztott paraméterű hálózat fogalma	3
2. A táviró egyenletek	5
2.1 Az áramköri egyenletek felírása	5
2.2 A táviró egyenletek megoldása	7
2.3 A távvezeték paraméterek számításáról	14
2.4 Példák és feladatok	23
3. A távvezeték lezárásának figyelembevétele	28
3.1 A táviró egyenletek megoldásában szereplő állandók meghatározása	28
3.2 Vizsgálatok néhány speciális lezárás esetén	31
3.3 Távközvetítés tetszőleges lezárással	37
3.4 Példák és feladatok	42
4. Távközvetítés szakasz vizsgálata	55
4.1 A távközvetítés szakasz kétkapú paraméterei	55
4.2 Távközvetítés szakasz helyettesítése koncentrált elemű hálózattal	59
4.3 Távközvetítés illesztése	63
4.3.1 Illesztés $\lambda/4$ hosszúságú impedanciáttranszformátorral	63
4.3.2 Illesztés csomaggal	64

4.4 Távfűzeték szakasz, mint rezgőkör	67
4.4.1 Ideális távfűzeték szakasz	67
4.4.2 Veszteséges távfűzeték szakasz, mint rezgőkör	73
4.5 Példák és feladatok	76
5. Távfűzeték hálózatok	90
5.1 Néhány egyszerű elrendezés	90
5.2 Gráfelmélet alkalmazása távfűzeték hálózatok számítására	92
5.2.1 A távfűzeték hálózat gráfja	92
5.2.2 Az ágak jellemzése	95
5.2.3 Az áramkörü egyenletek	96
5.2.4 A hálózatot jellemző mátrixok meghatározása	104
6. Csatolt távfűzeték rendszerek	107
6.1 A rendszer differenciálegyenletei	107
6.2 Az egyenletek megoldása	108
7. Távfűzeték általános időfüggvényű gerjesztéssel	116
7.1 A Fourier-integrál alkalmazása	116
7.2 A jel terjedési sebessége és a csoportsebesség	119
7.3 Néhány speciális eset	121
7.4 Félgrafikus módszer	128
7.5 A Laplace-transzformáció alkalmazása	129
7.6 Példák és feladatok	139
Irodalomjegyzék	155