

## 1. Csomóponti Potenciálok Módszere

- Csomóponti potenciálok meghatározása, ágáramok segítségével.
- A módszer Kirchoff csomóponti törvényének és Ohm törvényének ismereteire építve, többforrásos hálózatok egyszerűbb számítására kiválóan alkalmas.

Potenciál: Egy rögzített ponthoz mért feszültség.

- Jele:  $\Phi$
- Mértékegysége: **V**

A rögzített pontunkat tekintjük egy viszonyítási alapnak. „Ehhez a ponthoz képest a többi pontnak mekkora az értéke.”

Ha a hálózat két pontja között eltérés van, akkor ott feszültségkülönbség jelentkezik. Vagyis:

Feszültség: Két pont közötti potenciál különbség.

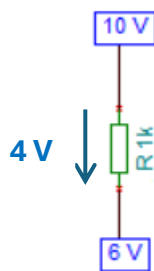
- Jele: **U**
- Mértékegysége: **V**

**A feszültség mindig a pozitívabb potenciáltól esik a negatívabb potenciál felé!**

Példa:

Legyen  $\Phi_1 = 10\text{ V}$  és  $\Phi_2 = 6\text{ V}$

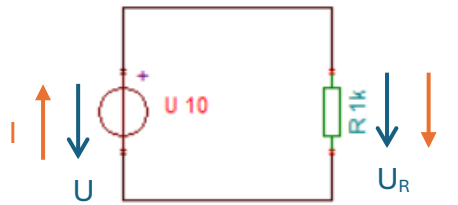
$$U_R = \phi_1 - \phi_2 = 4\text{ V}$$



Hálózatszámítási feladatinknál kihasználjuk, hogy az energiamegmaradás értelmében a hálózat teljesítményeinek előjeles összege 0.

$$\sum P_{befektetett} + \sum P_{fogyasztott} = 0$$

Példaként tekintsük a következő egyszerű esetet:



A feszültséggenerátor felső kivezetése van pozitív potenciálon, vagyis a feszültség fentről lefele esik. A párhuzamos kapcsolás értelmében, az R ellenállás felső kivezetése, ugyan azon pozitív potenciálon van, a feszültség rajta is fentről lefele esik. A hálózatban elágazás nincs, az áram erőssége az áramkörben végig állandó. Megegyezés szerint, az áramkörben az áram iránya a pozitívtól a negatívabb sarok felé tart, vagyis, a generátorból kiindulva az áram felfelé halad, majd az ellenálláson keresztül lefelé folyik tovább, vissza a generátor alsó pontjába.

Írjuk fel a két áramköri elem teljesítményét:

$$U = U_R$$

$$P_U = U * I$$

$$P_R = U * I$$

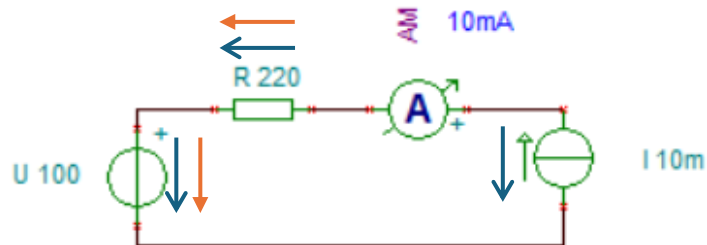
Az energiamegmaradás értelmében:

$$P_U + P_R = 0$$

$$P_R = -P_U$$

A fenti egyszerű példából belátható, hogy a két áramköri komponens teljesítménye az energiamegmaradás értelmében megegyezik, előjeles összegük zérus. Megegyezés szerint, a termelő elemek teljesítmény előjele **negatív**, míg a fogyasztó eszközök **pozitív** értéként szerepelnek számításainkban. Előjeleinket a feladatok során korrigálni szükséges, melyet legegyszerűbben vizuális szemléltetés alapján lehet elvégezni. Ha a fenti példa **feszültség-áram irány viszonyaira** tekintünk, belátható, hogy termelő áramköri elem esetén a feszültség-áram irányok egymással ellentétesek, negatív előjellel illetjük, míg fogyasztó esetén a két nyíl egymással megegyező irányban mutat, előjelük pozitív.

A következő példa szemléltetéséhez használjuk ki az ideális áramgenerátorok egyik legfontosabb feladatát, miszerint az áramgenerátor **állandó áramerősséget és áramirányt tart a rá eső szakaszra mindaddig, míg a hálózatban útvonalelágazás nem következik be.**



A fenti példa egy kétforrásos, sorba kapcsolt hálózatot szemléltet egyetlen ellenállással. A feszültséggenerátor feszültségésését a + jelölés szemlélteti, míg az áramgenerátor áramirányát a felfelé mutató nyíl határozza meg. Az ideális áramgenerátor alapelve szerint, az áramforrás „rákényszeríti a saját áramértékét és irányát az elágazásmentes szakaszra”. A beépített ampermérő szemlélteti a hálózatban mért tényleges áramértéket. Az ampermérőn átfolyó áram iránya szintén a + ponton lép be az eszközbe. Mivel a kapcsolás elágazás mentes, így a 10 mA áram a hálózat minden pontján azonos, iránya meghatározott, így kénytelen a feszültséggenerátor + sarkán belépve haladni tovább a hálózatban. Ha a feszültséggenerátor feszültségésésének és áramának irányát figyelembe vesszük, beláthatjuk, hogy a feszültségforrásunk ebben az áramköri elrendezésben fogyasztó szerepben működik.

Számítással igazoljuk:

$$I = 10 \text{ mA}$$

$$U_R = 220 * 0,01 = 2,2 \text{ V}$$

$$P_R = U_R * I = 0,022 \text{ W}$$

$$P_U = U * I = 100 * 0,01 = 1 \text{ W}$$

Határozzuk meg az áramgenerátor feszültségét a huroktörvény segítségével. Pozitív referenciaként használjuk például az ellenállás feszültségésését. Ebben a példában iránya megegyezik a feszültséggenerátoréval. Írjuk fel a hurokegyenletet:

$$U + U_R + U_I = 0$$

$$100 + 2,2 + U_I = 0$$

$$U_I = -102,2 \text{ V}$$

A negatív előjel ebben az esetben azt jelenti, hogy az áramgenerátor feszültségésésének az iránya ellentétes a referencia feszültségünkhöz képest.

Ezek alapján az áramgenerátor feszültsége 102,2 V.

Teljesítménye az áram-feszültség irányviszonyokat figyelembe véve:

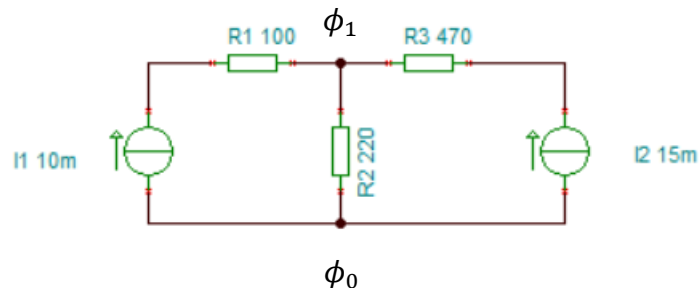
$$P_I = U_I * I = 102,2 * 0,01 = -1,022 \text{ W}$$

$$\sum P = 0$$

$$P_U + P_I + P_R = 0$$

$$1 - 1,022 + 0,022 = 0 \text{ W}$$

A csomóponti potenciálok alkalmazásához a fenti feltételeket fogjuk alkalmazni.



A felrajzolt példán láthatólag két csomópont van. A módszer lehetőséget ad arra, hogy egy csomópontot szabadon megválaszthassunk magunknak. Legyen ez az abszolút **0 V** feszültségű pontunk, amit  $\phi_0$  pontnak fogunk nevezni, és elhelyezzük valamelyik csomópontba. Az egyszerűség kedvéért legyen ez az alsó csomópont. A másik, ismeretlen csomópontunk ezek alapján legyen a  $\phi_1$  pont.

Az ismeretlen csomópont meghatározásához használjuk ki Kirchoff csomóponti törvényét, vagyis összegezzük az ágáramokat.

$$-0,01 + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{220} - 0,015 = 0$$

Az áramkör bal, illetve jobb ágából egy-egy befolyó konstans áramunk van a csomópontba, ezek előjele negatív. A középső ág áramának kiszámításához használjuk ki, hogy az R2 ellenálláson eső feszültség pontosan a két potenciálpont közötti különbség. Hangsúlyozzuk, hogy a módszer alkalmazásának ezen pontján még nem tudjuk, hogy melyik potenciálpont bír magasabb számértékkel. Itt feltételezzük, hogy  $\phi_1$  pont névleges értéke nagyobb, mint  $\phi_0$  referencia pontunk. Ezért, a csomóponti áramot a középső ágban kifolyónak vesszük, ezért pozitív előjellel illettük. Mivel az áram egyezményesen a pozitívabb ponttól folyik a negatívabb felé, ezért ez csak úgy lehetséges, ha  $\phi_1$  ténylegesen nagyobb mint  $\phi_0$  csomópont. Rendezzük a törtet:

$$-0,01 + \frac{1}{220} \phi_1 - 0,015 = 0$$

$$\frac{1}{220} \phi_1 = 0,025$$

$$\phi_1 = 5,5 \text{ V}$$

$\phi_1$  potenciál értékünk tehát 5,5 V. Ha az eredményre negatív számot kapunk, az annyit jelent, hogy a valóságban a 0 V referencia értékünk van magasabb potenciálon, a számított potenciálponthoz képest. A meglévő adatok alapján az áramkör többi alkatrészének értékei:

$$I_{R1} = I1 = 10 \text{ mA}$$

$$U_{R1} = R1 * I_{R1} = 1 \text{ V}$$

$$P_{R1} = U_{R1} * I_{R1} = 0,01 \text{ W}$$

$$U_{R2} = \phi_1 - \phi_0 = 5,5 \text{ V}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R2} = 25 \text{ mA}$$

$$P_{R2} = U_{R2} * I_{R2} = 0,1375 \text{ W}$$

$$I_{R3} = I2 = 15 \text{ mA}$$

$$U_{R3} = R3 * I_{R3} = 7,05 \text{ V}$$

$$P_{R3} = U_{R3} * I_{R3} = 0,10575 \text{ W}$$

$$U_{R1} + U_{R2} + U_{I1} = 0$$

$$1 + 5,5 + U_{I1} = 0$$

$$U_{I1} = -6,6 \text{ V}$$

$$P_{I1} = U_{I1} * I1 = -0,066 \text{ W}$$

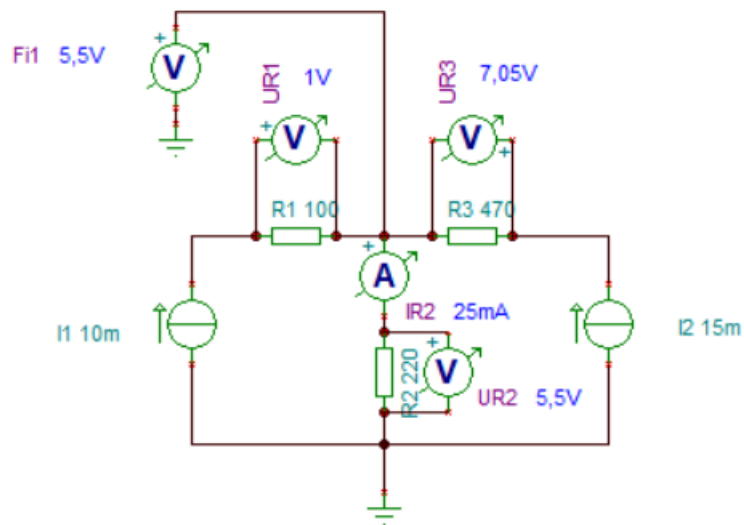
$$U_{R2} + U_{R3} + U_{I2} = 0$$

$$5,5 + 7,05 + U_{I2} = 0$$

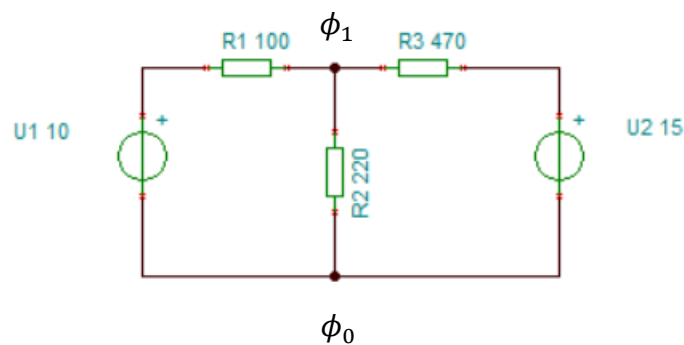
$$U_{I2} = -12,55 \text{ V}$$

$$P_{I2} = U_{I2} * I2 = -0,18825 \text{ W}$$

$$\sum P = 0$$



Most a fenti áramkörben a tápforrásokat cseréljük ki feszültséggenerátorokra:



Referenciapontként vegyük fel ugyan azt, mint az előző példában. Vegyük észre, hogy az U1 feszültség generátor névleges értéke 10 V, míg az U2 feszültséggenerátor értéke 15 V.

$\phi_0$  értéke 0V. A bal oldali tápfeszültség pozitív sarkában a földhöz képest így pontosan 10 V, míg a jobb oldali forrás pozitív sarkában pontosan 15 V helyezkedik el.

Bizonyításképpen írjuk fel többféleképpen a csomóponti egyenletet:

1) Az összes ágáram kifolyó

$$\frac{(\phi_1 - 10)}{100} + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{220} + \frac{(\phi_1 - 15)}{470} = 0$$

$$\frac{1}{100} \phi_1 - \frac{10}{100} + \frac{1}{220} \phi_1 + \frac{1}{470} \phi_1 - \frac{15}{470} = 0$$

$$\frac{431}{25850} \phi_1 = \frac{31}{235}$$

$$\phi_1 = 7,9118 \text{ V}$$

2) Az összes ágáram befolyó

$$\begin{aligned}
& -\frac{(10 - \phi_1)}{100} - \frac{(\phi_0 - \phi_1)}{220} - \frac{(15 - \phi_1)}{470} = 0 \\
& -\frac{10}{100} + \frac{1}{100}\phi_1 + \frac{1}{220}\phi_1 - \frac{15}{470} + \frac{1}{470}\phi_1 = 0 \\
& \frac{431}{25850}\phi_1 = \frac{31}{235} \\
& \phi_1 = 7,9118 \text{ V}
\end{aligned}$$

3) Vegyes (Legyen a bal oldali ág befolyó, a többi kifolyó)

$$\begin{aligned}
& -\frac{(10 - \phi_1)}{100} + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{220} + \frac{(\phi_1 - 15)}{470} = 0 \\
& -\frac{10}{100} + \frac{1}{100}\phi_1 + \frac{1}{220}\phi_1 + \frac{1}{470}\phi_1 - \frac{15}{470} = 0 \\
& \frac{431}{25850}\phi_1 = \frac{31}{235} \\
& \phi_1 = 7,9118 \text{ V}
\end{aligned}$$

Látható, hogy mindhárom esetben ugyan azon eredményre jutunk. Ha azt feltételezzük, hogy a csomópontba befolyik az áram, azt alap esetben negatív előjellel szemléltetjük. Befolyó áram csak úgy lehetséges, ha feltételezzük, hogy csomópontunk alacsonyabb potenciálon van, mint a másik csomópont. (A 3) esetben pl.: a 10 V-ot magasabb potenciálon képzeljük el, mint  $\phi_1$ -et, ezért  $\phi_1$ -be folyik az áram). Abban az esetben, ha kifolyónak írjuk fel, akkor  $\phi_1$  potenciálpontot feltételezzük nagyobb értéken. (Pl.: az 1) lehetőség esete, ahonnan 10 V felé folyik az áram).

Az adatok birtokában a hálózat alkatrészeinek az értékei:

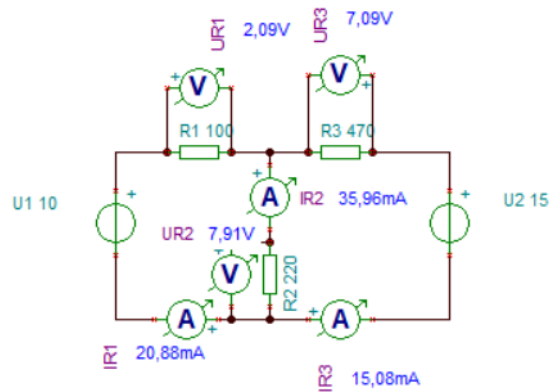
$$\begin{aligned}
U_{R2} &= \phi_1 = 7,9118 \text{ V} \\
I_{R2} &= \frac{U_{R2}}{R2} = 35,96 \text{ mA} \\
P_{R2} &= U_{R2} * I_{R2} = 0,2845 \text{ W} \\
U_{R1} &= 10 - \phi_1 = 2,0882 \text{ V} \\
I_{R1} &= \frac{U_{R1}}{R1} = 20,88 \text{ mA} \\
P_{R1} &= U_{R1} * I_{R1} = 0,0436 \text{ W} \\
U_{R3} &= 15 - \phi_1 = 7,0882 \text{ V} \\
I_{R3} &= \frac{U_{R3}}{R3} = 15,08 \text{ mA} \\
P_{R3} &= U_{R3} * I_{R3} = 0,10689 \text{ W}
\end{aligned}$$

A 10 V generátor árama megegyezik  $I_{R1}$  árammal, míg a 15 V generátor árama pedig  $I_{R3}$  árammal. Mindkét generátor a feszültség-áram viszonyaik alapján termelni fog.

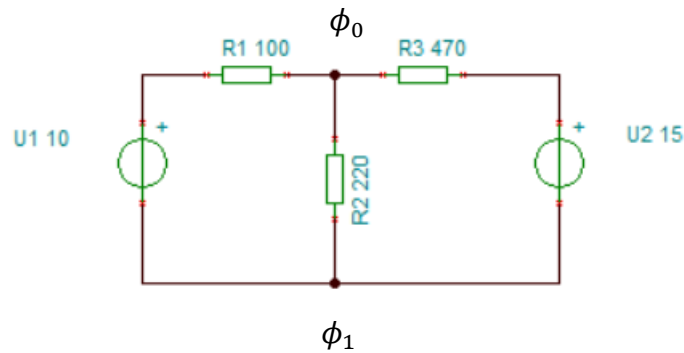
$$P_{10V} = 10 * I_{R1} = -0,2088 \text{ W}$$

$$P_{15V} = 15 * I_{R3} = -0,2262 W$$

$$\sum P = 0$$



Oldjuk meg a feladatot ellentétesen felvett potenciállal is.



Az egyenlet így a következőképpen alakul:

Legyen az összes ág most kifolyó  $\phi_1$ -ből

$$\begin{aligned} \frac{(\phi_1 - (-10))}{100} + \frac{(\phi_1 - \phi_0)}{220} + \frac{(\phi_1 - (-15))}{470} &= 0 \\ \frac{1}{100} \phi_1 + \frac{10}{100} + \frac{1}{220} \phi_1 + \frac{1}{470} \phi_1 + \frac{15}{470} &= 0 \\ \frac{431}{25850} \phi_1 &= -\frac{31}{235} \\ \phi_1 &= -7,9118 V \end{aligned}$$

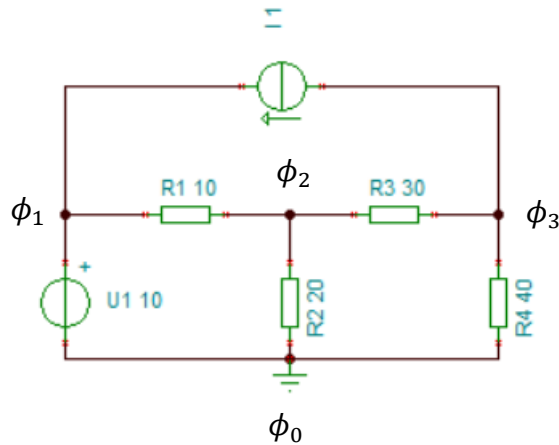
$$U_{R2} = \phi_0 - \phi_1 = 0 - (-7,9118) = 7,9118 V$$

$$U_{R1} = \phi_1 - (-10) = -7,9118 - (-10) = 2,0882 V$$

$$U_{R3} = \phi_1 - (-15) = -7,9118 - (-15) = 7,0882 V$$

Látható, hogy a negatív előjellel megkapott potenciálpont annyit jelent, hogy a valóságban a most  $\phi_0$ -nak választott potenciál van nagyobb névleges értéken. A

módszer ezen végig vezetése is megadja a helyes áramköri értékeket, csak az előjelek helyes használatára célszerű figyelni.



A következő feladatban  $\phi_0$  szintén 0 potenciálon van. A három ismeretlen csomópont közül egy, könnyedén meghatározható. Az  $U_1$  generátor alsó kivezetése földponton van, míg a felső kivezetése közvetlenül a  $\phi_1$  potenciálra van kötve. Vagyis  $\phi_1$  értéke 10 V.

$$\phi_0 = 0 \text{ V}$$

$$\phi_1 = 10 \text{ V}$$

$$\phi_2 \rightarrow -\frac{(\phi_1 - \phi_2)}{10} + \frac{(\phi_2 - \phi_0)}{20} + \frac{(\phi_2 - \phi_3)}{30} = 0$$

$$\phi_3 \rightarrow -\frac{(\phi_2 - \phi_3)}{30} + 1 + \frac{(\phi_3 - \phi_0)}{40} = 0$$

$$\begin{cases} -1 + \frac{1}{10}\phi_2 + \frac{1}{20}\phi_2 + \frac{1}{30}\phi_2 - \frac{1}{30}\phi_3 = 0 \\ -\frac{1}{30}\phi_2 + \frac{1}{30}\phi_3 + 1 + \frac{1}{40}\phi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{11}{60}\phi_2 - \frac{1}{30}\phi_3 = 1 \\ -\frac{1}{30}\phi_2 + \frac{7}{120}\phi_3 = -1 \end{cases}$$

$$\phi_2 = 2,6087 \text{ V}$$

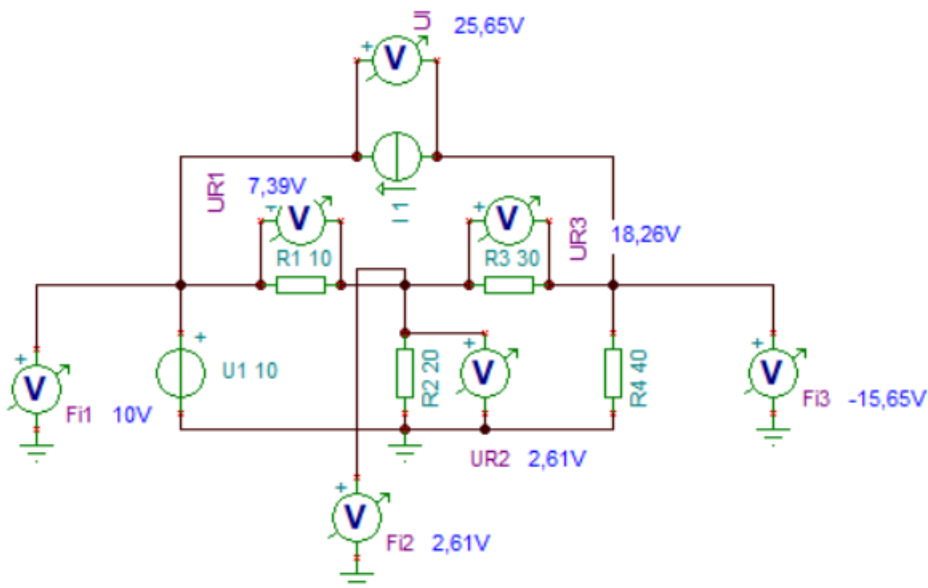
$$\phi_3 = -15,6522 \text{ V}$$

$$U_{R1} = \phi_1 - \phi_2 = 7,3913 \text{ V}$$

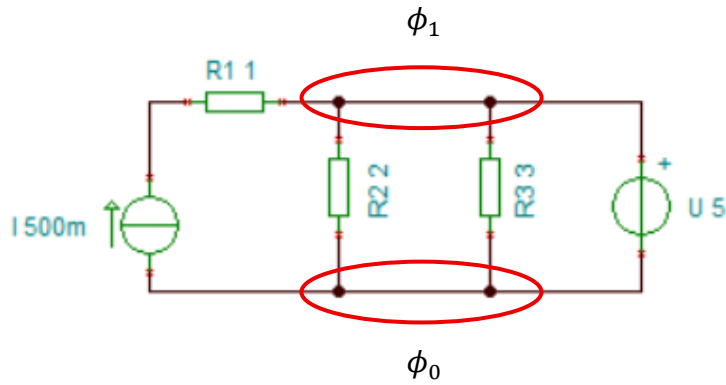
$$I_{R1} = \frac{U_{R1}}{R1} = 0,73913 \text{ A}$$

$$P_{R1} = U_{R1} * I_{R1} = 5,4631 \text{ W}$$

$$\begin{aligned}
 U_{R2} &= \phi_2 - \phi_0 = 2,6087 \text{ V} \\
 I_{R2} &= \frac{U_{R2}}{R2} = 0,1304 \text{ A} \\
 P_{R2} &= U_{R2} * I_{R2} = 0,34017 \text{ W} \\
 U_{R3} &= \phi_2 - \phi_3 = 18,2609 \text{ V} \\
 I_{R3} &= \frac{U_{R3}}{R3} = 0,6087 \text{ A} \\
 P_{R3} &= U_{R3} * I_{R3} = 11,11541 \text{ W} \\
 U_{R4} &= \phi_0 - \phi_3 = 15,6522 \text{ V} \\
 I_{R4} &= \frac{U_{R4}}{R4} = 0,39131 \text{ A} \\
 P_{R4} &= U_{R4} * I_{R4} = 6,12486 \text{ W} \\
 I_{U1} - I + I_{R1} &= 0 \\
 I_{U1} &= 0,26087 \text{ A} \\
 P_{U1} &= U1 * I_{U1} = 2,6087 \text{ W} \\
 U_{R1} + U_{R3} + U_I &= 0 \\
 U_I &= -25,6522 \text{ V} \\
 P_I &= U_I * I = -25,6522 \text{ W} \\
 \sum P &= 0
 \end{aligned}$$



A következő kapcsolás elemzésénél figyeljük meg az összevonható csomópontokat:



Mivel a két felső és a két alsó csomópont között az ideális vezeték definíciója miatt nincs feszültségkülönbség, ezért a csomópontok páronként összevonhatóak. Vegyük észre, az így kapott  $\phi_1$  csomópont pontosan 5 V potenciálon van, a feszültségforrás miatt. A komponensek értékei az alábbiak szerint alakulnak:

$$I_{R1} = I = 0,5 \text{ A}$$

$$U_{R1} = R1 * I_{R1} = 0,5 \text{ V}$$

$$P_{R1} = U_{R1} * I_{R1} = 0,25 \text{ W}$$

$$U_{R2} = U_{R3} = \phi_1 = 5 \text{ V}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R2} = 2,5 \text{ A}$$

$$P_{R2} = U_{R2} * I_{R2} = 12,5 \text{ W}$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R3} = 1,6667 \text{ A}$$

$$P_{R3} = U_{R3} * I_{R3} = 8,3335 \text{ W}$$

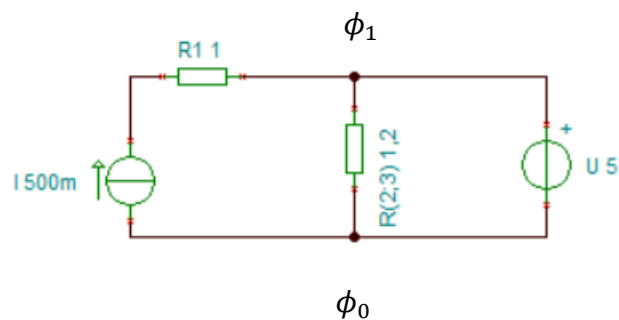
$$U_{R1} + U_{R2} + U_I = 0$$

$$U_I = -5,5 \text{ V}$$

$$P_I = U_I * I = -2,75 \text{ W}$$

A feszültséggenerátor áramát határozzuk meg Kirchoff csomóponti törvényével, de az egyszerűbb felírás érdekében az R2-R3 ellenállást írjuk fel összevont alakban:

$$R3 \times R2 = 1,2 \Omega$$



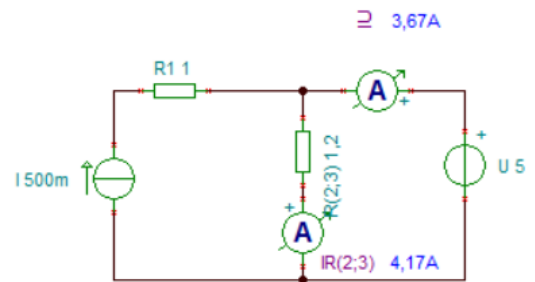
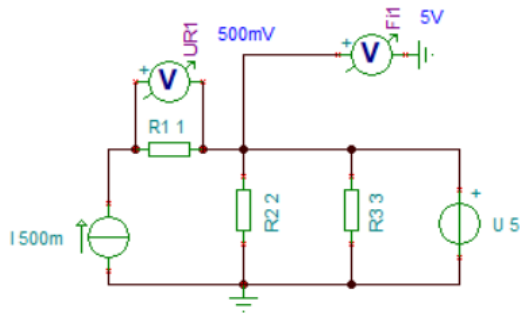
$$I_{R(2;3)} = \frac{U}{R(2;3)} = 4,1667 \text{ A}$$

$$-0,5 + 4,1667 + I_U = 0$$

$$I_U = -3,6667 \text{ A}$$

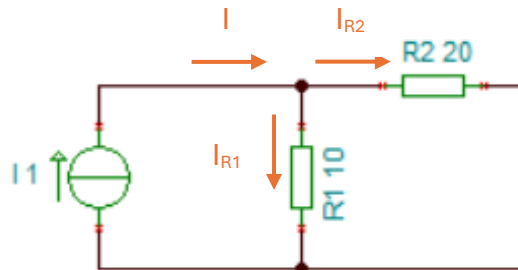
$$P_U = U * I_U = -18,3335 \text{ W}$$

$$\sum P = 0$$



## 2. Hurokáramok módszere

A módszer szintén többforrásos hálózatok számításához kiválóan alkalmas. Lényegének megértéséhez először figyeljük meg az alábbi egyforrásos egyszerű hálózatot:



Az ábrán látható módon az  $I$  osztóáram a csomópontba beérve az áramosztás elvén ágazik el.

$$I = I_{R1} + I_{R2}$$
$$I_{R1} = I * \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,6667 \text{ A}$$
$$I_{R2} = I * \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,3333 \text{ A}$$

Most a következőkben vizsgáljuk meg, hogy a hálózaton belül hány, független zárt hurkot tudunk elkülöníteni. A hurkok számát (jele legyen  **$l$** ) megadja két csomópont közötti útvonalak száma (jele legyen  **$b$** ) valamint a csomópontok száma (jele legyen  **$n$** ) és ezek különbségéhez adjuk hozzá **1**-et.

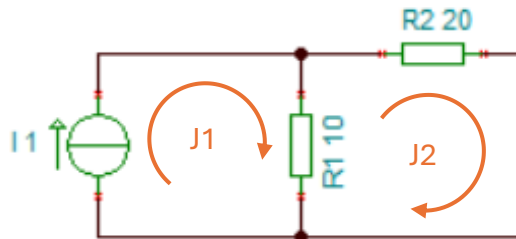
A fenti ábrán jól láthatólag 2 csomópontot különböztetünk meg. Itt az egyikből a másikba 3 féle úton juthatunk el:

- Bal oldalt az  $I$  generátoron keresztül
- Középen az  $R_1$  ellenálláson át
- Jobb oldalt az  $R_2$  ellenállás csatlakozásánál

$$l = b - n + 1 = 2$$

(Forrás.: Kuczmann Miklós, Kovács Gergely: Villamosságtan)

Ennél a példánál a független hurkok száma 2. Jól látható, hogy az áram iránya a fent bejelölt módon fog haladni az áramkörben. Először az egyszerűség kedvéért vegyünk fel 2 hurkot a meghatározott áramirányoknak megfelelően:



A hálózatba jól kivethető a két zárt hurok, melyeket J1 és J2 jelöléssel illetünk. Mindkét hurok egy fiktív áramot jelöl, melyeket felhasználva fogjuk felírni Kirchoff huroktörvényét mindkét hurokra. Jól látható, hogy J1 értéke felvehető az I áramgenerátor áramaként, hiszen maga a generátor a zárt hurok tagja. J2 hurok értékét határozzuk meg úgy, hogy felírjuk a huroktörvény értelmében a feszültségek összegét:

$$R2 * J2 + R1 * (J2 - J1) = 0$$

R1 ellenálláson két hurokáram halad keresztül, melyek egymással ellentétesen haladnak a körben. Őket előjelesen összegezzük.

$$R2 * J2 + R1 * J2 - R1 * J1 = 0$$

$$30J2 - 10 = 0$$

$$30J2 = 10$$

$$J2 = 0,3333 \text{ A}$$

Megkaptuk J2 hurokáram értékét. Ha az áramköri elrendezésre tekintünk, láthatjuk, hogy R2 ellenálláson egyetlen fiktív áram folyik át, a J2. J2 áram lesz R2 ellenállás valós árama. Mivel J2 pozitív előjelű, a valós áramirány is megegyezik a hurokáram irányával. R1 ellenállás esetén a J1 és J2 fiktív áram előjeles összege adja meg a valós áram értékét, irányát a nagyobb névleges értékű hurokáram határozza meg. Ezek alapján:

$$I_{R2} = J2 = 0,3333 \text{ A}$$

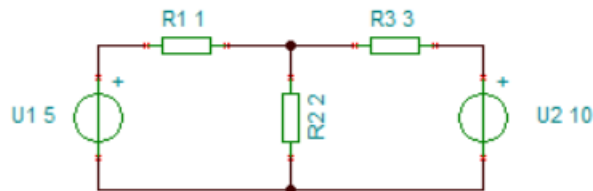
$$I_{R1} = J1 - J2 = 0,6667 \text{ A}$$

Láthatjuk, hogy az eredmény tökéletesen visszaadja az áramosztóval kapott megoldásunkat. A módszer jelentősége összetettebb, valamint többforrásos hálózatok esetén mutatkozik meg, az alábbi szempontokat figyelembe véve:

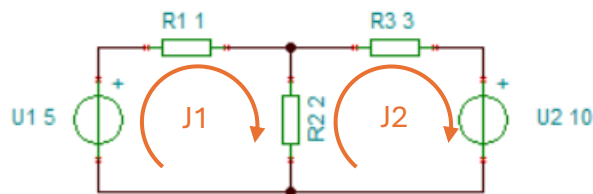
- A maximális független hurkokat fel kell venni
- Minden alkatrésznek legalább egy hurokban bent kell lennie
- Egy áramgenerátor maximum egy hurokban szerepelhet

- A körüljárási irány szabadon megválasztható
- Negatív előjel esetén a független ágba a valós áram ellentétesen folyik a hurokáramhoz képest

Az alábbi hálózaton vegyük fel a hurokáramokat többféleképpen:



1) Mindkét áram óramutató járásával megegyezően



$$\begin{cases} -U1 + R1 * J1 + R2 * (J1 - J2) = 0 \\ U2 + R2 * (J2 - J1) + R3 * J2 = 0 \end{cases}$$

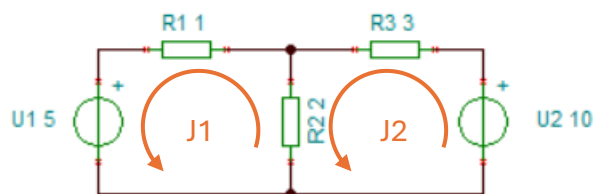
$$\begin{cases} -5 + 3J1 - 2J2 = 0 \\ 10 - 2J1 + 5J2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3J1 - 2J2 = 5 \\ -2J1 + 5J2 = -10 \end{cases}$$

$$J1 = 0,45455 \text{ A}$$

$$J2 = -1,8182 \text{ A}$$

2) Mindkét áram óramutató járásával ellentétesen



$$\begin{cases} U1 + R1 * J1 + R2 * (J1 - J2) = 0 \\ -U2 + R2 * (J2 - J1) + R3 * J2 = 0 \end{cases}$$

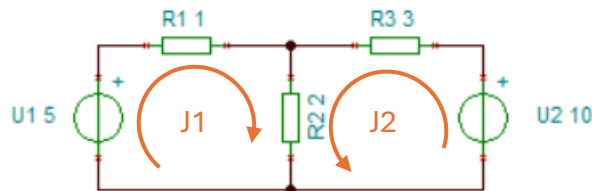
$$\begin{cases} 5 + 3J1 - 2J2 = 0 \\ -10 - 2J1 + 5J2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3J1 - 2J2 = -5 \\ -2J1 + 5J2 = 10 \end{cases}$$

$$J1 = -0,45455 \text{ A}$$

$$J2 = 1,8182 \text{ A}$$

3) J1-et óramutató járásával megegyezően, J2-t ellentétesen



$$\begin{cases} -U1 + R1 * J1 + R2 * (J1 + J2) = 0 \\ -U2 + R2 * (J2 + J1) + R3 * J2 = 0 \end{cases}$$

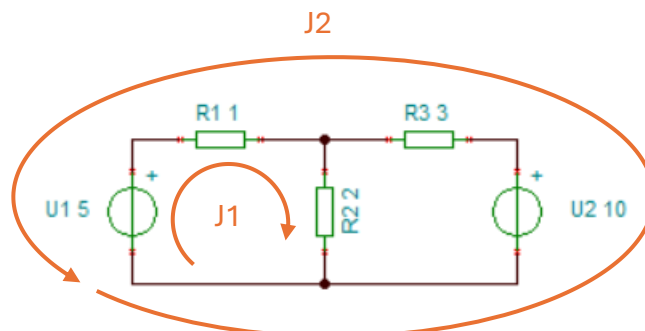
$$\begin{cases} -5 + 3J1 + 2J2 = 0 \\ -10 + 2J1 + 5J2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3J1 + 2J2 = 5 \\ 2J1 + 5J2 = 10 \end{cases}$$

$$J1 = 0,45455 \text{ A}$$

$$J2 = 1,8182 \text{ A}$$

4) J1 hurokáram az előzőek alapján a bal oldali hurokban óramutató járásával megegyezően, J2 hurok ölelje körbe az egész hálózatot óramutató járásával ellentétesen



$$\begin{cases} -U1 + R1 * (J1 - J2) + R2 * J1 = 0 \\ U1 - U2 + R3 * J2 + R1 * (J2 - J1) = 0 \\ -5 + 3J1 - J2 = 0 \\ -5 + 4J2 - J1 = 0 \\ 3J1 - J2 = 5 \\ -J1 + 4J2 = 5 \\ J1 = 2,2727 \text{ A} \\ J2 = 1,8182 \text{ A} \end{cases}$$

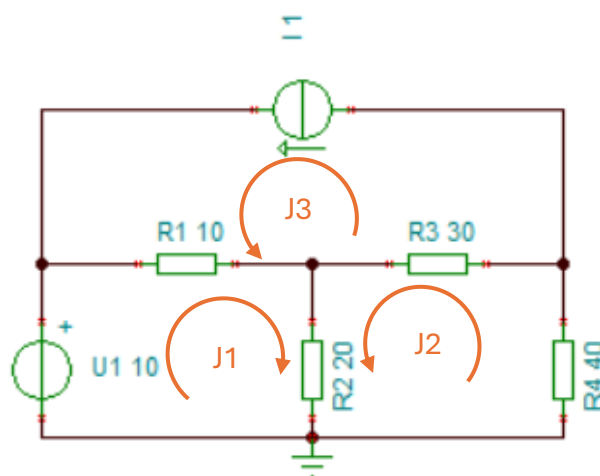
Figyeljük meg az eredmények közti különbségeket. Az 1) és 2) típusnál szerepelnek negatív előjelek az eredményben, ami annyit tesz, hogy a valóságos áramirány fordított azon alkatrészeknél, ahol a hurokáram a ténylegesen átfolyó alkatrészáram. Ez az R1 ellenállás és U1 feszültségforrás esetén a J1 áram, míg R3 ellenállás és U2 feszültségforrás esetén a J2 hurokáram. R2 ellenállás valós árama a két hurokáram összege.

A 4) típusnál J1 hurokáramra teljesen más érték jött ki. Figyeljük meg az R1 alkatrészt, melyen ebben az esetben két hurokáram halad keresztül. Számoljuk ki az ellenállás áramát az adatok fényében:

$$I_{R1} = J1 - J2 = 0,4545 \text{ A}$$

Látható, hogy a tényleges áram nagyságban, és előjelben is megegyezik mindegyik esetben.

Határozzuk meg az alábbi kapcsolás minden paraméterét a hurokáramok módszerével:



$$J_3 = I = 1 \text{ A}$$

$$\begin{cases} -U_1 + R_1 * (J_1 + J_3) + R_2 * (J_1 + J_2) = 0 \\ R_2 * (J_2 + J_1) + R_4 * J_2 + R_3 * (J_2 - J_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 + 30J_1 + 10 + 20J_2 = 0 \\ 90J_2 + 20J_1 - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30J_1 + 20J_2 = 0 \\ 20J_1 + 90J_2 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30J_1 + 20J_2 = 0 \\ 20J_1 + 90J_2 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30J_1 + 20J_2 = 0 \\ 20J_1 + 90J_2 = 30 \end{cases}$$

$$J_1 = -0,2609 \text{ A}$$

$$J_2 = 0,3913 \text{ A}$$

$$U_{R1} = R_1 * (J_1 + J_3) = 7,391 \text{ V}$$

$$I_{R1} = J_1 + J_3 = 0,7391 \text{ A (Iránya J3 hurokárám iránya)}$$

$$P_{R1} = U_{R1} * I_{R1} = 5,4627 \text{ W}$$

$$U_{R2} = R_2 * (J_1 + J_2) = 2,608 \text{ V}$$

$$I_{R2} = J_1 + J_2 = 0,1304 \text{ A (Iránya J2 hurokárám iránya)}$$

$$P_{R2} = U_{R2} * I_{R2} = 0,3401 \text{ W}$$

$$U_{R3} = R_3 * (J_3 - J_2) = 18,261 \text{ V}$$

$$I_{R3} = J_3 - J_2 = 0,6087 \text{ A (Iránya J3 hurokárám iránya)}$$

$$P_{R3} = U_{R3} * I_{R3} = 11,1155 \text{ W}$$

$$U_{R4} = R_4 * J_2 = 15,652 \text{ V}$$

$$I_{R4} = J_2 = 0,3913 \text{ A}$$

$$P_{R4} = U_{R4} * I_{R4} = 6,1246 \text{ W}$$

$$I_{U1} = -J_1 = 0,2609 \text{ V}$$

$$P_{U1} = U_1 * I_{U1} = 2,609 \text{ W}$$

$$U_{R1} + U_{R3} + U_I = 0$$

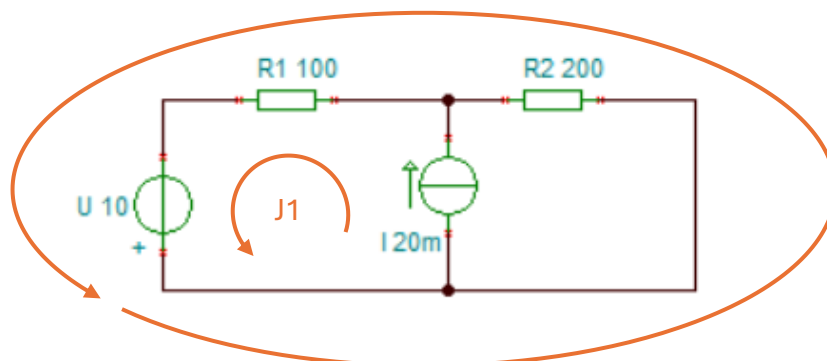
$$U_I = -25,652 \text{ V (Feszültségése ellentétes a másik 2 feszültségéhez képest)}$$

$$P_I = U_I * I = -25,652 \text{ W}$$

$$\sum P = 0$$

A feladat megoldása összehasonlítható az előzőekben megoldott CSPM módszerrel.

J2



A fenti kapcsolást számítási menete a következő:

$$J_1 = I = 20 \text{ mA}$$

$$-U + R_2 * J_2 + R_1 * (J_2 + J_1) = 0$$

$$-10 + 300J_2 + 2 = 0$$

$$300J_2 = 8$$

$$J_2 = 26,67 \text{ mA}$$

$$I_U = J_1 + J_2 = 46,67 \text{ mA}$$

$$P_U = U * I_U = -0,4667 \text{ W}$$

$$U_{R1} = R_1 * I_U = 4,667 \text{ V}$$

$$P_{R1} = U_{R1} * I_U = 0,21781 \text{ W}$$

$$U - U_{R1} + U_I = 0$$

$$U_I = -5,333 \text{ V}$$

$$P_I = U_I * I = 0,10666 \text{ W}$$

$$-I + I_U + I_{R2} = 0$$

$$I_{R2} = -26,67 \text{ mA}$$

$$U_{R2} = R_2 * I_{R2} = 5,334 \text{ V}$$

$$P_{R2} = U_{R2} * I_{R2} = 0,1423 \text{ W}$$

$$\sum P = 0$$

