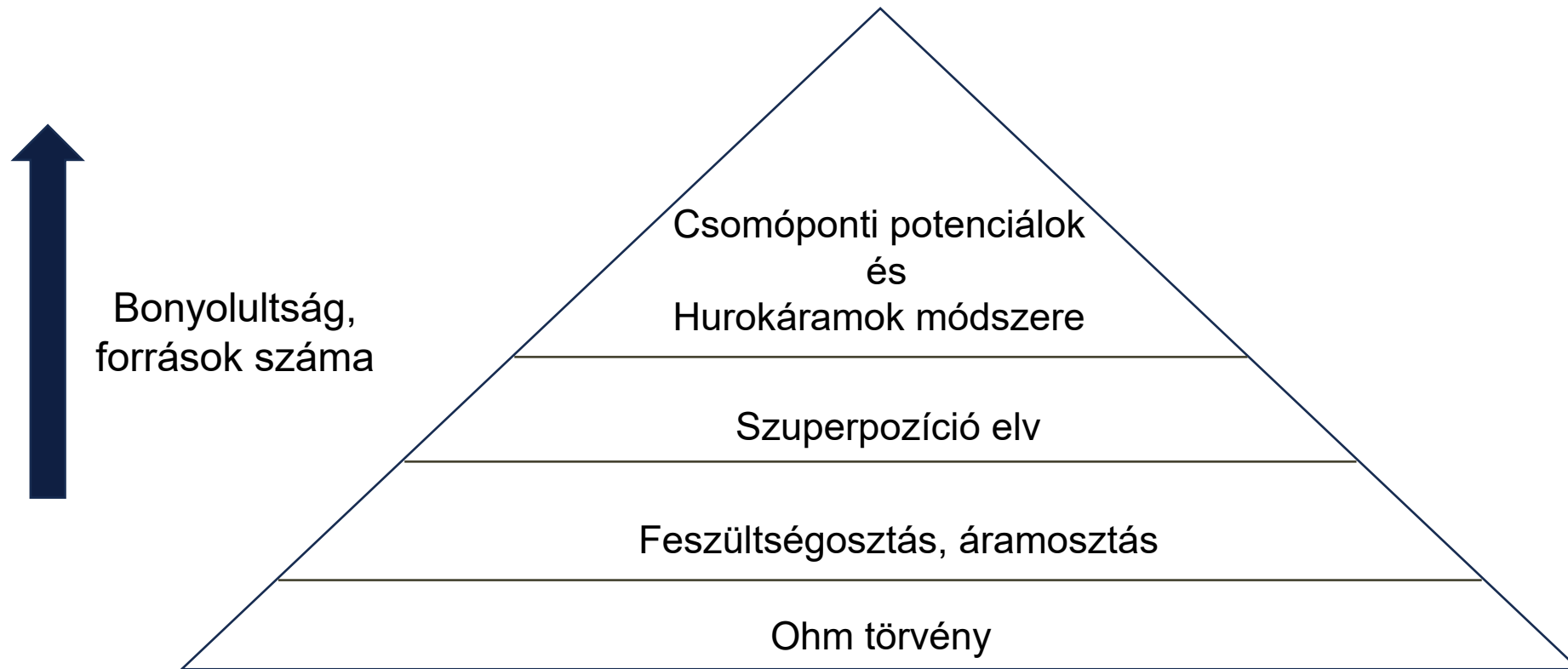


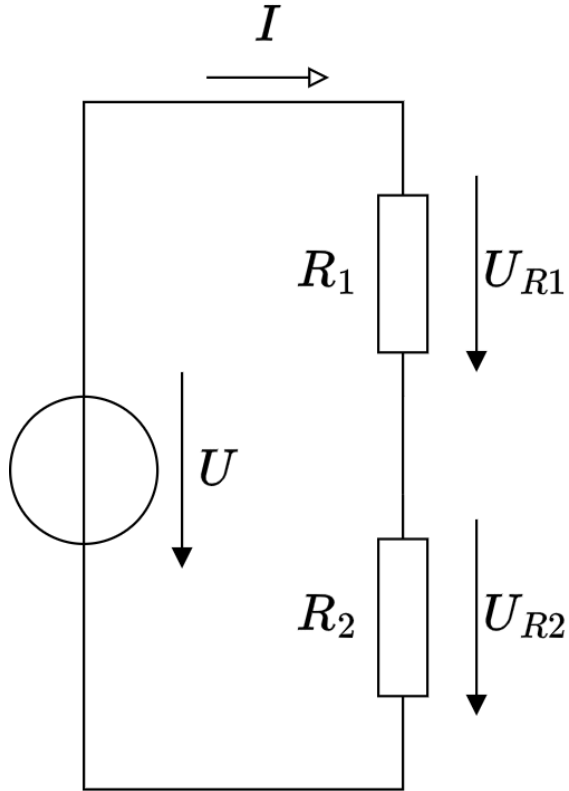
Hálózatszámítási módszerek

Áttekintés

- Hálózatszámítási módszerek áttekintése
- Feszültségosztás
- Áramosztás
- Valóságos és ideális generátorok
- Norton és Thevenin tétele
- Összetett hálózatszámítási módszerek: csomóponti potenciális és hurokáramok módszere



Feszültségosztás



- Feszültségosztó segítségével valamely tetszőleges feszültségből KISEBB feszültséget állíthatunk elő (azaz $U_{R1} < U$, ill. $U_{R2} < U$)

- A kör eredő ellenállása:

$$R_e = R_1 + R_2$$

- A bejelölt I áram az Ohm törvény segítségével számítható:

$$I = \frac{U}{R_e}$$

- Az I áram által az R1 ellenálláson ejtett feszültség:

$$U_1 = I \cdot R_1$$

- Behelyettesítve az áram értékét:

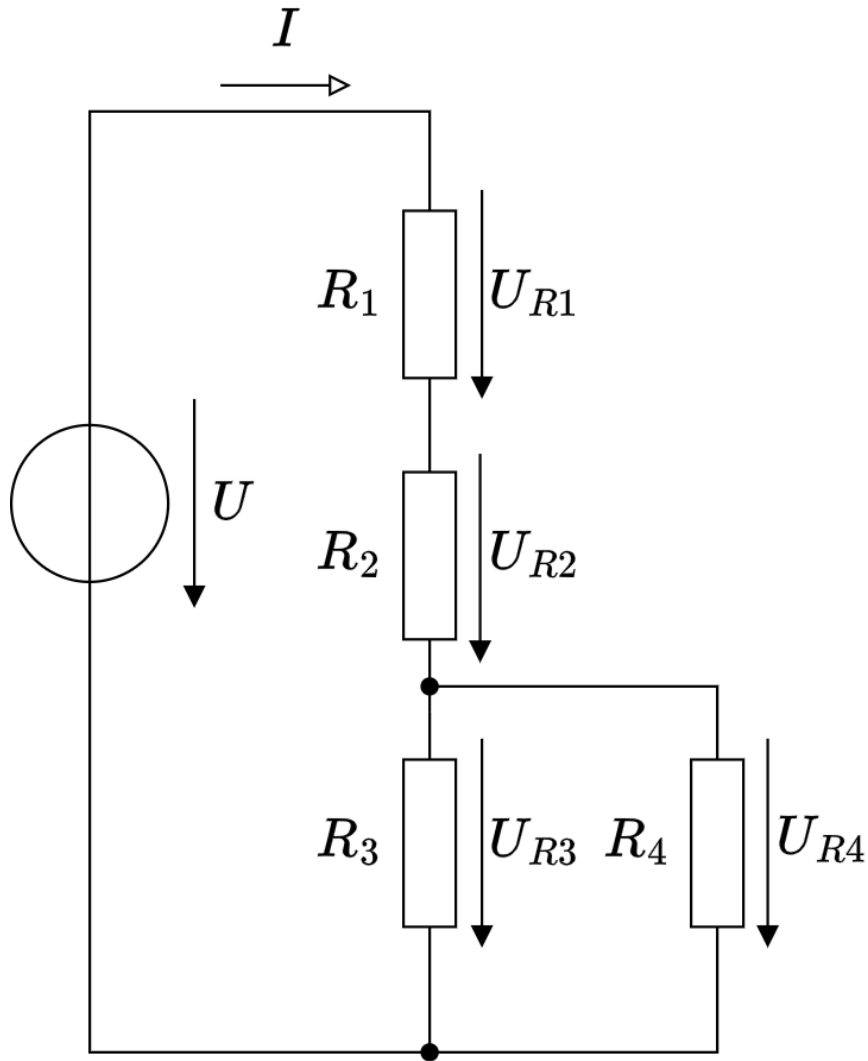
$$U_1 = U \frac{R_1}{R} \quad \text{vagyis} \quad \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}$$

- Általánosan:

$$\text{Keresett ellenállás feszültsége} = \text{Bemeneti feszültség} \cdot \frac{\text{Amelyik ellenálláson keresem}}{\text{Összellenállás}^*}$$

*Az összellenállás mindig azokra a komponsekre vonatkozik, amelyekre a leosztandó feszültséget kapcsoljuk

Példa



Adatok:

$U = 36V$; $R_1 = 2k\Omega$; $R_2 = 2k\Omega$; $R_3 = 600\Omega$; $R_4 = 1,2k\Omega$

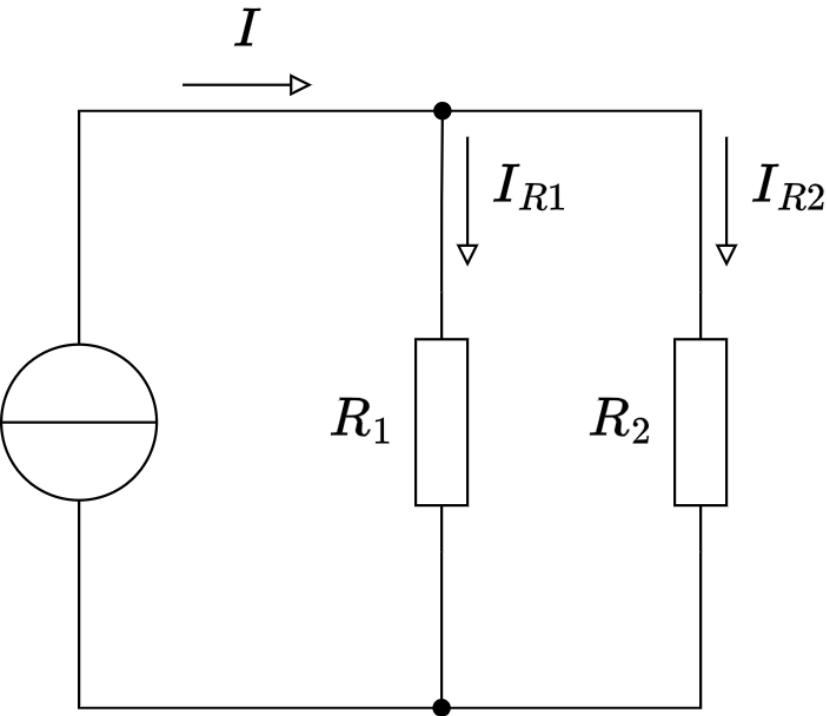
Mekkora R_3 feszültsége?

$$\begin{aligned} U_{R3} &= U \cdot \frac{R_3 \otimes R_4}{(R_3 \otimes R_4) + R_1 + R_2} = 36V \cdot \frac{600\Omega \otimes 1,2k\Omega}{(600\Omega \otimes 1,2k\Omega) + 2k\Omega + 2k\Omega} \\ &= 36V \cdot \frac{400\Omega}{4,4k\Omega} = \mathbf{3,27V} \end{aligned}$$

Mekkora R_2 -es ellenállás feszültsége?

$$\begin{aligned} U_{R2} &= U \cdot \frac{R_2}{(R_2 \otimes R_4) + R_1 + R_3} = 36V \cdot \frac{2k\Omega}{(600\Omega \otimes 1,2k\Omega) + 2k\Omega + 2k\Omega} \\ &= 36V \cdot \frac{2k\Omega}{4,4k\Omega} = \mathbf{16,36V} \end{aligned}$$

Áramosztás



- Áramosztó segítségével tetszőleges áram osztható KISEBB részekre (azaz $I_{R1} < I$; $I_{R2} < I$)
- Legegyszerűbb esetben két ellenállás párhuzamos kapcsolásával állítható elő
- Az áramok a vezetések arányában oszlanak meg: A nagyobb értékű ellenálláson kisebb áram folyik
- Párhuzamos ellenállásokon a feszültség azonos, innen:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 \quad \text{és} \quad U_1 = I_2 \cdot R_2$$

- Tehát:

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

- Tudjuk, hogy $I = I_1 + I_2$ illetve $I_1 = I - I_2$ és $I_2 = I - I_1$
- Helyettesítsünk be a fenti összefüggést például I_1 helyére:

$$R_1 \cdot (I - I_2) = I_2 \cdot R_2$$

$$R_1 \cdot I - R_1 \cdot I_2 = I_2 \cdot R_2$$

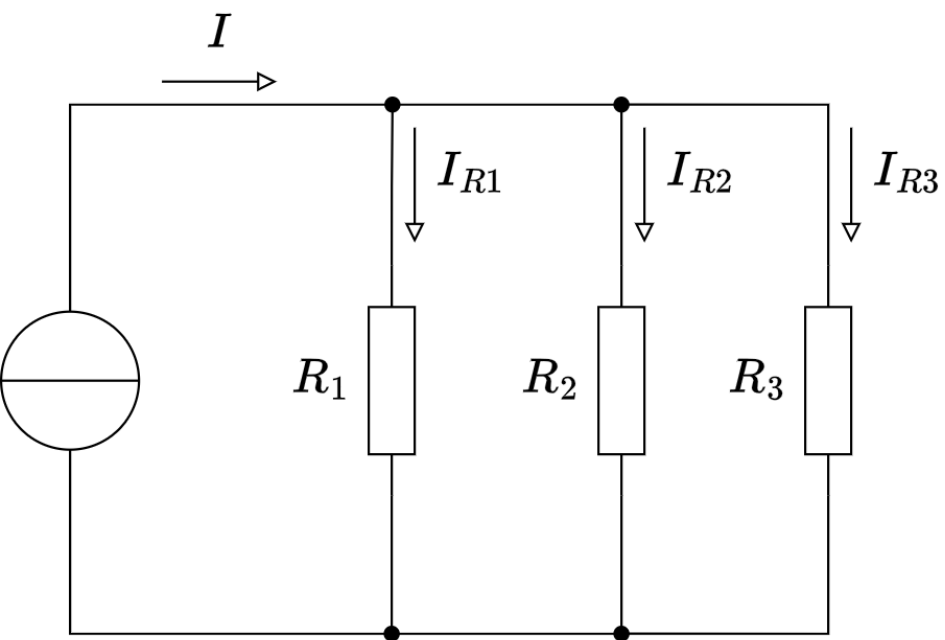
$$R_1 \cdot I = I_2 \cdot (R_1 + R_2)$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{(R_1 + R_2)}$$

Több ellenállás esetén (általánosan):

$$I_{\text{keresett}} = I_{\text{be}} \cdot \frac{\text{A többi ellenállás párhuzamos eredője (amelyiken nem keresem)}}{\text{A vizsgált ellenállás} + \text{A többi ellenállás párhuzamos eredője}}$$

Példa



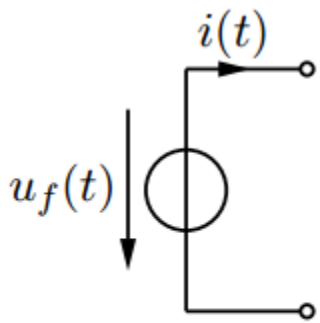
Adatok:

$I = 3\text{A}$; $R_1 = 1\text{k}\Omega$; $R_2 = 2,5\text{k}\Omega$; $R_3 = 750\Omega$;

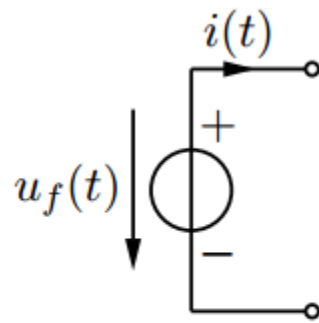
Mekkora R_3 -on folyó áram értéke?

$$\begin{aligned} I_{R3} &= I \cdot \frac{R_1 \otimes R_2}{R_3 + (R_1 \otimes R_2)} = 3\text{A} \cdot \frac{1\text{k}\Omega \otimes 2,5\text{k}\Omega}{(1\text{k}\Omega \otimes 2,5\text{k}\Omega) + 750\Omega} \\ &= 3\text{A} \cdot \frac{714,28\Omega}{714,28\Omega + 750\Omega} = \mathbf{1,463\text{A}} \end{aligned}$$

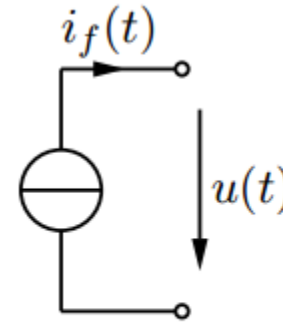
Ideális és valóságos források/generátorok – Norton/Thevenin tétele



(a) A feszültségforrás rajzjele

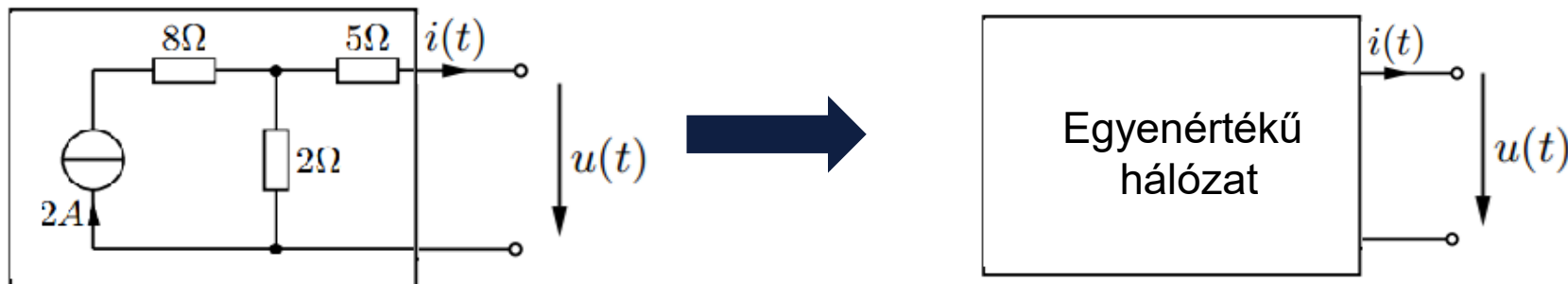


(b) A feszültségforrás rajzjele a pólusokkal



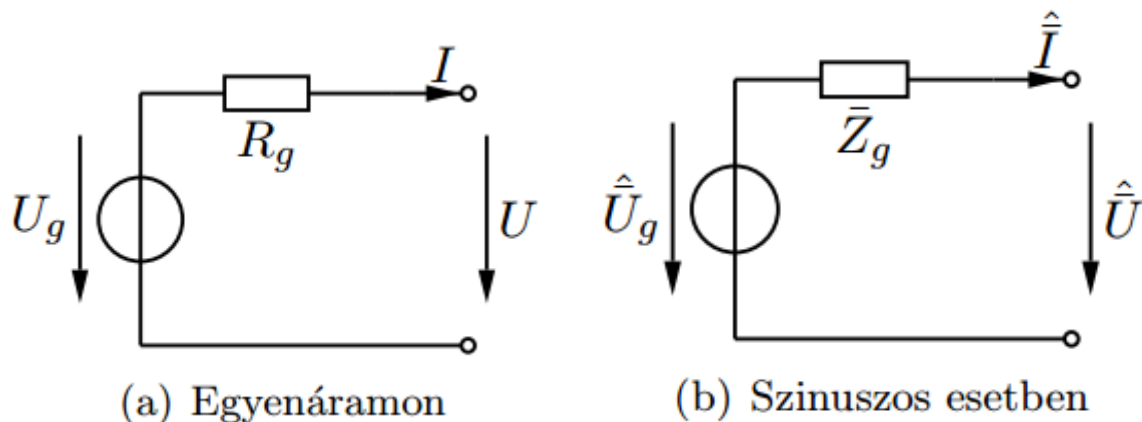
(c) Az áramforrás rajzjele

- Ideális források (nem generátorok!)
- Valóságos generátorok (forrás + belső ellenállás)
- A Thevenin- és Norton-tétel azt mondja ki, hogy egy tetszőleges két kivezetésű, lineáris, rezisztív villamos (generátorokat és ellenállásokat/impedanciákat tartalmazó) hálózat helyettesíthető egy egyszerűsített egyenértékű áramkörrel

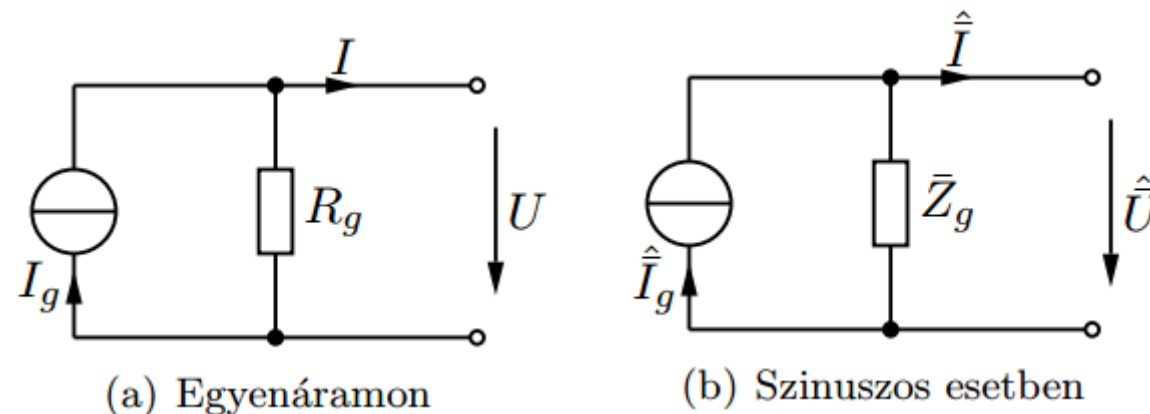


Norton és Thevenin generátorok

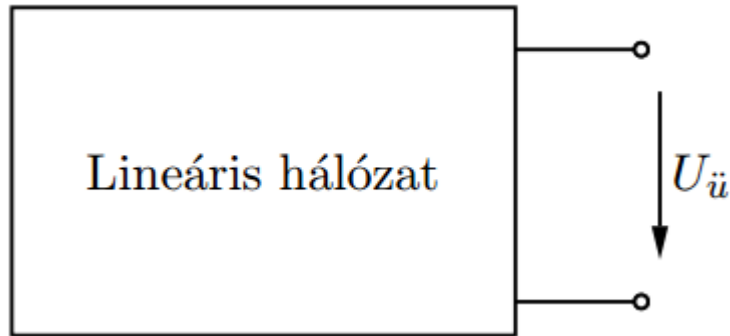
Thevenin generátor: A Thevenin generátor egy egyenfeszültségű feszültségforrás és egy vele sorbakapcsolt ellenállásból áll



Norton generátor: A Norton generátor egy egyenfeszültségű áramforrás és egy vele párhuzamosan kapcsolt ellenállásból áll

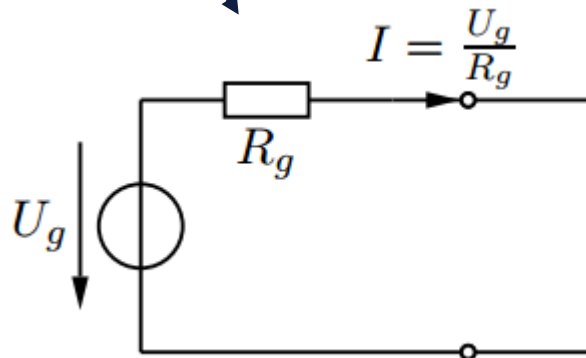
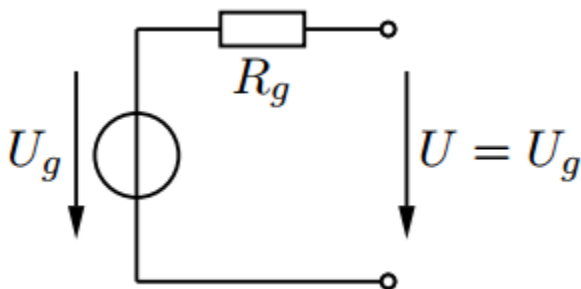


Valóságos generátorok munkaegyenese (Thevenin) – illusztratív példa



Lezárás szakadással

Lezárás rövidzárral



Adatok:

$$U_g = 12V$$

$$R_g = 100\Omega$$

Üresjárásban:

$$U_g = U = 12V$$

$$I = 0A$$

Rövidzárásban:

$$U_g = 0V$$

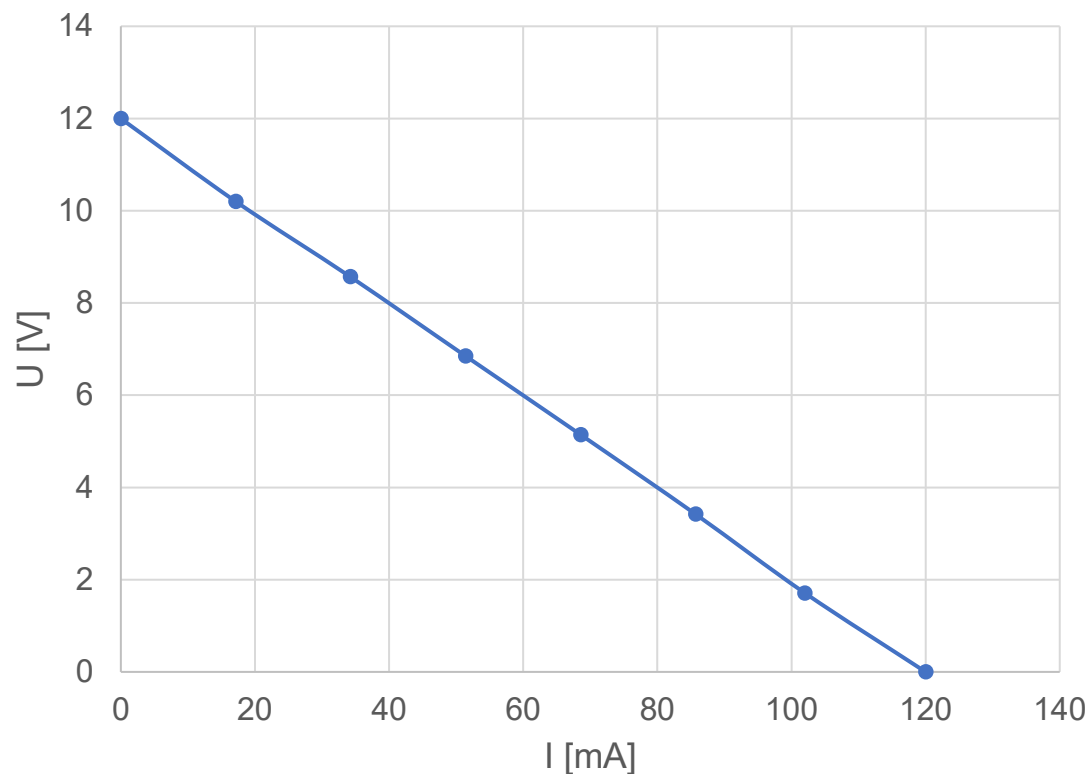
$$I = \frac{U_g}{R_g} = \frac{12V}{100\Omega} = 0,12A$$

Tetszőleges terhelések esetén:

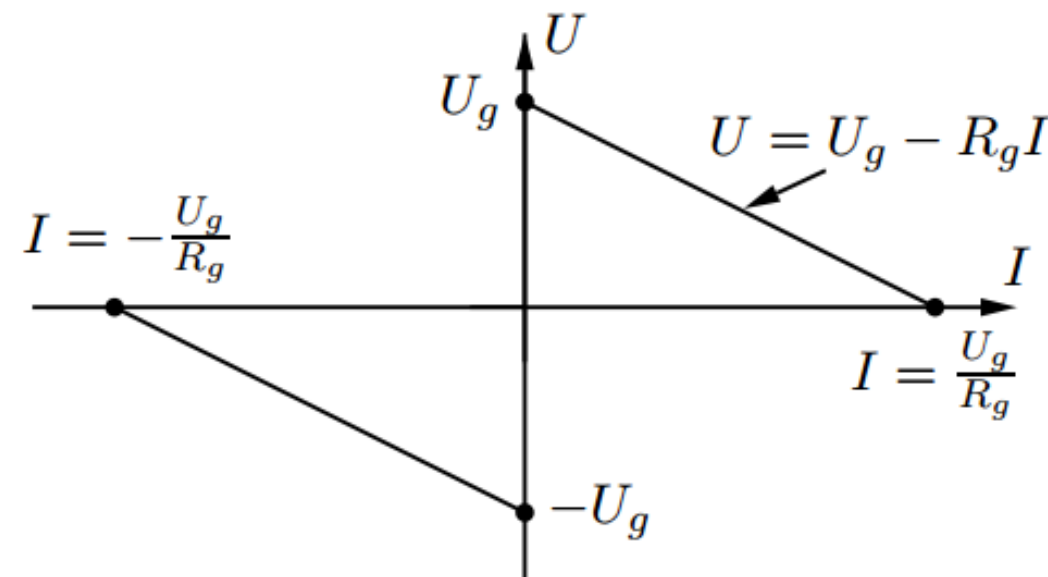
R_{terh}	16Ω	40Ω	75Ω	133Ω	250Ω	600Ω
U_{Rterh}	1,71V	3,42V	5,14V	6,85V	8,57V	10,2V
I_{Rterh}	102mA	85,7mA	68,6mA	51,4mA	34,2mA	17,14mA

Munkaegyenés szerkesztése

Példafeladat munkaegyenése



Általános esetben (Thevenin generátor):



Példa

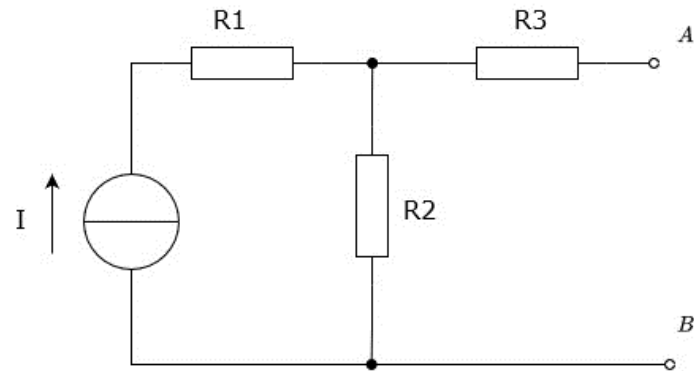
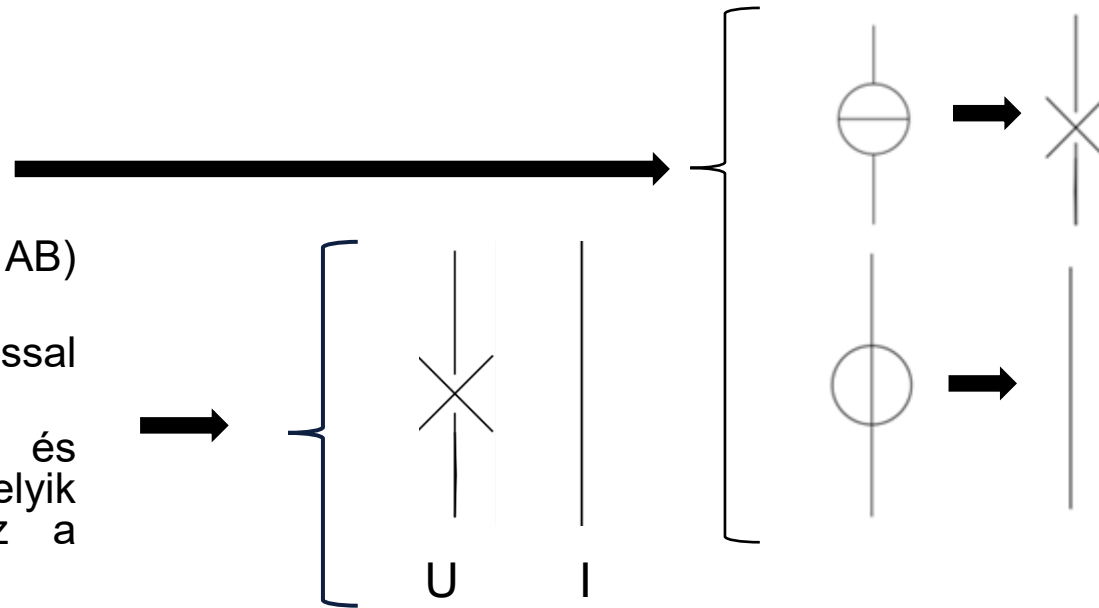
1. Belső ellenállás kiszámítása

• Források helyettesítése:

- Áramgenerátor szakadással
- Feszültséggenerátor rövidzárral

2. Kimenetre vonatkoztatott (itt AB) mennyiségek kiszámítása

- Feszültség esetén szakadással zárunk
- Áram esetén rövidzárral és megvizsgáljuk melyik komponens(ek) árama lesz a rövidzáron folyó áram



$$R_{AB} = R_2 + R_3$$

$$I_{AB} = I_{R3} = I \frac{R_2}{R_3 + R_2}$$

$$U_{AB} = I R_{AB}$$

A belső ellenállás mindkét helyettesítő kapcsolás esetén azonos!!

Összetett hálózatszámítási módszerek – megoldási sémák

Szuperpozíció tétele

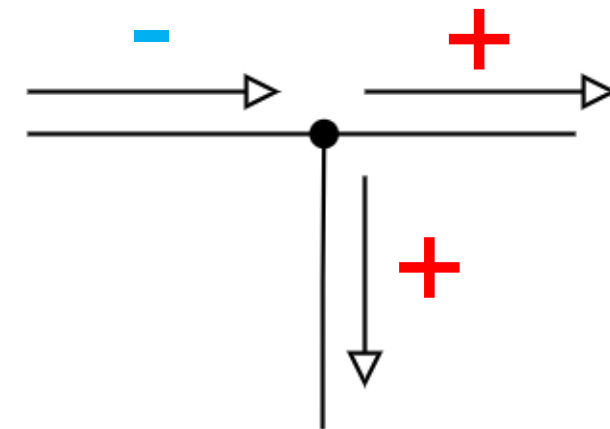
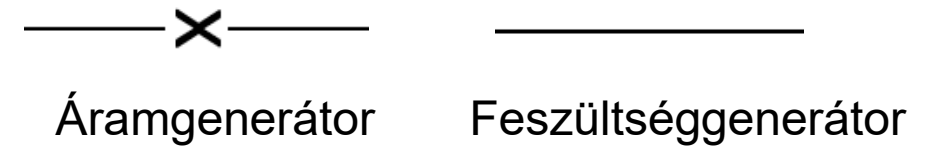
1. Referenciairányok felvétele
 2. Egyesével dezaktivizáljuk a forrásokat
 3. A részmegoldásokat előjelesen vizsgáljuk, összegezzük
- Nagyszámú forrás esetén sok számítást igényel!

Csomóponti potenciál

1. Meghatározzuk az ismeretlen csomópontok számát ($n - n_u$)
2. Felvesszük a referenciairányokat
3. Felírjuk az egyenleteket

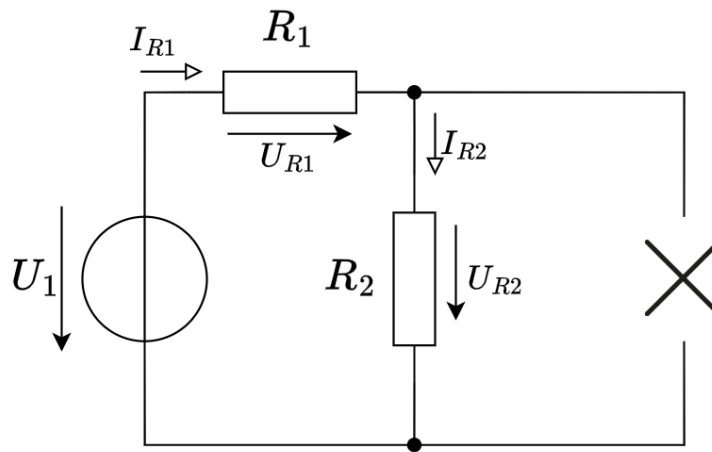
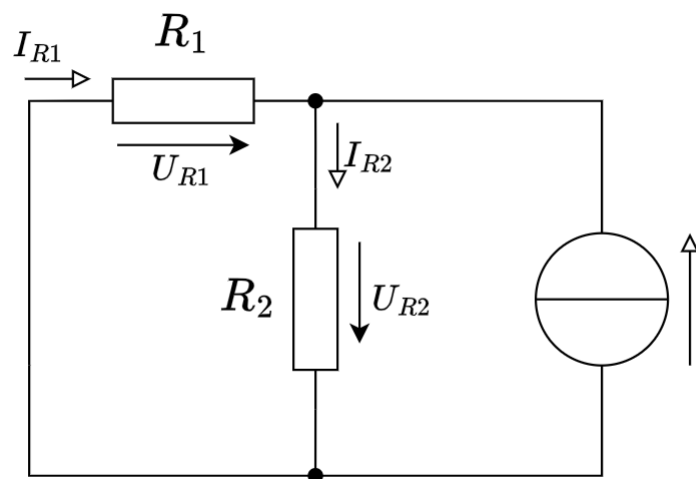
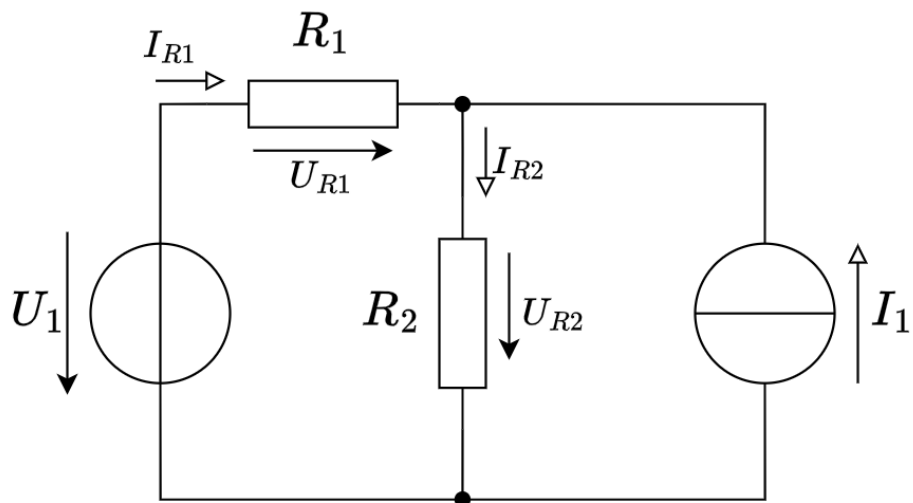
Hurokáramok módszere

1. Meghatározzuk az ismeretlen hurokok számát ($l - n + 1$)
2. Felvesszük a referencia irányt
3. Felírjuk az egyenleteket



Csomópontba befolyó áram „-” előjel, onnan kifolyó áram „+” előjel

Szuperpozíció elv



A megoldás menete:

1. Minden forrást egyesével kiiktatunk az áramkörből, megvizsgálva azok egyenkénti hatását a teljes áramkörre
2. A kapott eredményeket rögzítjük, minden dezaktivizálás során
3. A végén az eredményeket összesítjük, előjel helyesen

Megjegyzések:

- A **források** áram/feszültség iránya előre rögzített, kijelölt! Nem változtatható meg.
- Minden más irány önkényesen megválasztható. A példában a balról-jobbra, fentről le elvet követtük. Ezek irányának kijelöléséről később ejtünk szót.
- A források dezaktivizálását annyiszor kell elvégezni, ahány forrás van. Jelen esetben kétszer. Ez nagyszámú forrást tartalmazó áramkör esetén bonyolultságot okoz.

Szuperpozíció elv - számítások

• I.

$$I_1^1 = I_{I1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -2A \cdot \frac{5\Omega}{20\Omega + 5\Omega} = -0,4A$$

$$I_2^1 = I_{I1} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2A \cdot \frac{20\Omega}{20\Omega + 5\Omega} = 1,6A$$

$$U_{R1}^1 = I_1 R_1 = -0,4A \cdot 20\Omega = -8V$$

$$U_{R2}^1 = I_1 R_2 = 1,6A \cdot 5\Omega = 8V$$

• II.

$$U_{R1}^2 = U_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 20V \cdot \frac{20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = 16V$$

$$U_{R2}^2 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20V \cdot \frac{5\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = 4V$$

$$I_1^2 = \frac{U_{R1}^2}{R_1} = \frac{16V}{20\Omega} = 0,8A$$

$$I_2^2 = \frac{U_{R2}^2}{R_2} = \frac{4V}{5\Omega} = 0,8A$$

Összegzésképp (I. + II.):

$$U_{R1} = U_{R1}^1 + U_{R1}^2 = -8V + 16V = 8V$$

$$U_{R2} = U_{R2}^1 + U_{R2}^2 = 8V + 4V = 12V$$

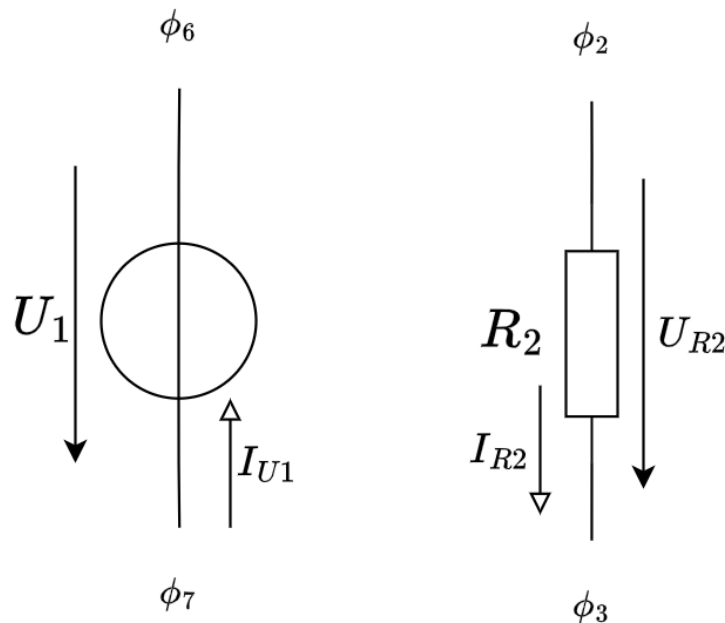
$$I_1 = I_1^1 + I_1^2 = -0,4A + 0,8A = 0,4A$$

$$I_2 = I_2^1 + I_2^2 = 1,6A + 0,8A = 2,4A$$

Komponens	U[V]	I[A]	P [W]
R1	8	0,4	3,2
R2	12	2,4	28,8
V1	20	$I_1 = 0,4$	-8
I1	12	-2	-24
Összesen:			0

Az eredményt korrigálni szükséges

Csomóponti potenciálok módszere -áttekintés-



- A feszültség definíció szerint: Két pont közötti potenciál különbség. Az esetek többségében mindig a pozitív potenciálhoz viszonyítunk, vagyis a magasabb potenciálból vonom le az alacsonyabbat (a feszültség nyíl a „pozitívba” mutat a „negatívba”).
- Például a feszültségforrás feszültsége:

$$U_1 = \Phi_6 - \Phi_7$$

- Vagy például R_2 áramát szeretném definiálni, akkor:

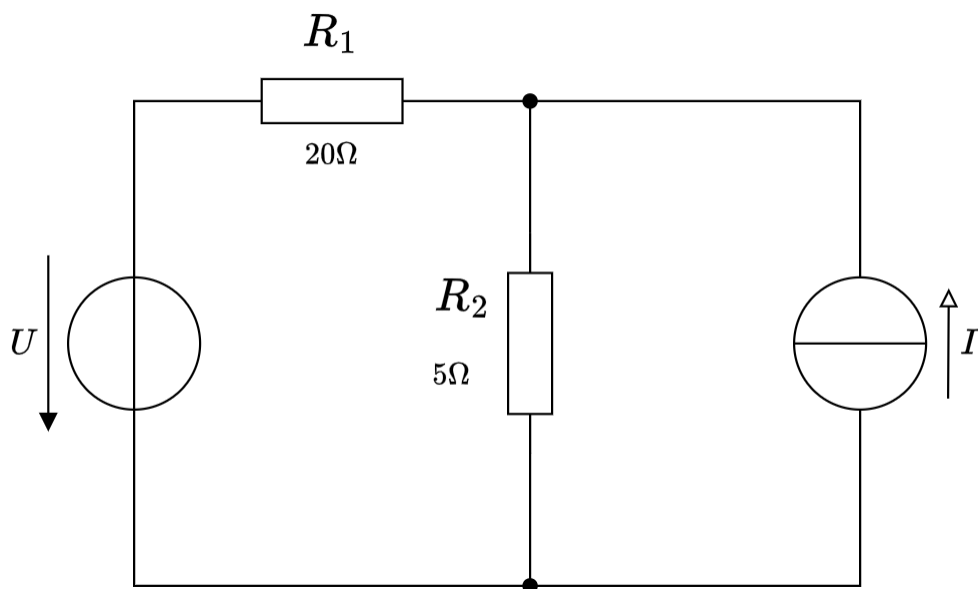
$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{R_2}$$

- Ha Φ_3 pontból nézem:

$$I_{R2} = -\frac{U_{R2}}{R_2} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{R_2}$$

- Az egyenletekben a feszültségforrások árama (és az áramforrások feszültsége) általában ismeretlen.
- A legtöbb esetben a „generátorok” termelőként viselkednek, azaz a rajtuk eső feszültség és átfolyó áram ellentétes irányú

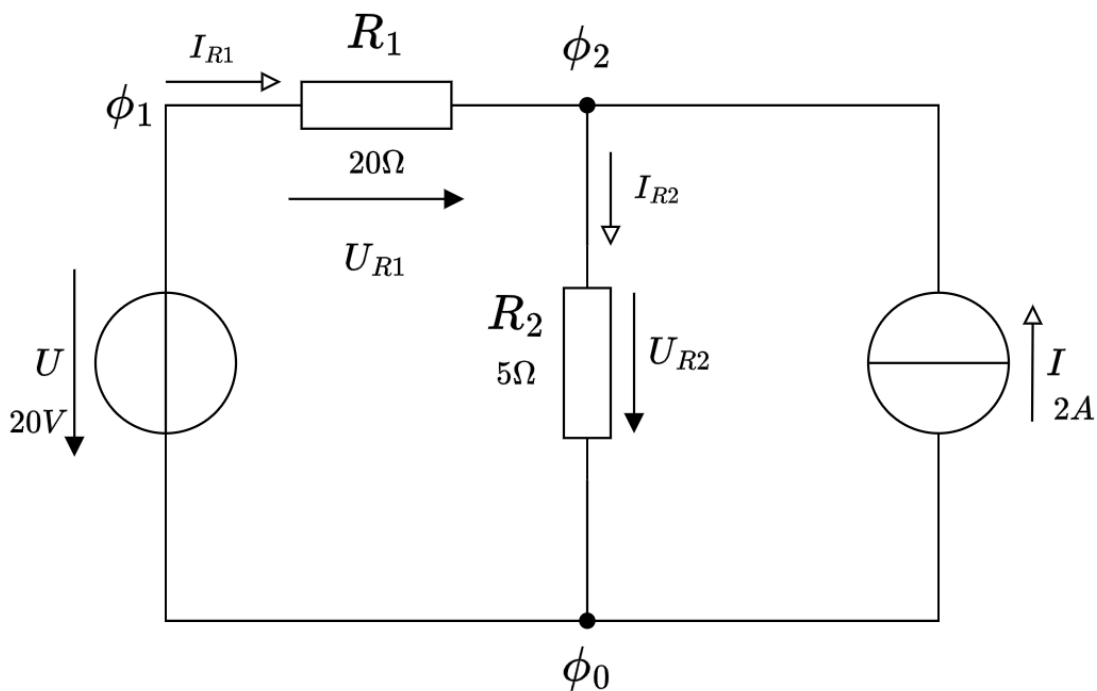
Példafeladat – megoldás lépései



1. A feladatot az ismeretlen csomópontok meghatározásával kezdjük.
2. Minden esetben szükséges egy referencia pont (GND vagy földpont), melyhez viszonyítunk. Ez csökkenti az ismeretlen csomópontok számát. Ezt célszerű a feszültséggenerátor (több feszültséggenerátor esetén valamelyik feszültség generátor) negatív sarkához választani, így a generátor másik sarka ismert potenciált ad meg.
3. Az ismeretlen csomópontokra felírjuk az áramköri egyenleteket (Kirchhoff egyenleteket) majd megoldjuk őket

A források referencia irányai rögzítettek, a többi tetszőleges!
A csomópontba befolyó áramokat „-” előjellel, a kifolyókat „+” előjellel vesszük figyelembe!

Példafeladat megoldása



- Megállapítások:
- Az áramkör $n = 3$ csomópontot tartalmaz, azaz az ismeretlen csomópontok száma $r = n - 1 = 3 - 1 = 2$
- A potenciálok közül Φ_0 a közös (referencia) csomópont, ehhez képest viszonyítunk mindent
- Ennek megfelelően Φ_1 potenciál ismertnek tekinthető, értéke 20V (mivel a közös referencia pont és Φ_1 között található)
- Egyetlen ismeretlen potenciál marad, Φ_2 . Erre a potenciálra három komponens csatlakozik, tehát ezek alkotják az erre a csomópontra vonatkozó csomóponti egyenleteket. Azaz,

$$\Phi_2:) -2 - \frac{20 - \Phi_2}{20} + \frac{\Phi_2 - 0}{5} = 0$$

$$\Phi_2:) -20 \cdot 2 - \frac{20 - \Phi_2}{20} + \frac{4(\Phi_2 - 0)}{20} = 0$$

$$\Phi_2:) -40 - 20 + \Phi_2 + 4\Phi_2 = 0$$

$$\Phi_2:) 5\Phi_2 = 60$$

$$\Phi_2:) \Phi_2 = 12$$

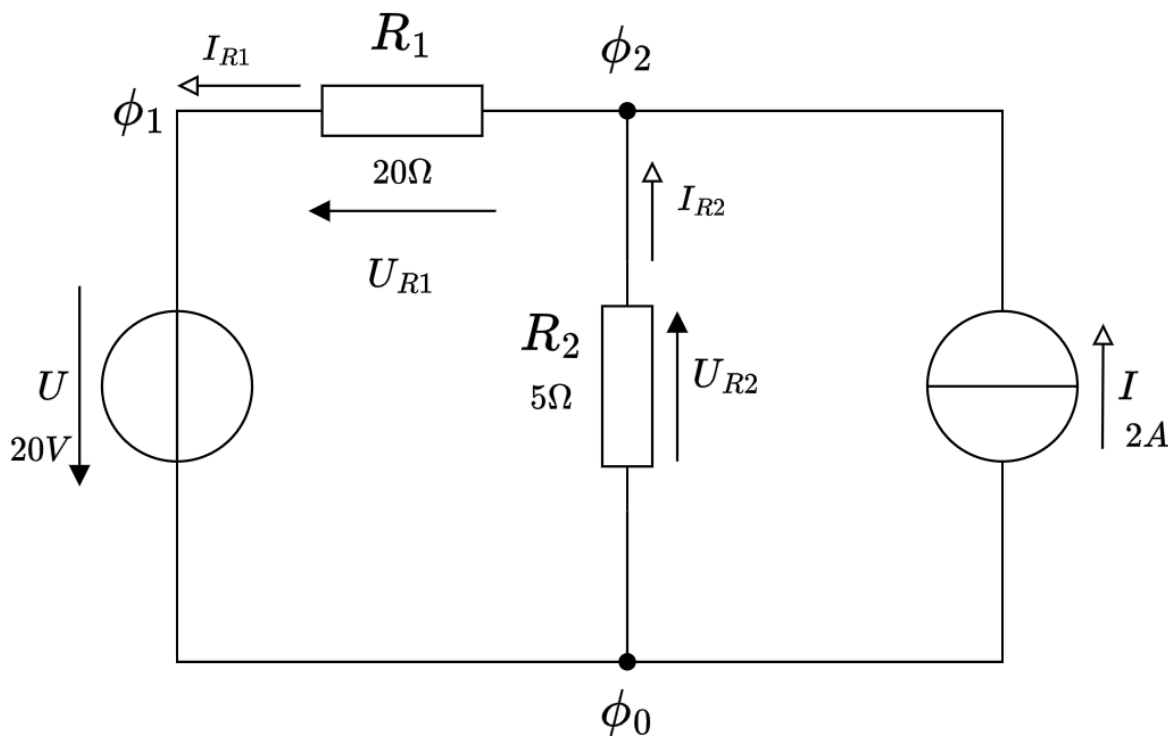
Számítási eredmények összefoglalása

Komponens	U[V]	I[A]	P[W]
R_1	$\Phi_1 - \Phi_2 = 8$	0,4	3,2
R_2	$\Phi_2 - \Phi_0 = 12$	2,4	28,8
U	20	$-I_{R1} = -0,4$	-8
I	$U_{R2} = 12$	2	-24
Összesen			0

A generátor árama I_{R1} -el azonos. Mivel I_{R1} kifolyó áram Φ_1 -re vonatkoztatva, így a generátoron átfolyó áram Φ_1 -be befolyó kell legyen. Ez pedig ütköző referenciaírányt ad.

Az áramforrás feszültsége és árama ütköző referenciaírány szerint alakulnak, ezért az eredményt korrigálni szükséges!

Feladat megoldása más referenciáirányokkal



Ebben az esetben a U_{R1} -et és U_{R2} -t másképp vettük fel, de észben tartva, hogy rajtuk az áram és a feszültség egyirányba mutat!

Az ismeretlen csomópont egyenlete:

$$\Phi_2:) -2 + \frac{\Phi_2 - 20}{20} - \frac{0 - \Phi_2}{5} = 0$$

$$\Phi_2:) -20 \cdot 2 + \frac{\Phi_2 - 20}{20} - \frac{4(0 - \Phi_2)}{20} = 0$$

$$\Phi_2:) -40 - 20 + \Phi_2 + 4\Phi_2 = 0$$

$$\Phi_2:) 5\Phi_2 = 60$$

$$\Phi_2:) \Phi_2 = 12$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk! A referenciáirány tehát nem befolyásolja a végeredményt!

Számítási eredmények összefoglalása

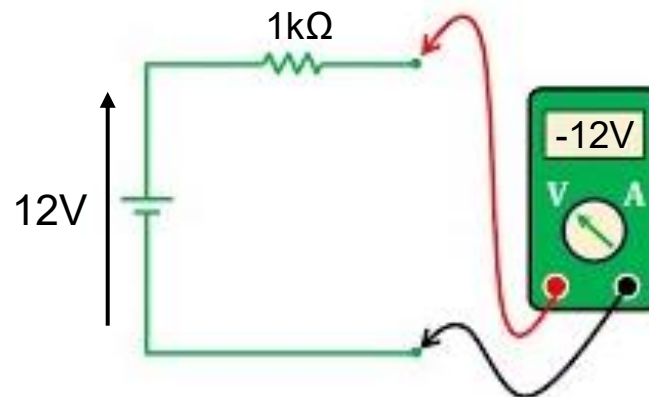
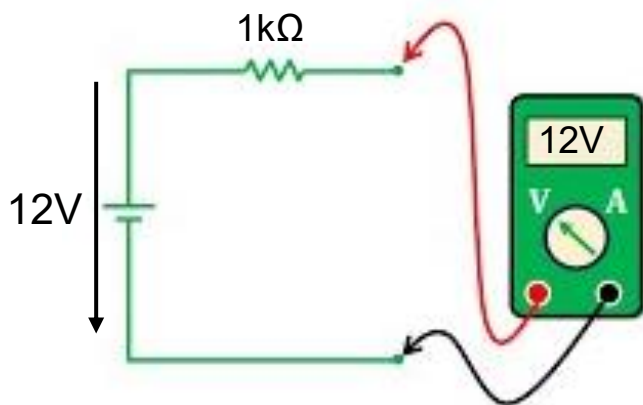
Komponens	U[V]	I[A]	P[W]
R_1	$\Phi_2 - \Phi_1 = -8$	-0,4	3,2
R_2	$\Phi_0 - \Phi_2 = -12$	-2,4	28,8
U	20	$I_{R1} = -0,4$	-8
I	$U_{R2} = -12$	2	-24
Összesen			0

A generátor árama I_{R1} -el azonos. Mivel I_{R1} befolyó áram Φ_1 -re vonatkoztatva, így a generátoron átfolyó áram Φ_1 -be kifolyó kell legyen. Nincs ütköző referencia irány!

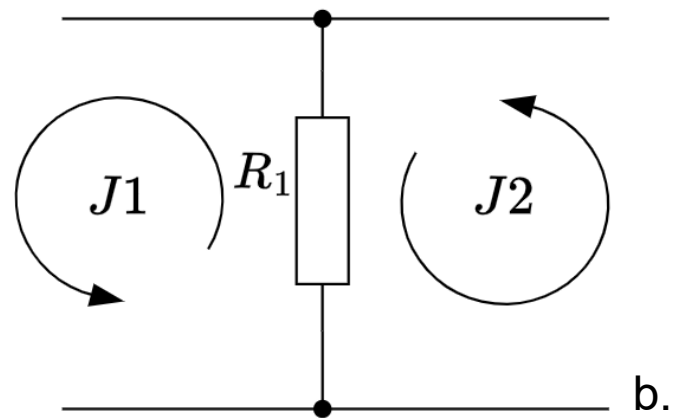
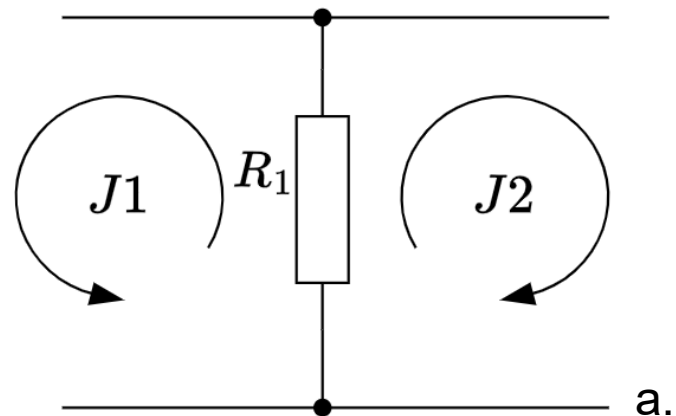
Az áramforrás feszültsége és árama nem mutat ütköző referencia irány, így nincs szükség korrigálásra!

Hogyan vegyem fel a referencia irányokat?

- A Kirchhoff csomóponti törvény értelmében a csomópontba befolyó áramokat negatív („-“), míg a kifolyó pozitív („+“) előjellel vesszük figyelembe
- A huroktörvény tekintetében pedig a hurok körbejárási iránya adja a pozitív irányt, a vele azonos feszültségek pozitív („+“), míg az ellentétes feszültségek negatív („-“) előjelet kapnak
- A valóságban a feszültség a magasabb potenciál felől mutat az alacsonyabb felé, és az áram is a pozitívabb pont felől folyik a negatívabb felé
- A referenciairány felvétele önkényes, követhetjük a „balról-jobbra, fölülről lefelé” elvet, vagy a jobbról-balra, alulról felfelé” elvet. Vegyük észre, hogy mindkét esetben egy hurkot rajzolunk ki
- Mit jelent ez a gyakorlatban? Ha az ismeretlen áramot/feszültséget mutatós műszerrel mérjük, és a mutató pozitív (jobbra) irányba tér ki, akkor a referenciairány a tényleges iránnyal egyezik meg. Ha ellentétesen tér(ne) ki, a referenciairány ellentétes a tényleges iránnyal. Digitális multiméter esetén az ellentétes irányt egy mínusz „-” jellel jelzi a műszer.



Hurokáramok módszere



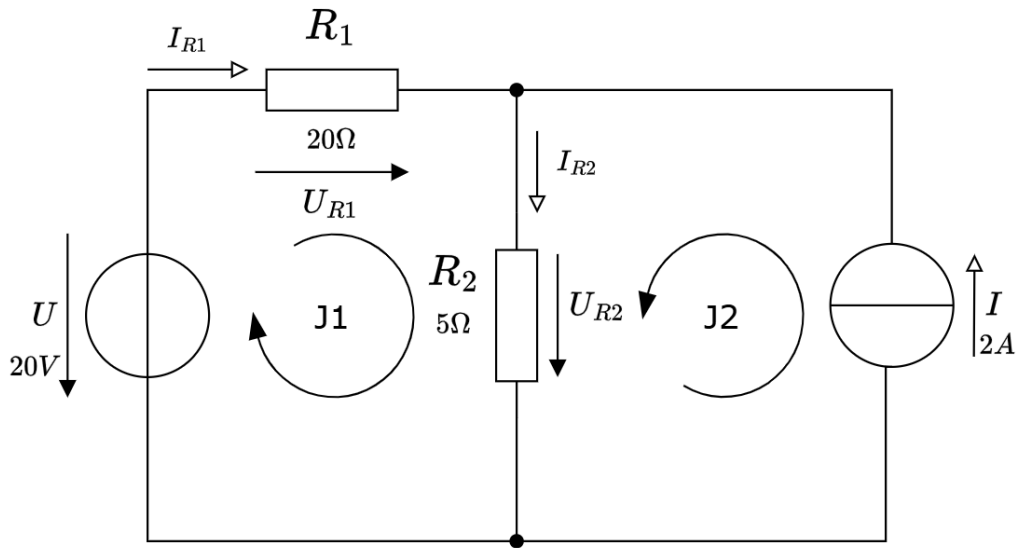
- A független hurok kijelölése után minden egyes hurokhoz egy-egy hurokáramot rendelünk, és felírjuk Kirchhoff huroktörvényét minden egyes hurokra
- Honnan tudjuk az ismeretlen hurok számát? Az ismeretlen hurok száma a komponensek és a csomópontok száma alapján számítható:

$$l = b - n + 1,$$

- Fontos megállapítások:

- Az áramgenerátor mindig kijelöl egy hurokot, melynek iránya rögzített, és ismertnek tekinthető, iránya nem megváltoztatható
- A nem rögzített hurok iránya tetszőleges, az óramutatóval megegyező vagy ellentétes irányú
- Bonyolultabb hálózat esetén a hurokat mindig úgy kell felvenni, hogy minden komponens legyen érintve legalább az egyik hurok által
- Az ellenállások minden esetben pozitív előjellel kerülnek az egyenletbe, kivéve ha több hurok is kifejti rá a hatását:
- Ha egy alkatrészen két hurok is kifejti hatását, mindig a vizsgált hurokból vonjuk le a másik hurok értékét:
 - a. esetben, mindkét hurok azonos irányból közelíti meg R_1 -et: $R_1(J_1 + J_2)$
 - b. esetben ha pl. J_1 hurokot vizsgáljuk: $R_1(J_1 - J_2)$, ha J_2 -t vizsgáljuk: $R_1(J_2 - J_1)$

Példafeladat



- Határozzuk meg az ismeretlen hurkok számát:
$$l = b - n + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$$
- Ebből az áramgenerátor által kijelölt hurkot ismertnek tekinthetjük, tehát egy ismeretlen hurok marad.
- A megoldás első lépéseként vegyük fel az egyes komponensek feszültségirányait (itt a balról jobbra, felülről lefelé elvet követtük). A megoldás során nincs, az eredmények kiértékelésénél lesz szerepük
- Majd ezek után vegyük fel a J1 hurkot például az óramutató járásával megegyező módon. J2 (áramgenerátor) hurokárama pedig rögzített, mégpedig ellentétes az óra járásával
- A következő lépés az ismeretlen hurokban lévő komponensek feszültségeinek összessége, Kirchhoff törvénye alapján, azaz J1-es hurok egyenlete:

$$J1:) - 20 + 20J1 + 5(J1 + J2) = 0$$

$$J1:) - 20 + 25J1 + 5 \cdot 2 = 0$$

$$J1:) 25J1 = 10$$

$$J1:) J1 = 0,4$$

Számítási eredmények összefoglalása

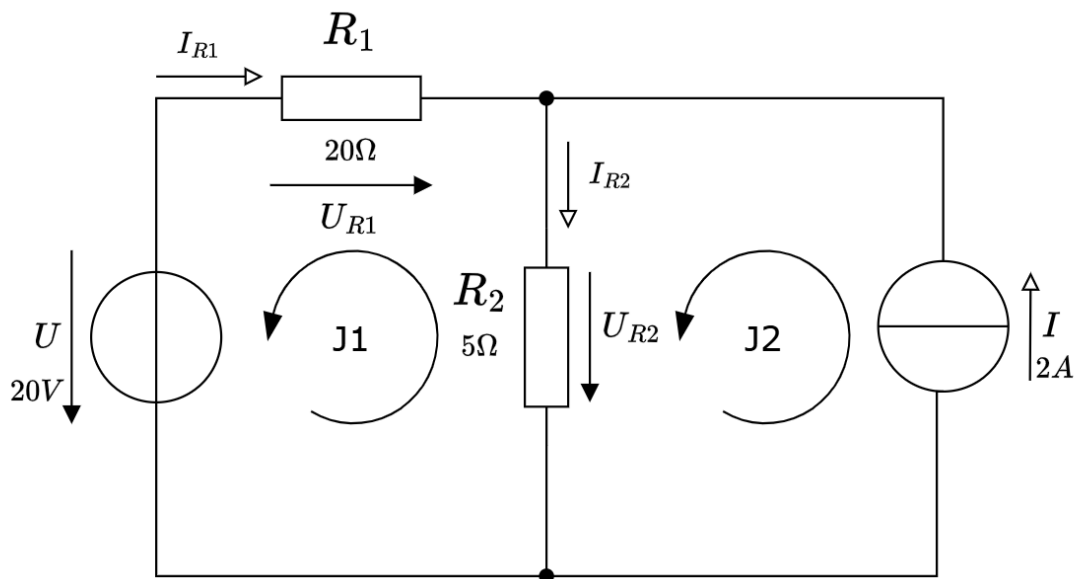
Komponens	U[V]	I[A]	P[W]
R_1	8	$J1=0,4$	3,2
R_2	12	$J1+J2=2,4$	28,8
U	20	$-J1=-0,4$	-8
I	$U_{R2}=-12$	2	-24
Összesen			0

A felvett referenciairány (felülről lefelé) adja a pozitív irányt. Mivel mindkét hurok azonos vele, így $J1$ -et és $J2$ -t összeadjuk.

A generátor feszültségének iránya ellentétes a hurok irányával, így negatív előjellel kell figyelembe venni.

Az áramforrás feszültsége és árama ütköző referenciairány szerint alakulnak, ezért az eredményt korrigálni szükséges!

Példafeladat megoldás ellentétes hurokiránnyal



J2-es hurok egyenlete:

$$J1:) 20 + 20J1 + 5(J1 - J2) = 0$$

$$J1:) 20 + 25J1 - 5 \cdot 2 = 0$$

$$J1:) 25J1 = -10$$

$$J1:) J1 = -0,4$$

Mivel J1-re írjuk fel az egyenletet így ő adja a referencia irányt. J2 iránya ellentétes, így R2-es ellenállás esetén J2-t negatív előjellel vesszük figyelembe!

Emlékezzünk, hogy az előző esetben J1 iránya az óra forgásával megegyező volt, hozzá képest J2 is azonos irányú volt így J2-t pozitív előjellel vettük figyelembe.

Számítási eredmények összefoglalása

Komponens	U[V]	I[A]	P W
R_1	-8	$J1=-0,4$	3,2
R_2	12	$J2-J1=2,4$	28,8
U	20	$J1=-0,4$	-8
I	$U_{R2}=12$	2	-24
Összesen			0

A felvett referenciairány (felülről lefelé) adja a pozitív irányt. Mivel J2-s hurok azonos ezzel, így ő lesz a domináns.
 $J2 - J1 = 2 - (-0,4) = 2,4$

A generátor feszültségének iránya most azonos irányú, így annak áramát J1 adja

Az áramforrás feszültsége és árama most is ütköző referenciairány szerint alakulnak, ezért az eredményt korrigálni szükséges!