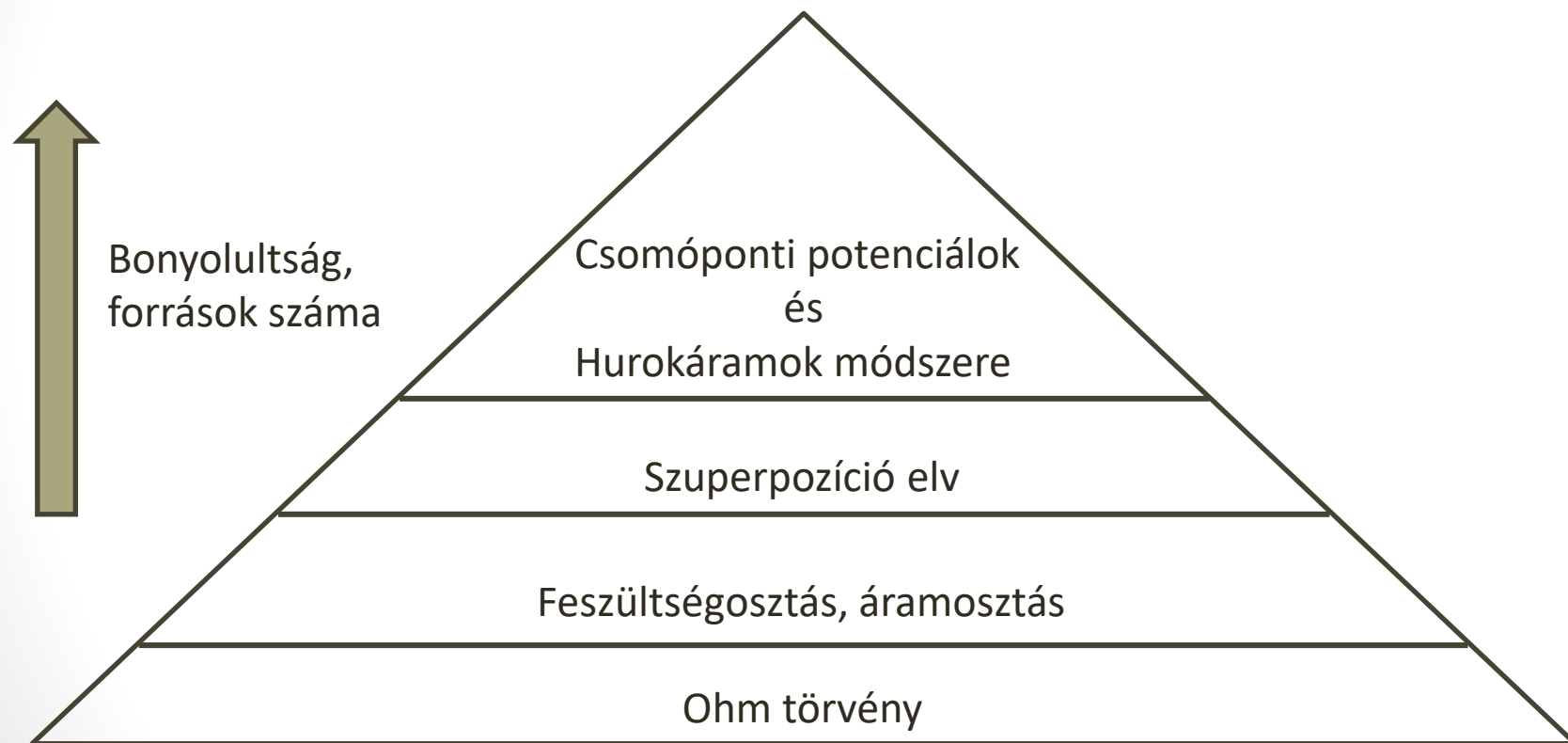


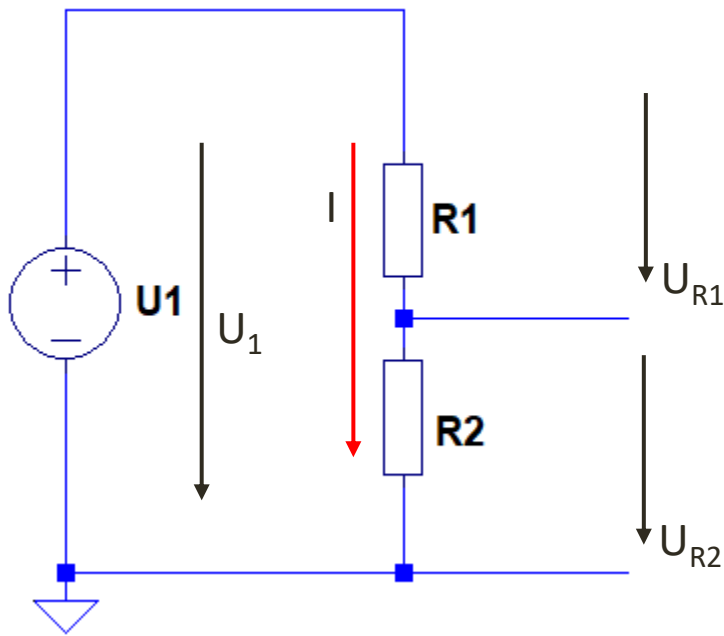
Elektrotechnika Hálózatszámítási módszerek



Eszköztár



Feszültségosztó



$$U_{R2} = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- Feszültségosztó segítségével valamely tetszőleges feszültségből KISEBB feszültséget állíthatunk elő
- A kör eredő ellenállása:

$$R_e = R_1 + R_2$$

- A bejelölt I áram az Ohm törvény segítségével számítható:

$$I = \frac{U}{R}$$

- Az I áram által az R_1 ellenálláson ejtett feszültség:

$$U_1 = I \cdot R_1$$

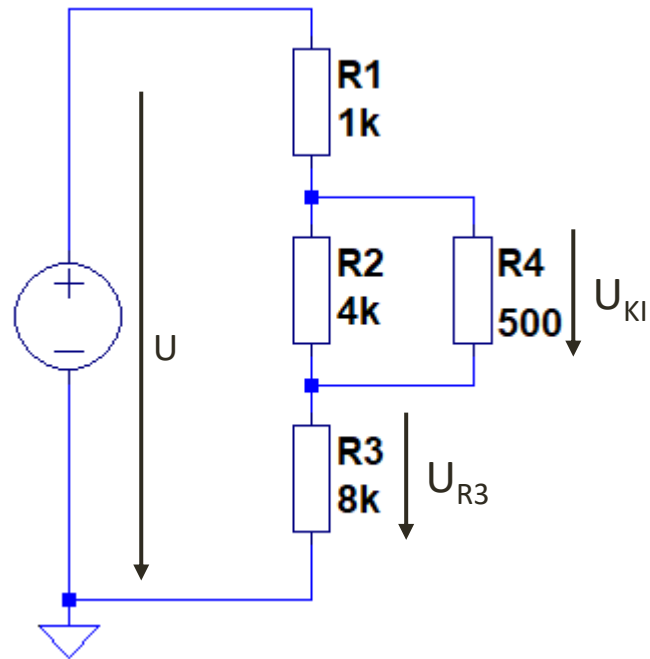
- Behelyettesítve az áram értékét:

$$U_1 = U \frac{R_1}{R} \quad \text{vagyis} \quad \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}$$

Általánosan:

Keresett ellenállás feszültsége = Bemeneti feszültség · $\frac{\text{Amelyik ellenálláson keresem}}{\text{Összellenállás}}$

Áramköri példa



- Mekkora a kimeneti feszültség, ha $U=40V$?

- Megoldás:

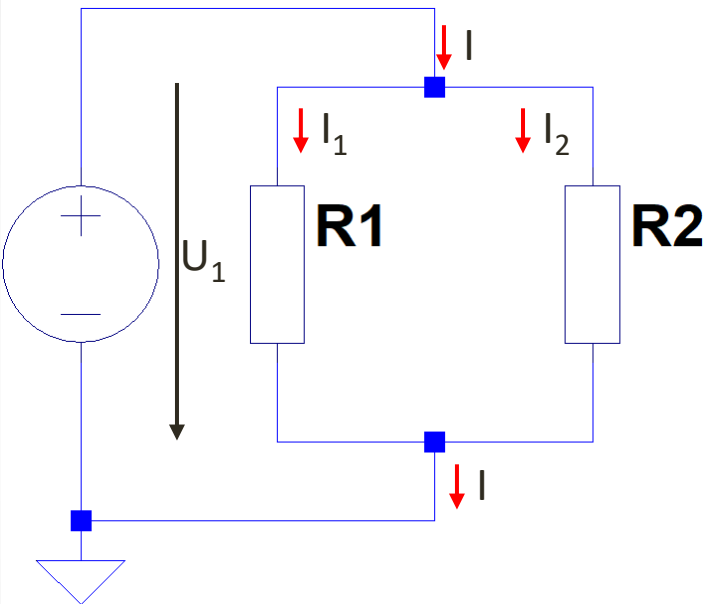
$$\begin{aligned}
 U_{ki} &= U \cdot \frac{R_2 \otimes R_4}{(R_2 \otimes R_4) + R_1 + R_3} \\
 &= 40V \cdot \frac{4k\Omega \otimes 500\Omega}{(4k\Omega \otimes 500\Omega) + 1k\Omega + 8k\Omega} \\
 &= 40V \cdot \frac{444,45\Omega}{9,44k\Omega} = \mathbf{1,882V}
 \end{aligned}$$

- Mekkora R_3 -as ellenállás feszültsége?

- Megoldás:

$$\begin{aligned}
 U_{ki} &= U \cdot \frac{R_3}{(R_2 \otimes R_4) + R_1 + R_3} \\
 &= 40V \cdot \frac{8k\Omega}{(4k\Omega \otimes 500\Omega) + 1k\Omega + 8k\Omega} \\
 &= 40V \cdot \frac{8k\Omega}{9,44k\Omega} = \mathbf{33,89V}
 \end{aligned}$$

Áramosztó



- Áramosztó segítségével tetszőleges áram osztható KISEBB részekre
- Legegyszerűbb esetben két ellenállás párhuzamos kapcsolásával állítható elő
- Az áramok a vezetések arányában oszlanak meg: A nagyobb értékű ellenálláson kisebb áram folyik
- Párhuzamos ellenállásokon a feszültség azonos, innen:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 \quad \text{és} \quad U_1 = I_2 \cdot R_2$$

- Tehát:

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

- Tudjuk, hogy $I = I_1 + I_2$ illetve $I_1 = I - I_2$ és $I_2 = I - I_1$
- Helyettesítsünk be például I_1 helyére:

$$R_1 \cdot (I - I_2) = I_2 \cdot R_2$$

$$R_1 \cdot I - R_1 \cdot I_2 = I_2 \cdot R_2$$

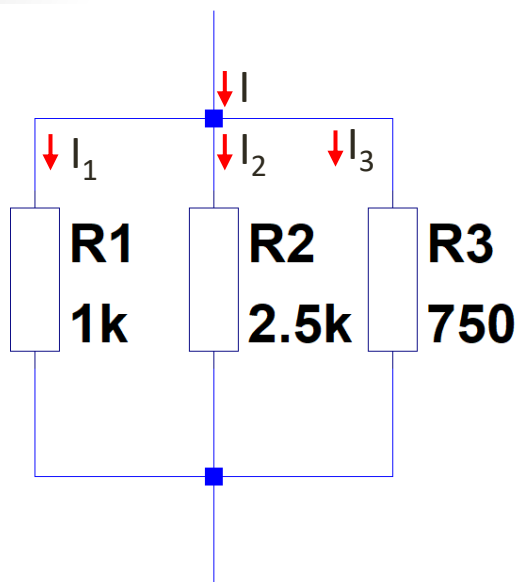
$$R_1 \cdot I = I_2 \cdot (R_1 + R_2)$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{(R_1 + R_2)}$$

Több ellenállás esetén (általánosan):

$$I_{\text{keresett}} = I_{\text{be}} \cdot \frac{\text{A többi ellenállás párhuzamos eredője (amelyiken nem keresem)}}{\text{A vizsgált ellenállás} + \text{A többi ellenállás párhuzamos eredője}}$$

Áramköri példa

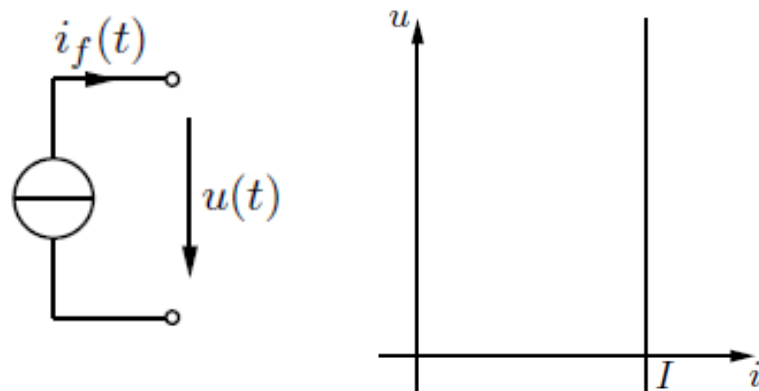
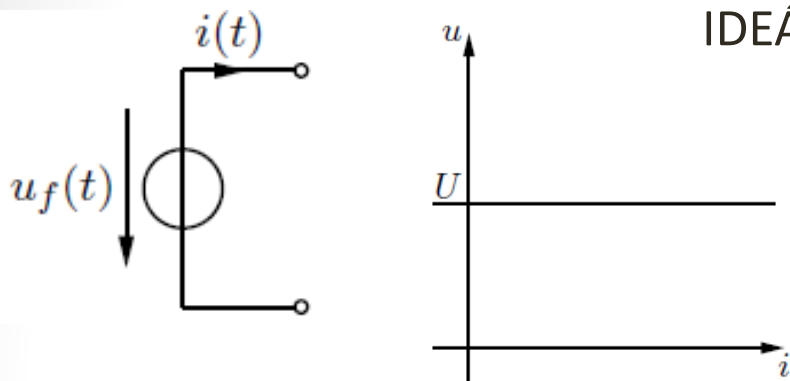


- Mekkora R3-on folyó áram értéke, ha $I=3A$?
- Megoldás:

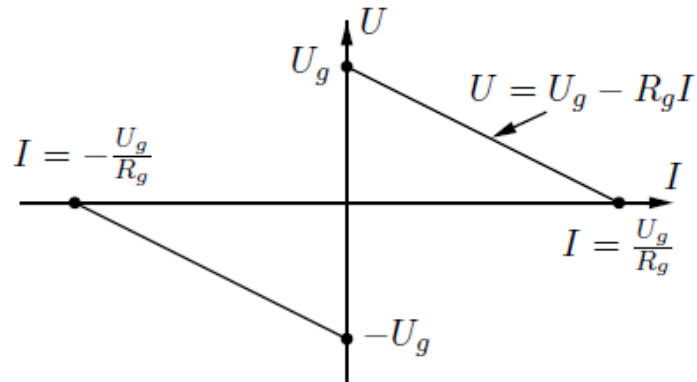
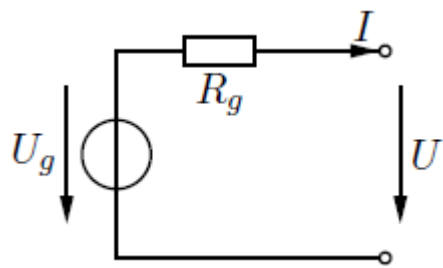
$$\begin{aligned} I_{R3} &= I \cdot \frac{R_1 \otimes R_2}{R_3 + (R_1 \otimes R_2)} \\ &= 3A \cdot \frac{1k\Omega \otimes 2,5\Omega}{(1k\Omega \otimes 2,5\Omega) + 750\Omega} \\ &= 3A \cdot \frac{714,28\Omega}{714,28\Omega + 750\Omega} = 1,463A \end{aligned}$$

Ideális és valóságos források és generátorok

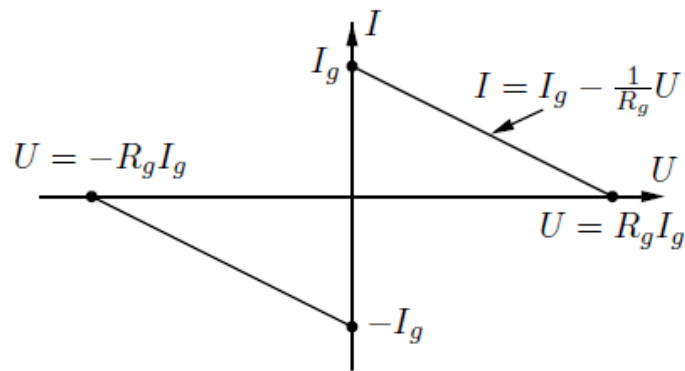
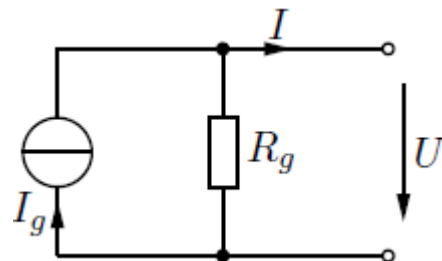
IDEÁLIS



VALÓSÁGOS



THÉVENIN



NORTON

Példa

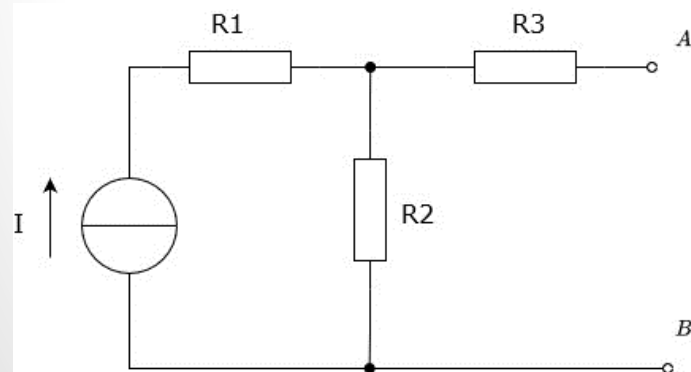
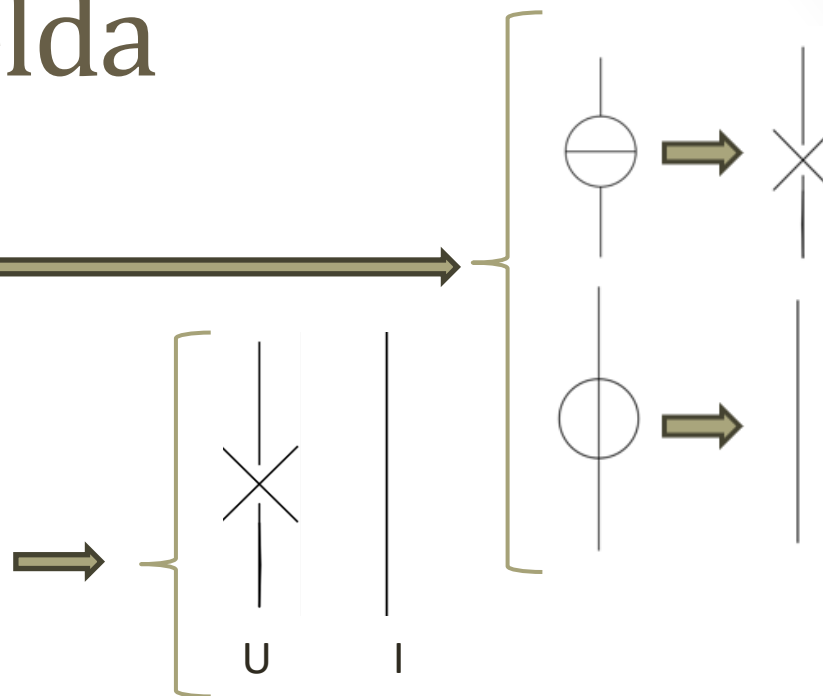
1. Belső ellenállás kiszámítása

• Források helyettesítése:

- Áramgenerátor szakadással
- Feszültséggenerátor rövidzárral

2. Kimenetre vonatkoztatott (itt AB) mennyiségek kiszámítása

- Feszültség esetén szakadással zárunk
- Áram esetén rövidzárral és megvizsgáljuk melyik komponens(ek) árama lesz a rövidzáron folyó áram



$$R_{AB} = R_2 + R_3$$

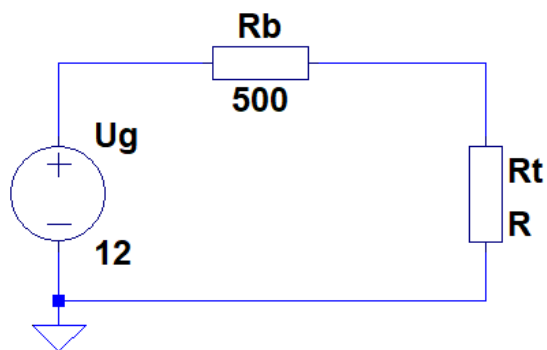
$$I_{AB} = I_{R3} = I \frac{R_2}{R_3 + R_2}$$

$$U_{AB} = I R_{AB}$$

A belső ellenállás mindkét helyettesítő kapcsolás esetén azonos!!

Teljesítményillesztés

Az egyenáramú teljesítményillesztés feladata, hogy meghatározzuk a hálózatra csatlakozó ellenállás azon értékét, amely mellett a lezáró ellenállás teljesítménye maximális



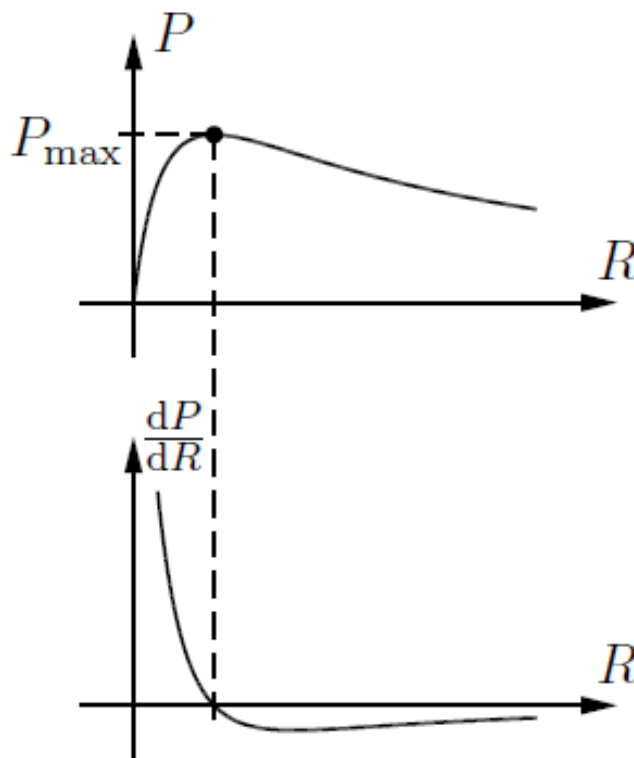
R_2 teljesítménye akkor lesz a maximális ha **$R_b = R_t$** .

Tudjuk, hogy $P = \frac{U^2}{R}$

Ha a két ellenállás azon, akkor $U_{R_t} = \frac{U_g}{2}$

Innen:

$$P_{max} = \frac{U_g^2}{4R_b} = \frac{I_g^2 R_b}{4}$$



Összetett hálózatszámítási módszerek

- Szuperpozíció tétele

1. Referenciairányok felvétele
2. Egyesével dezaktivizáljuk a forrásokat
3. A részmegoldásokat előjelesen vizsgáljuk, összegezzük

Nagyszámú forrás esetén sok számítást igényel!

- Csomóponti potenciál

1. Meghatározzuk az ismeretlen csomópontok számát ($n - n_u$)
2. Felvesszük a referenciairányokat
3. Felírjuk az egyenleteket

- Hurokáramok módszere

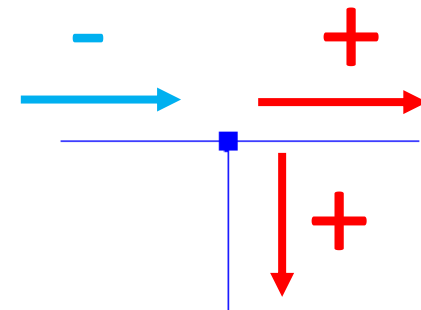
1. Meghatározzuk az ismeretlen hurkok számát ($l - n + 1$)
2. Felvesszük a referencia irányt
3. Felírjuk az egyenleteket



Áramgenerátor

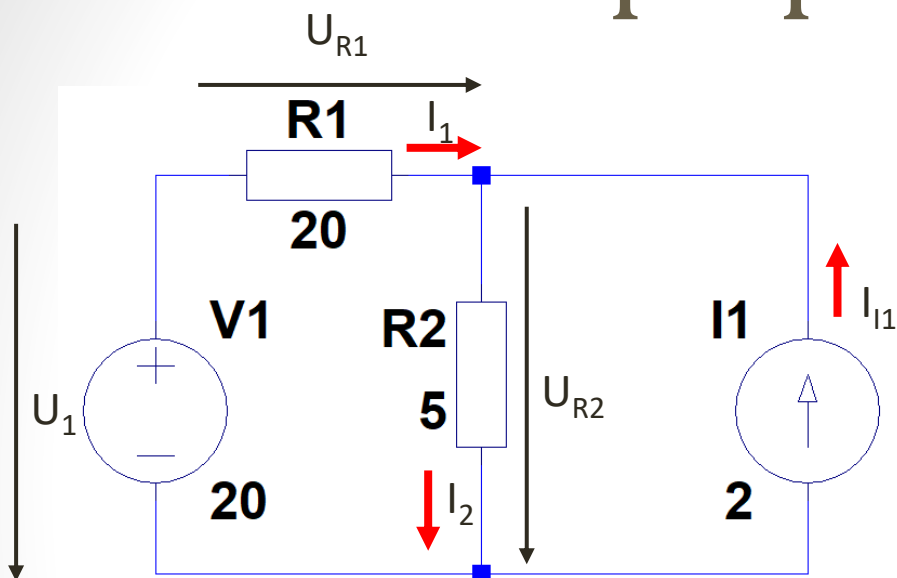


Feszültséggenerátor

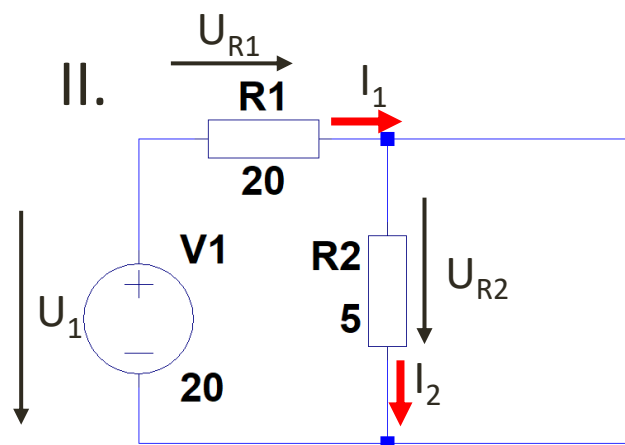
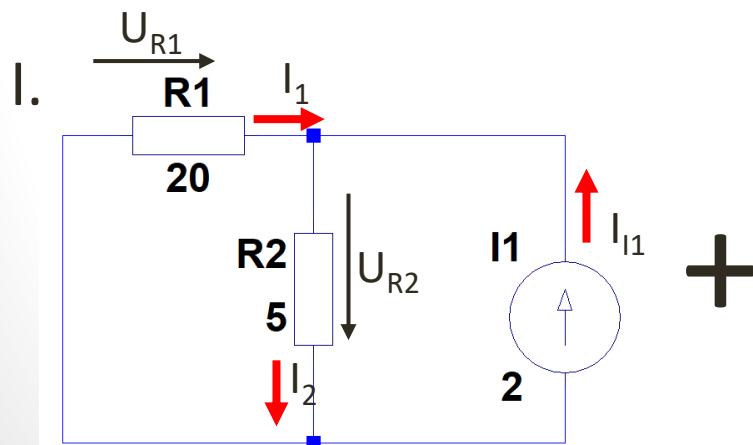


Csomópontba befolyó áram „-” előjel, onnan kifolyó áram „+” előjel

Szuperpozíció elve



- A **források** áram/feszültség iránya előre rögzített, kijelölt!
- Minden más irány önkényesen megválasztható. A példában a balról-jobbra, fentről le elvet követtük.
- Mivel két forrásunk van, így kétszer kell elvégeznünk a dezaktivizálást.



Szuperpozíció megoldás

I.

$$\begin{aligned} I_1^1 &= I_{I1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -2A \cdot \frac{5\Omega}{20\Omega + 5\Omega} = -0,4A \\ I_2^1 &= I_{I1} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2A \cdot \frac{20\Omega}{20\Omega + 5\Omega} = 1,6A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{R1}^1 &= I_1 R_1 = -0,4A \cdot 20\Omega = -8V \\ U_{R2}^1 &= I_1 R_2 = 1,6A \cdot 5\Omega = 8V \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} U_{R1}^2 &= U_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 20V \cdot \frac{20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = 16V \\ U_{R2}^2 &= U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20V \cdot \frac{5\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = 4V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{16V}{20\Omega} = 0,8A \\ I_2^2 &= \frac{U_{R2}}{R_1} = \frac{4V}{5\Omega} = 0,8A \end{aligned}$$

Összegzésképp (I. + II):

$$U_{R1} = U_{R1}^1 + U_{R1}^2 = -8V + 16V = 8V$$

$$U_{R2} = U_{R2}^1 + U_{R2}^2 = 8V + 4V = 12V$$

$$I_1 = I_1^1 + I_1^2 = -0,4A + 0,8A = 0,4A$$

$$I_2 = I_2^1 + I_2^2 = 1,6A + 0,8A = 2,4A$$

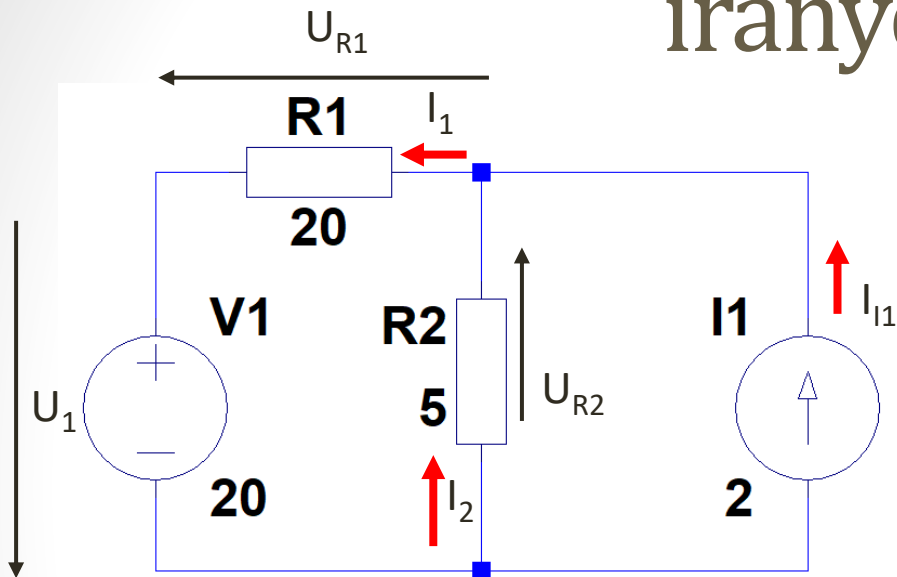
Komponens	U[V]	I[A]	P [W]
R1	8	0,4	3,2
R2	12	2,4	28,8
V1	20	$I_1=0,4$	-8
I1	12	-2	-24
Összesen:			0

Az energiamegmaradás elve miatt korrigálni szükséges az előjelet!

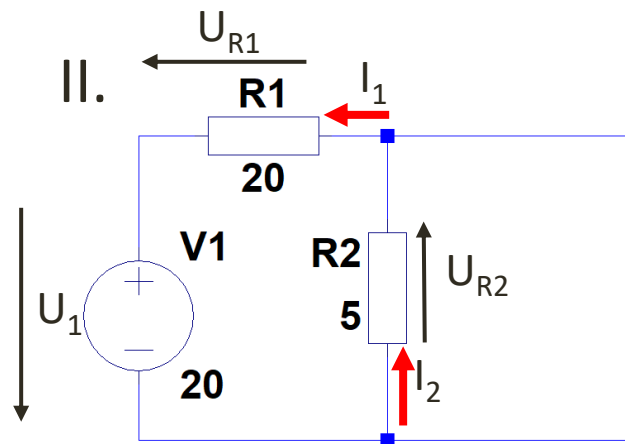
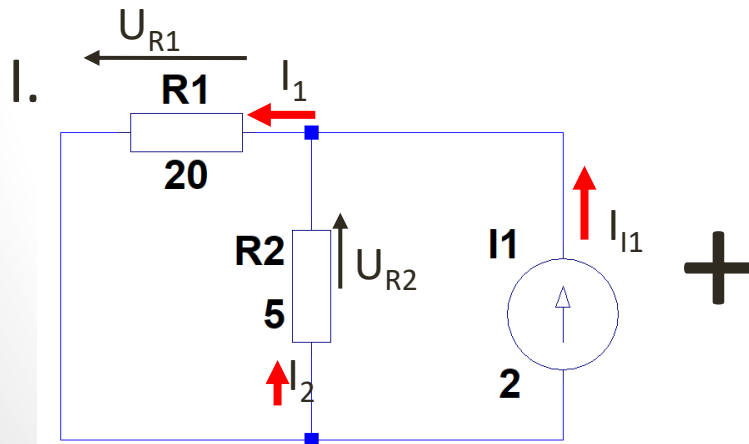
Energiamegmaradás elve

- Korábban beláttuk, hogy a Kirchhoff törvények értelmében csomóponti áramok összege minden esetben zérus, illetve zárt hurokban a feszültségek összege zérus.
- Az energiamegmaradás értelmében a hálózat esetén amennyi energiát befektetünk, annyit fel is használunk (a kettő különbsége a veszteség), vagyis a teljesítmények összegzett értéke 0 kell, hogy legyen. Energia nem veszik el.
- Az ellenállások teljesítménye mindig pozitív, hisz fogyasztók.
- Ha több forrás található az áramkörben, előfordulhat, hogy valamelyik forrás teljesítménye lehet pozitív, azaz viselkedhet fogyasztóként.
- Ha szükséges, a táblázatban végezzük el a korrekciót!

Feladat megoldása más referencia irányokkal



- A referencia irányok most mások az ellenállásokon. De tartsuk észben, hogy rajtuk az áram és a feszültség minden esetben egyirányba mutat!



Szuperpozíció megoldás (ver. 2)

I.

$$\left. \begin{aligned} I_1^1 &= I_{I1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2A \cdot \frac{5\Omega}{20\Omega + 5\Omega} = 0,4A \\ I_2^1 &= I_{I1} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2A \cdot \frac{20\Omega}{20\Omega + 5\Omega} = -1,6A \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U_{R1}^1 &= I_1 R_1 = 0,4A \cdot 20\Omega = 8V \\ U_{R2}^1 &= I_1 R_2 = 1,6A \cdot 5\Omega = -8V \end{aligned}$$

II.

$$\left. \begin{aligned} U_{R1}^2 &= U_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 20V \frac{20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = -16V \\ U_{R2}^2 &= U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20V \frac{5\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = -4V \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_1^2 &= \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{16V}{20\Omega} = -0,8A \\ I_2^2 &= \frac{U_{R2}}{R_1} = \frac{4V}{5\Omega} = -0,8A \end{aligned}$$

Összegzésképp (I. + II):

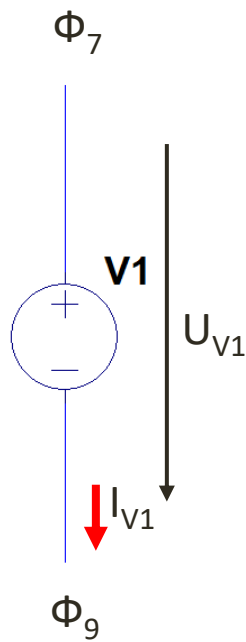
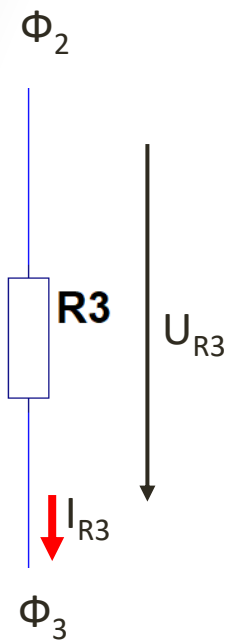
$$\begin{aligned} U_{R1} &= U_{R1}^1 + U_{R1}^2 = 8V - 16V = -8V \\ U_{R2} &= U_{R2}^1 + U_{R2}^2 = -8V - 4V = -12V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^1 + I_1^2 = 0,4A - 0,8A = -0,4A \\ I_2 &= I_2^1 + I_2^2 = -1,6A - 0,8A = -2,4A \end{aligned}$$

Komponens	U[V]	I[A]	P [W]
R1	-8	-0,4	3,2
R2	-12	-2,4	28,8
V1	20	$I_1 = -0,4$	-8
I1	12	2	-24
Összesen:			0

Az energiamegmaradás elve miatt korrigálni szükséges az előjelet!

Csomóponti potenciálok módszere -áttekintés-



- A feszültség definíció szerint: Két pont közötti potenciál különbség. Az esetek többségében mindig a pozitív potenciálhoz viszonyítunk.
- Ha például R_3 áramát szeretném definiálni, akkor:

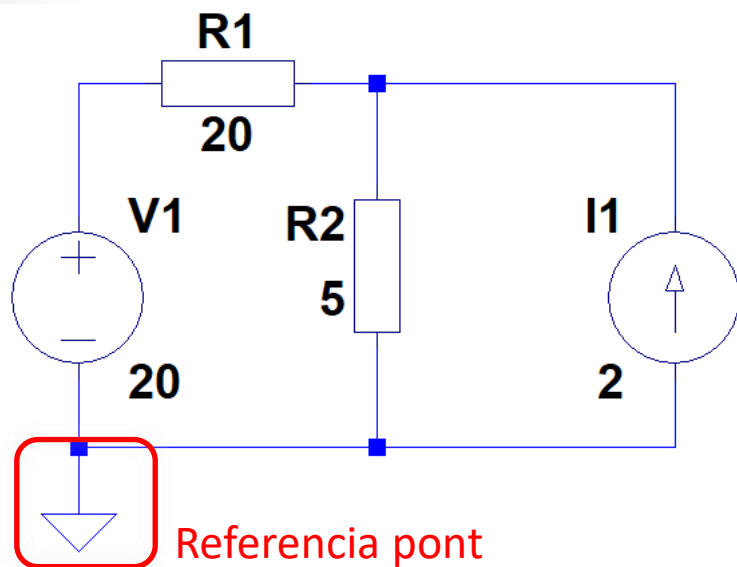
$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{R_3}$$

- Ha Φ_3 pontból nézem:

$$I_3 = -\frac{U_3}{R_3} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{R_3}$$

- Az egyenletekben a feszültségforrások árama (és az áramforrások feszültsége) általában ismeretlen.

Megoldási tanácsok

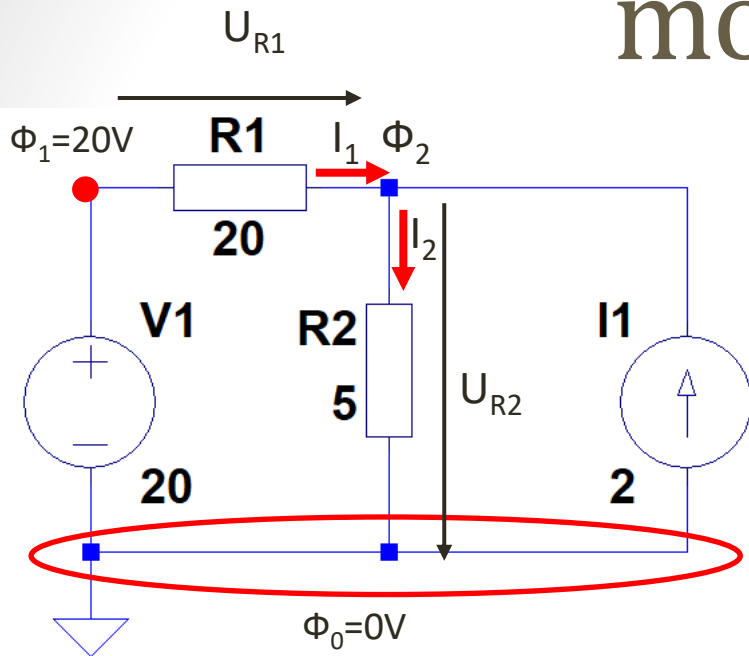


Az ismeretlen csomópontok száma:

$$n_{\text{ismeretlen}} = n - n_u - 1$$

- A feladatot az ismeretlen csomópontok meghatározásával kezdjük.
- Minden esetben szükséges egy referencia pont (GND vagy földpont), melyhez viszonyítunk. Ez csökkenti az ismeretlen csomópontok számát.
- Ezt célszerű a feszültséggenerátor (több feszültséggenerátor esetén valamelyik feszültség generátor) negatív sarkához választani, így a generátor másik sarka ismert potenciált ad meg.
- A források referencia irányai rögzítettek, a többi tetszőleges!
- A csomópontba befolyó áramokat „-” előjellel, a kifolyókat „+” előjellel vesszük figyelembe!

Illusztratív példa CSMP módszerre



$$n_{ismeretlen} = n - n_u - 1$$

$$= 3 - 1 - 1 = 1$$

- Az ismeretlen csomópont Φ_2 -es csomópont lesz
- A csomópont 3 felé ágazik el, így 3 komponenst kell figyelembe vennünk:

$$\Phi_2:) - 2 - \frac{20 - \Phi_2}{20} + \frac{\Phi_2 - 0}{5} = 0$$

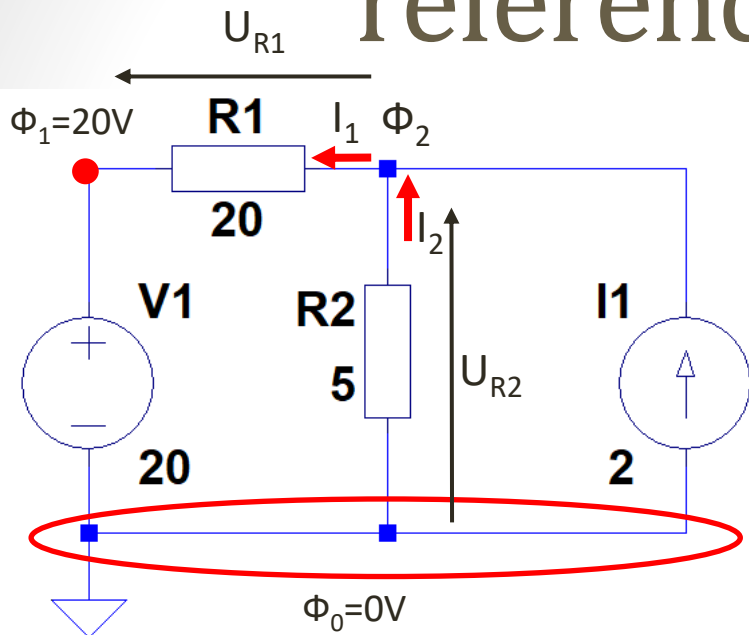
$$\Phi_2:) - 20 \cdot 2 - \frac{20 - \Phi_2}{20} + \frac{4(\Phi_2 - 0)}{20} = 0$$

$$\Phi_2:) - 40 - 20 + \Phi_2 + 4\Phi_2 = 0$$

$$\Phi_2:) 5\Phi_2 = 60$$

$$\Phi_2:) \Phi_2 = 12$$

Feladat megoldás más referencia irányokkal



$$n_{ismeretlen} = n - n_u - 1 \\ = 3 - 1 - 1 = 1$$

- Ebben az esetben a U_{R1} -et és U_{R2} -t másképp vettük fel, de észben tartva, hogy rajtuk az áram és a feszültség egyirányba mutat!

$$\Phi_2:) -2 + \frac{\Phi_2 - 20}{20} - \frac{0 - \Phi_2}{5} = 0$$

$$\Phi_2:) -20 \cdot 2 + \frac{\Phi_2 - 20}{20} - \frac{4(0 - \Phi_2)}{20} = 0$$

$$\Phi_2:) -40 - 20 + \Phi_2 + 4\Phi_2 = 0$$

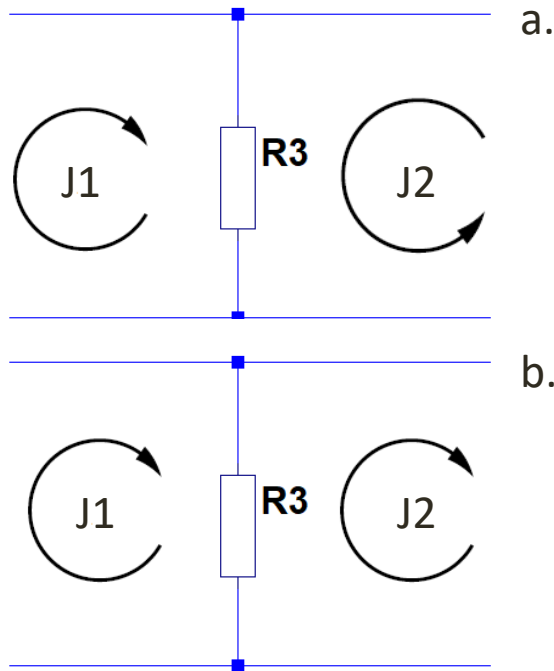
$$\Phi_2:) 5\Phi_2 = 60$$

$$\Phi_2:) \Phi_2 = 12$$

Hurokáramok módszere

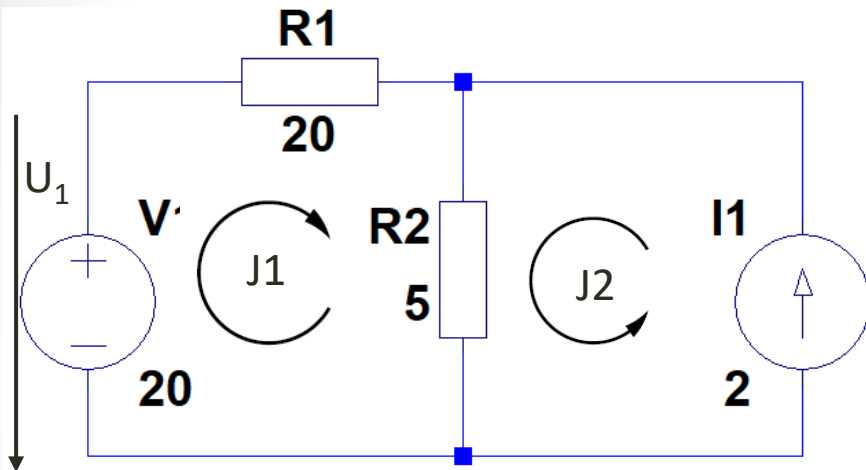
Az ismeretlen hurok számát a következő összefüggés adja meg (b: ágak száma, n: csomópontok száma):

$$l = b - n + 1$$



- Az áramgenerátor mindig kijelöl egy hurokot, melynek iránya rögzített, és ismertnek tekinthető
- A nem rögzített hurok iránya tetszőleges, az óramutatóval megegyező vagy ellentétes irányú
- Bonyolultabb hálózat esetén a hurokokat mindig úgy kell felvenni, hogy minden komponens legyen érintve legalább az egyik hurok által
- Az ellenállások minden esetben pozitív előjellel kerülnek az egyenletbe, kivéve ha több hurok is kifejti rá a hatását:
- Ha egy alkatrészen két hurok is kifejti hatását, mindig az aktuális hurokból vonjuk le a másik hurok értékét:
 - a. esetben, mindkét hurok azonos irányból közelíti meg R3-at: $R_3(J1 + J2)$
 - b. esetben ha J1 hurokot vizsgáljuk: $R_3(J1 - J2)$, ha J2-t vizsgáljuk: $R_3(J2 - J1)$

Illusztratív példa hurokáram módszerre



$$l = b - n + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$$

Ebből az áramgenerátor által kijelölt hurkot ismertnek tekinthetjük, tehát egy hurokegyenletet kell megoldani.

- Vegyük fel az egyes komponensek feszültségirányait.
- Majd ezek után vegyük fel a J1 hurkot például az óramutató járásával megegyező módon. J2 (áramgenerátor) hurokárama rögzített, ellentétes az óra járásával (ha fordítva vennénk fel az is jó megoldást adna)
- J2-es hurok egyenlete:

$$J1:) -20 + 20J1 + 5(J1 + J2) = 0$$

$$J1:) -20 + 25J1 + 5 \cdot 2 = 0$$

$$J1:) 25J1 = 10$$

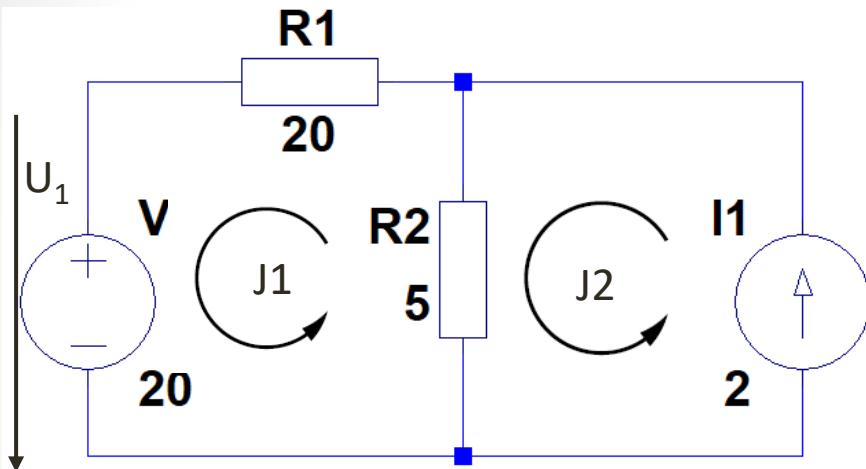
$$J1:) J1 = 0,4$$

Hurokáram módszer eredményei

- Tudjuk, hogy J2-es hurok értéke 2A, illetve kiszámítottuk, hogy $J1=0,4A$ -el
- Ennek és a bejelölt referenciairányoknak megfelelően az egyes komponensek áram és feszültségértékei:
 - $U_{R1} = 0,4A \cdot 20\Omega = 8V$
 - $U_{R2} = 5\Omega(0,4A + 2A) = 12V$

Komponens	U[V]	I[A]	P W
R1	8	$J1=0,4$	3,2
R2	12	$J1+J2=2,4$	28,8
V1	20	$-J1=-0,4$	-8
I1	$U_{R2}=12$	2	-24
Összesen			0

Feladat megoldása más hurokiránnyal



- J2-es hurok egyenlete:

$$J1:) 20 + 20J1 + 5(J1 - J2) = 0$$

$$J1:) 20 + 25J1 - 5 \cdot 2 = 0$$

$$J1:) 25J1 = -10$$

$$J1:) J1 = -0,4$$

Mivel J1-re írjuk fel az egyenletet így ő adja a referencia irányt. J2 iránya ellentétes, így R2-es ellenállás esetén J2-t negatív előjellel vesszük figyelembe!

Emlékezzünk, hogy az előző esetben J1 iránya az óra forgásával megegyező volt, hozzá képest J2 is azonos irányú volt így J2-t pozitív előjellel vettük figyelembe.