

Digitális műsorszórás

Előadó: Dr. Kovács Imre

Egyetemi adjunktus

Híradástechnikai Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Tel: 06 1 4632080

Email: kovacsi@hit.bme.hu

Tanfolyam tematika

- Videójel, videó formátumok, digitalizálás
- Videó és audió kompresszió
- TS adatfolyam felépítése
- **Digitális modulációk**
- DVB-T rendszer, hálózat, vevő
- DVB mérés technika
- DVB-H, DRM
- Mérés technikai gyakorlat

A mai nap programja:

- Bináris alapsávi jelátvitel, Nyquist feltétel
- Bináris szinuszos modulációs módok
- M-szintű modulációk
- CNR, SNR, E_b/N_0 , BER, átlag teljesítmény
- OFDM motiváció
- OFDM jellegzetességei
- Transzformációs jelábrázolások (DFT, FFT)
- OFDM előállítása, demodulálása

Digitális adattovábbítás

- Alapsávi
- Szinuszos vivőjű

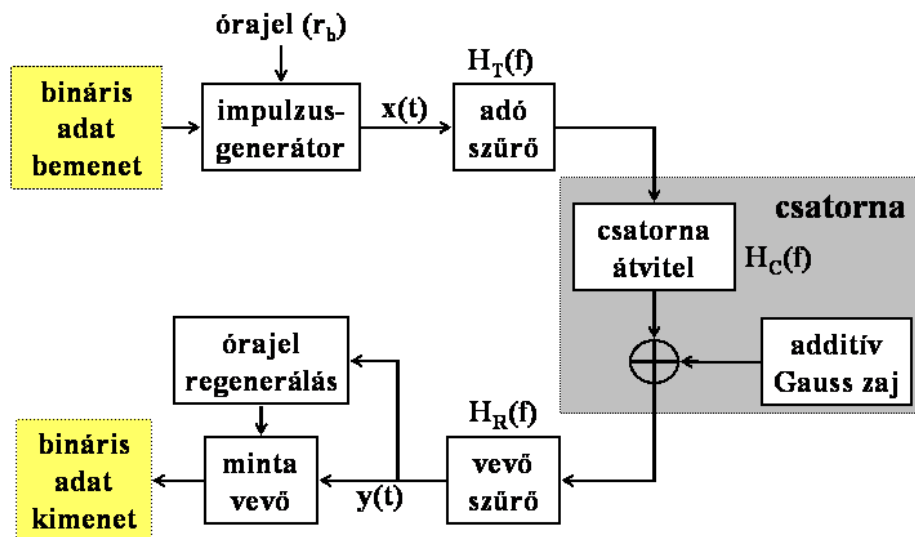
Alapsávi digitális jelátvitel

Alapsávi bináris átvitel

- Impulzus moduláció esetén a digitális információt hordozhatja az impulzusok:
 - Amplitúdója: pulzus amplitúdó moduláció (Pulse Amplitude Modulation: PAM)
 - Időtartama: pulzus időtartam moduláció (Pulse Duration Modulation: PDM)
 - Helyzete: pulzus helyzet moduláció (Pulse Position Modulation: PPM)
- E megoldások közül a PAM rendszerek nyújtják a leghatékonyabb teljesítmény és sávszélesség kihasználást, ezért csak ezzel foglalkozunk (a **vivós is erre vezethető vissza**)

Alapsávi bináris PAM rendszer

- A rendszer tömbvázlatát a következő ábra tartalmazza



Alapsávi bináris PAM rendszer

- A bemenetén bináris adatsorozat van, r_b adatsebességgel és $T_b = 1/r_b$ bit-időtartammal
- Az impulzusgenerátor az órajel ütemében előállítja a bináris „1”, vagy „0”-nak megfelelő fix amplitúdójú impulzusokat
- Az $x(t)$ jel áthaladva az adó-szűrőn ($H_T(f)$) a csatornára kerül
- A csatorna átviteli függvénye ($H_C(f)$) formálja a jelet
- Az ezt követő összegző modellezi a csatorna zajt: fehér additív Gauss zajt tételezünk fel
- A zajos jel ezután keresztül halad a vevő szűrőn ($H_R(f)$), majd egy A/D konverter mintavételezi és alakítja vissza bináris jellé
- Ez utóbbi művelet az $y(t)$ jelből kinyert órajellel időzített időpillanatokban az $y(t)$ jelből vett minták alapján történik

Alapsávi bináris PAM rendszer

- A vevő szűrő kimenetén az $y(t)$ jel különbözik az adó szűrő bemenő jelétől ($x(t)$):
 - a hozzáadódó zaj meghamisítja a jelalakot
 - a három átviteli függvény ($H_T(f)$, $H_C(f)$, $H_R(f)$) befolyásolja a mintavételi időpont környezetében a jelalakot és ezzel azt, hogy milyen hibavalószínűséggel lehet felismerni a mintavételi időpillanatban, hogy 1-es, vagy 0-ás érkezett-e
- A fentiek együttes hatása a szimbólumközi áthallás

(ISI = Inter Symbol Interference)

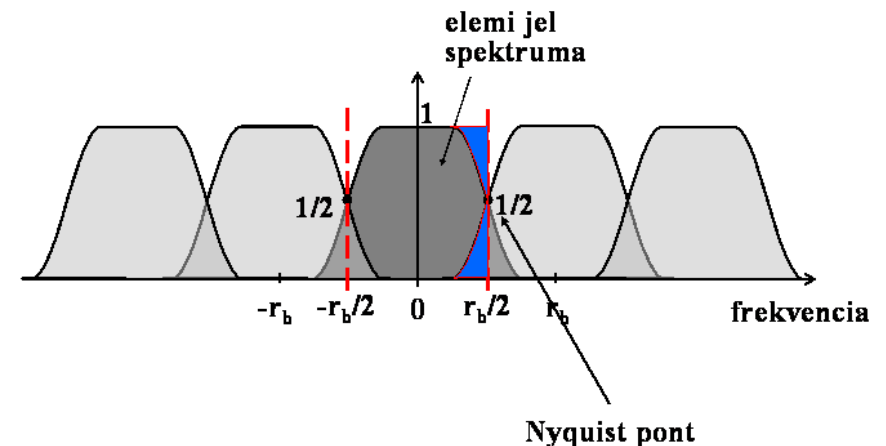
Alapsávi bináris PAM rendszer

- Az alapsávi PAM rendszer kialakításának alapvető tervezői szempontja, hogy az adó- és vevőszűrőket úgy válasszák meg, hogy a zaj és az ISI hatása minimális legyen
- Ezenkívül természetesen cél az is:
 - Egy adott B sáv szélességű csatorna esetén maximális legyen az alkalmazható adatsebesség (r_b)
 - Vagy ha r_b adott, akkor a cél, hogy azt minél keskenyebb sáv szélességű csatornán lehessen elfogadható hibaarányal továbbítani
- Mivel az utóbbiaknak igen nagy a jelentősége, ezért azt fogjuk vizsgálni, hogy mik a feltételei annak, hogy ISI nélkül lehessen bináris adatokat átvinni egy alapsávi bináris PAM rendszeren

Alapsávi impulzus jelalak formálás

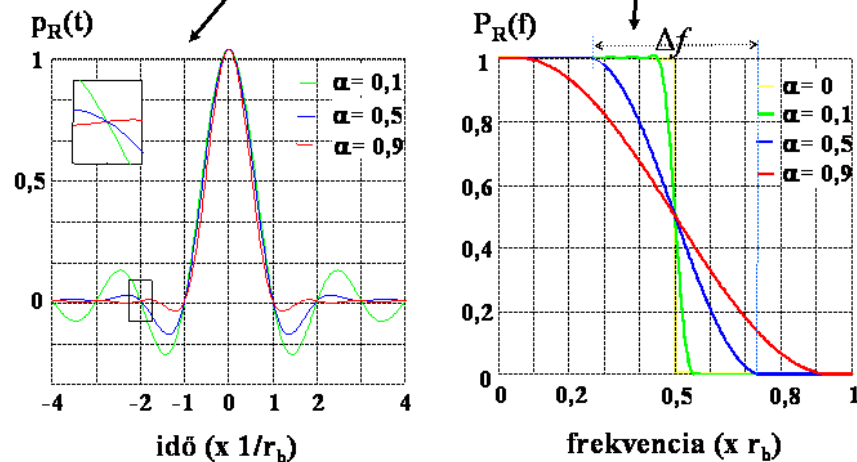
- Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a csatorna zajmentes és így az $y(t)$ kimeneti jel csak a szűrők és a csatorna átviteli függvényei következtében különbözik a bemenő $x(t)$ jeltől
- Vegyük az elemi jel spektrumának az adatsebesség egészszámu többszörösére történő eltolásait
- Az összegnek a vevő döntő bemenetén az adatsebesség fele frekvenciáig ($r_b/2$) konstansnak kell lennie (**Nyquist feltétel**)
- Az elemi jel spektruma biztosan nem haladja meg az adatsebességnek megfelelő frekvenciát (r_b)
- Ezért csak a $k=1, -1$ -es eltolt spektrumot kell figyelembe venni
- Ez pedig azt jelenti, hogy az adatsebesség felén a spektrum értéke $1/2$ kell hogy legyen, ez a Nyquist pont

Nyquist feltétel (relatív skálákkal)



Elemi jelalakok és azok spektrumai

(relatív skálákkal)



$$\alpha = \frac{\Delta f}{r_b} = \text{lekerekítési tényező (roll-off)}$$

Alapsávi impulzus jelalak formálás

- Az ábra jobb oldala néhány lehetséges frekvencia menetet mutat, melyek mind alkalmasak arra, hogy kiküszöböljék az ISI-t
- Látható, hogy a Nyquist kritérium nem ír elő egy adott frekvencia karakterisztikát, végtelen sok (α 0 - 1 közötti értékeivel) lehetőség van a kritérium kielégítésére
- Ugyanakkor az ábrát szemlélve azonnal szembetűnik, hogy az ISI elvileg sem szüntethető meg teljesen, ha a rendelkezésre álló sávszélesség kisebb, mint $r_b/2$, mert akkor már nem alakítható ki pontszimmetrikus spektrumkép

Alapsávi impulzus jelalak formálás

- $B=r_b/2$ tehát az elvi lehetséges minimális sávszélesség, amellyel ISI nélküli átvitelt még meg lehet valósítani
- Az is megfigyelhető az ábrán, hogy nincs szükség r_b -nél nagyobb sávszélességre
- A sok lehetséges megoldás közül a választást megkönnyíti az ábra bal oldalán feltüntetett néhány elemi jelalak, melyek a jobb oldalon megadott spektrumoknak megfelelő időfüggvények
- Megfigyelhető, hogy minél meredekebb a spektrum levágása a Nyquist pont környezetében, annál nagyobb az időfüggvény „belengése”

Alapsávi impulzus jelalak formálás

- Ezzel szemben ha "lankás" levágási karakterisztikát adunk a spektrumnak, akkor az időfüggvény mentes lesz a nagyobb lengésektől
- Ezért a gyakorlatban az ún. emelt koszinuszos levágási karakterisztikát alkalmazzák kellően "lágy" átmenettel, mert az még jó kompromisszum az elfogadható (r_b -hez képesti) sávszélesség növekedés és a túllövés mentes jelalak között
- A túllövéses időkép azért veszélyes, mert ha időzítési hiba van a rendszerben, hibás bit-felismerés, azaz bit-tévesztés lesz a bináris jel-detektálás eredménye
- Az emelt koszinuszos karakterisztika és a neki megfelelő elemi jelalak a következő összefüggésekkel adható meg:

Emelt koszinuszos karakterisztika

$$P_R(f) = 1 \quad \text{ha} \quad 0 \leq |f| \leq (1-\alpha) \frac{r_b}{2}$$

$$P_R(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\frac{r_b}{2} - |f|}{\alpha \frac{r_b}{2}} \right) \quad \text{ha} \quad (1-\alpha) \frac{r_b}{2} \leq |f| \leq (1+\alpha) \frac{r_b}{2}$$

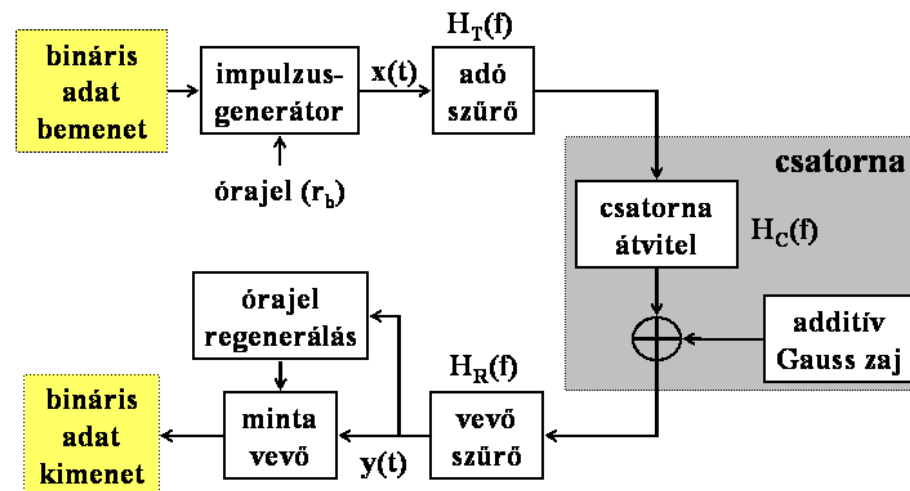
$$P_R(f) = 0 \quad \text{ha} \quad |f| > (1+\alpha) \frac{r_b}{2}$$

- E spektrumnak megfelelő elemi jel időfüggvénye a következő:

$$p_R(t) = \frac{\sin \pi t r_b}{\pi t r_b} \frac{\cos \alpha \pi t r_b}{1 - 4\alpha^2 t^2 r_b^2}$$

PAM jelalak formálás

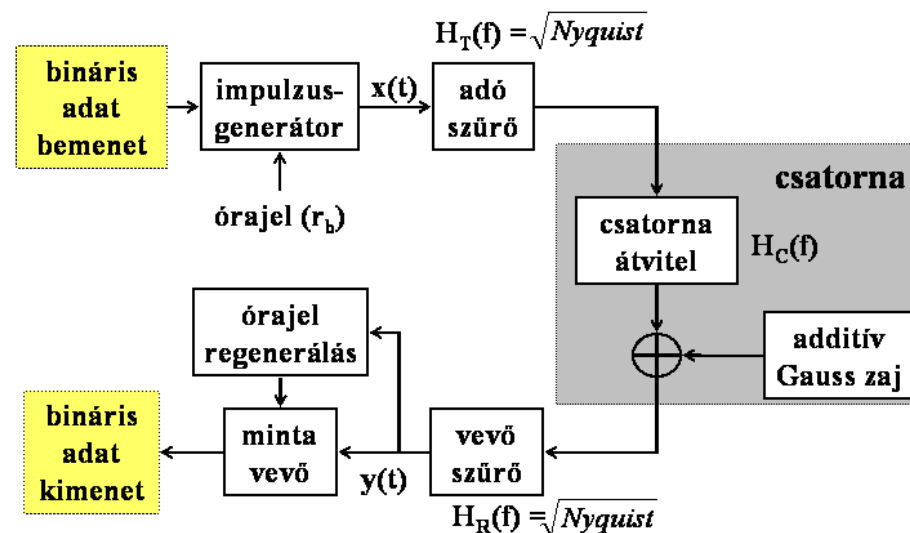
- Térjünk vissza az alapsávi PAM rendszer vázlatára
- Tételezzük fel, hogy a csatorna ideális átviteli karakterisztikájú



PAM jelalak formálás

- Milyen legyen a vevő és az adószűrő?
- Másként fogalmazva, hogy osszuk el az elemi jelalak formálás Nyquist előírását az adó és a vevő szűrés között?
- A zaj minden rendszerben megtalálható
- A vevő oldalon értelmetlen a jel spektrumánál nagyobb frekvenciasávban beengedni a zajt
- Az adó oldalon meg nem szabad kisugározni a szükséges sávszélességnél nagyobb frekvenciasávban jel komponenszt
- Megoldás a Nyquist előírás megosztása a vevő és az adó között
- Mivel a vevő és az adó szűrő karakterisztika a frekvencia tartományban szorzódik, ezért szokásos megoldás az igényelt elemi jelalak karakterisztika gyöke az adó és a vevő oldalon

PAM osztott jelalak formálás

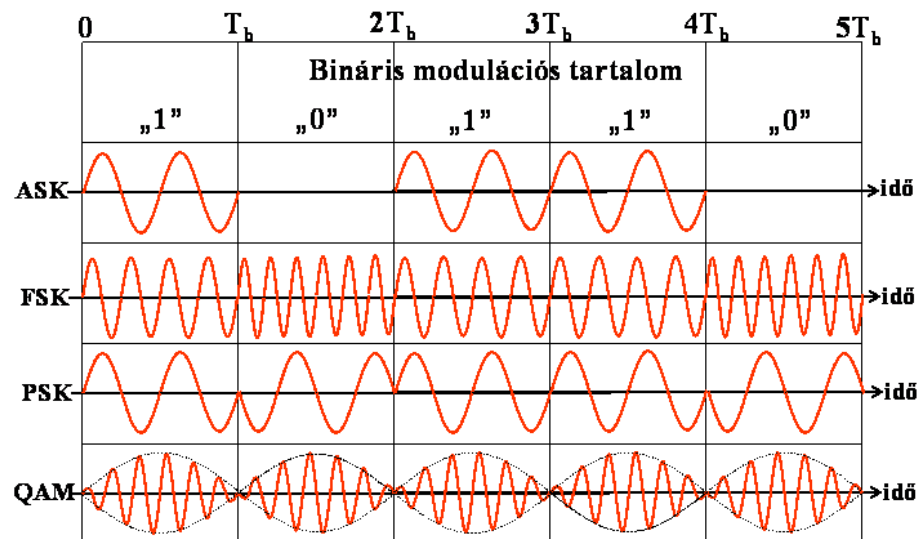


Szinuszos vivőjű digitális modulációs rendszerek

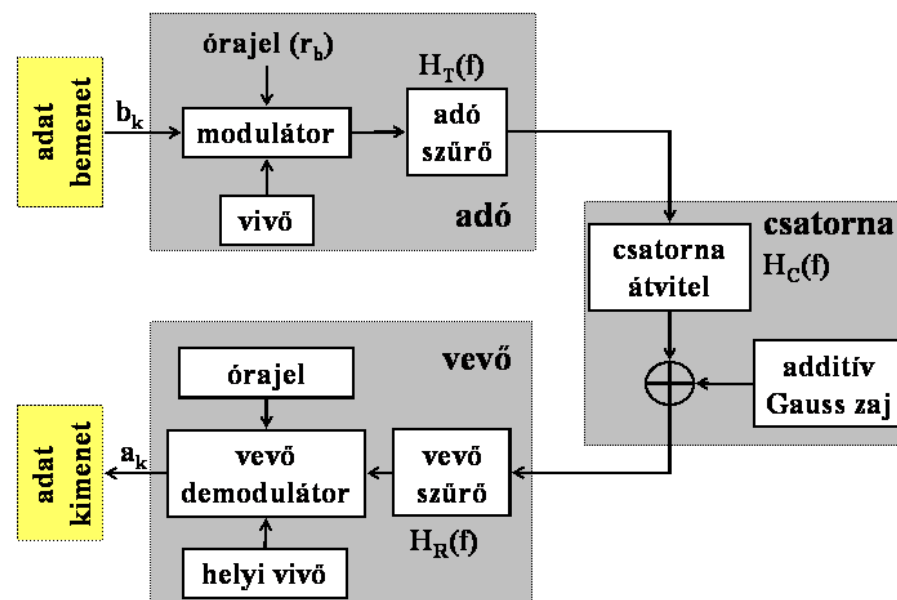
Szinuszos vivőjű digitális modulációs rendszerek

- A digitális információt a legtöbb esetben nem az alapsávban, hanem egy sáváteresztő jellegű csatornában kell továbbítani
- Ekkor elengedhetetlen megfelelő vivőfrekvencia választása, melynek modulációjával az alapsávi jel átvihető a csatornán
- Mivel a moduláló jel nem analóg, hanem digitális, ezért röviden ismertetjük a lehetséges modulációs lehetőségeket, különös tekintettel arra, hogy nem az alakú jelátvitel a fontos, hanem az, hogy minél kisebb hibavalószínűséggel lehessen visszanyerni az eredeti digitális adatokat
- Ha biztosítható a kis hibázási arány, akkor közömbös, hogy az átvitt jel milyen alakú

Digitális moduláció alapesetei



Bináris szinuszos vivőjű rendszer felépítése



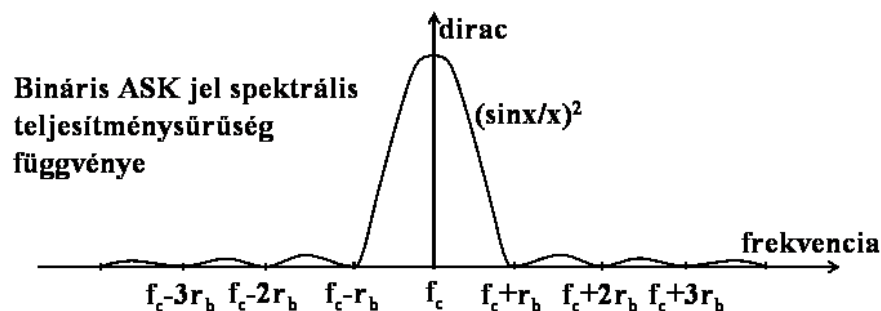
Bináris modulációs rendszerek

- A rendszer bemenő jele olyan bináris szekvencia, melynek adatsebessége r_b , és ezzel bit időtartama $T_b = 1/r_b$
- A modulátor által létrehozott jel a k . bit időben egyike az $s_1(t)$ és $s_2(t)$ két lehetséges hullámformának, eltolva a k . bit idejére
- $s_1(t)$ és $s_2(t)$ időtartama T_b , energiájuk véges, azaz $s_1(t)$ és $s_2(t)$ azonosan nulla, ha t kívül esik a $0 \dots T_b$ időn
- A hullámalak formája függ az alkalmazott modulációtól, ahogy azt a következő táblázat tartalmazza

Szinuszos vivőjű bináris átviteli rendszerek elemi időfüggvényei

$s_1(t)$	$s_2(t)$	Moduláció fajtája
0	$A \cos \omega_c t$ vagy $A \sin \omega_c t$	Amplitúdó billentyűzés ASK
$-A \cos \omega_c t$ vagy $-A \sin \omega_c t$	$A \cos \omega_c t$ vagy $A \sin \omega_c t$	Fázis billentyűzés PSK
$-A \cos(\omega_c - \omega_d)t$ vagy $A \sin(\omega_c - \omega_d)t$	$-A \cos(\omega_c + \omega_d)t$ vagy $A \sin(\omega_c + \omega_d)t$	Frekvencia billentyűzés FSK

Bináris ASK moduláció



- Elvileg végtelen nagy a sávszélesség, de a vivőtől távolodva a csökkenő jelleg lehetővé teszi a véges sávszélesség kijelölését
- Ezt lehet pl. úgy megtenni, hogy ott vágjuk el a spektrumot, ahol a megmaradó rész a jel teljes teljesítményének pl. 95%-át tartalmazza
- Kimutatható, hogy ekkor az ASK jel sávszélessége kb. $3r_b$ lesz

Bináris PSK moduláció

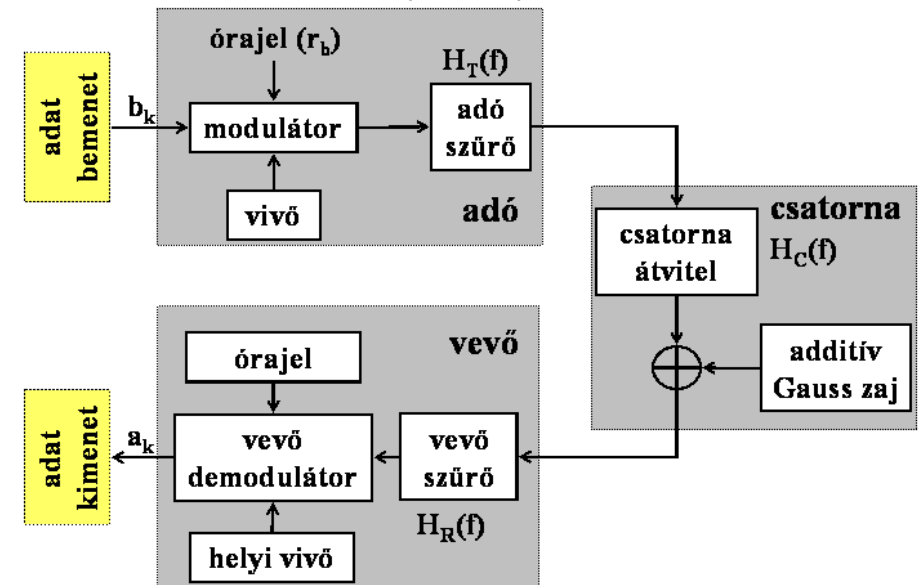
- A bináris értékek továbbítása 2 ellenfázisú jellel
- Különbség az ASK és a PSK hullámalak között az, hogy ASK-nál a vivő amplitúdója vagy van, vagy nincs, míg PSK-nál a vivő hol $+A$, hol $-A$ értékre van kapcsolva
- Az ASK és PSK spektrális eloszlásfüggvényei hasonlóak
- Különbség, hogy a PSK spektrumban nincsenek Dirac függvények, tehát nincs a vivőn diszkrét komponens
- A PSK legfontosabb előnye, hogy műszaki teljesítőképessége messze felülmúlja az ASK-ét, ha azonos adóteljesítmények és zajviszonyok között vizsgáljuk őket

Bináris FSK moduláció

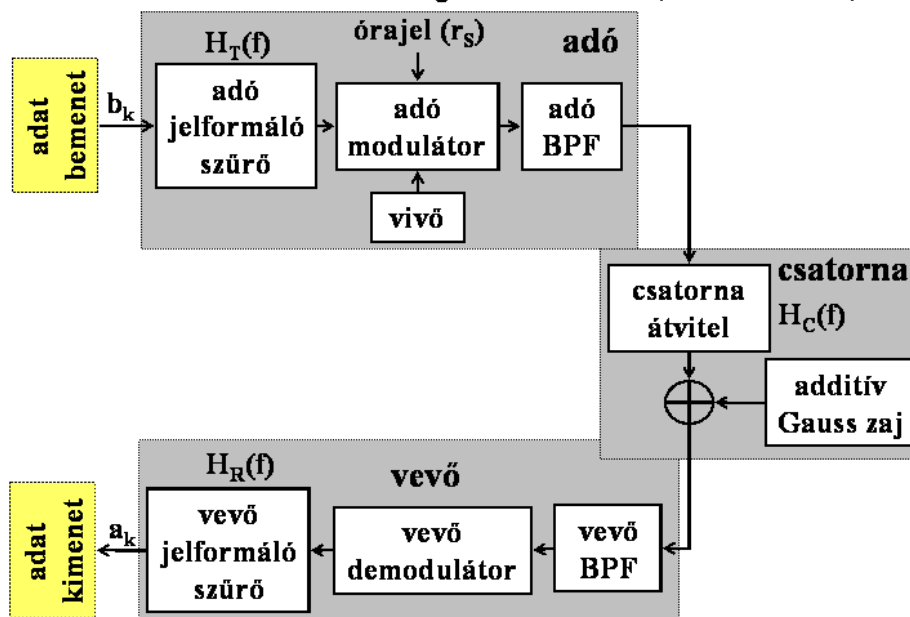
- FSK esetén az információt a vivőfrekvencia értéke hordozza
- A bináris értékeknek megfelelő két hullámforma:

$$s_1(t) = A \cos(\omega_c - \omega_d)t \quad \text{és} \quad s_2(t) = A \cos(\omega_c + \omega_d)t$$
- Legfontosabb előnye a vevő/adó oldali egyszerű implementáció
- Az FSK jelet a jelzési frekvencia demodulálásával lehet demodulálni, nincs szükség szinkronra
- Ugyanakkor hatékonysága adóteljesítményben és sávszélesség kihasználásban nem olyan jó, mint a PSK-é
- Főleg kisebbességű adatátviteli rendszerekben alkalmazzák, ha alkalmazzák

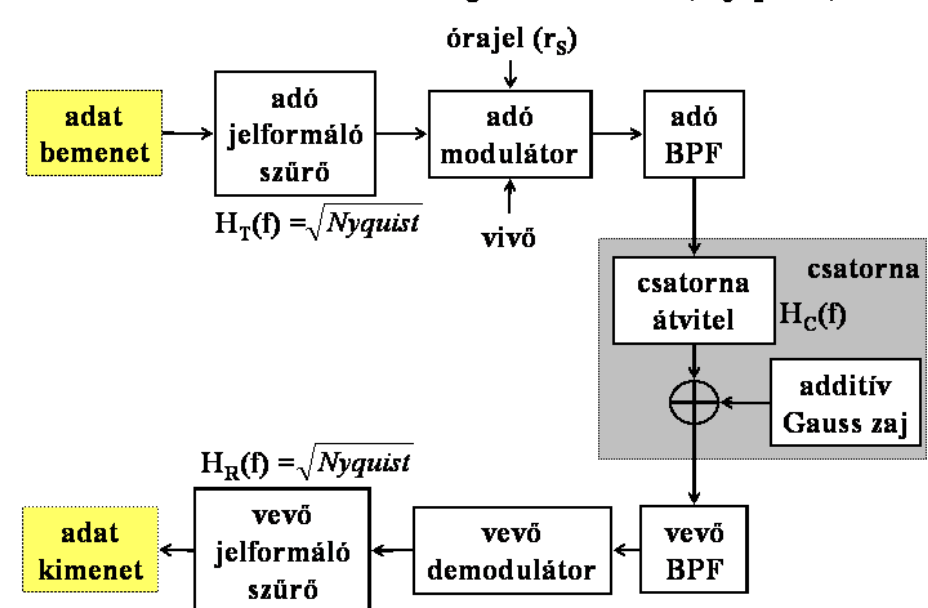
Bináris szinuszos vivőjű rendszer felépítése (eredeti)



Bináris szinuszos vivőjű rendszer (módosított)



Bináris szinuszos vivőjű rendszer (Nyquist)



Sokszintű digitális modulációs rendszerek

- A PAM jel alapsávi sávszélességét azáltal lehet csökkenteni, ha nem csak kettő, hanem több szintet is megengedünk
- E koncepció eredményezi a sokszintű digitális jelzési módokat
- E rendszerekben az M lehetséges elemi jel $[s_1(t), \dots, s_M(t)]$ közül egyiket továbbítjuk a T_s szimbólum jelzési időben
- E jelek modulálják a vivő amplitúdóját, frekvenciáját, vagy fázisát M diszkrét lépcsőben
- Így beszélhetünk M-szintű ASK, **PSK**, FSK, **QAM** módokról
- Akkor folyamodunk az M-szintű digitális átviteli módokhoz, ha a célunk a sávszélesség megtakarítása, vagy hatékonyabb kihasználása (ennek árra a nagyobb jelteljesítmény igény)

M-szintű PSK

- M-szintű PSK-ban a vivő fázisa a lehetséges M fázis érték (ϕ_k) közül bármelyiket felveheti: $\phi_k = k(2\pi/M)$, $(k=0, 1, 2, \dots, M-1)$
- Az adó jelzési intervallumban továbbított jele az alábbi:

$$s_k(t) = A \cdot \cos\left(\omega_c t + k \frac{2\pi}{M}\right) \quad \text{ha } t \text{ } 0 - T_s \text{ közötti}$$
- Legyen a továbbítandó bináris adatsebesség r_b , tételezzük fel, hogy a PSK sávszélesség igénye: $2r_b$
- Ha a bit-sorozatot **l** bitből álló blokkokba csoportosítjuk és az átvitelre M-szintű PSK-t használunk, ahol $M=2^l$ és $r_s = r_b/l$, akkor a szükséges átviteli sávszélesség kb. $2r_s = 2r_b/l$
- A bináris PSK-hoz képest a sávszélesség l-ed részére csökken

M-szintű PSK

- Nagy jelentősége van annak az esetnek, amikor $M=4$, vagyis amikor a vivő 4 diszkrét fázishelyezettel rendelkezhet
- Ezek például a következők lehetnek:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A \cos \omega_c t \\ s_2(t) &= -A \sin \omega_c t \\ s_3(t) &= -A \cos \omega_c t \\ s_4(t) &= A \sin \omega_c t \end{aligned} \right\} \leftarrow 0 \leq t \leq T_s$$

- E hullámformák megfelelnek a 0° , 90° , 180° , és 270° fázisnak
- A merőlegesség következtében ezt a fázisbillyentyűzési módot QPSK-nak nevezzük (QPSK = quadrature phase-shift keying)

M-szintű moduláció általános előállítás

- Mint tudjuk egy szinuszos vivő a következő alakban írható fel:

$$s(t) = a(t) \cos\{\omega_c t + \varphi(t)\}$$

- ahol $a(t)$ az amplitúdót, $\varphi(t)$ pedig a fázist jelöli
- Átalakítások után:

$$s(t) = a(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_c t - a(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_c t$$

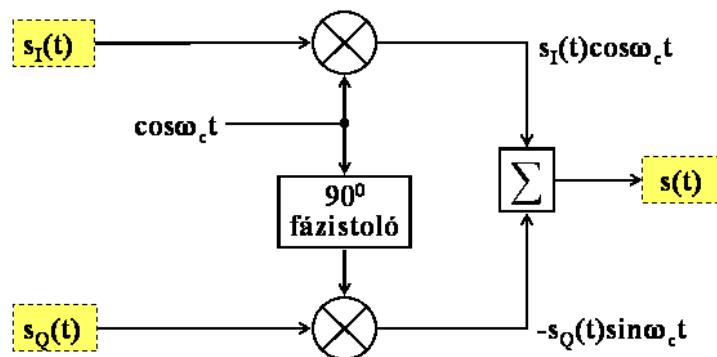
- Vezessük be: $s_I(t) = a(t) \cos \varphi(t)$ és $s_Q(t) = a(t) \sin \varphi(t)$
- $s_I(t)$ a jel fázisban lévő (in phase) komponense, $s_Q(t)$ pedig a kvadratúrában lévő komponense
- Ezzel az ún. kvadratúra alak: $s(t) = s_I(t) \cos \omega_c t - s_Q(t) \sin \omega_c t$

Elvi előállítás (Nyquist nélkül)

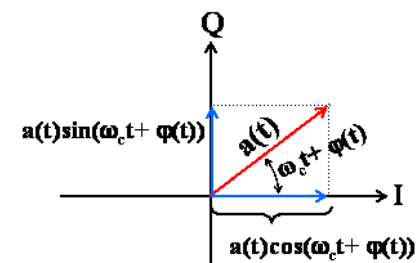
- Definíció szerint:

$$a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} \quad \varphi(t) = \arctg \frac{s_Q(t)}{s_I(t)}$$

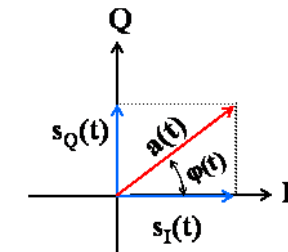
- Maga az $s(t)$ jel pedig egy $a(t)$ szerint változó hosszúságú, $\varphi(t)$ szerint változó szögű, ω_c körfrekvenciával forgó vektor



Vektor ábrák

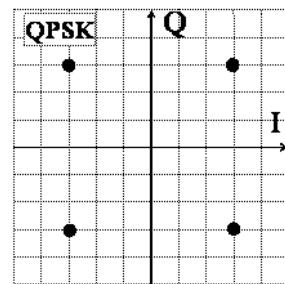
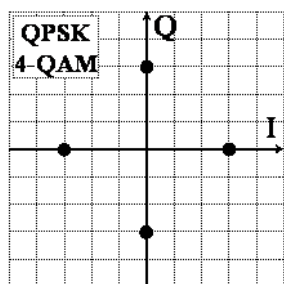
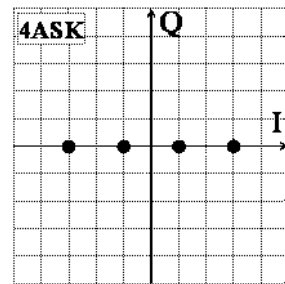
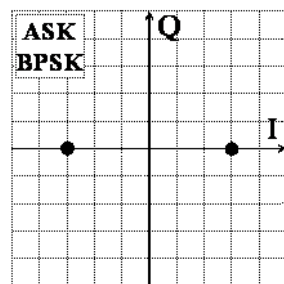


ω_c szögsebességgel forgó sík

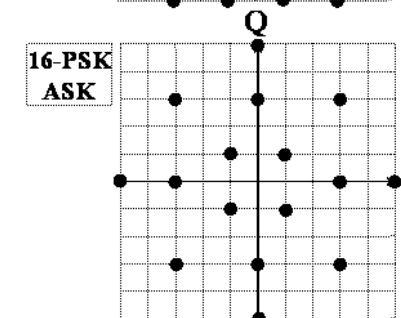
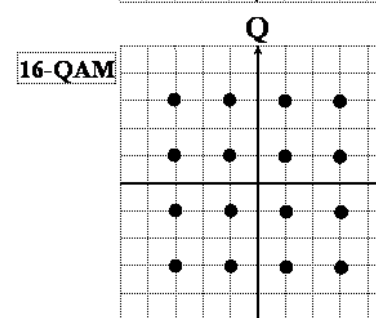
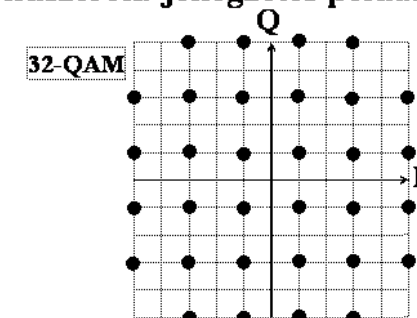
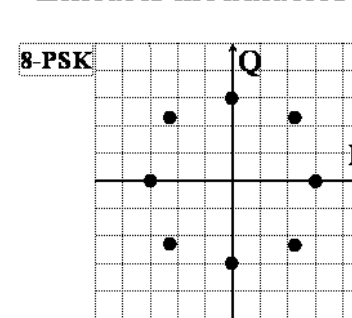


0 szögsebességgel forgó sík

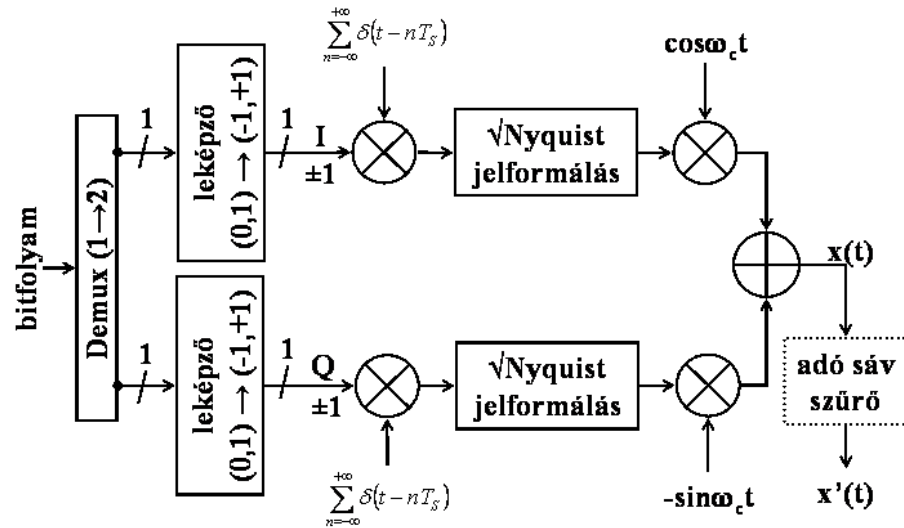
Lineáris modulációs rendszerek: jellegzetes példák



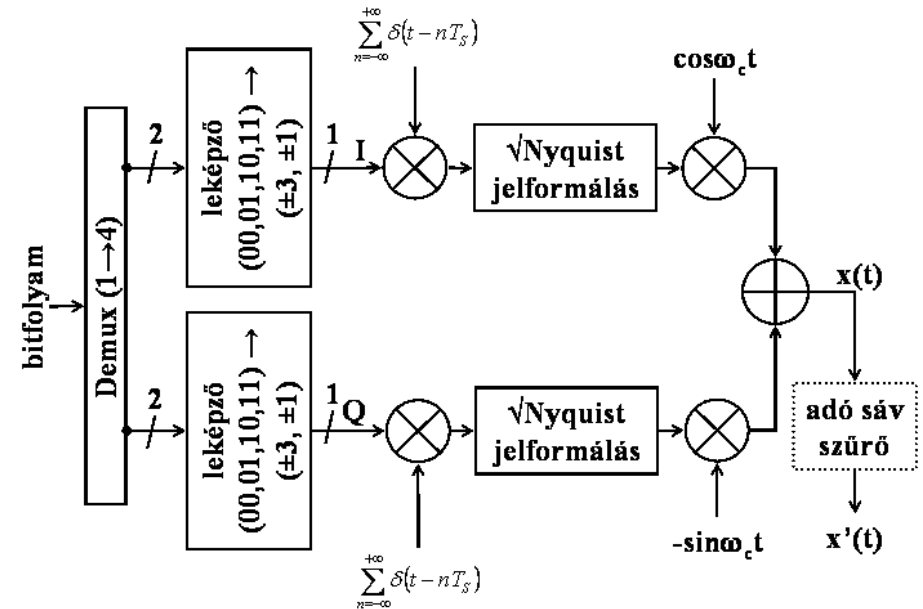
Lineáris modulációs rendszerek: jellegzetes példák



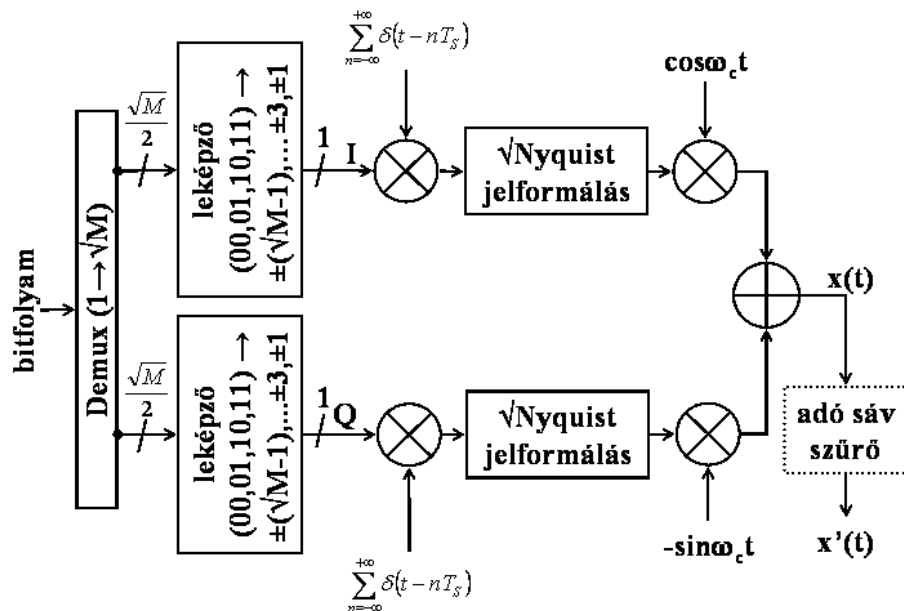
Digitális moduláció előállítása (QPSK, 4-QAM)



Digitális moduláció előállítása (16-QAM)



Digitális moduláció előállítása (M-QAM)



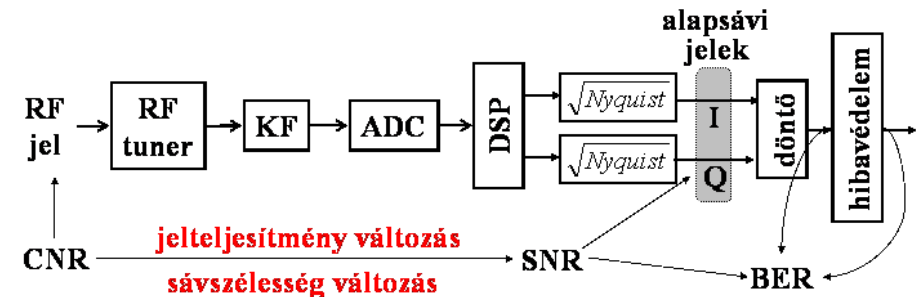
**Digitális moduláció
legfontosabb paraméterei**

Digitális moduláció paraméterei

- Digitális modulációt alkalmazó rendszer alapparaméterei:
 - **Bit-hibaarány** (BER: Bit Error Rate)
 - RF szinten **vívő-zajviszony** (CNR: Carrier to Noise Ratio)
 - Alapsávban: **jel-zajviszony** (SNR: Signal To Noise Ratio)
 - **Bitenergia/zajtelsítmény sűrűség** (E_b/N_0)
- CNR: a modulált RF vívő teljesítmény és a modulált jel sávjába eső zaj teljesítmény hányadosa
- SNR: az alapsávi jel teljesítmény és az alapsávi jel sávjába eső zaj teljesítmény hányadosa

Digitális moduláció paraméterei

- A digitális modulációs átviteli rendszerek az alkalmazott álvéletlen generátoros keverés miatt, elnyomott vívőjű modulációk, ezért a vívőtelsítmény megnevezés nem pontos
- Elérhető interfészen csak a CNR-t lehet mérni
- Az SNR-t csak berendezésen belül lehet mérni (számítani)



Digitális moduláció paraméterei

- Mindezek mellett gyakran alkalmazzuk az egy szimbólum (E_s), vagy az egy bit (E_b) által hordozott teljesítménynek és az 1 Hz sávszélességre jutó zajteljesítménynek (N_0) a hányadosát (E_s/N_0 és E_b/N_0), mivel jó összehasonlítási alap
- Itt N_0 a kérdéses frekvencia sávokban lévő fehérzaj spektrális teljesítmény sűrűségfüggvényének konstans értéke
- Általában igaz a következő: $E_s/N_0 = (E_b \cdot k)/N_0$, ahol k az egy szimbólum által hordozott bitek száma és $M=2^k$
- Az SNR és az E_s/N_0 között a kapcsolat a sávszélesség és a szimbólum sebesség ismeretében számítható
- Jelöljük a sávszélességet f_B -vel, a szimbólum sebességet r_s -sel

- Akkor az SNR fehérzajra a következőképpen számítható:

$$SNR = \frac{\text{jeltelsítmény}}{\text{zajtelsítmény}} = \frac{E_s \cdot r_s}{N_0 \cdot f_B}$$

- Ha a bitenergia E_b , akkor az SNR:

$$SNR = \frac{E_s \cdot r_s}{N_0 \cdot f_B} = \frac{E_b \cdot k \cdot r_s}{N_0 \cdot f_B}$$

$(k \cdot r_s)/f_B$ [(bit/s)/Hz] az ún. frekvencia-hasznosítási tényező, ahol r_s/f_B elvileg (Nyquist) maximálisan egy

- Az egyes fontosabb digitális modulációs eljárások maximális frekvencia hasznosítási tényezői a következőképpen alakulnak:

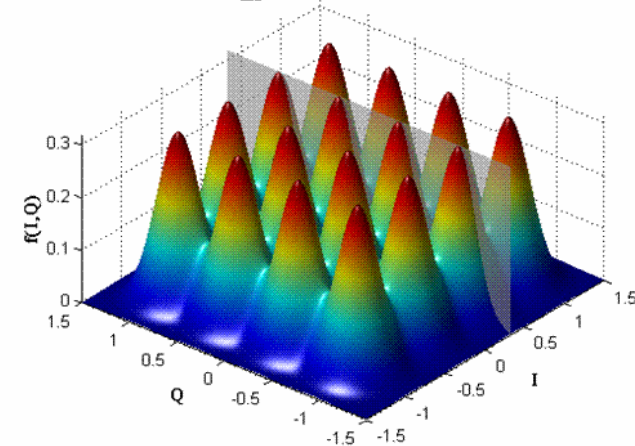
Moduláció típusa	Frekvencia hasznosítás	
QPSK	2	$SNR=2(E_b/N_0)$
16-QAM	4	$SNR=4(E_b/N_0)$
64-QAM	6	$SNR=6(E_b/N_0)$
256-QAM	8	$SNR=8(E_b/N_0)$

A BER és az SNR kapcsolata általában

- A BER a digitális rendszerek egyik legfontosabb paramétere
- A moduláció és demoduláció gyakorlati megvalósításának minősítésére a mért eredményeket összehasonlítjuk az elvi határértékekkel (Bit Error Probability: BEP és Symbol Error Probability: SEP)
- A BEP/SEP-et a következő feltételekkel határozzuk meg:
 - egyedüli zavar a Gauss zaj
 - a csatornának nincs lineáris és nem-lineáris torzítása
 - a modulátor/demodulátor tökéletes, pl. nincs időzítési hiba
- E feltételekkel felső becslés adható a BEP/**SEP**-re
- A számításokban az SNR-t, és az E_b/N_0 -t is használjuk

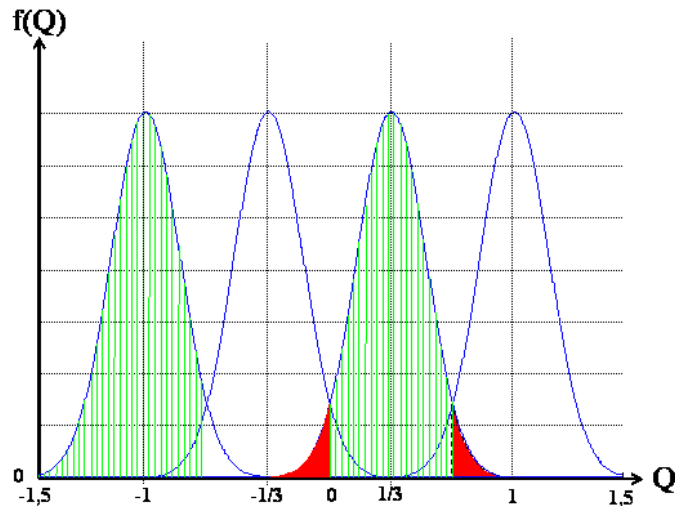
M-QAM hibavalószínűsége

- 6 dB E_b/N_0 zajjal terhelt, 16-QAM jel megfigyelésének feltételes valószínűségi sűrűségfüggvényét mutatja az ábra
- Az ábrán feltüntettük egy döntési síkot is

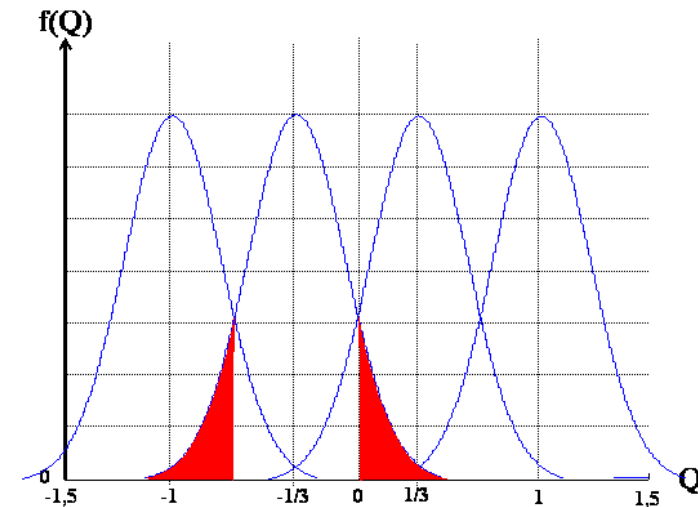


M-QAM hibavalószínűsége

- E sík és a megfigyelés feltételes valószínűségi sűrűségfüggvényének metszetét tartalmazza a következő ábra



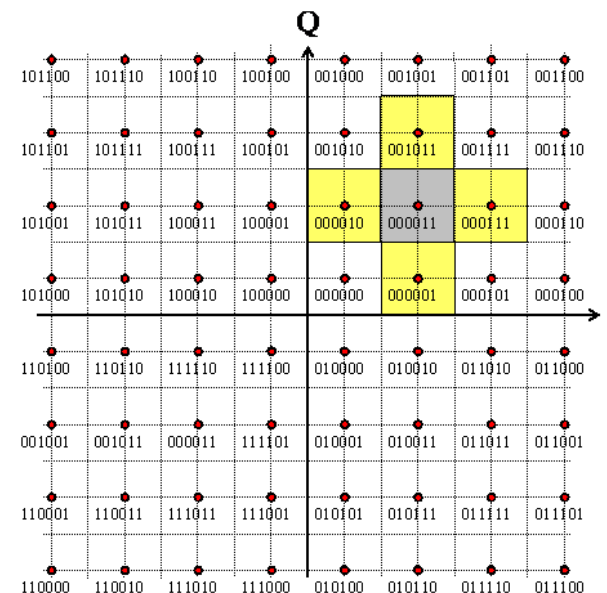
M-QAM hibavalószínűsége



M-QAM jel dekódolásának hibavalószínűsége 1

- Ha QAM jelet dekódolunk, miközben a jelhez csak additív fehér Gauss zaj (Additive White Gaussian Noise: AWGN) adódik hozzá, matematikai apparátussal meg lehet határozni egy szimbólum vételekor egy szomszédos szimbólumra történő hibás döntés valószínűségét
- Egy M-QAM jel dekódolásakor, ha a szimbólum döntés a négyzetes döntési határokon alapul és egy szimbólum által hordozott bitek száma páros, akkor a szimbólum hibavalószínűség (SEP) P_s a következő összefüggéssel adható meg:

$$P_s\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \cdot \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2(M)}{2 \cdot (M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right) \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \cdot \text{erfc}\left[\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2 M}{2 \cdot (M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right]\right\}$$



Konstellációs diagram
64-QAM-re

M-QAM jel dekódolásának hibavalószínűsége 3

- A hibavalószínűség előző összefüggésében a kapcsos zárójelen belüli tag minimális hozzájárulása
- Ezért a fenti összefüggés nagyon kis hiba mellett jelentősen egyszerűsíthető:

$$P_s\left(\frac{E_b}{N_0}\right) \cong 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \cdot \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2(M)}{2 \cdot (M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Ezzel az egyszerűsítéssel bevitt hiba az E_b/N_0 csökkenésével növekszik, de pl. 64-QAM esetében ez kisebb, mint 0,1 dB, ha az E_b/N_0 nem kisebb, mint 10 dB

M-QAM jel dekódolásának hibavalószínűsége 4

- Ha az egy szimbólum által hordozott bitek száma páratlan, akkor a szimbólum-hibavalószínűsége a következő összefüggéssel adható felső becslés:

$$P_s\left(\frac{E_b}{N_0}\right) \leq 1 - \left[1 - \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2(M)}{2 \cdot (M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right)\right]^2$$

- A bithiba-valószínűség viszonylag egyszerűen meghatározható, hiszen az közvetlenül függ a SEP-től
- A pontos összefüggés attól függ, hogy mi a kapcsolat a szimbólumhiba és az általa okozott bithibák száma között
- Ez természetesen a leképzési diagram struktúrájától és egyéb kódolási elemektől függ
- Az irodalomban két egymástól eltérő módszer terjedt el ennek becslésére

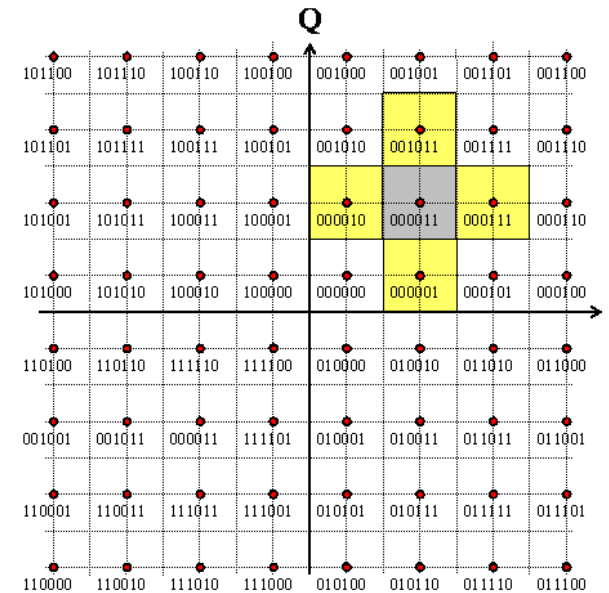
M-QAM jel dekódolásának hibavalószínűsége 5

- Az első semmit sem tételez fel a leképzési diagramról és azon alapul, hogy bármely egyedi bit hibás lehet, ha a „k” bites szimbólumban hiba van
- A bit- és a szimbólumhiba-valószínűségek közötti kapcsolat:

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \cdot P_s$$

- A második módszer feltételezi, hogy egy szimbólumhiba egy bithibát eredményez
- Maga a feltételezés akkor igaz, ha a leképzési diagram Gray kódolású és a BER nem túl nagy
- Ekkor a bithiba és a szimbólumhiba-valószínűségek között:

$$P_b = \frac{1}{k} \cdot P_s$$



Konstellációs diagram
64-QAM-re

M-QAM jel dekódolásának hibavalószínűsége 6

- A két módszer eltérő eredmény ad, ha a szimbólum által hordozott bitek száma kettő vagy annál több
- Mivel a DVB Gray leképzési diagramot alkalmaz ezért a második feltételezéssel számolunk a szimbólum- és bithiba-valószínűségek között
- Itt kell megjegyezni, hogy a QAM modulációk esetén a síknegyed határokon a leképzés nem mindig Gray kódolású, ezért a fenti szimbólum- és bithiba-valószínűségek közötti feltételezés nem pontosan igaz

Hibavalószínűség QPSK-ra

- A QPSK-t felfoghatjuk, mint 4-QAM-et, ahol M=4 és k=2
- Ha a többszörös hibák előfordulásából származó tagokat elhanyagoljuk, akkor a szimbólumhiba-valószínűség:

$$P_s \left(\frac{E_b}{N_0} \right) \cong 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \cdot \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2(M)}{2 \cdot (M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right) \longrightarrow P_s \left(\frac{E_b}{N_0} \right) = \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

- A bithiba- és a szimbólumhiba-valószínűségek között fenn áll a következő összefüggés: $P_b = P_s / k$

- Ekkor:

$$P_b = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{E_b / N_0} \right)$$

- Az SNR és az E_b / N_0 közötti kapcsolat: $\text{SNR} = (E_b / N_0) \cdot k$

$$P_b = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{\text{SNR}}{2}} \right)$$

Hibavalószínűség 16-QAM-re

$$P_b = \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{SNR}}{10}} \right) = \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2}{5} E_b / N_0} \right)$$

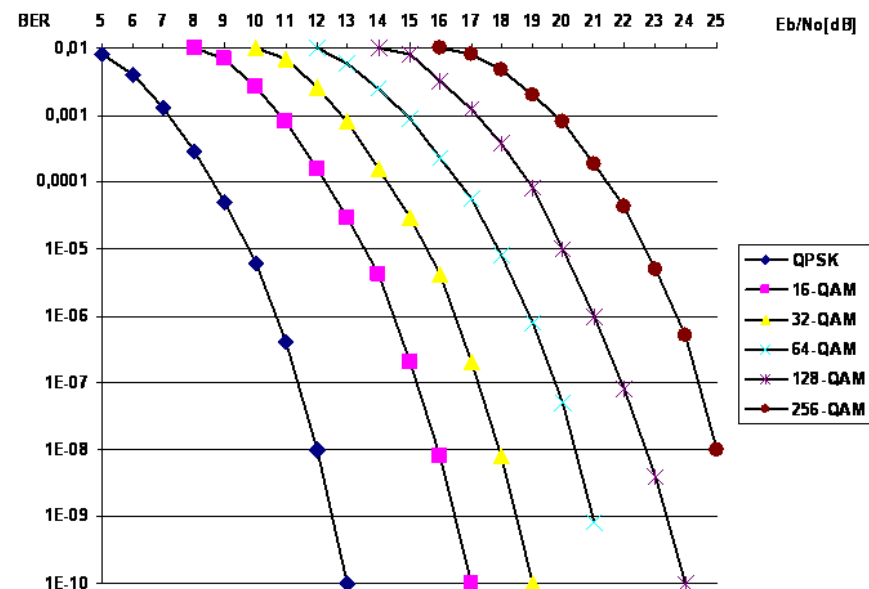
Hibavalószínűség 64-QAM-re

$$P_b = \frac{7}{24} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{SNR}}{42}} \right) = \frac{7}{24} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{7} E_b / N_0} \right)$$

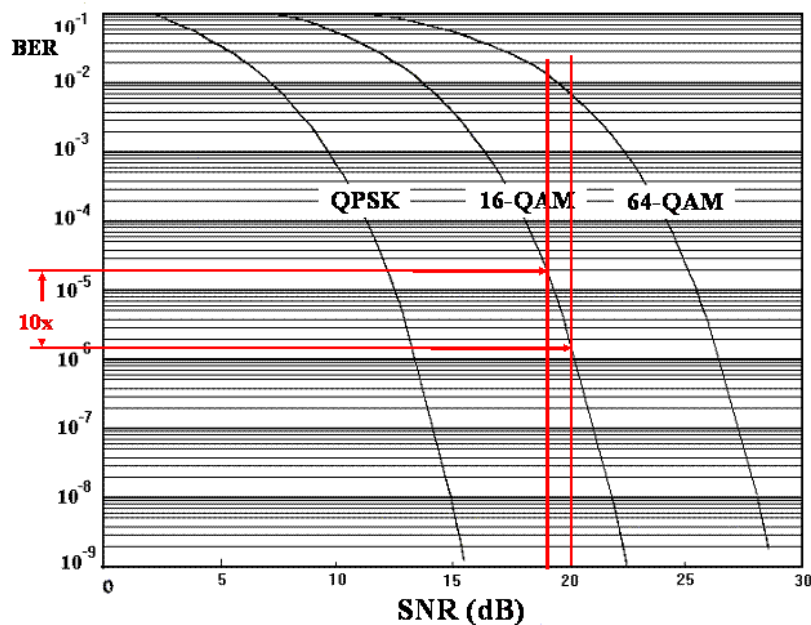
Hibavalószínűség 256-QAM-re

$$P_b = \frac{15}{64} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{SNR}}{170}} \right) = \frac{15}{64} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{4}{85} E_b / N_0} \right)$$

Az E_b/N_0 és a BER kapcsolata



SNR-BER kapcsolat sajátossága



BER mérési idő megfontolások

- A BER véletlen valószínűségi változó, hiszen a zajtól függ, ami maga is valószínűségi változó
- A BER-t egy adott időintervallum alatt bekövetkező hibák és az összes bit számából számíthatjuk ki
- Ez a **mért** BER akkor rendelkezik jó statisztikus tulajdonságokkal, ha a mérési időintervallumban regisztrált hibás események száma (m) sokkal nagyobb mint 1
- Egy adott BER esetén a hibák átlagos számát (m) a következő összefüggésből határozhatjuk meg:

$$m = \text{BER} \times \text{bitsebesség} \times T_0$$

- ahol T_0 a mérési időintervallum

BER mérési idő megfontolások

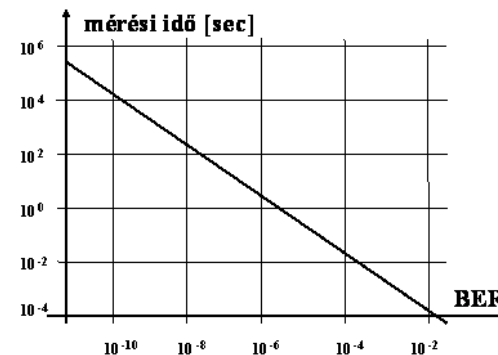
- Ha egy adott mérési idő és bitsebesség esetében a várható BER mellett a hibák száma (m) alacsony, akkor a megfelelő mérési pontosság eléréséhez növelni kell a mérési időt
- A BER szórása a mért hibaszámból a következő közelítő összefüggéssel számítható:

$$\Delta BER \approx \frac{1}{\sqrt{m}}$$

- Ha pl. a bitsebesség 50 Mbit/s, a várható BER 10^{-6} körüli, és azt szeretnénk, hogy a mérés szórása ne legyen több 10%-nál, akkor a mérési időintervallumban kb. 100 hibát kell detektálni, ami minimálisan 2 másodperc mérési időt igényel

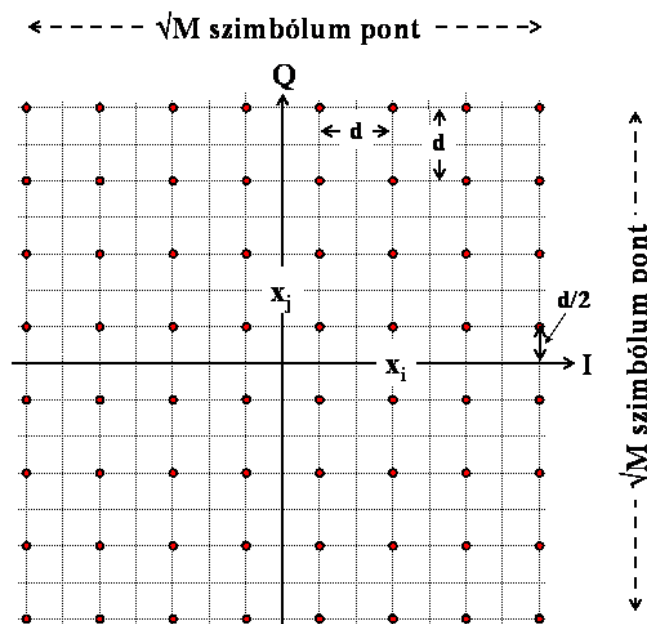
BER mérési idő megfontolások

- A 10%-nál kisebb szórású mérések biztosításához szükséges időintervallum és a mért BER összefüggését a következő ábra tartalmazza ($v=50$ Mbit/s)



- Pl. 10^{-10} -es BER-t mérni, 10%-nál kisebb szórás követelmény mellett 6,5 óránál rövidebb idő alatt nem lehet

M-QAM átlag teljesítmény számítás



M(64)-QAM
átlagos szimbólum energia

M-QAM átlagos szimbólum energia

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{i,j=1}^{\sqrt{M}} (x_i^2 + x_j^2) = \frac{1}{M} \left[\sqrt{M} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}} x_i^2 + \sqrt{M} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}} x_j^2 \right]$$

$$E_s = \frac{2}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}} x_i^2 = \frac{4}{\sqrt{M}} \cdot \sum_{k=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} \left(\frac{2k-1}{2} d \right)^2$$

$$E_s = \frac{d^2}{\sqrt{M}} \cdot \sum_{k=1}^{\frac{\sqrt{M}}{2}} (4k^2 - 4k + 1) = d^2 \left\{ \frac{M-1}{6} \right\}$$

- ahol d a konstellációs pontok távolsága

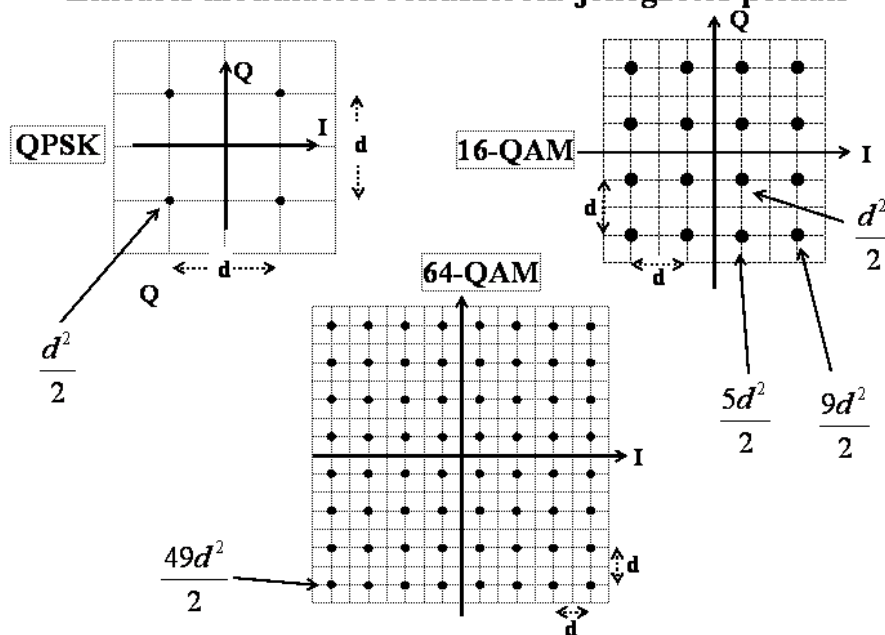
M-QAM átlagos szimbólum energia

$$E_s = d^2 \left\{ \frac{M-1}{6} \right\}$$

- ahol d a konstellációs pontok távolsága

Moduláció	$E_s = d^2(M-1)/6$	$P_{\max}$	E_s
QPSK	$d^2/2$	$d^2/2$	$P_{\max}$
16-QAM	$5d^2/2$	$9d^2/2$	$(5/9)P_{\max}$
64-QAM	$21d^2/2$	$49d^2/2$	$(3/7)P_{\max}$
256-QAM	$85d^2/2$	$255d^2/2$	$(1/3)P_{\max}$

Lineáris modulációs rendszerek: jellegzetes példák



OFDM

Orthogonal Frequency Division Multiplex

OFDM történelem

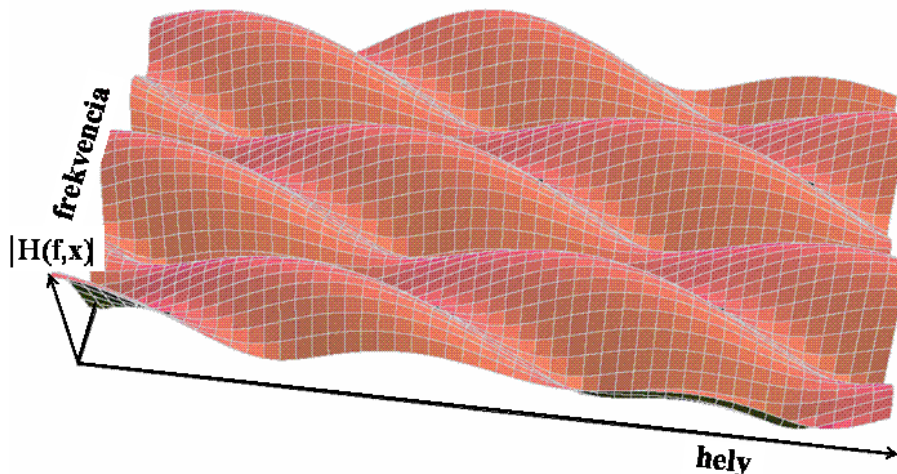
- 1966: Chang, Bell Labs OFDM szabadalom
- 1971: Weinstein és Ebert FFT és védő intervallum javaslat
- 1985: Cimini az OFDM-t javasolja mobilra
- 1987: Alard és Lasalle javasolja digitális műsorszórásra
- 1988: első digitális OFDM televíziós link, Párizs
- 1989: OFDM nemzetközi szabadalom Thomson-CSF
- 1990: első OFDM teszt 34 Mbit/s, 8 MHz sávszélesség, Párizs
- 1992: második generációs teszt 70 Mbit/s, 8 MHz sávszélesség
- 1993: Thomson 4 SDTV/1 HDTV rendszere (8 MHz)
- 1993: Morris, teszt a 150Mbit/s OFDM RF LAN-ra
- 1995: ETSI első OFDM alapú szabvány (DAB)

OFDM történelem

- 1997: ETSI OFDM alapú DVB-T szabvány elfogadása
- 1998: RF LAN OFDM működő képes
- 1999: IEEE 802.11a RF LAN szabvány (Wi-Fi)
- 2002: IEEE 802.11g RF LAN szabvány
- 2004: IEEE 802.16 RF MAN szabvány (WiMAX)
- 2004: ETSI DVB-H szabvány
- 2004: jelölt az IEEE 802.15.3a-re (MB-OFDM)
- 2004: jelölt a IEEE 802.11n-re (next generation wireless LAN)
- 2005: jelölt a 3.75G-re (High Speed OFDM Packet Access)
- 2005: jelölt a 4G-re

OFDM motiváció

- A többutas hullámterjedés következménye frekvencia- és helyfüggő elhalkulás (fading)



OFDM motiváció

- Fölfelületi adások esetében keskeny-, és szélessávú szinuszos és impulzusjellegű zavarok is ronthatják a vételt
- A helyszíni terep, a zavar jellege és a vétel típusa, továbbá a mozgás is befolyásolja a minőséget
- Ezért a földfelszíni rendszerek megvalósítása komoly kihívás
- A sokvívös átvitel alap gondolata a Bell Laboratóriumban és Franciaországban merült föl, de a megvalósításhoz szükséges jelfeldolgozási sebesség még csak álom
- Két évtizeddel később, az 1990-es években vált valóra az elképzelés, amelyet először a DAB rendszerben alkalmaztak
- E sokvívös rendszerek a legbonyolultabb modulációs eljárások közé tartoznak

Miért sokvivős moduláció?

- Válasz: a földfelszíni átviteli közeg igen rossz
- A földfelszíni RF átvitelt az alábbiak jellemzik:
 - reflexiók, többutas vétel, hely és frekvencia függő fading
 - komoly zajterhelés
 - elektromos berendezések: keskeny- és szélessávú zavarok
 - mozgó vétel esetén Doppler-hatás
- Ha az információt egyetlen vivőn továbbítanánk, és ha a vivő frekvencián kioltás alakulna ki, az teljes adatvesztést eredményezhetne
- A jelenség mértéke a vivő frekvenciától, a visszaverődés nagyságától és annak késleltetési idejétől függ

Miért sokvivős moduláció?

- Digitális átvitel elvileg minimális sávszélesség igénye a szimbólumsebesség
- A csatorna sávszélesség általában kötött
- Ezért az egyvivős modulációk szimbólumsebességet a csatorna sávszélessége alapvetően meghatározza
- Az egy vivős rendszerekben a nagy adatsebesség igényhez nagy csatorna sávszélesség és szimbólum sebesség és rövid (μ s alatti) szimbólumidő tartozik
- Földfelszíni csatorna reflexiók késleltetése ennél sokkal nagyobb is lehet
- Ami biztosan szimbólumközi áthallást eredményez, nemcsak a szomszédos, de a „távolabb” lévő szimbólumok között is

Miért sokvivős moduláció?

- Ami meggyűlölt a hibamentes átvitelt
- Részleges megoldás e problémára, ha védelmi időt iktatunk be az egymás utáni szimbólumok közé
- Ez azonban rövid szimbólum idő mellett jelentős mértékben csökkenti az alkalmazható hasznos adatsebességet
- Miközben a hely- és frekvenciafüggő fading káros hatását csak a védelmi idő beiktatásával nem is lehet megszüntetni
- Ha azonban az információt nem egy, hanem sok, pl. több ezer vivő hordozza, a fading csak néhány vivő adatát hamisítja meg
- Az adóban a teljes hasznos továbbítandó adatra hibajavító kódot generálunk

Miért sokvivős moduláció?

- A vevőben a nem károsított vivők adataiból hiba dekódolással visszaállítjuk az eredeti adatokat
- Több ezer vivő alkalmazásával az egyedi vivők szimbólum sebessége a vivőszámnak megfelelően csökken az egyvivőshöz képest
- Tehát a szimbólumidő jelentősen nőhet, (pl. ezer vivő alkalmazásával az ezerszeresére), így az elérheti a ms-ot is
- A fadinggel szembeni védelem tehát növelhető a sok vivővel, míg a szimbólumközi áthallás csökkenthető a nagyobb szimbólumidő és a nagyobb védelmi idő alkalmazásával
- De mi lesz a sok vivő esetleges egymásra hatásával

Miért sokvivős moduláció?

- Másként fogalmazva a vevő oldalon az egyes vivők által hordozott adatokat hogyan tudjuk áthallás mentesen elválasztani
- E problémára megoldás az ortogonális vivő elrendezés
- De mi is az az ortogonális vivő elrendezés
- Ehhez tegyünk egy kis kitérőt

Jelábrázolás, ortogonalitás

Általában a jelábrázolásról

- Legyen $\{u_n(t)\}$ $n=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ valós értékű függvénykészlet
- $\{u_n(t)\}$ függvénykészlet egy T intervallumon ortogonális ha
$$\int_T u_m(t) \cdot u_n(t) dt = \begin{cases} c & \text{ha } n = m \\ 0 & \text{ha } n \neq m \end{cases}$$
- Ha még $c=1$, akkor a függvény készlet ortonormált
- Legyen $x(t)$ a T intervallumban valós, szakaszonként folytonos
- $x(t)$ -t állítsuk elő a sorával a következőképpen:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u_n(t)$$

- Itt a_n a sor n . együtthatója

Általában jelábrázolásról

- Az előző egyenletet szorozzuk meg az $u_m(t)$ -vel és integráljuk T intervallumra:

$$\int_T x(t) \cdot u_m(t) dt = \int_T \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u_n(t) \cdot u_m(t) dt$$

- Az ortogonalitás miatt: $\int_T u_n(t) \cdot u_m(t) dt = 0$, ha $n \neq m$

- ezért:
$$\int_T x(t) \cdot u_m(t) dt = \int_T a_m \cdot u_m^2(t) dt = a_m \cdot c$$

- És ezzel kapjuk:
$$a_m = \frac{1}{c} \int_T x(t) \cdot u_m(t) dt$$

Példa: Fourier sorfejtés

- A bázisfüggvény készlet legyen a következő:

$$\{u_n(t)\} = \{1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}$$

- Az $x(t)$ sorfejtése ennek megfelelően:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n\omega_0 t$$

- Itt ω_0 az alapharmonikus és $\omega_0 = 2\pi/T$

Példa: Fourier sorfejtés

- Mivel igazak a következő összefüggések:

$$\int_T \cos n\omega_0 t \cdot \cos m\omega_0 t \cdot dt = \begin{cases} T/2, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{ha } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_T \sin n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t \cdot dt = \begin{cases} T/2, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{ha } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_T \cos n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t \cdot dt = 0, \text{ minden } n \neq m - \text{re}$$

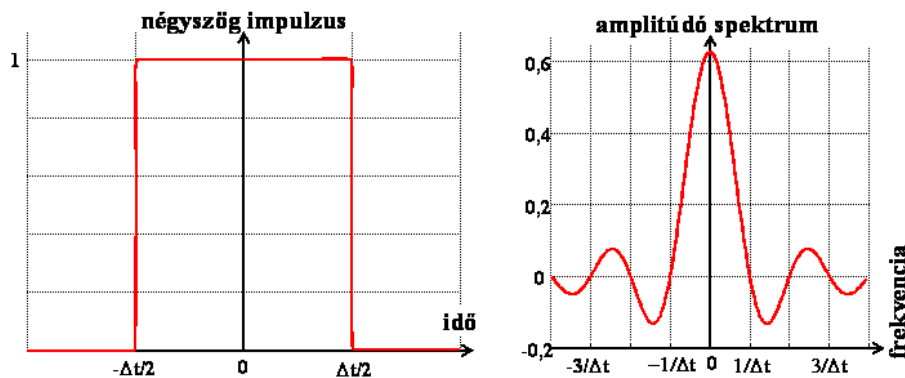
Ezért:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos n\omega_0 t \cdot dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin n\omega_0 t \cdot dt$$

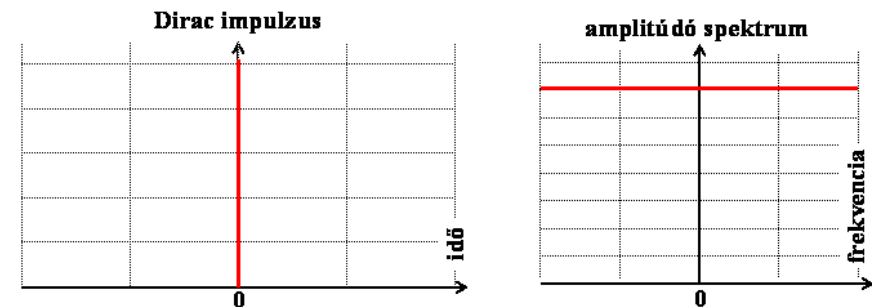
További ortogonalitási alapok

- Induljunk ki egyetlen négyszög impulzusból
- Δt hosszú impulzus spektruma $\sin(x)/x$, melynek zérus helyei $\Delta f = 1/\Delta t$ frekvencia távolság egészszámú többszörösére esnek
- Egyetlen impulzus spektruma folytonos



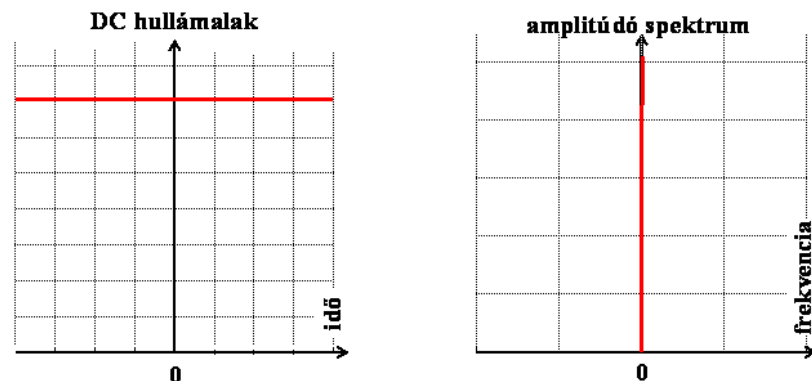
További ortogonalitási alapok

- Az impulzus hosszának változtatása módosítja a spektrum zérus helyeinek távolságát
- Ha az impulzusidő nullához tart, a spektrum első zérus helye a végtelenhez tart
- Szélső esetben a Dirac-impulzushoz jutunk, melynek amplitúdó menete konstans és végtelen kiterjedésű



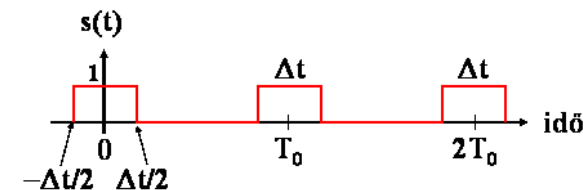
További ortogonalitási alapok

- Fordított esetben, amikor Δt tart a végtelenbe, a spektrum nullhelyei fognak nullához közelíteni, végül egyetlen vonalat eredményezve a 0 frekvencián (DC)



További ortogonalitási alapok

- Nézzünk meg egy periodikus négyszög jel időfüggvényét

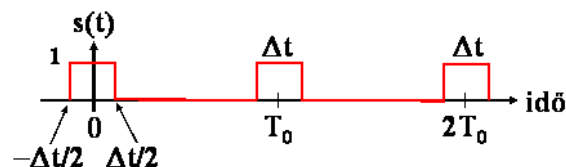


- Δt szélességű és T_0 ismétlődési idejű impulzussorozat spektruma $\sin(x)/x$ jellegű, nem folytonos, hanem $f_0 = 1/T_0$ távolságra elhelyezkedő spektrum vonalakból áll, melyek nagyságát a $\sin(x)/x$ burkoló határozza meg
- A burkoló zérushelyei az $1/\Delta t$ egészszámú többszörösére esnek
- Jelölje a kitöltési tényezőt r és $r = \Delta t/T_0$

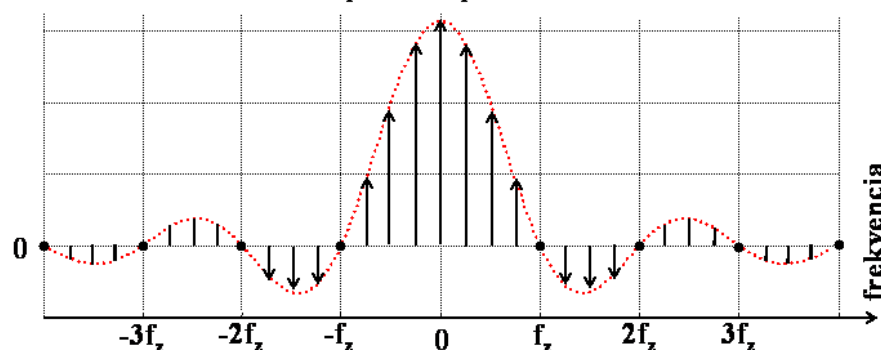
Egy példa

Legyen $r=1/4$

$$f_z = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{r \cdot T_0} = 4f_0$$



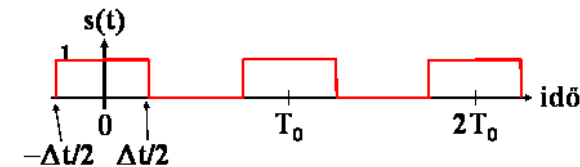
amplitúdó spektrum



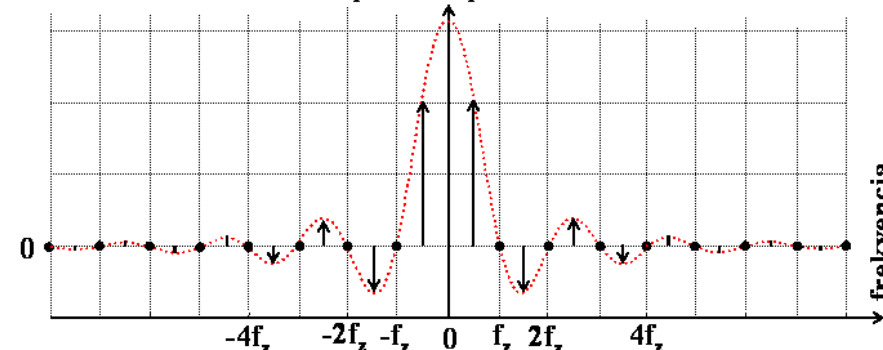
Egy másik példa

Legyen $r=1/2$

$$f_z = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{r \cdot T_0} = 2f_0$$



amplitúdó spektrum

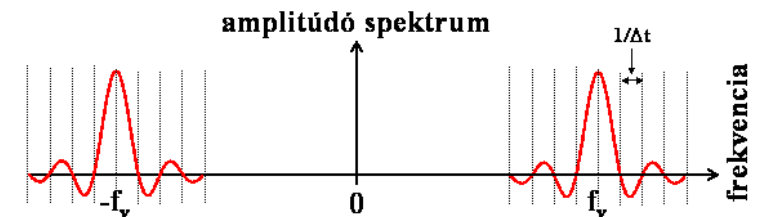


További ortogonalitási alapok

- Tisztázva a négyszög impulzus spektrumát, vizsgáljuk meg a szinuszos vivők spektrumát
- Egyetlen folytonos f_v frekvenciájú szinusz jel spektruma két spektrumvonalat tartalmaz, egyet $+f_v$ és egyet $-f_v$ frekvencián
- A digitális adat továbbításához e vivőket modulálni kell
- A moduláció során a moduláció típusától függően a vivő amplitúdóját és/vagy fázisát változtatjuk
- De egy szimbólum idő alatt a vivő jellemzői nem változnak
- Tehát egy-egy szimbólum idő alatt a modulált vivő nem más, mint a folyamatos szinusz és egy négyszög jel szorzata
- A szimbólum időn kívül a négyszög jel nulla

További ortogonalitási alapok

- Az időbeli szorzás a frekvenciában konvolúciót eredményez
- Ezért a keletkező jel spektruma nem más mint a szinuszos vivő két spektrumvonalára eltolt négyszög jel spektrum
- Tehát az $+f_v$ és $-f_v$ frekvenciák környezetében megjelenik a négyszögjel $\sin(x)/x$ alakú burkolójú, mely nullhelyeinek frekvencia távolságát az $1/\Delta t$ szimbólum idő határozza meg



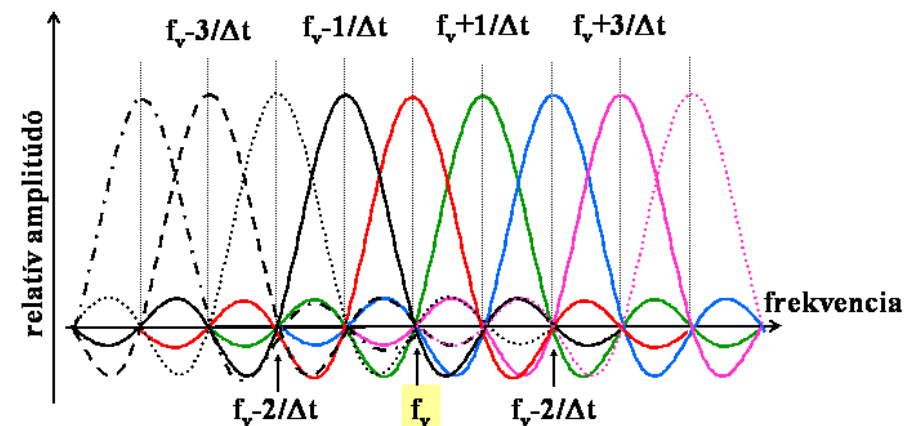
Ortogonalitási alapok

- Ha egyidejűleg több vivő van, akkor a különböző frekvenciájú szinusz csomagok spektrumai egymásra lapolódnak
- A vivők kölcsönös zavartatása akkor minimalizálható, ha valamennyi vivő spektrumcsúcsára a többi vivő spektrumának zérushelye esik
- Ez akkor teljesül, ha a szomszéd vivők frekvencia távolsága (Δf) megegyezik a négyszög ablakozó függvény idejének (Δt) reciprokával:

$$\Delta f = 1/\Delta t$$

- Az ilyen felépítésű több ezer modulált vivőt tartalmazó szinusz csomag az OFDM-szimbólum

Ortogonalitási alapok



Rövid DVB-T kitérő

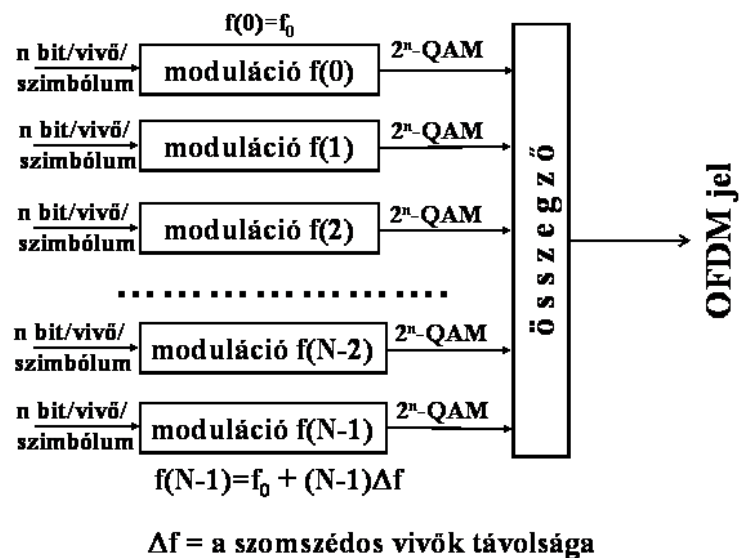
A DVB-T 2k és 8k adásmódjára a következő idő- és frekvencia paraméterek a jellemzők:

• Adásmód:	2k	8k
• Vivők száma:	2048	8192
• Vivő frekvencia távolság (kb.):	4 kHz	1 kHz
• Szimbólumidő (kb.):	250 μ s	1 ms

OFDM jel előállítása

- Az OFDM jel több ezer vivőjének mindegyike az adatfolyam csak nagyon kis részét továbbítja
- Mindegyik vivőhöz saját modulációs leképezés tartozik, a QPSK, a 16/64-QAM modulációnak megfelelően
- A vivők modulációja független egymástól
- Ezért az OFDM-modulátor úgy is elképzelhető, mint több ezer, saját modulációs leképezővel rendelkező, precízen beállított vivő frekvenciájú QPSK/QAM-modulátor
- Az egyes vivőkön a moduláció szinkronizált, így egyetlen Δt hosszúságú szimbólumot állítanak elő
- A leírtak azonban csak elvileg igazak, hiszen több ezer vivő esetében a megoldás implementálhatatlan

Az OFDM moduláció elvi előállítása



Kitérő

Fourier transzformáció
DFT, FFT

Frekvenciatartományi jelfelbontás folytonos jelre

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Periodikus jelre

Fourier sorfejtés

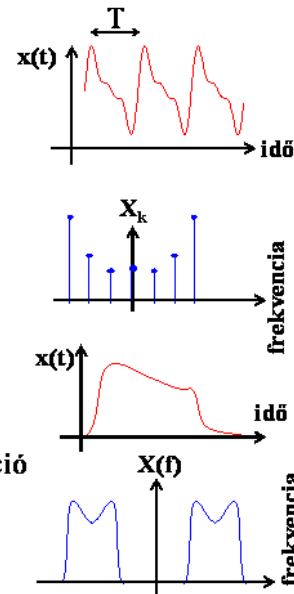
$$C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Aperiodikus jelre

Fourier transzformáció

$$X(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$



Fourier transzformáció

- Egy jel spektruma - bizonyos korlátok mellett - Fourier transzformációval határozható meg
- Fourier transzformáció összefüggése a következő:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

- A Fourier transzformált komplex, valós és képzetes része a frekvencia függvényében ábrázolható
- Tetszőleges frekvenciájú szinusz felírható ugyanolyan frekvenciájú szinuszos és koszinuszos összegeként

Fourier transzformáció

- Euler összefüggés szerint ugyanis:

$$e^{-j2\pi ft} = \cos 2\pi ft - j \cdot \sin 2\pi ft$$

- A valós rész a koszinuszos, a képzetes rész pedig a szinuszos összetevő
- A spektrum pozitív és negatív frekvenciákat is tartalmaz, de a negatív rész nem nyújt többletinformációt, hiszen:
- Valós rész szimmetrikus: $\text{Re}(-f) = \text{Re}(f)$
- Képzetes rész aszimmetrikus: $\text{Im}(-f) = -\text{Im}(f)$
- E tulajdonságokkal rendelkező komplex spektrum inverz Fourier transzformáltja időben valós jel

Fourier transzformáció

- A Fourier-transzformáció megfordítható, más szóval invertálható (Inverz Fourier-transzformáció: IFT), ami a következő alakú:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

- Fourier-transzformáció speciális esete periodikus jelekre a Fourier-sorfejtés
- Periodikus jel egyetlen periódusa elegendő a jel leírásához

DFT bevezetése

- A Fourier-transzformáció integrálási határai végtelenek
- A valós életben a jelet véges ideig vizsgálhatjuk és a jel analóg
- Így a spektrum számítástechnika által nem kezelhető
- Ezért a Fourier összefüggést konvertáljuk olyan formára, hogy azt a számítástechnika is tudja kezelni
- Ez lesz a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)
- A jel $T = NT_{mv}$ idő ablakából T_{mv} időnként N mintát veszünk
- $-\infty + \infty$ közötti integrálás helyett véges összeget számolunk
- Az eredmény csak diszkrét frekvencia pontokban ($n\Delta f$) ad jó spektrum értéket

DFT

- Ha a jel mintákat x_k -val jelöljük, akkor a DFT a következő:

$$X(n\Delta f) = X_n = T_{mv} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j2\pi(n\Delta f)(kT_{mv})}$$

- Míg az IDFT a következő:

$$x(kT_{mv}) = x_k = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-j2\pi(n\Delta f)(kT_{mv})}$$

- A frekvenciafelbontás (Δf) függ a jel időablakába eső minták számától (N) és a mintavételi frekvenciától (f_{mv})
- Ennek figyelembe vételével a DFT alapösszefüggései:

– Maximális frekvencia: $f_{max} = N \cdot \Delta f = \frac{1}{T_{mv}} = f_{mv}$

– Frekvencia felbontás: $\Delta f = \frac{f_{mv}}{N}$

DFT

- E jelölésekkel a DFT a következő: $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$
- Az IDFT összefüggése a következő: $x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$
- Ha x_k valós, akkor: $X_n = X_{N-n}^*$
ahol a csillag a konjugált komplexet jelöli
- Ez az összefüggés azt is jelenti, hogy az első $N/2$ érték teljesen meghatározza a spektrumot
- Tehát a maximális frekvencia tulajdonképpen az eredeti fele, ami a Nyquist frekvencia

DFT

- A spektrum DC-től a mintavételi frekvencia feléig terjed, onnan a mintavételi frekvenciáig aszimmetrikusan ismétlődik
- A DFT tulajdonképpen nem más, mint egy sávhatárolt jel megfigyelt időablakában végrehajtott Fourier-sorfejtés, ami feltételezi, hogy a jel időablakba eső része periodikusan ismétlődik
- Ez utóbbi bizonytalanságot eredményez
- Tehát a DFT az eredeti jel spektrumának csak a közelítését adja (szükséges az ablakozás, részletekre nem tudok kitérni!)

Gyors Fourier transzformáció (FFT)

- A DFT egyszerű, de számítás igényes algoritmus
- Ha a pontok számát kettő hatványaira választjuk ($N = 2^x$), akkor lényegesen gyorsabb algoritmus is használható
- Ezt hívjuk gyors Fourier-transzformációnak (Fast Fourier Transformation: FFT)
- Az FFT a DFT-vel egyező eredményt szolgáltat, de annál lényegesen gyorsabban
- Összehasonlításként: a szorzások száma a DFT esetében N^2 , míg FFT esetében $N \cdot \log_2 N$
- 1988-ban 256 pontos FFT PC-n néhány percet vett igénybe
- Ma 8192 pontos FFT végrehajtása kevesebb, mint $1 \mu s$ tart
- Az FFT invertáltja az IFFT

A FFT (DFT) és az IFFT (IDFT) megvalósítása

- FFT/IFFT a komplex számsíkon működik
- Mind a frekvencia-, mind pedig az időtartománybeli jel rendelkezhet valós és képzetes résszel
- FFT/IFFT végrehajtásához két bemenő mintasorozat kell
- FFT esetén az időtartománybeli jel N mintája mindig valós, a képzetes mintasorozat csak nullákat tartalmaz
- IFFT esetén, ha a frekvenciatartományban a mintavételi frekvencia felére a valós rész szimmetrikus, a képzetes rész aszimmetrikus az időtartománybeli jel képzetes része nulla
- Ha e szimmetriák nem teljesülnek, akkor a kimenet komplex jel lesz, azaz az időtartományban lesz képzetes összetevő is

OFDM jel előállítása

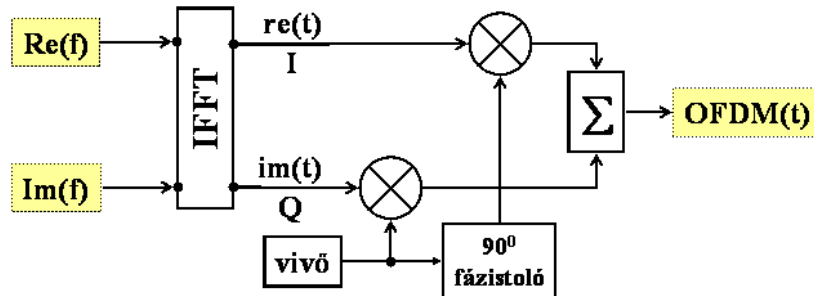
- A gyakorlatban az OFDM szimbólumokat IFFT-vel lehet előállítani
- Az IFFT implementáció általában valamilyen DSP chip
- Röviden összefoglalva az OFDM szimbólum előállítása a következő 3 kezdő lépésből áll:
 - az adatfolyam szekvenciálisan egymás melletti bitjeit átvéletlen módon szétszórjuk **(frekvencia átszövés)**
 - a nagysebességű adatfolyamot a hasznos vivő számnak megfelelő számú kis sebességű adatfolyamra bontjuk
 - a kis sebességű adatfolyamokat egyenként leképezzük a konstellációnak megfelelő valós és képzetes értékekre

OFDM jel előállítása

- A folyamat eredménye a hasznos vivőszámmal megegyező számú adatot tartalmazó két olyan tábla, melyek külön-külön a konstellációs diagramnak megfelelő valós és képzetes részeket tartalmazzák
- Ami tulajdonképpen az időbeli OFDM szimbólum frekvencia tartománybeli megfelelője
- E két tábla adja az IFFT bemenő adatát
- Az IFFT a szimbólum időbeli jelalakjának valós (koszinusz) és képzetes (szinusz) komponensét állítja elő
- Ezt követi a valós és képzetes részek koszinuszos és szinuszos összetevők szerinti szorzása a vivővel

OFDM jel előállítás

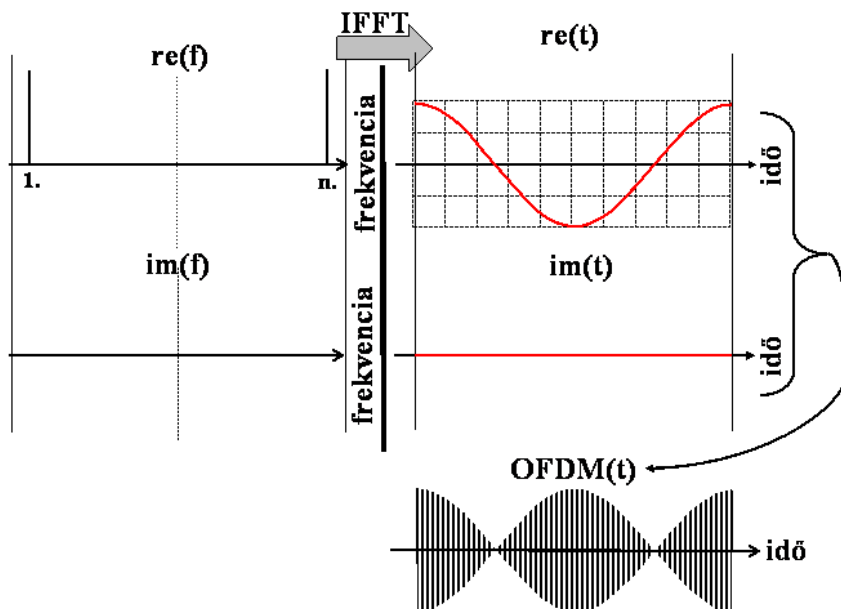
- Tehát az OFDM modulátor IFFT-ből és az azt követő komplex keverőből (I/Q-modulátor) álló
- Az IFFT időbeli eredménye az IFFT $re(t)$ és $im(t)$ kimenetén jelenik meg
- A teljes modulátor működését példákon keresztül mutatjuk be



OFDM jel előállítás: 1. példa

- Az OFDM csatorna közepére szimmetrikusan legyen az első és az utolsó vivőn adattartalom, a többin legyen nulla
- Az IFFT után a $re(t)$ kimeneten tisztán koszinuszos jel lesz, az $im(t)$ kimenet nulla
- Tehát csak valós részt (koszinusz) tartalmazó időbeli jel keletkezik, hiszen a spektrum a szükséges szimmetria feltételeket teljesíti
- A példában az I/Q-modulátor elnyomott vivőjű, amplitúdó modulált (AM-DSB/SC) jelet szolgáltat

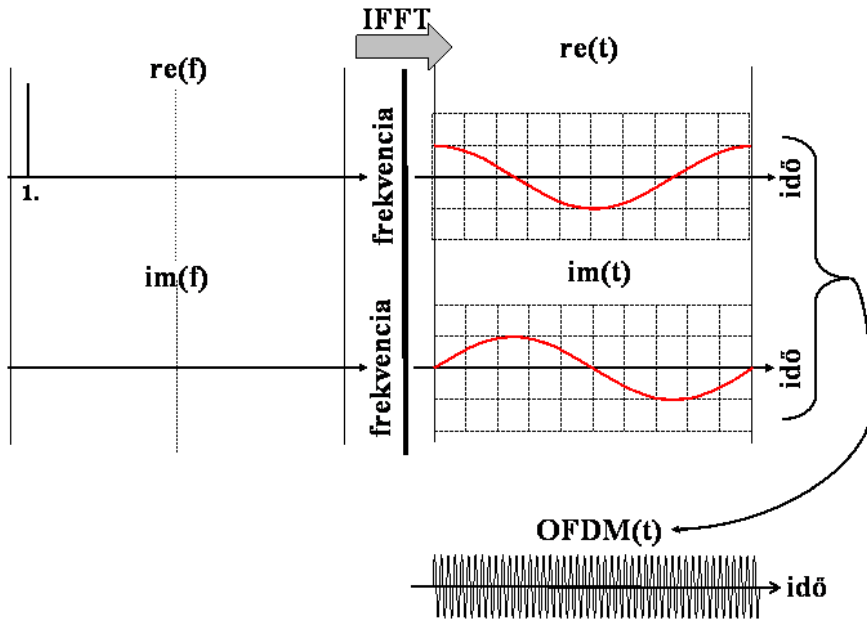
OFDM jel előállítás



OFDM jel előállítás: 2. példa

- Ha most az n . vivő adatát nullává tesszük, de az első vivőt meg hagyjuk, akkor komplex időbeli jel keletkezik
- Az IFFT $re(t)$ kimenetén az előbbi esethez képest fele akkora amplitúdójú koszinusz található, és az $im(t)$ kimeneten megegyező nagyságú és frekvenciájú szinusz jelenik meg
- E két összetevő komplex időbeli jelet eredményez
- Ha most a $re(t)$ és $im(t)$ jelek kerülnek az I/Q-modulátorra, akkor a kimeneti jel amplitúdó-modulációja megszűnik, és a vivőre fölkevert szinusz jelet kapunk
- Ami egyoldalsávú amplitúdó moduláció (SSB)
- Tehát a jelfeldolgozó SSB-modulátorként működik

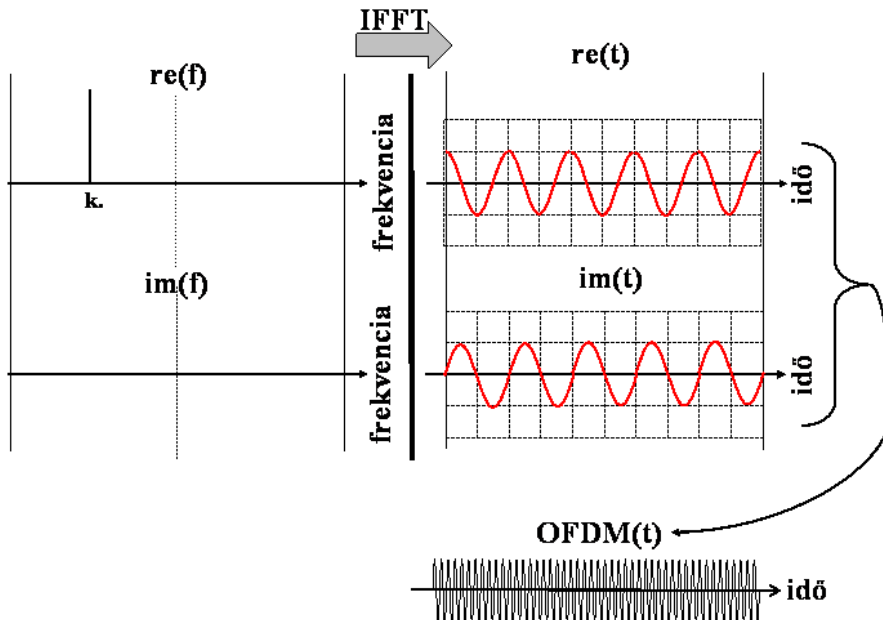
OFDM jel előállítás



OFDM jel előállítás

- Ha a bemeneten a vivőfrekvenciát változtatjuk, akkor csak a $re(t)$ és $im(t)$ frekvenciája változik, azok amplitúdója és frekvenciája megegyezik, fáziskülönbségük pedig 90°
- A jelfeldolgozás lényege, hogy fenti amplitúdó és fázis kapcsolat minden vivőre igaz
- Az $im(t)/re(t)$ komponensek amplitúdója azonos, fáziskülönbsége pedig 90° minden vivő esetében

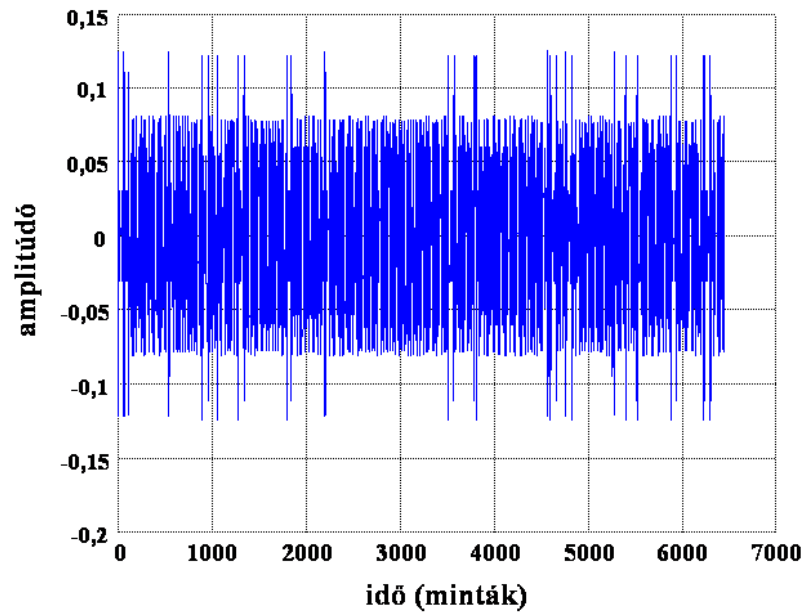
OFDM jel előállítás



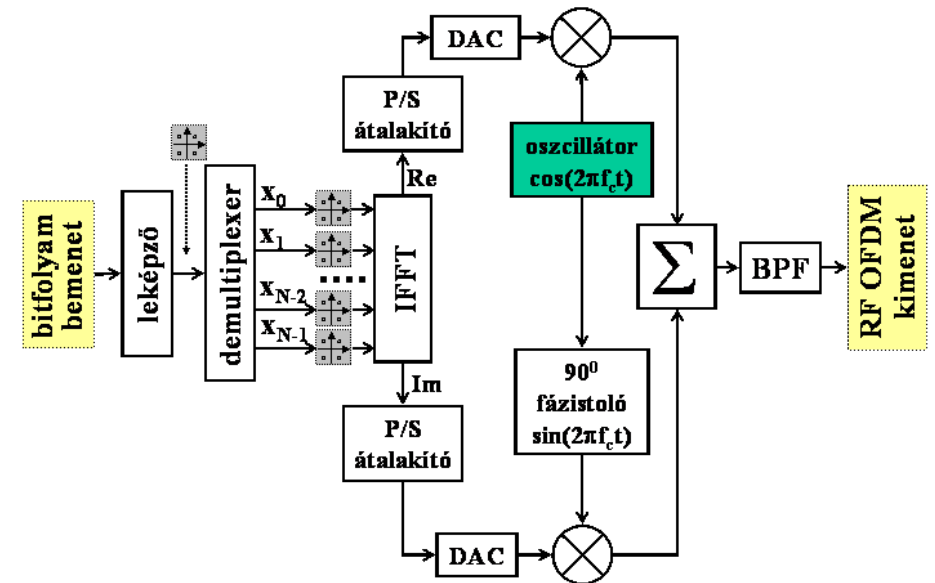
OFDM jel előállítás

- Az OFDM-modulátor tehát úgy működik, mint több ezer, párhuzamos fázistolásos SSB-modulátor
- A valós és képzetes jelösszetevő azonos amplitúdójának és pontosan 90° -os fáziskülönbségének köszönhetően nincs áthallás a sávközépi vivőre szimmetrikus alsó- és felső oldalsávok között
- Minél nagyobb a vivők száma, annál véletlenszerűbb az összegjel, az OFDM-szimbólum felépítése
- Már 12, viszonylag véletlenszerűen elhelyezett vivő is sztochasztikus jellegű OFDM-szimbólum felépítést eredményez

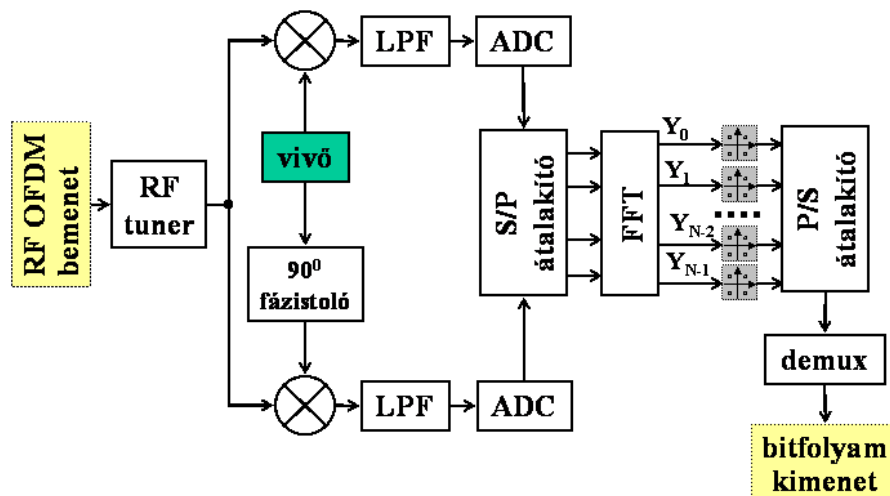
OFDM jelalak



OFDM-jel elvi előállítás



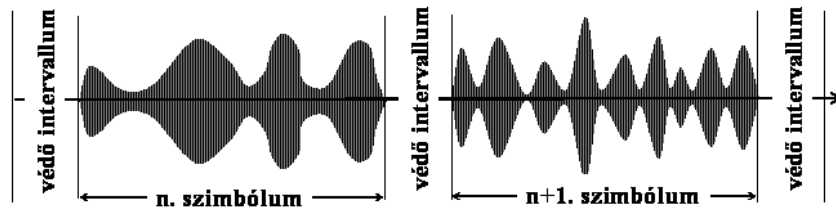
OFDM-jel demodulálása



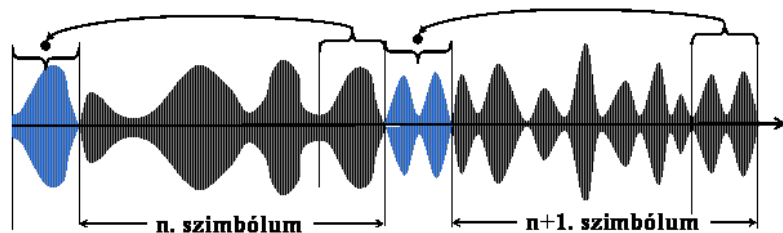
OFDM jel és a védő intervallum

- Az OFDM szimbólumok közé védő intervallumot ültetünk be
- A védő intervallum alatt beérkezhetnek a reflexiók, ez alatt lejátszódhatnak a tranziensek
- A védő intervallumnak a kialakuló leghosszabb reflexiók késleltetésénél is hosszabbnak kell lennie, ugyan is csak így biztosítható, hogy a késő előző szimbólum ne zavarja a jelenlegi szimbólumot
- Ellenkező esetben szimbólumközi áthallás alakulna ki
- A védő intervallumban ugyanakkor van kisugárzott jel, amely általában a soron következő szimbólum vége
- Így oszcilloszkópon nem figyelhető meg a védő intervallum

Példa OFDM szimbólum jelalakra



OFDM szimbólumok üres védő intervallummal



OFDM szimbólumok „igazi” védő intervallummal

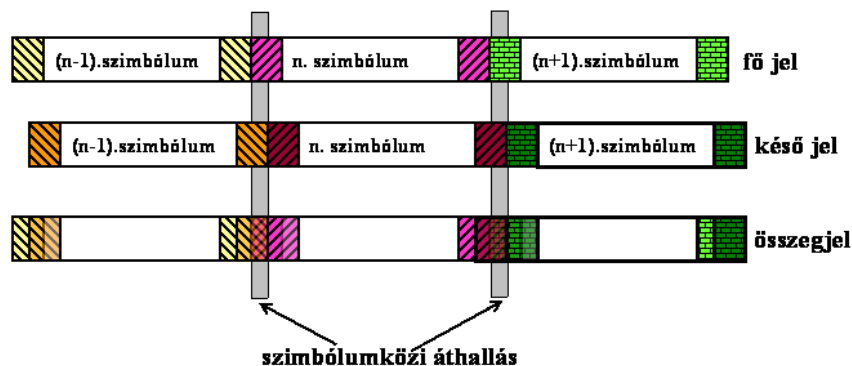
OFDM jel és a védő intervallum

- De miért nem hagyjuk üresen a védő intervallumot?
- Ennek oka az OFDM vételben és a szinkronizáció nehézségeiben keresendő
- Ha a védő intervallumot üresen hagynánk, akkor a vevőnek nagyon pontosan, az időrések elején kellene szinkronizálni az OFDM-szimbólumokra, ami az esetleges visszaverődések következtében kialakuló jelalak torzulás miatt lehetetlen
- Ha azonban a védő intervallumba a következő szimbólum végét tesszük be, akkor az un . autokorrelációs függvény segítségével a vevő megkeresheti a jelben kétszer előforduló összetevőket

OFDM jel és a védő intervallum

- Ezen eljárás segítségével a reflexiók okozta szimbólumközi áthallástól mentes szakaszok eleje és vége meghatározható
- A következő ábra kétutas vételre szemlélteti mindezt

kétszutas vétel



OFDM jel és a védő intervallum

- A vevő az autokorrelációs függvény segítségével meghatározza az FFT-mintavételi ablak helyét, melynek szélessége pontosan egy szimbólumidő
- A mintavételi ablakot úgy illeszti a szimbólumra, hogy az a zavaroktól mentes területet fedje le
- Ez persze azt is jelenti, hogy a mintavételi ablak nem biztos, hogy az eredeti szimbólumhatárokat érinti
- Ennek következtében fázishiba keletkezik, ami az összes vivő konstellációját elfordítja
- E fázishibát korrigálni kell a további jelfeldolgozó műveletek előtt

OFDM FFT szinkronizáció

- Az FFT szinkronizáció két lépéses
 - OFDM szimbólum sebesség megkeresése
 - FFT idő ablak megkeresése korrelációs alapon

