

PÁRHUZAMOSÍTOTT VÉGESELEM-MÓDSZEREK A CSATOLT ELEKTRODINAMIKAI PROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁBAN

Írta:

MARCSA DÁNIEL
Okleveles mechatronikai mérnök

Konzulens:

PROF. DR. KUCZMANN MIKLÓS, D.Sc.
Egyetemi tanár
Széchenyi István Egyetem, Automatizálási Tanszék



PH.D. DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Széchenyi István Egyetem
Infrastrukturális Rendszerek Modellezése és Fejlesztése
Multidiszciplináris Műszaki Tudományi Doktori Iskola

Győr
2018

*"... Barátaim, hős, páncélos vitézek,
megbocsátjátok, ha mágus leszek? -!
aki szeliden, félve kutatom
a mélyebb-látás bársony-süvegét
s húnyt pillán át is nagyon messze nézek ..."*
/Dsida Jenő/

Köszönetnyilvánítás

Elsőként szeretném megköszönni családomnak, feleségemnek Dorottyának és kislányomnak Emmának a mindennapi támogatást, és a doktori disszertáció megvalósításával eltöltött rengeteg időt, amit a számítógép előtt töltöttem. Ezúton szeretném megköszönni Kuczmann Miklós professzor úrnak, tanáromnak, konzulensemnek és főnökömnek, hogy elindított a tudományos pályámon, megtanított a végeselem-módszer alapjaira, és a mérnöki szakma, a tudomány feltétlen szeretetére. Köszönetemet fejezem ki az Elektromágneses Terek Laboratórium tagjainak – név szerint Budai Tamásnak, Friedl Gergelynek, Katona Évának, Kovács Gergelynek, Pólik Zoltánnak, Prukner Péternek, és Unger Tamásnak – akik velem együtt, fáradhatatlanul művelték a numerikus térszámítás nem könnyű tudományterületét.

Szeretném megköszönni Iványi Amália professzorasszonynak hasznos szakmai tanácsait, jó szándékú kritikáit az eddigi kutatómunkám során. Külön köszönet Budai Tamásnak és Kovács Ákosnak, akik a szimulációkhoz szükséges számítástechnikai háttérrel biztosították a munkám számára. Köszönöm Herbert de Gersem és Kent Davey professzor uraknak a sok segítséget, amit az alap-, mester- és doktori képzésem alatt nyújtottak. Szeretném megköszönni volt középiskolai tanáromnak, Nagy Jenő (†) tanár úrnak, hogy fáradhatatlan munkája révén megismerkedhettem a villamos gépek alapjaival.

Köszönöm az eCon Engineering Kft. ügyvezető igazgatójának Kiglics Gábornak és a Szoftver Csoport vezetőjének dr. Molnár Lászlónak, hogy a szimulációs eredményeim validálásához használhattam az ANSYS Maxwell szoftvert.

Köszönöm a Széchenyi István Egyetem Automatizálási Tanszék munkaközösségének a baráti légkört, amelyben disszertációmban foglalt tudományos eredményeket megvalósíthattam. Végül szeretném megköszönni mindazoknak, akik hatással voltak rám és életem alakulására, de itt nem említettem őket név szerint, mert túl hosszúvá nyúlna a felsorolás és biztos akkor se lenne teljes.

* * *

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
1.1. A kutatás előzménye	1
1.2. A kutatás tervezett célkitűzése	2
1.3. A dolgozat felépítése	4
2. Irodalmi áttekintés	5
2.1. Elektrodinamikai problémák modellezése	5
2.1.1. A Maxwell-egyenletek	6
2.1.2. Potenciálformalizmusok	7
2.1.3. A végeselem-módszer	10
2.2. Csatolt problémák modellezése	15
2.2.1. Áramkör csatolása	17
2.2.2. A mechanikai egyenlet csatolása	20
2.3. Tartomány dekompozíciós módszerek	27
2.3.1. A tartomány dekompozíció alapötlete	30
2.3.2. A Schur—komplement-módszer	31
2.3.3. A FETI-módszer	36
2.4. A modellek szabályozási körbe illesztése	44
2.5. A meglévő eredmények hiányosságai	46
3. Feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt modell	48
3.1. Motiváció	48
3.2. Feszültséggel gerjesztett modell	49
3.3. A forgás figyelembevétele	53
3.3.1. Egyszerűsített egyréteges mozgó sáv	54
3.3.2. A szimulációs eredmények bemutatása	55
3.4. A feszültség és a mechanikai egyenlet figyelembevétele	57
3.5. Új tudományos eredmények	60
4. Modell párhuzamosítása tartomány dekompozícióval	61
4.1. Motiváció	61
4.2. FETI-módszer – Direkt megoldó algoritmus	62
4.3. Statikus problémák párhuzamosított megoldása	63
4.3.1. Elektrosztatika feladat párhuzamosított megoldásának eredményei	64
4.3.2. Az egyfázisú transzformátor párhuzamosított megoldásának ered-	
ményei	65
4.3.3. A negyed transzformátor párhuzamosított megoldásának eredményei	67
4.4. Örvényáramú feladat párhuzamosított megoldása	69
4.4.1. Az egész transzformátor párhuzamosított megoldásának eredményei	69
4.4.2. A negyed transzformátor párhuzamosított megoldásának eredményei	70

4.5.	A csatolt probléma párhuzamosítása	72
4.5.1.	Feszültségegyenlettel csatolt feladat párhuzamosított megoldása	72
4.5.2.	Mechanikai egyenlettel csatolt feladat párhuzamosított megoldása	76
4.6.	Új tudományos eredmények	80
5.	Modell szabályozási körbe illesztése	81
5.1.	Motiváció	81
5.2.	Feszültségegyenlettel csatolt modell szabályozási körbe illesztése	82
5.2.1.	A szabályozó	83
5.2.2.	A szabályozott modell	85
5.2.3.	A párhuzamosítással elért gyorsítás	87
5.3.	Mechanikai egyenlettel csatolt modell szabályozása	89
5.3.1.	Irányítási körbe illesztett modell	91
5.3.2.	A párhuzamosítással elért gyorsítás	94
5.4.	Új tudományos eredmények	95
6.	Új tudományos eredmények összefoglalása	97
7.	Konklúzió, jövőbeli tervek	100
A.	A vékony vezető erős csatolása	102
B.	Nyomatékszámítás	105
B.1.	Maxwell-féle feszültségtenzor módszer	105
B.2.	Arkkio-módszer	106
C.	Mozgás figyelembevétel Minkowski-transzformációval	108
D.	Schur—komplement-módszer - 1D mintapélda	110
E.	FETI-módszer - 1D mintapélda	114
F.	Feszültséggel gerjesztett szolenoid	119
G.	Szimulációs feladatok eredményeinek validálása ANSYS Maxwell szoft- verrel	122
G.1.	Feszültséggel gerjesztett szolenoid	122
G.2.	Háromfázisú aszinkron motor	123
G.3.	Kapcsolt reluktancia motor	124
Irodalomjegyzék		i

1. FEJEZET

Bevezető

1.1. A kutatás előzménye

Napjainkban a villamos gépek és hajtásaik újszerű alkalmazásai nagyon fontos szerepet játszanak az automatizált rendszereknél világszerte. Ezen rendszerekkel szemben egyre magasabb elvárásokat támasztanak az energiahatékonyság, a hatásfok, a megbízhatóság és a gyors, pontos működés szempontjából. Régióink esetében a járműipar, azon belül is az elektromos és hibrid hajtású járművek, ahol újszerű megoldásokat kíván a terület az előbb említett kritériumok teljesítéséhez. Az egyik ilyen újszerű megoldás a rendszerszintű tervezés, vagyis a főbb részek, mint a villamos gép, annak meghajtása és szabályozása egyszerre kerülnek megtervezésre. Ehhez azonban szükség van a részek összekapcsolására, – azaz, hogy a kimenet–bemenet párok egyezzenek – mely kritérium nem feltétlenül teljesül.

Disszertációm középpontjában az automatizált rendszerekben alkalmazott beavatkozók modelljének pontosítása és a szabályozóval történő összekapcsolása áll. Egy zárt valódi rendszeren belül az egyes rendszerösszetevők között szoros kapcsolat van, és elmondható, hogy szinte mindegyik rész hat valamilyen módon a másikkra. A komponensek egymásra hatása a számítógépes szimulációk és modellezések esetében szinte kivétel nélkül még ma is hiányzik vagy hiányos. Sok esetben az ilyen jellegű hiányosságok, pontatlanságok a számítás után az eredményeknél korrigálható. De olyan rendszerek esetén, ahol nincs semmilyen előzetes tapasztalat, ismeret a rendszerről, – például egy új rendszer fejlesztése esetén – ezt nem tudjuk megtenni. Ilyen esetben viszont jelentősége van a modell pontosságának, illetve annak, hogy a szabályozóhoz milyen modell kerül alkalmazásra. A dolgozatomban az automatizálási rendszerek fejlesztési idejének és költségének csökkentését elősegítő számítógépes eljárással foglalkozom, ahol a még nem ismert beavatkozót féhérdobozos, vagyis matematikai modellként veszem figyelembe, úgy, hogy alkalmas legyen a szabályozóval való összekapcsolásra is.

A mérnöki gyakorlatban, a valóságot nagy pontossággal leíró féhérdobozos modellt a parciális differenciálegyenletek numerikus módszerrel történő megoldásával lehet kapni. Villamos beavatkozók tervezése és analízise esetében ezek az egyenletek a Maxwell-egyenletek rendszere, azaz az elektromágneses tér változóira felírt parciális differenciálegyenletek vagy integrálegyenletek, amelyek minden elektromágneses térszámítást igénylő feladat megoldására alkalmasak. A térváltozók helyett potenciálok bevezetésével kevesebb ismeretlent tartalmazó parciális differenciálegyenletek formájában írhatók fel a megoldandó egyenletek. A számos numerikus technika közül a dolgozatban a végelelem-módszert (FEM - *Finite Element Method*) alkalmazom, melynek lényege abban áll, hogy a vizsgált tartományt egyszerű alakzatokra bontjuk fel, az alakzatokra pedig egyszerű

egyenleteket írunk fel, végül ezen egyszerű egyenletek összesítésével a probléma egy közelítő megoldása áll elő. A végeselem-módszer a súlyozott maradék elvének gyenge alakjára épül, s a Galjorkin-eljárást alkalmazza. A végeselem-módszer a diszkretizálás eredményeképp a parciális differenciálegyenleteket algebrai egyenletek rendszerévé transzformálja.

Egy eszköz fejlesztésénél nem csak a modell pontossága fontos, hanem a szimulációkra fordított idő is. Jelentősen megnő a rendszer fejlesztési ideje, ha a nagy számításigényű, a végeselem-módszerrel nyert numerikus modellt alkalmazzuk a szabályozással összekapcsolva. Egy ilyen modellnek nagyságrendekkel nagyobb a szabadsági foka, mint például egy állapotter modellnek. Tehát valamilyen módon gyorsabbá kell tenni a végeselem-módszeren alapuló számítást. Az egyik kézenfekvő és korszerű módszer a párhuzamosítás. A számos párhuzamosítási technika közül a dolgozatban a tartomány dekompozíciót alkalmazom, amikor a vizsgált rendszer diszkretizált modelljét bontom fel kisebb részekre, és az így kapott részfeladatokat külön-külön, de egymással párhuzamosan vizsgálom. A tartomány dekompozíciós módszerek közül a Schur—komplement-módszert és a FETI-módszert (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) alkalmazom a dolgozatomban, a numerikus szimulációk felgyorsítására. A párhuzamosításnak köszönhetően pedig a térszámításból kapott, az analitikus összefüggésekkel nyert leírásnál pontosabb modell esetében is van lehetőség a tervezés gyorsítására.

A végeselem-módszerrel kapott modell viszont önmagában még nem elegendő a villamos beavatkozók pontos modellezéséhez. A Maxwell-egyenletekből levezethető potenciálformalizmusok parciális differenciálegyenletei önmagukban az árammal történő gerjesztést teszik lehetővé. De a villamos beavatkozók, melyek magukba foglalják a járművek villamos motorját is, főleg feszültségkényszerrel működnek. Ezért fontos a feszültséggel történő gerjesztés, vagyis a tekercs egyenletének figyelembevétele és a modellhez csatolása. A feszültségegyszerlet csatolása kétféle módon végezhető, az úgynevezett gyenge, indirekt csatolással vagy az erős, direkt csatolással. A pontos modellhez a direkt csatolás szükséges, ezért magam is ezt a módszert alkalmazom a munkám során.

A tekercs feszültségegyszerletének csatolása önmagában elegendő lenne egy mozgó részt nem tartalmazó rendszer vagy az állandósult állapot vizsgálatára. Azonban járműhajtásában alkalmazandó beavatkozó is előfordulhat a tervezendő feladatok között, nagyon fontos a hajtás dinamikus tulajdonságainak vizsgálata. Ehhez pedig a mozgó rész mechanikai egyenlete szükséges. Két csoportba sorolhatóak a módszerek, melyek lehetőséget adnak a mechanikai egyenlet elektromágneses végeselem-módszerhez történő csatolására. A csúszófelület (*sliding surface*) módszeren alapuló eljárások, amelyek egy, az álló és mozgó rész közötti határfelület segítségével veszik figyelembe a mozgást. A másik csoport a „légrés-határfelület” (*air-gap interface*) módszerek, ahol az álló és mozgó rész szétválik, így képezve az álló és mozgó határfelületet, közöttük pedig egy vékony, végeselemekkel nem felbontott résszel. Mindkét módszer csoport egy-egy változatát megvalósítottam, amelyeket a dolgozatban részletesen bemutatok.

1.2. A kutatás tervezett célkitűzése

Munkám során a szabályozási körbe illeszthető, gyors és pontos, a numerikus térszámítás segítségével felépített modell megalkotása az egyik fő cél, amihez az általam megcélzott terület esetén, a hajtásrendszerekben a végeselem-módszer a legalkalmasabb. A tervezett modell megalkotásánál nagyon fontos az összekapcsolásra alkalmas bemenetek és kimenetek megléte. A megfelelő bemenet elérésére jól alkalmazható az általam

is használni kívánt közvetlen csatolás. Ekkor a FEM-modellből figyelembe veszi a tekercselés induktivitásának változását az adott gerjesztésnek, az aktuális üzemállapotnak megfelelően, ugyanakkor a kétdimenziós modell esetében lehetőséget ad a tekercsvégek induktivitásának figyelembevételére. Villamos hajtásoknál az üzemeltetés során a villamos körben fellépő átmeneti jelenségek mellett fontos a mechanikai tranziensek pontos ismerete is. Utóbbiak vizsgálatához két technikát is vizsgálni fogok, amelyek lehetőséget adnak a mechanikai állapotváltozóban fellépő tranziens jelenségek meghatározására tetszőleges üzemállapot esetén. A csúszófelület módszer az egyik vizsgálni és alkalmazni kívánt technika, melyhez a két rész közötti kapcsolat megteremtésére elsőfokú interpolációt kívánok alkalmazni. A másik technika a mozgó sáv módszer, ahol a felbontatlan részhez egy olyan diszkretizáláson alapuló módszert kívánok kifejleszteni, amely a lehető legkevesebb számításigénnyel jár. A művelet csökkentése a szabályozási körbe illesztés miatt még fontosabb, mivel a nagy ismeretlenségű modell révén a számítási időt így is jelentősen megnövelem, bár várhatóan pontosabb lesz.

Mérnöki szempontból a pontosság mellett lényeges a gyors működés. Utóbbi megcélozható sokprocesszoros számítógépnél a párhuzamosítással. A párhuzamosításhoz a szilárdságtani és áramlástan szimulációknál széles körben, a villamosmérnöki gyakorlatban viszont kevésbé gyakran alkalmazott tartomány dekompozíciós módszerek közül kettőt kívánok alkalmazni, a Schur—komplement- és a FETI-módszert. A módszerek matematikai alapjai más tudományterületekhez tartozó irodalomból rendelkezésre állnak, azonban az ezektől eltérő alkalmazási terület miatt tudományos, illetve oktatási szempontból ezek aprólékos összeállítása és összegyűjtése rendkívül fontos. Emellett tudomásom szerint az elmúlt időszakban ilyen jellegű magyar nyelvű összefoglaló munka nem jelent meg, s ezt a hiányt is pótolni igyekszem munkám összefoglalásával. A jól ismert alapokhoz újat úgy kívánok adni, hogy javaslatot teszek a tartományok felbontására, és vizsgálom a módszereket az alkalmazhatóság és a hatékonyság szempontjából, mozgó részt tartalmazó áramköri egyenlettel csatolt feladat esetén. Fontosnak tartom az egyenletrendszer megoldására alkalmas technikák vizsgálatát, ezért direkt és iteratív algoritmussal is kívánom tesztelni a tartomány dekompozíciós módszereket. A FETI-módszernél a direkt megoldó rutin egy eredetileg prekondicionálnak javasolt eljárás, amelyet, mint megoldó eljárást fogok alkalmazni különböző kétdimenziós elektromágneses feladatokra.

Napjainkban a kereskedelemben nagyon sok, a modern mérnöki tervezéshez és szimulációhoz jól használható, a végeelem-módszert alkalmazó szoftver található. Ezzel ellentétben, a legtöbb kutatásnál, értekezésben saját fejlesztésű szoftvert használnak, melynek egyik fő oka, hogy a kereskedelmi szoftverekben nem lehet tetszőleges módosításokat végrehajtani, és a sokszor kutatási szempontból lényeges részek hozzáférhetetlenek a titkosított algoritmusok és programkódok miatt. Emiatt elkerülhetetlen egy saját fejlesztésű, végeelem-módszeren alapuló eljárás csomag implementálása, amely már alkalmas lesz az eddig vázolt célkitűzések megvalósítására. A megvalósításhoz a mérnöki gyakorlatban széles körben használt `Matlab` programrendszert kívánok alkalmazni, mert így vizsgálható a módszerek – a disszertációm szempontjából lényegesnek tartott – működése és viselkedése, viszont jóval könnyebb a megvalósítás és a hibakeresés, mint egy alacsonyabb szintű nyelv – `Fortran`, `C`, `C++`, stb. – esetén. A `Matlab` programcsomag a szabályozási kör megvalósításánál is jól alkalmazható, a dinamikus rendszerek modellezésére és vizsgálatára alkalmas részének, a `Simulink` rendszernek köszönhetően. Valamint, mérnöki munka lévén, rendkívül fontosnak tartom, hogy a teljes szimulációs rendszert a

saját magam által fejlesztett programmal magam végezzem el, hiszen így a munka minden egyes fázisát jól megismerhetem és ellenőrizhetem, ami az esetleges hibák javítása, illetve új ötletek implementálása során előnyt jelent.

A kidolgozott módszerek akkor működnek hatékonyan, ha azok alkalmazhatóak a gyakorlatban is. Ezért fontosnak tartom nem csak az állítások eredménnyel történő alátámasztását, hanem a teljes rendszer működésének igazolását is mintapéldák megoldásával. Az alkalmazni kívánt mintapéldák mindegyike nemzetközi irodalomból vagy szoftver (ONELAB, Agros2D) mintapéldái közül származnak, így van lehetőség az ott közölt eredmények és a saját eredményeim összevetésére.

1.3. A dolgozat felépítése

A dolgozat második fejezete az általam is művelt tudományterület irodalmi áttekintését tartalmazza, ahol összefoglalom a felhasznált elméleti és gyakorlati ismereteket. A további munkám ezen ismeretanyagra épül.

A harmadik fejezetben a feszültségkényszerhez szükséges differenciálegyenletek és a mozgó rész mechanikai viselkedését leíró egyenlet csatolását, és a csatolt, végelelem-módszerrel diszkretizált modell megvalósítását ismertetem. Minden esetben, a kapott modellek működésének helyességét nemzetközileg jól ismert példán keresztül mutatom be, ahol ismertek az eredmények, így a megvalósított módszerek működése igazolható.

A negyedik fejezet a dolgozatban alkalmazott tartomány dekompozíciós módszerekre fókuszál, amely egyben munkám fő témája. Bemutatom a Schur—komplement-módszer és a FETI-módszer elektromágneses térszámításban történő alkalmazását. Ezután mutatom be a csatolt, tartomány dekompozícióval párhuzamosított végelelem-modell implementálását, kitérve a csatolásból eredő sajátosságokra. Foglalkozom a módszerek direkt és iteratív megoldóalgoritmusaival is, különös tekintettel azok hatékonyságára a statikus és időfüggő elektrodinamikai modelleknél.

Az ötödik fejezetben a végelelem-módszerrel felépített modell szabályozási körbe történő illesztésével foglalkozom, kitérve a szabályozásba illesztett modell pontosságának fontosságára.

A befejező két fejezetben tézisek formájában összefoglalom a dolgozat eredményeit, s további megválaszolásra váró kérdéseket fogalmazok meg, melyekkel a jövőben foglalkozni kívánok.

Terjedelmi okok miatt néhány a szakirodalomból ismert módszer bemutatását, levezetését, illetve az egyik mintafeladat analitikus megoldását függelék formájában közlöm. Valamint a G. függelék tartalmazza a nemzetközi szakirodalomban analitikus megoldással nem rendelkező feladatoknál kapott, és a dolgozatban bemutatott eredmények igazolását egy a végelelem-módszert alkalmazó kereskedelmi szoftverrel, az ANSYS Maxwell-lel.

A dolgozatot a felhasznált irodalom jegyzéke zárja.

A dolgozatot és az ábrák jelentős hányadát L^AT_EX szövegszerkesztővel készítettem.

2. FEJEZET

Irodalmi áttekintés

Ebben a fejezetben a szakirodalomra támaszkodva összefoglalom azon ismeretanyagot, amelyre a további fejezetek épülnek, amely alapokra kutatásaimat építettem. Röviden bemutatom a villamos beavatkozókkal kapcsolatban a végeelem-módszert, bevezetem a kutatásaim során használt Maxwell-egyenleteket, és az alkalmazott potenciálformalizmusokat, majd a csatolt szimulációk fejlődését, és az ehhez tartozó módszereket ismertetem. A dolgozatomban tartomány dekompozícióval gyorsítom a csatolt szimulációkat, ezért a tartomány dekompozíció alapelveit és módszereit is áttekintem, kitérve az elektromágneses térszámításban alkalmazott párhuzamosításra. A szakirodalom áttekintését a villamos beavatkozók végeelem-módszerből nyert modelljét alkalmazó irányítási rendszer eddigi eredményeinek összefoglalásával zárom. Végül röviden bemutatom az irodalmi áttekintésben ismertetett eredményeknél mik a hiányosságok, a megoldásra váró problémák.

2.1. Elektrodinamikai problémák modellezése

Az elektrodinamika alapegyenleteiből, azaz a Maxwell-egyenletekből kiindulva olyan bonyolult rendszerek behatóbb vizsgálata és tervezése lehetséges, mint például a villamos forgógépek, mérőberendezések, antennák [1–20]. A problémát leíró Maxwell-egyenletek és a peremfeltételek ismeretében a potenciálfüggvény megválasztása után előállíthatók a vizsgálat tárgyát képező feladatkör parciális differenciálegyenletei. Egyszerű esetekben a kitűzött feladat megfogalmazható a térváltozókra is. Ezen parciális differenciálegyenletek és perem- valamint kezdeti feltételek jellemzik a vizsgált elektrodinamikai rendszert.

Az életben fellelhető összes probléma alapján véve folytonos idejű bemeneti jellel folytonos idejű kimeneti jellel reagál, azaz a körvonalazott rendszerek túlnyomó többsége folytonos idejű, analóg rendszer [21–23]. A jelen dolgozatban tárgyalt elektrodinamikai rendszerek gerjesztés-válasz kapcsolata rendkívül bonyolult parciális differenciálegyenletekből valamint kezdeti és peremfeltételekből álló egyenletrendszer, amely számítógéppel történő megoldása csakis az egyenletek diszkretizálásával lehetséges [12, 16, 17, 19, 24–30]. A térbeli diszkretizálás többféle módon megoldható, a dolgozatban az alacsony frekvenciás problémákra alkalmazott, s a legdinamikusabban fejlődő technikára, a végeelem-módszerre szorítokozom [12, 13, 15–17, 19, 24, 24–46], azonban a közölt egyenletek megoldása más numerikus technikákkal is elvégezhető. Az időbeli diszkretizálás Euler hátralépő módszere, vagy a Crank–Nicolson-séma szerint egyszerű, és ezen technikák többségében stabil megoldásra vezetnek [9, 19, 27, 30]. A folytonos idejű rendszerek gerjesztés-válasz kapcsolatát alkalmas diszkretizálással tehát diszkrét idejű rendszerré lehet alakítani. Hangsúlyozom, hogy a diszkretizálás térben is megtörténik.

A Maxwell-egyenletekből potenciálok választásával tehát parciális differenciálegyenletek írhatók fel, melyek térbeli és időbeli diszkretizálásával algebrai egyenletekké alakíthatóak. Az algebrai egyenletek megoldása pedig a potenciálok egy közelítését szolgáltatja, vagyis numerikus technikával mindig egy közelítés kapható. Analitikusan azonban csak nagyon kevés, egyszerű geometriával bíró feladat oldható meg.

2.1.1. A Maxwell-egyenletek

A dolgozatban használt numerikus technika, a végeelem-módszer, a Maxwell-egyenletek differenciális alakjából indul ki. A $\vec{H}(\vec{r}, t)$ mágneses térerősség, az $\vec{E}(\vec{r}, t)$ elektromos térerősség, a $\vec{B}(\vec{r}, t)$ mágneses indukció, a $\vec{D}(\vec{r}, t)$ eltolási áramsűrűség, a $\vec{J}(\vec{r}, t)$ vezetési áramsűrűség mellett a következő egyenletekről van szó [2–8, 10–13, 15, 17, 19, 24]:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t), \quad \text{vagy} \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \nu \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (2.4)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{J}_0(\vec{r}, t), & \text{a tekercsben,} \\ \vec{0}, & \text{a levegőben és nem vezető anyagban,} \\ \sigma \vec{E}(\vec{r}, t), & \text{az örvényáramú tartományban.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Utóbbi egyenletben a σ az anyag vezetőképessége, $\vec{J}_0(\vec{r}, t)$ pedig az elektromágneses teret gerjesztő áramsűrűség árammal történő gerjesztés esetében. Munkám során – néhány demonstrációs célt szolgáló példán kívül – olyan feladatokkal foglalkoztam, amelyekben a gerjesztő tekercs áramsűrűsége nem ismert. Dolgozatomban minden példánál a mágneses térerősség és a mágneses indukció között fennálló konstitúciós reláció lineáris és izotrop. Levegőben $\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t)$, vagy a $\vec{H}(\vec{r}, t) = \nu_0 \vec{B}(\vec{r}, t)$ a konstitúciós egyenlet, ahol $\mu_0 = 1/\nu_0$ a levegő permeabilitása. Lineáris és izotrop karakterisztikájú ferromágneses anyagok esetében ezen egyenletek formája a $\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \mu_r \vec{H}(\vec{r}, t)$, vagy a $\vec{H}(\vec{r}, t) = \nu_0 \nu_r \vec{B}(\vec{r}, t)$ összefüggés szerint alakul, ahol $\mu_r = 1/\nu_r$ az anyag relatív permeabilitása. A dolgozatomban nem célja foglalkozni a $\vec{B}(\vec{r}, t)$ és $\vec{H}(\vec{r}, t)$ között fennálló bonyolultabb kapcsolattal, azonban fontos megjegyezni, hogy általános esetben a karakterisztika valamely hiszterézismodell által reprezentált nemlineáris kapcsolattal írható le, amelyet sok esetben (lágymágneses anyagok) egyértékű nemlinearitással írnak le.

A (2.1) egyenlet (Ampère-törvény) azt mondja ki, hogy örvényes mágneses tér áramsűrűség eredményeképp jön létre. Ezen összefüggésből a vezetési áramsűrűség a (2.5) szerint lehet a vezetőben (például tekercs) folyó áram $\vec{J}_0(\vec{r}, t)$ áramsűrűsége, vagy épp a vezető anyagban kialakuló $\sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$ örvényáram. A (2.2) egyenlet a Faraday-féle indukciótörvény, amely azt mondja ki, hogy az időben változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt, amely a vezető anyagokban létrehozza az örvényáramokat. A (2.3) pedig a mágneses tér forrásmentességére utaló egyenlet.

Munkám során főleg statikus mágneses tér és örvényáramú problémákkal foglalkoztam. A fenti egyenletekben az eltolási áramot elhanyagoltam a használt frekvenciatartomány, azaz az alacsony frekvencia miatt, ahol $|\vec{J}(\vec{r}, t)| \gg |\partial \vec{D}(\vec{r}, t)/\partial t|$. A között

egyenletek az örvényáramú problémák leírására alkalmasak. Statikus mágneses tér problémák esetén az örvényáram hatása elhanyagolható, azaz a (2.2) egyenlet elhagyható, ahogy a (2.5) reláció utolsó tagja is.

A Maxwell-egyenletek a térjellemzők közötti kapcsolatokat adják meg, azonban különféle közegethatár- és peremfeltételeket kell megfogalmazni, hogy azok egyértelműen írják le a megoldandó problémákat. Két különböző közeggel kitöltött térfogat határán közegethatár feltételeket kell megfogalmazni, amely az elektromos térerősség és a mágneses térerősség tangenciális komponensének, valamint a mágneses indukció és az áramsűrűség normális komponensének folytonosságát jelenti. A peremfeltétel a probléma tartományát lezáró peremeken előírt feltételekben merül ki, amely a tangenciális és normális komponensekre ad előírást, amelyeknek teljesülni kell.

A következőkben az egyszerűbb írásmód érdekében a vektorfüggvények argumentumát, azaz az (\vec{r}, t) jelölést elhagyom.

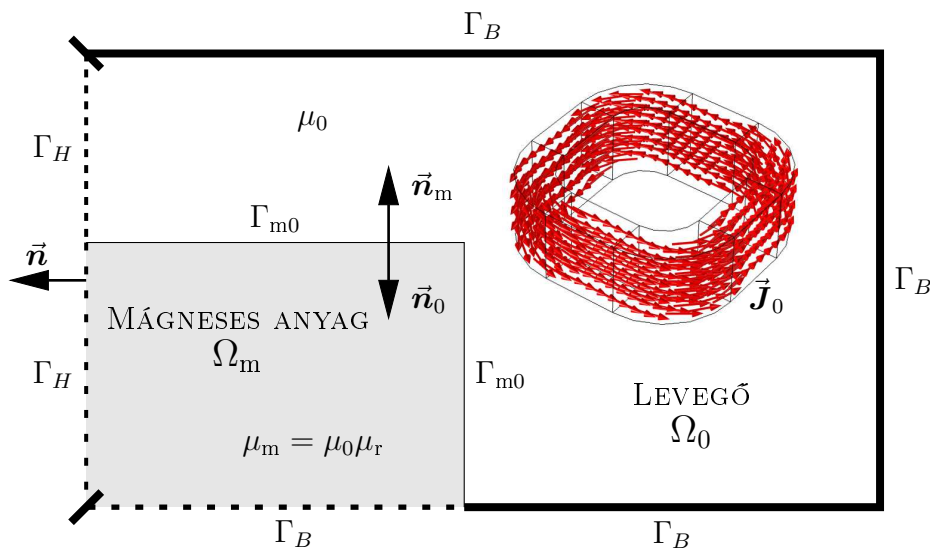
2.1.2. Potenciálformalizmusok

A Maxwell-egyenletek megoldása potenciálok bevezetésével is lehetséges, amelynek eredményeképp az ismeretlenek száma csökkenthető, s mindez a potenciálokra felírható parciális differenciálegyenletek megoldására vezet. A potenciálok ismeretében a térjellemzők, és egyéb adatok természetesen számíthatók. Alapvetően skalárpotenciál, vagy vektorpotenciál alkalmazható a megfogalmazott problémák leírására, melyek elliptikus, valamint parabolikus típusú parciális differenciálegyenletekre vezetnek.

A következőkben a munkám során alkalmazott, kétdimenziós esetben előálló potenciálformalizmus bemutatására szorítkozom [2–8, 10–13, 15–17, 19, 20, 24, 25, 29, 47–81].

Statikus mágneses tér

A statikus mágneses térproblémák általános felépítése a 2.1. ábrán látható. A mágneses teret itt a tekercs \vec{J}_0 áramsűrűsége gerjeszti, amely a levegővel kitöltött Ω_0 tartományban helyezkedik el, s van egy tartomány (Ω_m), amelyet mágneses anyag tölt ki.



2.1. ÁBRA Statikus mágneses tér feladat sematikus rajza.

A Γ_{m0} jelöli a közeghatárt, a Γ_B perem a szimmetriasík vagy a végtelen távoli perem $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ esetében, a Γ_H peremen pedig a $\vec{H} \times \vec{n} = \vec{0}$ feltétel kell, hogy teljesüljön. Az \vec{n} normálvektor a 2.1. ábra szerint a kérdéses tartományból kifelé mutat.

A statikus mágneses tér alapvetően a mágneses skalárpotenciállal, vagy a mágneses vektorpotenciállal számítható. Itt a dolgozatban alkalmazott mágneses vektorpotenciált és a hozzá kapcsolódó legfontosabb összefüggéseket mutatom be.

A mágneses vektorpotenciál. Az \vec{A} mágneses vektorpotenciál a (2.3) egyenlet alapján vezethető be a

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.6)$$

összefüggés szerint, amely az $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_m$ tartományban érvényes, és eleget tesz a (2.3) összefüggésnek, a következő azonosságból kifolyólag $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} \equiv 0$, ami teljesül minden $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ vektorfüggvényre. A fenti kifejezés a (2.1) egyenlet és a (2.4) lineáris konstitúciós reláció szerint a következő lineáris parciális differenciálegyenletre vezet:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J}_0, \quad \text{az } \Omega_0 \cup \Omega_m \text{ tartományon.} \quad (2.7)$$

A ν paraméter a permeabilitás reciproka, amely $1/\mu_0$ az Ω_0 , és $1/(\mu_0\mu_r)$ az Ω_m tartományban. A mágneses vektorpotenciál egyértelmű megoldhatóságához, annak divergenciáját elő kell írni, melynek a neve Coulomb-mérték [13, 19, 71], azaz

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (2.8)$$

ami kétdimenziós esetben automatikusan teljesül. Két dimenzióban a forrásáramsűrűségnek csak z -irányú komponense, a mágneses térerősségnek és a mágneses fluxussűrűségnek pedig csak x -irányú és y -irányú komponense van, azaz

$$\vec{J}_0 = J_0(x, y)\vec{e}_z, \quad (2.9)$$

$$\vec{H} = H_x(x, y)\vec{e}_x + H_y(x, y)\vec{e}_y, \quad \text{és} \quad \vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y. \quad (2.10)$$

A mágneses vektorpotenciálnak csak z -irányú komponense van ($\vec{A} = A_z(x, y)\vec{e}_z$), mert

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (2.11)$$

azaz $B_x(x, y) = \partial A_z / \partial y$ és $B_y(x, y) = -\partial A_z / \partial x$. A divergenciája ennek az egykomponensű vektorpotenciálnak egyenlő nullával, mert

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

A (2.7) egyenlethez, a részletek mellőzésével a következő peremfeltételek tartoznak [13, 19]:

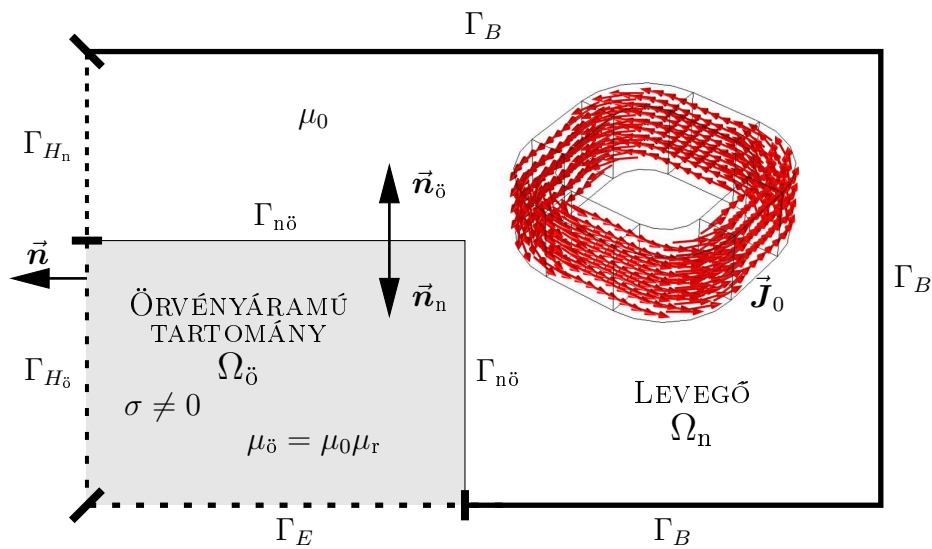
$$(\nu \nabla \times \vec{A}) \times \vec{n} = \vec{0}, \quad \text{a } \Gamma_H \text{ peremen,} \quad (2.13)$$

$$\vec{n} \times \vec{A} = \vec{0}, \quad \text{a } \Gamma_B \text{ peremen,} \quad (2.14)$$

A (2.7), és (2.13), (2.14) egyenletek által definiált formalizmus az \vec{A} -formalizmus.

Örvényáramú tér

Az örvényáramú térproblémák általános felépítése a 2.2. ábrán látható. A mágneses teret ebben az esetben is a tekercs \vec{J}_0 áramsűrűsége gerjeszti, amely ebben az esetben már időben változó. Az áramsűrűség a levegővel kitöltött Ω_n nemvezető tartományban helyezkedik el, s az Ω_δ tartományt σ vezetőképességű anyag tölti ki, amely esetleg még mágnesesezhető is. Ebben a tartományban jön létre az örvényáram által keltett mágneses tér, amely visszahat az azt létrehozó mágneses térre. A $\Gamma_{n\delta}$ felület választja el a két tartományt, ahol a közeghatár feltételeknek teljesülni kell, a Γ_B peremen a $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$, a Γ_{H_n} és a Γ_{H_δ} peremeken a $\vec{H} \times \vec{n} = \vec{0}$, a Γ_E peremen pedig az $\vec{E} \times \vec{n} = \vec{0}$ feltétel kell teljesüljön. Belátható, hogy a Γ_{H_δ} peremen a $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$, a Γ_E peremen pedig a $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ feltétel is teljesül [13, 19].



2.2. ÁBRA Örvényáramú probléma sematikus rajza.

Ebben a részben csak a Ω_δ tartományban kialakuló elektromágneses tér számításával foglalkozom, mivel a levegővel kitöltött tartományra a statikus mágneses térnél ismertetett egyenletek érvényesek.

Az örvényáramú tartomány számítása is többféleképp lehetséges. Alapvetően a \vec{T} áram-vektorpotenciál kiegészítve a Φ redukált mágneses skalárpotenciállal, és az \vec{A} mágneses vektorpotenciál a V elektromos skalárpotenciállal alkalmazható. A dolgozatban az utóbbit alkalmazom kétdimenziós feladatokra, ezért itt az ehhez kapcsolódó formalizmust ismertetem röviden.

A mágneses vektorpotenciál és az elektromos skalárpotenciál. A divergenцияmentes mágneses indukciót le tudjuk írni az \vec{A} mágneses vektorpotenciál rotációjaként. Ez automatikusan teljesíti a (2.3) mágneses Gauss-törvényt. Behelyettesítve a (2.6) kifejezést a (2.2) Faraday-törvénybe, a következő összefüggést kapjuk:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}, \quad (2.15)$$

mert a rotáció (azaz a térbeli deriválás) és az idő szerinti deriválás felcserélhető. A rotációmentes $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ vektortérből tudjuk származtatni a V elektromos skalárpotenciált

($\nabla \times \nabla \varphi \equiv \vec{0}$, ami minden $\varphi = \varphi(\vec{r})$ vagy $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ skalárfüggvényre teljesül) a következőképpen:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V, \quad (2.16)$$

és az elektromos teret le tudjuk írni két potenciállal, mint

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V. \quad (2.17)$$

Az Ampère-féle gerjesztési törvény és az örvényáram forrásmentessége szolgáltatja a felírható parciális differenciálegyenleteket, melyeket a peremfeltételek egészítenek ki az alábbi módon [12, 13, 15, 17, 19, 24, 48]:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V = \vec{0}, \quad \text{az } \Omega_{\text{ö}} \text{ tartományon,} \quad (2.18)$$

$$-\nabla \cdot \left(\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V \right) = 0, \quad \text{az } \Omega_{\text{ö}} \text{ tartományon,} \quad (2.19)$$

$$(\nu \nabla \times \vec{A}) \times \vec{n} = \vec{0}, \quad \text{a } \Gamma_{H_{\text{ö}}} \text{ peremen,} \quad (2.20)$$

$$\left(-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{a } \Gamma_{H_{\text{ö}}} \text{ peremen,} \quad (2.21)$$

$$\vec{n} \times \vec{A} = \vec{0}, \quad \text{a } \Gamma_E \text{ peremen,} \quad (2.22)$$

$$V = 0, \quad \text{a } \Gamma_E \text{ peremen.} \quad (2.23)$$

A mágneses vektorpotenciálra felírt formalizmus is alkalmas önmagában villamos beavatkozók vizsgálatára, modellezésére. Viszont napjainkra, a pontos modellezéshez elengedhetetlen az örvényáramok hatásának figyelembevétele. Ezért a villamos beavatkozók esetében úgynevezett csatolt formalizmust alkalmazunk, mint az $\vec{A}V - \vec{A}$ formalizmus, ahol az örvényáramú tartományt az $\vec{A}V$ formalizmus, a levegőben létrejövő mágneses teret az \vec{A} vektorpotenciál írja le. A csatolt formalizmus az előzőekben bemutatott statikus és örvényáramú térhez tartozó két potenciálformalizmus (2.7), (2.18) és (2.19) egyenleteiből és (2.13), (2.14), (2.20)–(2.23) peremfeltételeiből áll össze, amellyel már az örvényáramok hatását is tartalmazó elektrodinamikai rendszer, például villamos gép vizsgálható. De két dimenziós esetben, ha a tekercs áramát, vagy áramsűrűségét írom elő gerjesztésként, nincs szükség az elektromos skalárpotenciálra, ezért az nullának választható ($V = 0$), és az örvényáramú rész egyenleteiből a $\sigma \nabla V$ tagok kiesnek.

2.1.3. A végeselem-módszer

Az utóbbi pár évtizedben hihetetlen gyors fejlődésen ment át a számítástechnika, mely a számítógépes tervezés eszközeinek hatalmas erőforrást biztosított, és biztosít mind a mai napig. Ugyanílyen haladás ment végbe a CAD (*Computer Aided Design*) szoftverek terén is, kihasználva a fejlődést, amennyire csak lehet. A CAD szoftverek számítástechnikai megjelenése forradalmasította a tervezési folyamatokat, melyek megváltoztatták a különféle szimulációkat, köztük az elektromágneses tér szimulációját, vizsgálatát is.

A mérnöki gyakorlatban nagyon fontos a numerikus szimuláció. A differenciálegyenletekkel leírt fizikai jelenségeket meg lehet oldani analitikusan is, de a problémáknak csak

egy nagyon szűk csoportját, vagy nagyon egyszerű geometriájú feladatoknál használható. A numerikus eljárás egy jóval összetettebb technika, amellyel nem a pontos megoldást, hanem annak közelítését kapjuk.

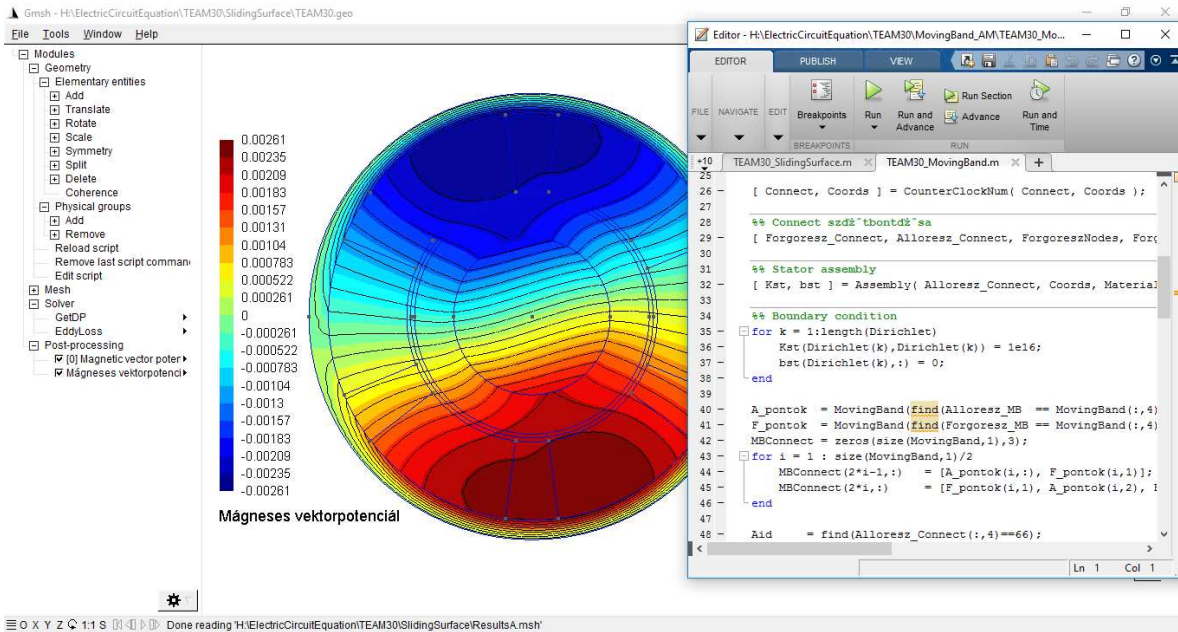
A numerikus módszerek alapja, hogy a parciális differenciálegyenleteket algebrai egyenletekké egyszerűsítsék. Ezen egyenletek megoldása adja az ismeretlen potenciálok és elektromágneses mennyiségek közelítését. Az egyszerűsítés során a differenciálegyenleteket térben, és ha szükséges, időben is diszkretizáljuk. Az így előálló egyenletek különböző egyenletrendszer-megoldó algoritmusok alkalmazásával oldhatók meg.

Az előzőekben ismertetett, és a továbbiakban bemutatásra kerülő elliptikus és parabolikus típusú parciális differenciálegyenletek közelítő megoldása többek között a súlyozott maradék elv alapján lehetséges [2, 3, 7, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 30, 48, 73, 82–87]. A súlyozott maradék elv körén belül három fő csoportba sorolhatók a különféle módszerek: a direkt, a gyenge alak és az inverz. Ezek közül csak a gyenge alakkal, a Galjorkin-technikával, és ezen belül a végeelem-módszerrel foglalkozom [2, 3, 12, 13, 15–17, 19, 24, 25, 27–29, 31, 36, 48, 88, 89]. A végeelem-módszer (FEM - *Finite Element Method*) a legnépszerűbb és a legelterjedtebben alkalmazott numerikus technika a parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására. Az alacsonyfrekvenciás elektrodinamikai problémák, mint a villamos gépek elektromágneses térszámításában pedig szinte kizárólag a végeelem-módszert alkalmazzák.

A súlyozott maradék elv lényege abban áll, hogy nem törekszik sem a parciális differenciálegyenletek, sem a peremfeltételek tökéletes kielégítésére, hanem a parciális differenciálegyenletek és a peremfeltételek maradékának egy tetszőleges súlyfüggvénnyel vett ún. belső szorzatát teszi zérussal egyenlővé, s ennek a súlyozott maradéknak a megoldása szolgáltatja a probléma megoldásának egy lehetséges közelítését. A gyenge alakot úgy nyerjük, hogy a szorzatfüggvényre vonatkozó integrálási tétel alkalmazzuk, melynek eredményeképp a deriválás fokszáma eggyel csökken. A súlyfüggvény tetszőlegesen megválasztható. Az úgynevezett Galjorkin-eljárás kapcsán a súlyfüggvényt és a potenciálokat közelítő függvényt azonosnak kell választani, s ezúton lehet eljutni a végeelem-módszerhez is. Megjegyzem, hogy a végeelem-módszer a Dirichlet-típusú peremfeltételeket tökéletesen, míg a Neumann-típusú peremfeltételeket a térbeli diszkretizálás finomságától függően, közelítőleg elégíti ki.

A végeelem-módszer lépései

A végeelem-módszer egy numerikus technika a parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására, melynek lényege, hogy a megoldandó probléma geometriáját egyszerű síkbeli vagy térbeli – ez függ a feladat dimenziójától – alakzatok segítségével felbontjuk (diszkretizáljuk), és azokon egyszerű egyenleteket felírva lehet a feladatot megoldani. Munkám során elsősorban a `Matlab` [20, 36, 90] szoftvert alkalmaztam, amely kiválóan alkalmas a saját fejlesztésű rutinok implementálására és tesztelésére. A megoldandó feladat diszkretizálásához a szabad forráskódú `GMSH` [91, 92] programcsomagot alkalmaztam. A 2.3. ábra a dolgozatomhoz megvalósított környezetet mutatja. A megvalósított függvények alapjául a Széchenyi István Egyetem Automatizálási Tanszékén készülő, saját fejlesztésű végeelem-szoftver szolgált, melynek fejlesztése C-nyelven [93] történik, és a szabad forráskódú `GMSH` [91, 92] és `PETSc` [94] programcsomagokra épül. Ennél a szoftvernél az egyik fő cél az összegyűjtött nemlineáris formalizmusok implementációja [19, 93, 95]. A `GMSH` biztosítja a keretrendszert, a végeelem-környezetet, a hálógenerálót és a megjelenítőt, a `PETSc` függvényeivel pedig a modern számítástechnika előnyeit



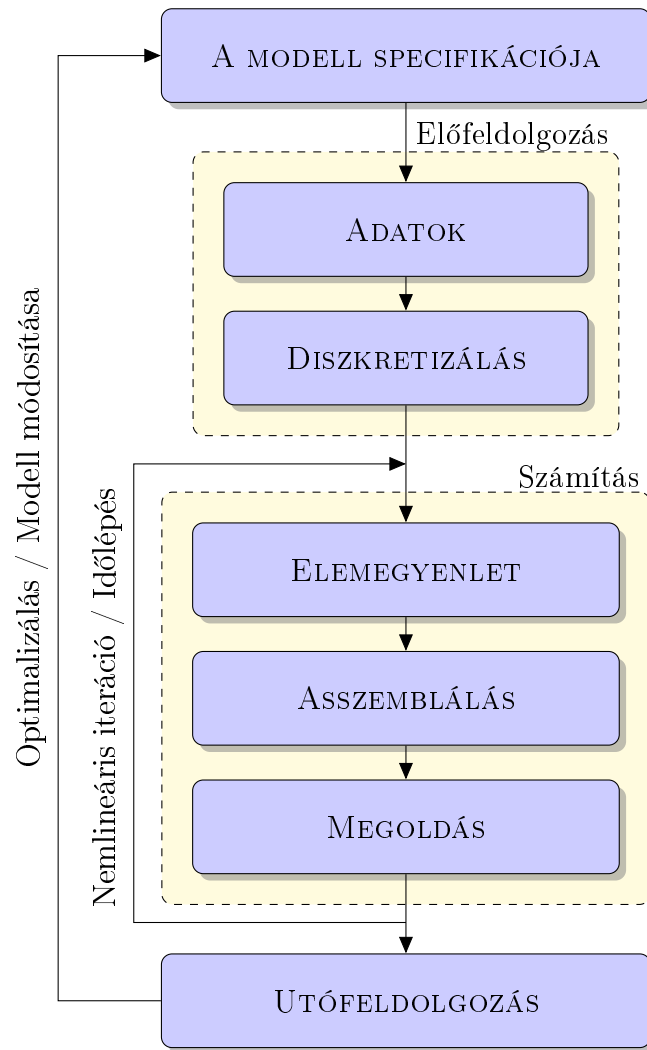
2.3. ÁBRA Az elő- és utófeldolgozóként alkalmazott GMSH és a rutinok implementálásához használt Matlab program.

(például párhuzamos számítások különféle hardvereken) is kihasználva lehet megvalósítani a konkrét formalizmusokat, s azok megoldását.

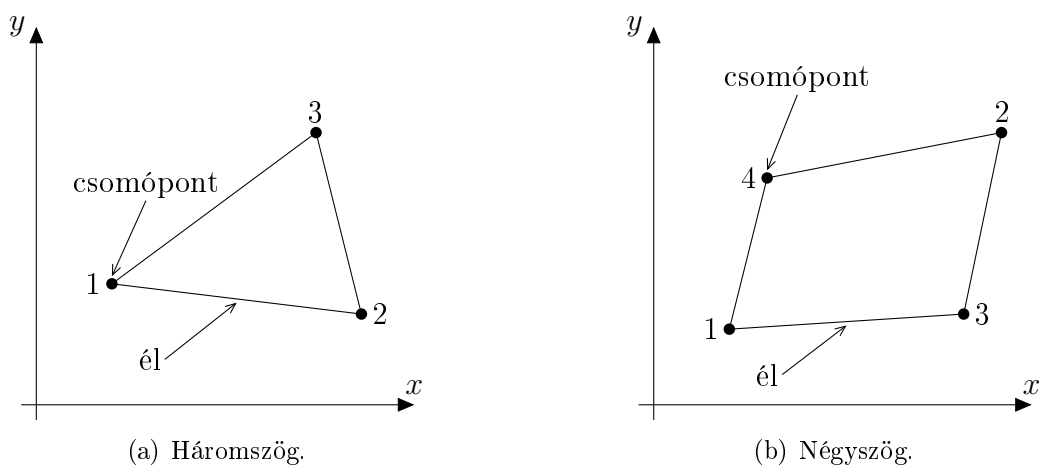
A végelem-módszer lépései a 2.4. ábrán láthatóak. Az első lépés a modell megalkotása, melyet majd valamilyen elektromágneses térszimulációs eljárással vizsgálunk. Meg kell határozni, melyik parciális differenciálegyenleteket használjuk, milyen peremfeltételek, folytonossági feltételek kellenek a szimulációhoz. Azt is meg kell adni ebben a lépésben, melyik rész lesz örvényárammentes rész, ahol a stacionárius mágneses tér egyenleteit fogjuk használni, és melyik rész lesz örvényáramú tartomány, ahol a kvázistacionárius Maxwell-egyenleteket használjuk. Ezen felül fontos eldönteni, hogy a vizsgált feladatban az egyes anyagok karakterisztikáját lineárisnak, vagy nemlineárisnak tekintjük. Miután kiválasztottuk a potenciálokat, a potenciálhoz tartozó parciális differenciálegyenletek gyenge alakját kell kidolgozni, amelyek a súlyozott maradék elvnek megfelelően lineáris, vagy nemlineáris algebrai egyenletek. A feladat geometriáját valamilyen CAD-rendszer segítségével képezzük le.

Az előfeldolgozási fázisban definiáljuk a feladathoz kapcsolódó anyagi jellemzőket és a gerjesztést, valamint ebben a lépésben történik a geometria diszkretizálása végelemekkel. A végelem egyszerű síkbeli vagy térbeli geometriai alakzat. Két dimenzióban például a háromszög (2.5(a) ábra) és négyszög (2.5(b) ábra) a legelterjedtebben alkalmazott forma, amellyel a geometria egyszerű szabályokkal felbontható. Az így előállított felbontás (a parciális differenciálegyenlet diszkretizálása) definiálja a megoldandó egyenletrendszer is, ugyanis a háló csomópontjaiban és/vagy a háló élei mentén helyezkednek el az ismeretlen potenciál közelítésére használt polinomok együtthatói. Előbbi esetben csomóponti, utóbbi esetben vektoriális vagy élelemes közelítésről beszélünk.

Ezután a súlyozott maradék elv gyenge alakjára támaszkodva az egyetlen végelemre felírható lokális egyenletek (elemegyenlet) alapján fel kell építeni a megoldandó globális egyenletrendszert. Ez az ún. asszemblálás, amikor ciklusban végig kell menni valamennyi végelemen, s a megfelelő egyenletek együtthatóit a globális egyenletrendszerben a meg-



2.4. ÁBRA A végeselem-módszer főbb lépései.



2.5. ÁBRA Tipikus végeselemek a kétdimenziós $x - y$ síkon.

felelő helyre hozzá kell adni. Ennek eredménye egy nagyméretű, ritka (*sparse*) mátrix, mivel nagyon kevés eleme különbözik zérustól. A megoldó algoritmus szempontjából sok

esetben célszerű szimmetrikus mátrixot generálni, amennyiben az lehetséges. Az egyenletrendszer megoldására számos algoritmus létezik. Az időfüggő problémánál (például örvényáramú feladatnál, vagy mechanikai tranziens vizsgálatánál) a számítási ciklust különböző bemeneti feltételek mellett ismételni kell.

Az egyenletrendszer megoldása után a közelítő potenciálfüggvény ismeretében gyakorlatilag az összes kérdéses mennyiség (például nyomaték, veszteségek) számítható. Ez az utófeldolgozási fázis. A szimulációs eredmények birtokában a modell javítható, a végelemekeken alapuló és időbeli diszkretizálás finomítható, amivel a modell pontossága növelhető. Ha optimalizáció is kapcsolódik a feladathoz [96–98], akkor az ebben a lépésben meghatározott mennyiségek alapján történik a célfüggvény kiértékelése, és ha szükséges a geometria vagy anyagjellemzők módosítása, ahogy a 2.4. ábra is mutatja.

A potenciálok közelítése

A numerikus módszerek a megoldandó problémák egy approximációját szolgáltatják. Végeselem-módszer esetén a parciális differenciálegyenletekben szereplő potenciálokat a végelemekre felírt polinomok segítségével lehet approximálni, amelyeket formafüggvényeknek is neveznek [19, 36]. Ebben a fejezetben a dolgozatomhoz kapcsolódóan az approximáció lényegét foglalom össze.

A $\varphi = \varphi(\vec{r})$ vagy $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ reprezentatív skalár potenciálfüggvények m számú lineárisan független függvény lineáris kombinációjával approximálhatóak:

$$\varphi \simeq \varphi_a = \varphi_D + \sum_{i=1}^m N_i \varphi_i, \quad (2.24)$$

ahol φ_a jelöli a φ potenciálfüggvény közelítését. Az $N_i = N_i(\vec{r})$ a skalár súlyfüggvény (vektor-skalár függvény) és az approximáció során alkalmazott közelítő formafüggvény, a $\varphi_i = \varphi_i(t)$ pedig az ismeretlen együtthatókat jelöli (statikus esetben ezek természetesen időtől függetlenek). A fenti közelítés első tagja a Dirichlet-féle peremfeltételek kielégítését hivatott biztosítani,

$$\varphi_D = g, \quad \text{a } \Gamma_D \text{ peremen,} \quad (2.25)$$

ahol g egy előre megadott érték. Ennek következménye, hogy a Γ_D peremen a második összeg minden tagja zérus kell legyen, azaz teljesülnie kell az

$$N_i = 0, \quad \text{a } \Gamma_D \text{ peremen } (\forall i, i = 1, \dots, m) \quad (2.26)$$

feltételnek.

A csomóponti formafüggvények

A skalárpotenciálok csomóponti végelemekkel közelíthetők. A csomóponti elemek alkalmazása során az N_i formafüggvények segítségével kell közelíteni a potenciálokat, s az ismeretlenek a végeselemháló csomópontjaihoz kapcsolódnak. A közelítő formafüggvények egyszerű folytonos polinomokból épülnek fel, melyek tartója egyetlen végeselem [19, 36].

A formafüggvények a következő tulajdonságokkal bírnak [15]:

- (i) Minden formafüggvény a teljes problématerületen értelmezett;

- (ii) Minden csomóponti formafüggvény egyetlen csomóponthoz tartozik;
- (iii) Minden csomóponti függvény azon végelemekeken különbözik nullától, amelyek érintkeznek annak csomópontjával;
- (iv) A csomóponti függvény értéke egységnyi az adott csomópontban, illetve minden más csomópontban zérus;
- (v) A formafüggvények lineárisan függetlenek.

A végelem-módszerrel számított közelítő megoldás pontossága alapvetően három módon javítható. A végelemek számát növelve, vagyis a felbontást finomítva az ún. h -FEM nyerhető. A közelítő polinomok fokszámának növelése a p -FEM-et eredményezi, míg a kettő alkalmas kombinációja a hp -FEM.

Skalárfüggvények approximációja a (2.24) összefüggés szerint lehetséges. Végelem-módszer esetében az $N_i = N_i(\vec{r})$ bázisfüggvényeket csomóponti formafüggvényeknek hívják. A formafüggvények tulajdonságai alapján a csomóponti formafüggvények az alábbi összefüggés szerint definiálhatók [19, 36]:

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{az } i\text{-edik csomópontban,} \\ 0, & \text{bármely más csomópontban.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Az $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ potenciálfüggvénynek két dimenzióban csak z irányú komponense van, ezért skalár potenciálfüggvényként kezelhető, és az alábbi módon írható fel:

$$\vec{A} = A_z \vec{e}_z, \quad (2.28)$$

ahol \vec{e}_z a z irányba mutató egységvektorok, az $A_z = A_z(x, y, t)$ függvények pedig ezen irányban az \vec{A} vektorpotenciál komponense.

Vektorpotenciálok esetében az egyes komponenseket külön-külön lehet csomóponti formafüggvényekkel közelíteni, mely ebben az esetben:

$$\vec{A} \simeq \sum_{i=1}^m N_i A_{z,i} \vec{e}_z. \quad (2.29)$$

A kutatások eredményeképp kiderült azonban, hogy a vektorpotenciálok ily módon történő közelítése számos numerikus problémát okoz háromdimenziós esetben [13, 58, 71]. A Coulomb-mérték előírására különös gondot kell fordítani, különben az iteratív módszerek sok esetben nem konvergensek. De ez a probléma itt nem áll fenn, mivel a mágneses vektorpotenciálon alapuló formalizmus egyértelműen megoldható két dimenzióban, ahogyan ez a (2.12) összefüggésből látható.

2.2. Csatolt problémák modellezése

Az utóbbi évtizedekben a numerikus térszámítás fokozatosan elfogadottá vált a különféle villamos berendezések tervezésénél, vizsgálatánál. Ezzel párhuzamosan az irányítástechnika és a teljesítményelektronika is összetettebb lett, és egyre jelentősebb szerepet töltenek be a villamos eszközök működésében. A villamos berendezés és elektronikájának

tervezése – az irányítást is beleértve – hagyományosan külön történik. Azonban napjainkra a különféle villamos eszközöknek, hogy teljesítsék a velük szemben támasztott követelményeket, nagyon sok feltételnek kell megfelelnie. Ezek közül sok feltételnek nincs is valós fizikai jelentése, a paraméterek kalibrációja időigényes és bonyolult, és legalább egy prototípust igényel. Az egyre jobb hatásfokra és teljesítményre törekvés, a minél alacsonyabb előállítási költség arra ösztönzi a fejlesztőket, hogy a tervezett berendezés és az elektronika fejlesztése együtt történjen. Ehhez pedig elengedhetetlen egy olyan szimulációs környezet, ahol a berendezés numerikus térszámítási modellje összekapcsolható a meghajtó elektronika és a szabályozási kör modelljével. Így az eddig közönséges differenciálegyenletekkel közelített modellt kiválthatjuk egy javított modellel, amely még pontosabban írja le a különféle fizikai jelenségeket.

A végeelem-módszer jelenleg a legkorszerűbb numerikus mágneses térszámítási eljárás a villamos beavatkozók szimulációjánál. A meghajtó elektronika általánosságban valamilyen elektronikus áramkörből és az irányítási algoritmusból áll. Ezek összetettsége változó. Ezen felül, az irányítási rendszerek szimulációja és modellezése általában valamilyen rendszerszimulátor - mint például a Simulink [99] vagy az Xcos [100] - segítségével történik, mely egy nagyon leegyszerűsített analitikus összefüggésekből kapott vagy mérés útján identifikált modellt tartalmaz. Ahhoz, hogy ténylegesen össze tudjuk kapcsolni a végeelem-módszeren alapuló modellt az elektronikával, és a szabályozási körben lévő szabályozott szakaszt kiváltani vele, a modell bemeneteit és kimeneteit illeszteni kell a szabályozási körhöz. Ehhez pedig, az előző részben bemutatott Maxwell-egyenletekre épülő modell nem elegendő.

Ilyen esetekben megkerülhetetlen a csatolt szimuláció. Már az 1980-as években foglalkoztak a csatolt szimulációval [101–106]. Azonban ekkor még jellemzően nagyon egyszerű geometriával rendelkező feladatok esetében alkalmazták az erősen korlátozott számítási kapacitás miatt, és ekkor még a szerzők a saját fejlesztésű programjukat használták, mint például Peter Silvester [24, 107, 108] vagy Antero Arkkio [103] Fortran-nyelven implementált programja, vagy a Budapesti Műszaki Egyetem Elméleti Villamosság Tanszékén készült program [105]. Az azóta eltelt időben, a számítási kapacitás a szoftverekkel együtt jelentősen fejlődött, de a felmerülő feladatok komplexitása is ezzel arányosan nőtt. Napjaink egyik trendje, hogy a nagy, összetett rendszerek minél több fizikai hatás figyelembevételével egyszerre kerüljenek modellezésre. Ehhez azonban különböző fizikai jelenségeket kell összekapcsolni (például elektromágneses–termikus–mechanikai–akusztikai), ahol a csatolás módja még ma is komoly kutatási terület. A csatolt szimulációknál a csatolás alapján megkülönböztethetünk fizikai, numerikus és geometriai csatolást [42, 46, 109–112].

A valóságban a villamos aktuátorok elektronikája az aktuátor feszültségén keresztül szabályozza az eszközt. Továbbá, a beavatkozók szinte kivétel nélkül tartalmaznak valamilyen mozgó alkatrészt, melynek az elmozdulása, elfordulása a szabályozási körben a szabályozott jellemző, vagy a visszacsatoláshoz felhasznált kimenet. Tehát, a két terület összekapcsolásához csatolt numerikus modellt kell alkalmazni, aminél figyelembe vesszük a tekerceselés egyenletét, hogy a bemenet az elektronikának megfelelő legyen. A mozgásnál jelentkező jelenségek sem elhanyagolhatóak – mint például az elmozdulás vagy szögelfordulás mint kimeneti jellemző – mert szinte kivétel nélkül fel kell használni a szabályozási körben.

A dolgozat célkitűzéseire fontos a modelleknél a feszültségkényszer, illetve, ha a rendszer tartalmaz mozgó részt, úgy a mozgás időbeli viselkedésének leírása is. A fe-

szültséggel történő gerjesztéshez a tekercselés áramköri modelljét kell csatolni, amíg a mozgás leírásához a mechanikai mozgás tranziens egyenletét kell figyelembe venni. A következőkben áttekintem a két jelenség csatolásához kapcsolódó irodalmat és ismertetem a dolgozatban alkalmazott módszereket.

2.2.1. Áramkör csatolása

Az áramkörrel csatolt modelleknél kezdetben csak a tekercselések feszültségegyenletének csatolása volt a fő cél. Eleinte a feszültségegyenlet és az elektromágneses teret leíró egyenletek változójánál szinuszos időbeli változást feltételeztek, így az egyszerűbb frekvenciatartománybeli vizsgálatot alkalmazták elektromágneses relére és árnyékolt pólusú motorra [113], majd kalickás forgórészű aszinkron motorra, ahol már a tekercsvégek inductivitását is figyelembe vették [114]. Ezt követően a csatolást időtartománybeli vizsgálatra alkalmazták kétféle vezetõelrendezés [115], terhelt transzformátor [116], árnyékolt pólusú gép [102], kalickás forgórészű aszinkron gép és állandó mágneses motor [101] esetében. Az időtartománybeli és frekvenciatartománybeli erős csatoláshoz kapcsolódó egységes elméleti áttekintést, és azok tömör és hornyolt forgórészű aszinkron motorokon történő összehasonlítását Antero Arkkio doktori disszertációjában ismertette [103].

Az előző bekezdésben hivatkozott irodalmakban közölt ismeretek alapján, egy külső áramkör csatolása már viszonylag egyszerű. Ehhez nem kell más, mint további áramköri elemeket hozzáadni a már csatolt tekercs feszültségegyenletéhez. Ez alapján nagyon sok szerző mutatott be olyan általános technikát, melynek köszönhetően különféle aktív vagy passzív kétpólusokból, és félvezetőkkel álló áramkört csatolt a villamos beavatkozó elektromágneses modelljéhez [117–119]. Sok szerző az áramkörök matematikai leírásához a hurokáramok és csomóponti potenciálok módszerét alkalmazta [117, 119, 120]. A másik lehetőség az áramkör állapotter reprezentációjának csatolása, ahol a tekercs árama és a kondenzátor feszültsége a teljes egyenletrendszerhez hozzáadott további ismeretlenek [118, 121–123]. Mindkét esetben fontos szempont, hogy minimalizálják az újabb ismeretlenek számát.

A félvezető eszközök fejlődésével a villamos beavatkozók jelentős részét már nem direktben a hálózatról táplálták, hanem valamilyen teljesítményelektronikai áramkörrel. Emiatt a beavatkozókat a teljesítményelektronikával együtt kezdték vizsgálni. Ennek több módja is van, melyből az egyszerűbb, az áramköri modellből számított feszültség időfüggvényét felhasználni gerjesztésként. Ilyen módon először egy kalickás forgórészű aszinkron motort vizsgáltak, ahol a motor szimulációjának gerjesztése a frekvenciaváltó kimenetén kapott, előre meghatározott feszültség időfüggvénye volt [124]. Hasonló módszerrel vizsgáltak kapcsolt reluktancia motoros hajtást is [125]. Azonban ahhoz, hogy az elektronika és a beavatkozó tényleges kölcsönhatását vizsgáljuk, szükséges a áramkör modellezése is. A félvezető elemeket különféle módon modellezték, mint például exponenciális függvénnyel, amit egy egyszerű mágneses körnél [126], majd állandó mágneses szinkron gépre [127, 128] alkalmaztak. A dióda egy másik modellezési módja egy vezérelt áramforrással párhuzamosan kötött ellenállás, melyet állandó mágneses gép és kalickás forgórészű aszinkron gép vizsgálatánál használtak [122]. A dióda egy feszültségforrással sorba kötött ellenállással is helyettesíthető [129]. Ugyanebben a cikkben, a tranzisztorra is hasonló modellt alkalmaztak. A dióda és tranzisztor áramköri modellje, attól függően, hogy vezet vagy zárt állapotban van, változik. A vezetési és zárési állapot megkülönböztetését először egy impulzus szélesség modulációval meghajtott szolenoid aktuátor

szimulációjánál alkalmazták [129]. A későbbiekben a pontos modellezés érdekében már arra törekedtek, hogy az áramkör működését is minél pontosabban leírják. Ennek egyik módja, hogy az áraminverter egyenletrendszerét csatolták a modellhez, amit először egy állandó mágneses gép vizsgálatánál alkalmaztak [130]. Ebben az alkalmazásban, a pontosabb modellezés érdekében, attól függően, hogy vezetési vagy kommutációs fázisban van egy adott fázis, változtatták az elektrodinamikai modellben a tekercs ellenállását és induktivitását. Ezt továbbfejlesztve később az inverter állapotter modelljét alkalmazták egyfázisú aszinkron motornál [121], majd eljárást dolgoztak ki, mellyel automatikusan elkészíthető tetszőleges áramkör állapotter egyenlete, amit egy transzformátort tartalmazó fly-back konverteren keresztül demonstráltak [131]. Legvégül, forgógépekre is kiterjesztették ezt a módszert [132].

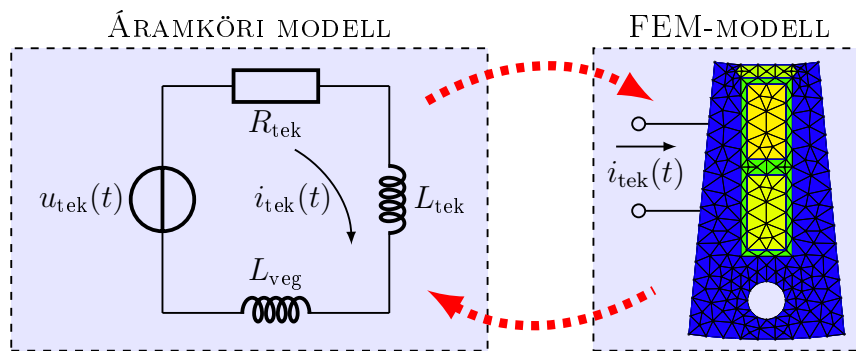
A témához kapcsolódó irodalom bemutatása után a beavatkozó feszültségegyenletnek csatolásához kapcsolódó elméleti áttekintés következik, ahol a kétdimenziós térszámításon alapuló modell és a tekercselés átmeneti jelenségeit is leíró feszültségegyenlet összekapcsolására fókuszálok. A dolgozatban alkalmazott példák esetében nincs jelentősége a gerjesztő áramkörnek, azonban a tekercs feszültségegyenletének annál inkább, ezért a továbbiakban csak ezzel foglalkozom. Azonban a feszültségegyenlet csatolásához alkalmazott technikák, és az arra tett kijelentések egy tetszőleges áramkör csatolására is érvényesek.

A villamos eszközök – néhány speciális esettől eltekintve – úgynevezett feszültségkényszerrel működnek. Vagyis a (2.18) egyenlettel nyert modell önmagában nem elegendő minden körülmények között, hiszen a jobb oldalon szereplő \vec{J}_0 áramsűrűség révén a gerjesztőáramot tudom előírni. Ennek következtében csak az állandósult állapotban tudom a feszültségkényszerrel üzemelő villamos berendezést vizsgálni.

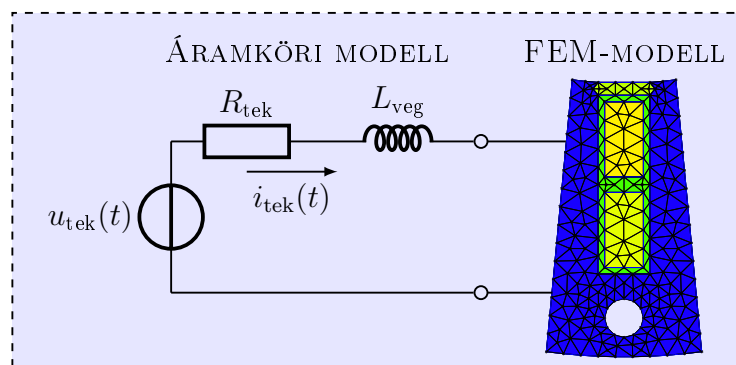
A feszültségegyenlet numerikus térszámításhoz kapcsolását két csoportba lehet sorolni, úgy mint gyenge – indirekt vagy soros –, és erős – direkt vagy monolitikus – csatolás [42, 46, 109–111, 133, 134].

Gyenge csatolás

A gyengén csatolt problémánál az összecsatolt jelenségek egymást követő lépésben kerülnek megoldásra [46, 110, 111, 120, 122, 135–139]. A csatolás ebben az esetben úgy néz ki, hogy az első megoldás – egy villamos beavatkozó esetében a feszültségegyenletből nyert áram-időfüggvény – eredményét alkalmazzuk a következő vizsgálat bemeneteként, ami lehet egy végeselemeken alapuló modell. Tehát a csatolt feladat szétválik több alfeladatra, és ezt egymás után, sorosan oldjuk meg. A megoldás történhet egy iterációs hurokban, ahol a numerikus modellből nyert adatoknak megfelelően az áramköri modell paraméterei is változnak lépésről lépésre, amíg az eljárás nem konvergál [120, 137]. Sematikusan ezt mutatja a 2.6(a) ábra. A soros módszer jóval rugalmasabb és kevésbé összetett, mint a direkt, mert egymástól elkülönítve – akár különböző időlépéssel – lehet megoldani a különféle fizikai hatásokat. Szintén jó tulajdonsága a gyenge csatolásnak, hogy megtartja a végeselem-módszer előnyös tulajdonságait, mint például a rendszermátrix szimmetriáját és pozitív definititását. Vagyis egy nagyméretű, végeselem-módszeren alapuló feladat is kezelhető és a már jól bevált, hatékony megoldó rutinok használhatók hozzá [110, 139]. A gyakorlatban használt, kereskedelmi forgalomban kapható végeselem-módszert alkalmazó szoftverek szinte kivétel nélkül ezt a változatot alkalmazzák.



(a) Gyenge csatolás.



(b) Erős csatolás.

2.6. ÁBRA Az áramkör csatolásának sematikus ábrái.

Erős csatolás

Az erős csatolásnál az egyenletek – melyek a csatolt fizikai jelenségeket leírják – egyszerre, egy egyenletrendszerként kerülnek megoldásra, az összes szükséges változó figyelembevételével [41, 101–103, 111, 117, 136, 137, 139–146]. Ez a módszer gyorsabb és biztos konvergenciával bír [110, 137, 139], mint a soros csatolás, hiszen itt nincs szükség adatok átadására, ahogy ezt a 2.6(b) ábra is mutatja. A direkt módszert akkor érdemes használni, ha az összekapcsolt jelenségek közötti kapcsolat erősen nemlineáris és az egyes terek időállandói összemérhetőek [110], mivel itt a különféle csatolt jelenségeket azonos időskálán belül kell megoldani. A monolitikus csatolási módszerrel kapcsoltban, a nagy szakirodalma ellenére is komoly kutatások folynak napjainkban, a minél hatékonyabb, általánosabb csatolás, és az így előálló egyenletrendszer megoldhatóságának érdekében [147–149].

A villamos beavatkozók esetében, amikor a tekercselés egyenletét és az elektromágneses teret kapcsolják össze, a legelterjedtebben alkalmazott csatolási mód a direkt csatolás. Az általam vizsgált feladatoknál a feszültség egyenlet és az elektromágneses probléma időállandója összemérhető, és a célul kitűzött párhuzamosításhoz is célszerűbb. Ezen okok miatt a közvetlen csatolás jóval korszerűbb technika mint a gyenge, a továbbiakban csak az erős csatolással foglalkozom.

A villamos beavatkozók numerikus modellezésében a tekercselést jellemzően két csoportra oszthatjuk [41, 101–103, 144–146]:

- **A vékony vezetőkből álló tekercselés** – jellemzően a gerjesztő- vagy fázistekercselés a álló- és forgórészen – ahol a tekercselés keresztmetszetében az áramot

homogénnek feltételezzük, mert a vékony vezető rádiusza kisebb mint a behatolási mélység;

- **A vastag vagy tömör vezető** – a kalickás forgórészű aszinkron motor forgórészrúdjai vagy a szinkron gép csillapító tekercselése – ahol az áram a szkinhatás miatt már nem homogén a keresztmetszetre nézve.

Itt fontos még megjegyezni, hogy transzformátorok esetében egy harmadik csoport is van, az úgynevezett fólia tekercselés [144, 147].

A dolgozatnak nem célja a különféle tekercselések modellezésével foglalkozni, és az alkalmazott mintapéldákban (az aszinkron motort leszámítva) csak fázistekercselés található. Ezért a következőkben a vékony vezetőből álló tekercselés erős csatolásának származtatását mutatom be kétdimenziós feladatokra. A vastag és tömör vezetőkhöz kapcsolódó egyenletekről, formalizmusról bővebben a [41, 42, 103] irodalmakban lehet olvasni, melyekben a témához kapcsoló bőséges irodalom is található.

Erős csatolás esetében egy tekercselés tartományára a (2.7) egyenlet helyett az A. függelékben levezetett egyenleteket alkalmazzuk, azaz

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{\mathbf{A}}) - \frac{N_{\text{tek}}}{A_{\text{tek}}} i_{\text{tek}} \vec{\mathbf{e}}_z &= \vec{\mathbf{0}} \quad \text{az } \Omega_0 \text{ tartományon,} \\ \frac{N_{\text{tek}} l}{A_{\text{tek}}} \int_{A_{\text{tek}}} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_{\text{tek}} + R_{\text{tek}} i_{\text{tek}} &= u_{\text{tek}} \quad \text{az } \Omega_0 \text{ tartományon,} \end{aligned} \tag{2.30}$$

ahol az N_{tek} a menetszám, az A_{tek} a tekercs keresztmetszete és az l a vezető hossza a z irányba. Itt már nem az áram vagy áramsűrűség, hanem az u_{tek} feszültség lesz a gerjesztőmennyiség, és az i_{tek} is mint ismeretlen szerepel a feladatban, a mágneses vektorpotenciál mellett. A fenti egyenletek egy tekercsre vonatkoznak. Ha több tekercselés van a feladatban, akkor annyiszor kell a feszültségegyenletet alkalmazni, ahány különálló tekercs vagy fázis van.

2.2.2. A mechanikai egyenlet csatolása

A villamos beavatkozók modellezésében fontos a villamos és a mechanikai jelenségek közötti kapcsolat figyelembevétele. Az elektromágneses erő vagy nyomaték fontos szerepet játszik az energiaátalakításban. Ezért, hogy figyelembe lehessen venni a vizsgálat során a mozgó részre ható erőket – például a tehetetlenség vagy a súrlódás miatt – Newton második törvényéből vagy a Lagrange-féle elsőfajú egyenletből [150] felírható differenciálegyenletet kell alkalmazni. Mivel a dolgozatban vizsgált feladatoknál a mozgó rész forgómozgást végez, ezért itt csak a forgó mozgásra vonatkozó differenciálegyenletet mutatom be, ahol az ω szögsebesség az ismeretlen [41, 46, 151, 152], azaz

$$J \frac{d\omega}{dt} + K_s \omega = M_{\text{em}} - M_{\text{T}}, \tag{2.31}$$

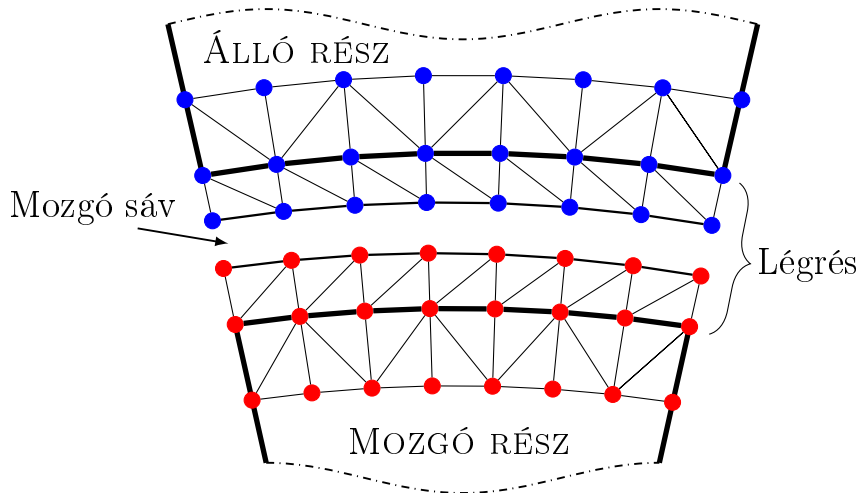
ahol J a tehetetlenségi nyomaték, K_s a súrlódási tényező, M_{em} az elektromágneses nyomaték és M_{T} a mozgást végző részre ható terhelőnyomaték. A mechanikai mozgás figyelembevételéhez szükséges a Θ szöghelyzet ismerete is, mely a következő összefüggéssel határozható meg:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega. \tag{2.32}$$

A (2.31) és a (2.32) egyenletek felhasználásával tetszőleges üzemállapot figyelembe vehető, ahol az M_{em} nyomaték teremti meg a végeelem-módszerrel a kapcsolatot. Ez a mennyiség az irodalomból jól ismert technikák [15, 41, 46, 103, 153–155] valamelyikével számítható, melyek közül a Maxwell-féle feszültségtenzor módszert [15, 42, 45, 46, 153, 155] és az Arkkio-módszert [41, 103] részletesebben bemutatom a B. függelékben. A fenti differenciálegyenletekben szereplő deriváltakhoz pedig tetszőleges közelítés alkalmazható, de jellemzően, ahogy én is, a hátralépő Euler-sémát alkalmazzák [151, 156]. Ennek oka, hogy a hátralépő Euler-séma minden esetben stabil megoldásra vezet, míg a Crank–Nicolson-sémánál csillapítatlan vagy divergens lengések léphetnek fel a csatolt feladatok megoldásánál [27, 157–159].

A villamos beavatkozók numerikus vizsgálatánál eleinte nem foglalkoztak a mechanikai tranziens vizsgálatával. A fő cél a vizsgált berendezésben kialakuló elektromágneses tér meghatározása volt [24, 107], és a kapott eredményből számítható, adott helyen fellépő erőhatás, veszteség [160] vagy kiemelt üzemállapothoz – mint üresjárás, rövidzárás – tartózó paraméterek [108]. Kezdetben a feladatban lévő mechanikai mozgást az állórész gerjesztésének forgórészhez rögzített koordináta-rendszerbe transzformálásával [104–106], vagy a Minkowski-transzformációval [103, 106, 161–163] vették figyelembe. Mindkét esetenél csak bizonyos feltételek mellett – például ha a horonyszáj mérete igen kicsi vagy horony nélküli – lehet a módszert közvetlenül alkalmazni, ezért napjainkban már csak az utóbbit alkalmazzák a kerülete mentén invariáns forgórész elmozdulásának a figyelembevételéhez [46, 144, 155, 164, 165]. A Minkowski-transzformáció könnyen implementálható, mivel a mozgást a megfelelő térrészre felírt egyenlet tartalmazza a $\vec{v} \times \vec{B}$ tagon keresztül, ahol \vec{v} a sebességvektor (bővebben lásd a C. függelékben). Viszont fontos megjegyezni, hogy a $\vec{v} \times \vec{B}$ tag miatt a rendszermátrix aszimmetrikus lesz [106, 155]. Fontos még megemlíteni a szlip-transzformációt [144, 166, 167], melynél a gerjesztés és a vezetőképesség a szlip függvényében változik. Itt szintén nem lehet mechanikai tranziens vizsgálni, mivel időlépésről időlépésre állandósult állapotot feltételez a módszer [166, 167], de például alkalmas az aszinkron gép nyomaték–fordulatszám jelleggörbéjének felvételére [166].

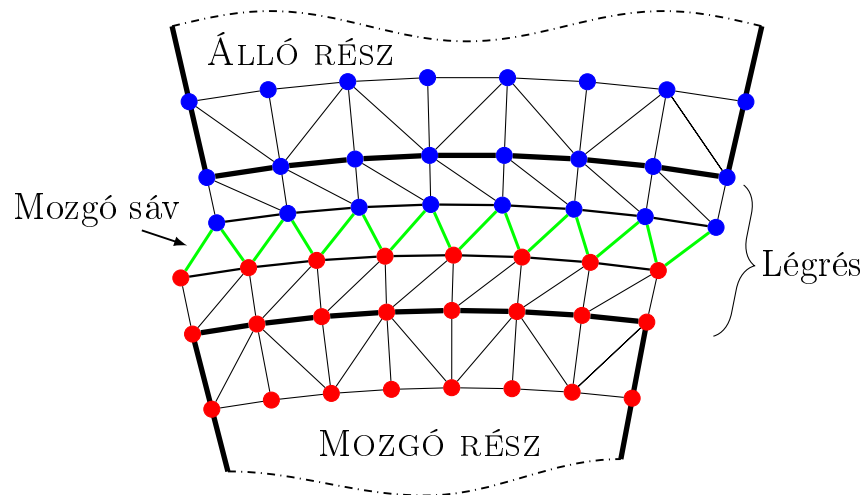
A fentebb említett kezdeti módszerek mellett már megjelent az igény olyan módszerre is, amellyel vizsgálni lehet az elektromágneses rendszer mechanikai tranziensét. Erre a legegyszerűbb és legkézenfekvőbb módszer, a mozgó rész geometriáját elforgatni vagy eltolni, és a feladatot teljesen vagy részben újra diszkretizálni. Ez a módszer jelentősen megnöveli a számítási időt és kapacitást, azonban a megvalósítása nem igényel semmiféle speciális eljárást. Ezzel a módszerrel csak elvétve lehet tudományos cikkekben találkozni [129, 168, 169], viszont ipari alkalmazások esetében annál gyakrabban. Sokszor található ezzel a módszerrel megoldott példa a végeelem-módszert alkalmazó szabadon hozzáférhető szoftverek mintapéldái között is. Erre néhány példa, egy kúpos dugattyú erő-elmozdulás függvényének felvétele [170], kapcsoló relé kikapcsolási idejének meghatározása [171], vagy egy kapcsolt reluktancia motor nyomatékának vizsgálata [172]. De a numerikus technikák esetében mindig cél volt a számítási idő és/vagy kapacitás csökkentése, ezért ha a mozgó rész mozog, és a felbontás újragenerálásának elkerülése a cél, ésszerűnek tűnik valamilyen interpolációt alkalmazni az álló és mozgó rész között. Legelőször véges differencia módszerrel alkalmazták az elsőfokú interpolációt egy egyenáramú gépre [173, 174], majd egy nyomtatott relé dinamikus tulajdonságainak vizsgálatára [175]. De a véges differencia módszer, a négyszögletes felbontás következtében nehezen alkalmazható tetszőleges villamos beavatkozó vizsgálatára.



2.7. ÁBRA A mozgó sáv esetében a légrés egy részét nem diszkretizáljuk.

A végelem-módszer esetében először egy, a mozgó sávon (*moving band*) alapuló módszer alakult ki [41, 106, 111, 176]. A mozgó sáv alapötlete, hogy teljesen vagy részben az álló és mozgó részek közötti gerjesztésmentes tartományt nem diszkretizáljuk, ahogy ezt a 2.7. ábra mutatja. Majd a diszkretizált álló és mozgó részek között kell a folytonosságot, a kapcsolatot megteremteni. Ehhez először, az úgynevezett légrés elemeket (*air-gap element*) alkalmazták [176], melyet kifejezetten villamos forgógépek forgórészmozgásának figyelembevételére fejlesztettek ki. A légréselemek lényege, hogy a sávban a háromszög végelemek helyett a $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{0}$ parciális differenciálegyenlet polárkoordináta-rendszerben vett analitikus megoldását használjuk. A nem felbontott sáv pereménél teljesülniük kell a vektorpotenciál folytonossági feltételeinek, melynek közelítéséhez Fourier-sort alkalmaznak [41, 111, 176–179]. A módszer egyik hátránya, hogy 100 és 200 közötti harmonikusig kell a Fourier-együttheteket meghatározni a megfelelő pontossághoz [41, 178]. A légréselemek módszerét, a különféle aktuátorok szimulációja végett, lineáris elmozdulásra is kiterjesztették [180]. A légréselem módszer a trigonometrikus interpolációval kombinálva az eredeti változatnál megbízhatóbb közelítést ad a folytonossági feltételre és pontosabb és gazdaságosabb módszert a nyomatékszámításra [181].

Azonban a nagy népszerűségnek örvendő ritka mátrixsal rendelkező egyenletrendszer megoldó eljárások miatt nem lett túl népszerű a légréselem módszer, mert az analitikus megoldás következményeként a mátrix egy része sűrű mátrix lett [177]. Helyette inkább a mozgó sávban is végelem hálót alkalmaztak [106], ahogy ez a 2.8. ábrán látható, amely a mozgásnak megfelelően változik. Ezt a módszert nevezi leggyakrabban a szakirodalom mozgó sáv módszernek. De én a továbbiakban egyréteges mozgó sáv (*single-layer moving band*) módszernek nevezem, mert ahogy a későbbiekben látható lesz, több variánsa is létezik, és a [182] hivatkozásban a légréselem módszerek egy csoportjára alkalmazzák a mozgó sáv elnevezést. Előnye ennek a módszernek, hogy nem igényel semmiféle speciális elemet vagy csatolási, folytonossági feltételt, és ahogy már említettem a mátrix továbbra is ritka marad [106, 111, 178, 183], és jól kondicionált [184]. Illetve még fontos érv ezen módszer mellett, hogy a csomóponti elemek esetében nem növeli az ismeretlenek számát, mert a már meglévő csomópontok összekötésével teremtjük meg a két rész között a kapcsolatot (lásd 2.8. ábra). A felbontás elemeit tekintve

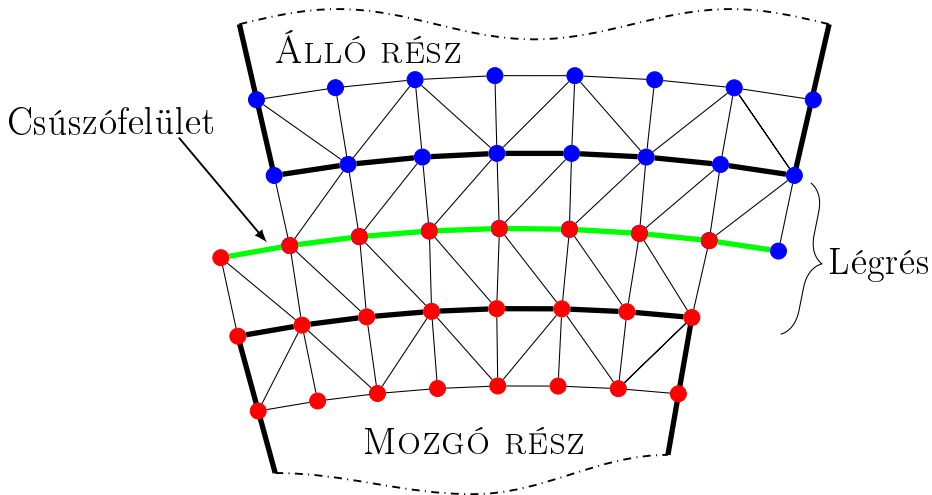


2.8. ÁBRA Az egyréteges mozgó sáv felbontása mozgás közben.

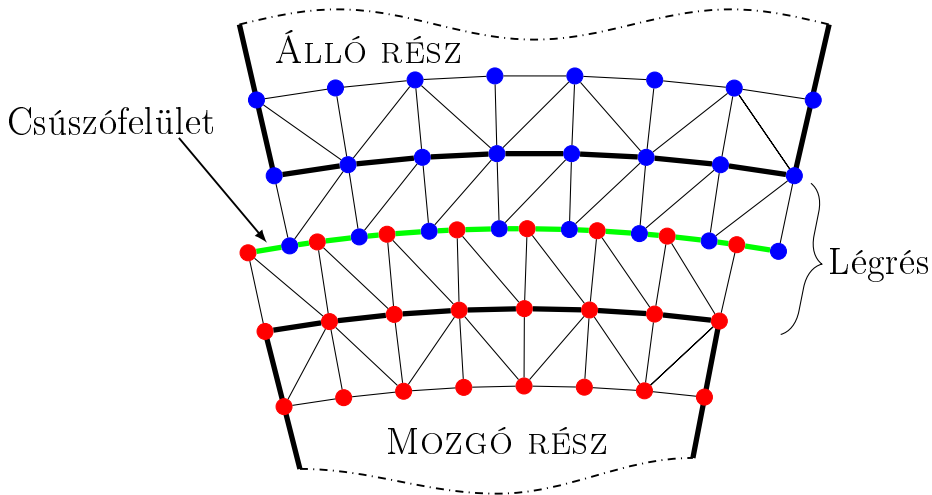
négyszög végelemek is alkalmaznak [136], de elterjedtebben használják a háromszög elemeket [41, 151, 153, 185, 186]. Háromszögekből álló felbontásnál, vagy az elemek torzulásának megfelelően változik a légrés felbontása [178, 179, 187, 188], vagy új hálót generálnak minden szöghelyzethez [106, 120, 129, 169, 182, 183]. A módszer fő hátránya, a sávban lévő végelemek deformációja és az elemek változtatása közben fellépő diszkontinuitás az elmozduló és a rögzített részeknél létrejövő erő vagy nyomaték között. Ez a probléma kezelhető a légrésben alkalmazott többréteges diszkretizálással [179, 187, 188], magasabb fokú – másodfokú és harmadfokú – végelemek alkalmazásával [184], vagy speciális interpolációval [181, 189]. A mozgó sáv módszercsoport lehetőséget ad a tengely excentricitásának és a csillapítás vizsgálatára [190, 191], és lineáris elmozdulás figyelembevételére is alkalmas [192].

A légréselemekkel egy időben kezdték alkalmazni elektromágneses rendszerek vizsgálatára a végeelem-módszert és a peremelem-módszert (BEM - *Boundary Element Method*), olyan módon, hogy a levegőnek számító részeknél alkalmazták a peremelem-módszert, ezzel csökkentve a számítási időt és a számításhoz szükséges memóriaigényt [193]. Az így nyert FEM - BEM kevert módszer ezen elv alapján alkalmas – a peremelem-módszert alkalmazva a légrés nem felbontott részén – az álló és mozgó térrész közötti folytonosság megteremtésére, mivel ebben az esetben nem kell foglalkozni a végeelem rács deformációjával [194, 195].

A mozgó sávot követően alakult ki a szintén széles körben alkalmazott csoport, a csúszófelületen (*sliding surface*) alapuló módszerek [111, 183, 196, 197]. A módszer elnevezése háromdimenziós feladatokra igaz, mivel kétdimenziós esetben egy perem választja el az álló és mozgó részt, ahogy a 2.9. ábra is mutatja. A módszer egyik nagy előnye, hogy mind a rögzített és az elmozduló rész felbontása változatlan, tehát itt csak a két részt elválasztó peremen (2D) vagy felületen (3D) kell a folytonosságot megteremteni. Ez a módszercsoport kétfelé osztható a folytonossági feltételhez alkalmazott módszer alapján, az illeszkedő (*conform*) és a nem illeszkedő (*nonconform*) módszer. Az illeszkedő módszer azt jelenti, hogy minden elmozdulást követően a két rész közötti csomópontok egybeesnek, ahogy a 2.9. ábra mutatja. Az illeszkedő módszert még zárt lépéses (*locked-step*) módszernek is nevezik, mivel ebben az esetben, csak a felbontásnak megfelelő elmozdulás, vagy annak egész számú többszöröse lehetséges [177, 183, 196]. Ennek következtében a



2.9. ÁBRA A csúszófelület módszer, ha a csomópontok egybeesnek (illeszkedő vagy zárt lépéses módszer).



2.10. ÁBRA A csúszófelület módszer, ha nincs meg a folytonosság a csomópontok között (nem illeszkedő módszer).

mozgásban végbemenő átmeneti jelenségek vizsgálatára nem alkalmas alapesetben. Erre az egyik lehetséges megoldás, hogy az elmozdulás továbbra is fix marad, de az időlépés változik, az elmozdulás sebességének megfelelően [159, 198]. Ennek következtében viszont a rendszermátrix is változik. Emiatt ritkán alkalmazzák a zárt lépéses módszert. Ebből a módszercsoportból a nem illeszkedő változat az, amit széles körben alkalmaznak, mivel ebben az esetben a rendszermátrixot nem kell módosítani a számítás alatt, csak a folytonosságot kell a két rész között valamilyen módszerrel megteremteni. A folytonosságot megteremteni a két felület vagy perem között legegyszerűbben az első- vagy másodfokú interpolációval lehetséges [152, 183, 199–203], melynél a pontos eredményhez sűrű felbontás szükséges. Ezen kívül, a legelterjedtebben alkalmazott módszerek a folytonosság megteremtéséhez a trigonometrikus interpoláció [181, 189, 204, 205], a habarcs (*mortar*) elemek [206–208], vagy a Lagrange-multiplikátorok [46, 154, 197, 206, 209–211]. Ezekben a technikákban a közös, hogy a két tartomány közül az egyik lesz a mester (*master*) a másik a szolga (*slave*). A szolga felület változói a mester felület változóinak a függvénye,

melynek következtében kiejthetők az egyenletrendszerből, tehát a végelemek számát nem növeltük. Azonban, például a Lagrange–multiplikátorok alkalmazásánál, a multiplikátorok újabb ismeretleneket jelentenek, illetve ennél a módszernél a rendszermátrix nem lesz pozitív definit [154, 178]. A habarcs elemeken alapuló módszert először a tartomány dekompozíciónál, a tartományok összekapcsolására alkalmazták [212]. A módszer esetében a rendszermátrixban kevesebb lesz a nemnulla elem, azonban megvalósítása körülményes [178, 208]. A trigonometrikus interpoláció hátránya a Fourier-transzformációból adódik, melynél a mátrix sűrű lesz [181]. Az itt felsorolt módszereken kívül még léteznek egyéb interpolációs technikák, melyekkel a folytonosság megteremthető (például cement elemekkel [12]), de a mozgás esetében ezeket vagy nem alkalmazzák, vagy nem az alacsony frekvenciás feladatok esetében. A kereskedelemben kapható szoftverek közül, az ismereteim alapján a **COMSOL Multiphysics** [213] a csúszófelület módszert, az **ANSYS Maxwell** [214] pedig a mozgó sáv módszert alkalmazza a mozgás figyelembevételére.

A dolgozat célkitűzése szükségessé teszi a mechanikai egyenlet figyelembevételét, melyhez az egyréteges mozgó sáv és a csúszófelület módszert valósítottam meg. Az utóbbi módszernél az egymáson elmozduló peremek közötti folytonosság megteremtéséhez az elsőfokú interpolációt alkalmaztam. A következőkben röviden bemutatom ennek a két technikának a megvalósítását. Az egyréteges mozgó sávnál a itt az általános működését ismertetem, a következő fejezetben, a csatolt feladatokhoz kapcsolódó tézisemnél pedig bemutatom az általam kidolgozott technika.

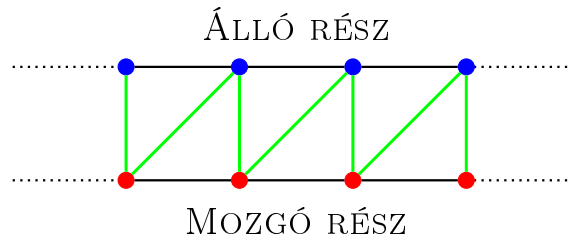
Egyréteges mozgó sáv

Az egyréteges mozgó sáv alapötletét az előzőekben már ismertettem, ami a szakirodalom alapján széles körben alkalmazott módszer [41, 106, 153, 178, 179, 184–186, 189–192]. A sávban lévő felbontást a 2.8. ábra mutatja. A legkisebb számításigény esetében fontos, hogy az álló és a mozgó résznél is azonos legyen a felbontás. Ha ez teljesül, akkor nagyon egyszerűen összekapcsolható a két térrész négyszög vagy háromszög elemekkel. A négyszögelemekkel történő felbontásról a [41, 153] irodalomban lehet bővebb leírást találni. A másik lehetőség a háromszögelemek alkalmazása, ahogy a 2.11(a) ábra mutatja. Azonban fontos hangsúlyt fektetni az elemek mozgás közben fellépő deformációjára [215]. A 2.11(b) ábra esetében az elemek már nagyon eltorzultak, ami nem jó, mert rontja a megoldás pontosságát. Ilyen esetben valamilyen módon meg kell változtatni a mozgó sávban lévő végelemeket.

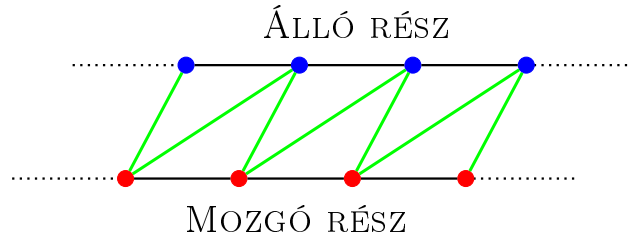
A mozgó sáv vastagságát érdemes minél kisebbre, az ökölszabály alapján legalább a légrés ötödére választani. Ez azért fontos, mert ahogy változik a két rész között a kapcsolódás, ezzel együtt megváltozik az ott lévő elemek területe, tehát a rendszermátrix is. Viszont ahhoz, hogy pontosan lehessen vele számolni, a rendszermátrix folytonosságának teljesülnie kell [189]. Ha kicsire választjuk a mozgó sávot, az ott lévő elemek mérete is kicsi, tehát a változás nem lesz számottevő, így nem befolyásolja jelentősen a végeredményt, és nem jelentkezik az irodalomból jól ismert lüktetés a végeredményben [154, 184].

A széles alkalmazási kör mellett azonban a módszer megvalósítását csak néhány cikk [106, 153, 189] és egy, a témával foglalkozó könyv ismerteti [41]. A többi cikk esetében, ahol a módszert alkalmazzák, az irodalmi hivatkozásból lehet következtetni, hogy a következőkben röviden bemutatott három fő módszer közül melyiket alkalmazták.

Először a [106] cikkben publikálták az egyréteges mozgó sáv működését. Itt még nem foglalkoztak az elemek torzulásával. Ha a szögelfordulás meghaladta a két szom-



(a) Mozgó sáv elemek alapállapotban.



(b) A mozgó sáv elemek deformációja.

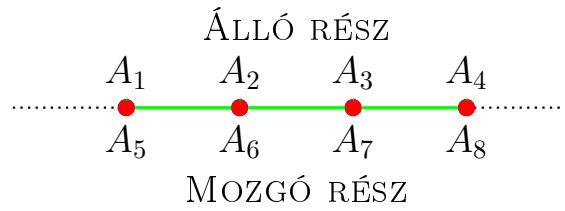
2.11. ÁBRA Egyréteges mozgó sáv háromszögelemekkel.

szédos csomópont közötti szöget, akkor ennek megfelelően módosították a mozgó sávhoz tartozó kapcsolódási mátrixot. A [153] irodalomban közölt, majd a [41] szakkönyvben részletezett módszer négyszögelemeket alkalmaz a felbontáshoz, melyeket diagonálisan négy háromszögre bontanak fel. Az így kapott háromszögeket pedig a szögelfordulástól és a háromszögekre alkalmazott minőségi tényezőtől függően vesznek figyelembe. A [189] irodalomban a szerző már nem a kapcsolódási mátrixot változtatja, ha a mozgó rész elmozdul, hanem közvetlenül a rendszermátrixot, ahol az álló és a mozgó részt összekapcsoló együtthatók függenek az elmozdulástól. Ez a megoldás a hozzá kapcsolódó trigonometrikus interpolációs szempontjából is előnyös, mivel itt nem lesz olyan sűrű a két részt összekapcsoló mátrix, mint a légréselemeknél.

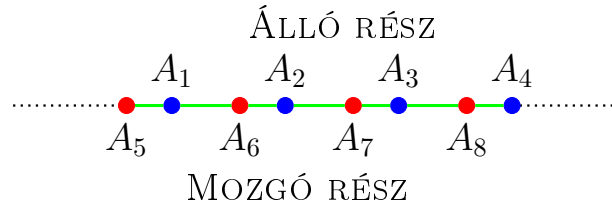
Csúszófelület elsőfokú interpolációval

Kétdimenziós esetben egy perem választja el a mozgó és álló részt, ahogy ezt a 2.12(a) ábra mutatja. A zárt lépéses módszer esetében megvan a két rész között a folytonosság, mert a csomópontok egybeesnek. Ez minden időlépésnél fennáll, mert az elmozdulás csak a két szomszédos végelem közötti távolság, vagy egész számú többszöröse lehet. De így a tranziens vizsgálata nehézkessé válik, mert az időlépés méretét kell változtatni, ami a rendszermátrix változásához vezet, ami az egyik legidőigényesebb művelet a végelem-módszernél [159, 183, 198].

A tranziens vizsgálatnál célszerű állandó időlépést alkalmazni, mert akkor a mozgás következtében nem változik a rendszermátrix csúszófelületen kívül eső része. Viszont az állandó időlépés következtében a két rész közötti folytonosság nem feltétlenül teljesül, ahogy ez a 2.12(b) ábrán látható. Ilyenkor szükséges az előzőekben már felsorolt valamelyik interpolációs módszer alkalmazására. Dolgozatomban az egyik legegyszerűbb módszert alkalmazom, az elsőfokú interpolációt. Az én esetemben mindig az álló részen lévő csomópontok (kék csomópontok) a mester, és a mozgó rész csomópontjai (piros csomópontok) a szolga csomópontok. Tehát, mindig a mester csomóponton lévő potenciálfüggvények lineáris kombinációjaként fejezem ki a szolga csomóponton lévő függvény



(a) Zárt lépéses (illeszkedő) csúszófelület.



(b) Nem illeszkedő csúszófelület.

2.12. ÁBRA A kétdimenziós csúszófelületen elhelyezkedő csomópontok.

értékét. A 2.12(b) ábra alapján az A_6, A_7, A_8 csomópontok értékét a következő összefüggés segítségével közelítjük [159, 183, 198],

$$\begin{bmatrix} A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^6 & N_2^6 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^7 & N_3^7 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^8 & N_4^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

ahol N_a^b az a csomópontoz tartozó formafüggvény a b csomópontnál felvett értéke. A módszer pontossága erősen függ a felbontás méretétől, de az én esetemben ez nem jelent problémát, mivel a nyomatékszámítás miatt úgyis sűrű felbontást alkalmazok a légrésben.

2.3. Tartomány dekompozíciós módszerek

A fejezet elején már bemutatásra került a végeelem-módszer, mely a legnépszerűbb numerikus térszámítási technika a mérnöki és a tudományos gyakorlatban. Ez a módszer a folytonos alakban megfogalmazott peremérték feladatot diszkrét feladattá transzformálja, ahol már nem parciális differenciálegyenleteket, hanem algebrai egyenletekből összeálló egyenletrendszert kell megoldani. Az így előálló inhomogén algebrai egyenletrendszer mátrix alakban leírva [216–221]

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.34)$$

ahol $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az együtthatómátrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ egy oszlopvektor, ami például a feladathoz kapcsolódó gerjesztést tartalmazza, és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

A lineáris vagy linearizált algebrai egyenletrendszer megoldása a numerikus módszerek egyik alapeleme, és ez az ami általánosságban a teljes megoldási folyamat legtöbb problémáját jelentő része. Emiatt mindig komoly figyelmet szentelnek a megoldási eljárások fejlesztésére. A végeelem-módszer és a hozzá hasonló térszámítási eljárások esetében – ez alól kivétel a peremelem-módszer, ahol sűrű az együtthatómátrix – a \mathbf{K}

együtthatómátrix ritka mátrix (*sparse matrix*). Ez a végeselem-módszer esetében annyit jelent, hogy a \mathbf{K} mátrix k_{ij} eleme csak akkor nem nulla, ha az N_i és az N_j formafüggvények ugyanahhoz vagy a szomszédos végeselemhez tartoznak, vagyis k_{ij} nem nulla ha i csomópont a j csomóponttal szomszédos [217]. Ez azt jelenti, hogy a mátrix teljes méretét tekintve kevesebb mint 1 százaléka lesz nullától különböző. Ezért a megoldó algoritmus hatékonyságát komolyan befolyásolja, mennyire sikerül kihasználni a ritka mátrix numerikus kezeléséből adódó előnyöket [216–218, 222, 223].

A numerikus szimulációk korai éveiben, a teljes feladatnak csak egy-egy részét, részletét vizsgálták, mert a számítógép memóriája, a számítási kapacitás nem volt elég a teljes feladat megoldásához. Ebben az időben jellemzően síkbeli vagy forgásszimmetrikus feladatokat oldottak meg a szimmetriasíkok kihasználásával [224, 225]. Az idő előrehaladtával egyre nagyobb és összetettebb feladatok megoldása lett a numerikus szimulációk célkitűzése. A számítástechnika állandó fejlődésével együtt egyre komolyabb elvárásokat támasztottak a numerikus számításokkal szemben. Jelentős erőfeszítéseket tettek, hogy minél kevesebb egyszerűsítést, elhanyagolást tartalmazzon az eddig csak részben vagy részenként vizsgált modell. Az egyre fejlődő numerikus szimulációk egyik fontos újdonsága, ami jelentősen befolyásolja az egyenletrendszer méretét, hogy az összetettebb geometria egyre több, eddig elhanyagolt részt tartalmaz, valamint olyan részeket, ahol a megoldás gradiense nagy. Mindkettőt csak sűrű felbontással vagy a közelítő polinom fokszámának növelésével lehet megfelelően kezelni, mely valós feladatok esetén több százezer vagy akár milliós nagyságrendű ismeretlent jelent. Ehhez kapcsolódik a modell pontosítása, a gerjesztés és a mozgás figyelembevétele, melyek újabb ismeretleneket és további számítási kapacitásigényt jelentenek.

A napjainkban felmerülő feladatok komoly kihívást jelentenének a hagyományos egyprocesszoros számítógépeknek, melyek már nem képesek kezelni a feladatok megoldásához szükséges összetett formalizmusokat, és a nagy számítási kapacitást. De az utóbbi két évtizedben drasztikus változásokon ment keresztül a számítógépek architektúrája. Az 1990-es években megalkották a Beowulf-klasztert [226], ami nagyon leegyszerűsítve asztali számítógépek gyors Ethernet hálózattal való összekapcsolását jelenti. Mindegyik számítógépnek van saját memóriája, melyet globálisan nem lát a többi gép. Ezt a klasztert nevezik elosztott memóriájú (*distributed memory*) architektúrának. A legnagyobb előnye ennek a rendszernek, hogy könnyen beszerezhető részekből épül fel, melynek köszönhetően gyorsan népszerűvé vált, és kezdetben a legerősebb párhuzamos számítógépek a Beowulf-architektúrán alapultak. Az ilyen rendszerek relatív alacsony árának köszönhetően már nem csak a kutatólaboratóriumok számára tette elérhetővé a sokprocesszoros rendszereket, hanem az egyetemek, gyakorló mérnökök, tervezőirodák számára is. Ennek köszönhetően kezdték el összeállítani a világ 500 legerősebb szuperszámítógépének listáját 1993-tól [227]. Az architektúra tekintetében újabb jelentős változás a 21. század első évtizedében következett be, amikor már többmagos processzorok kerültek a számítástechnikai eszközeinkbe. A többmagos számítógép abban különbözik a klasztertől, hogy a számítási egységek (magok) ugyanazt a memóriaterületet is képesek használni. Ezt nevezik megosztott memóriájú (*shared memory*) architektúrának. Napjainkra a világ legerősebb szuperszámítógépei elosztott memóriájú rendszerek, ami sokmagos processzorral (például a Sunway SW26010 processzor 260 maggal [228]) rendelkező gépekből áll [227]. De a párhuzamos számításra nem csak többmagos processzort (CPU - *Central Processing Unit*) vagy klasztert lehet alkalmazni, hanem a grafikus kártyát (GPU - *Graphics Processing Unit*) is, melyet a kis memória-, de nagy műveletigénnyel

bíró feladatokra fejlesztettek ki. A továbbiakban, ahol ennek nincs külön jelentősége a sokmagos processzor különálló magjait is processzornak fogom nevezni.

Természetesen a sokprocesszoros számítási lehetőség kihasználásához az eredetileg egyprocesszoros rendszerre fejlesztett algoritmusok átalakítása szükséges. A numerikus módszerek esetében a párhuzamosításnál a kritikus pont az algebrai egyenletrendszer megoldása. A szekvenciális (egyprocesszoros) szimuláció párhuzamosítására a végeelem-módszernél az egyik legelterjedtebben alkalmazott módszer a tartomány dekompozíció [229–236, 236, 237]. A tartomány dekompozíció kifejezés több jelentéssel is bír a parciális differenciálegyenletekkel foglalkozó tudományterületen belül:

- Csatolt szimulációknál, amikor a feladatot felbontják részekre, és a részekhez tartozó jelenségeket más-más egyenlettel írják le úgy, hogy a tartományok közötti peremen előírják a megfelelő peremfeltételeket [229, 238, 239];
- Párhuzamos számításnál, amikor a számításhoz kapcsolódó adatok kerülnek szétosztásra. Ebben az esetben a tartomány dekompozíció a számításhoz kapcsolódó adatok szétosztását jelenti [229, 240–245]. Véleményem szerint megfelelőbb lenne az adat dekompozíció elnevezés [229];
- Ha egy nagy feladatot felbontunk kisebb tartományokra vagy részekre, és a kisebb részek megoldását felhasználva állítjuk elő a teljes feladat megoldását [229–236]. Ebben az esetben a tartomány dekompozíció a prekondicionálója vagy a megoldási módszere az algebrai egyenletrendszernek.

Az alacsonyfrekvenciás elektromágneses térszámításban legelterjedtebben az adat dekompozíciós változatot alkalmazzák a párhuzamosításra [241–245]. A tartomány dekompozíció harmadik változatának elméletével és alkalmazásával a mérnöki szempontok szerint a nagyfrekvenciás tartományban foglalkoznak széles körben, erről tanúskodik az IEEE Transactions on Antennas and Propagation folyóiratban megjelent számos publikáció. Alacsonyfrekvenciás feladatoknál nincs olyan széles mérnöki alkalmazási köre a harmadik kategóriának [246–250], valamint a módszerek elméleti háttérével sem foglalkoznak a mérnöki szempontok szerint [251–255], hanem inkább matematikai szempontok szerint vizsgálják az ilyen típusú feladatokat [232, 256–262].

Jelen dolgozatban a harmadik nézőpont szerint alkalmazom a tartomány dekompozíciót, tehát mint prekondicionáló vagy megoldó, és a későbbiekben az elnevezés is mindig ezt jelenti. Ebben az esetben kétféle dekompozíciós módszert különböztethetünk meg, az átfedéssel (vagy átlapolttal) (*overlapping*) és az átfedés nélküli (vagy nem átlapolttal) (*non-overlapping*) tartomány dekompozíciós módszert. Az átfedéssel technikák a Schwarz-módszeren alapulnak [229, 232, 236, 263]. A nem átfedéssel technikák között is van a Schwarz-módszeren alapuló [232, 236, 264], de ennél szélesebb körben elterjedt és alkalmazott a Schur–komplement-módszer [229, 232–234], a FETI-módszer [230–234, 265–267] és a kiegyensúlyozott tartomány dekompozíció (*Balanced Domain Decomposition* - BDD) [230, 231, 268, 269].

A tartomány dekompozíciós módszerek közül a Schwarz-módszer a legrégebbi, melyet először 1870-ben publikált Hermann Schwarz [270], melyben az általa javasolt módszert két tartomány uniójaként előálló elliptikus peremérték feladat megoldására alkalmazott [229, 270], és ilyen feladatok megoldására dolgozott ki. A Schur–komplement-módszert John Przemieniecki publikálta 1963-ban [271], ahol a korlátozott számítógép memória miatt felbontotta a vizsgált repülőgép modelljét kisebb részekre, és így már

a rendelkezésre álló memóriával megoldható volt a feladat. Tehát ezt a két módszert szekvenciális megoldó rutinként alkalmazták először. A Schwarz-módszer egyprocesszoros alkalmazására még napjainkban is lehet példát találni a szakirodalomban [272–274]. A Schur—komplemens-módszer szekvenciális változatát már nem alkalmazzák tudományos munkákban, de alkalmazására a Matlab PDE Toolbox-ban található példa [275], ahol a túl nagy, vagy összetett feladatok megoldásához javasolják. A többi módszernek (FETI, BDD) is megvalósítható a szekvenciális változata, azonban úgy elvesztenék ezek a módszerek azokat az előnyös tulajdonságokat, melyekért alkalmazzuk őket.

A dolgozatban a fent említett módszerek közül a továbbiakban két átlapolás nélküli tartomány dekompozíciós módszerrel foglalkozom, a Schur—komplemens-módszerrel és a FETI-módszerrel. De mielőtt rátérek a párhuzamosításhoz használt módszerek bemutatására, röviden bemutatom a tartomány dekompozíció alapötletét.

2.3.1. A tartomány dekompozíció alapötlete

Vegyünk például egy Ω tartományú kétdimenziós elektrosztatika példát, melynél a Poisson-egyenletet oldjuk meg [10, 11]. Az Ω tartomány Γ_Ω peremén a keresett ismeretlenre homogén Dirichlet-peremfeltételt írunk elő, ahogy ezt a 2.13(a) ábra mutatja. Az Ω tartományt bontjuk fel két altartományra, melyekre igaz lesz, hogy [229, 232]

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Gamma = \Gamma_{\Omega_1} \cap \Gamma_{\Omega_2},$$

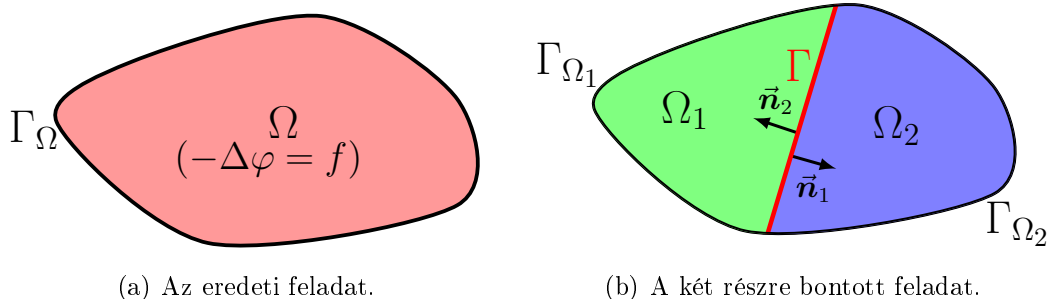
ahogy a 2.13(b) ábrán látható. Annak szintén teljesülnie kell, hogy [229, 232]

$$\begin{aligned} \text{mérték}(\Gamma_{\Omega_1} \cap \Gamma_\Omega) &> 0, \\ \text{mérték}(\Gamma_{\Omega_2} \cap \Gamma_\Omega) &> 0, \end{aligned}$$

és az altartományokhoz tartozó peremek Lipschitz-folytonosak [232]. Az eredeti tartományra felírt feladat a következő:

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= f && \text{az } \Omega \text{ tartományban,} \\ \varphi &= 0 && \text{a } \Gamma_\Omega \text{ peremen,} \end{aligned} \tag{2.35}$$

ahol az $f = \rho/\varepsilon$, a ρ a töltéssűrűség, az ε a permittivitás és φ a keresett potenciálfüggvény. Tekintsük f -et négyzetesen összegezhetőnek és a peremeket Lipschitz-folytonosnak,



2.13. ÁBRA A feladat felbontása nem átlapoló tartomány dekompozícióval.

akkor (2.35) egyenlettel ekvivalens a következő csatolt feladat [232]

$$\begin{aligned}
 -\Delta\varphi_1 &= f_1 && \text{az } \Omega_1 \text{ tartományban,} \\
 \varphi_1 &= 0 && \text{a } \Gamma_{\Omega_1} \setminus \Gamma \text{ peremen,} \\
 \varphi_1 &= \varphi_2 && \text{a } \Gamma \text{ peremen,} \\
 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} &= -\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2} && \text{a } \Gamma \text{ peremen,} \\
 -\Delta\varphi_2 &= f_2 && \text{az } \Omega_2 \text{ tartományban,} \\
 \varphi_2 &= 0 && \text{a } \Gamma_{\Omega_2} \setminus \Gamma \text{ peremen,}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

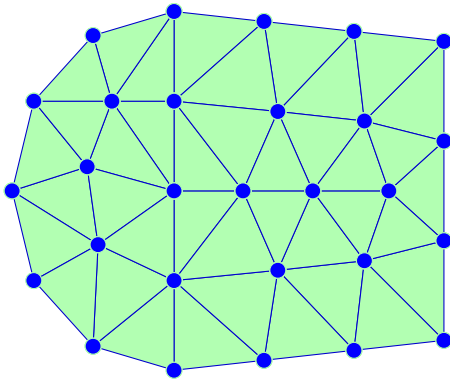
ahol φ_i ($i = 1, 2$) a φ Ω_i -re vett leszűkítése és \vec{n}_i az Ω_i térrészhez tartozó normálvektor. A Γ peremre előírt feltételeket átviteli feltételeknek nevezzük.

A végeelem-módszer esetében a feladat diszkretizált változatát bontjuk fel, vagyis a teljes hálóból kisebb részeket kapunk, melyeket könnyebb kezelni. Alapvetően a végelemek elemegyenletéből a teljes feladat felbontásra összeállítjuk az algebrai egyenletrendszerét. De az egyes végelemekhez tartozó elemegyenletek előállítására független művelet, tehát ez párhuzamosítható. A tartomány dekompozíciós módszereket nevezhetnénk „oszd meg és uralkodj” („*Divide et impera*”) módszereknek is, azonban ez sajnos nem teljesen igaz. Mivel az asszemblálás és az egyes részek megoldása jól párhuzamosítható, de a Γ peremen lévő ismeretlenek meghatározásához, vagyis a tartományok közötti folytonosság megteremtéséhez elengedhetetlen a kommunikáció. Ezért az algebrai egyenletrendszer megoldó rutinja teljes mértékben nem párhuzamosítható, ahogy ez a későbbiekben majd látható lesz.

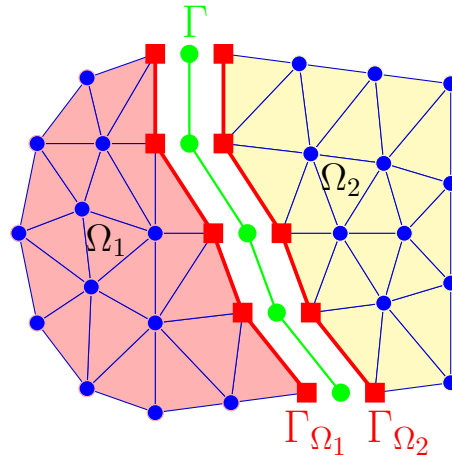
Mielőtt rátérnék a tartomány dekompozíciós módszerekre, fontos röviden megemlíteni a különféle gráf- és rácsfelbontó algoritmusokat [276–279]. Ezek az algoritmusok végzik a feladat felbontását, vagyis ezen algoritmusokon múlik, mennyire lesz kiegyensúlyozott a számítási igény (az altartományokon közel azonos ismeretlenszám lineáris anyagkarakterisztika esetében) az egyes altartományok között. Ahhoz, hogy minimalizáljuk a párhuzamos algoritmus számítási idejét, minimalizálni kell a kommunikációt. A kommunikációt a folytonosság megteremtése eredményezi, tehát ahhoz, hogy az emiatt bekövetkező kommunikációt csökkentsük, minimalizálni kell az altartományok közötti, a felbontásból eredő peremen lévő ismeretlenek számát. A 2.14(b) ábrán a Γ peremen lévő ismeretlenek eredményezik a tartományok párhuzamos megoldásához szükséges kommunikációt. Nagyon sokféle gráf- és rácsfelbontó algoritmus létezik, melyekről bővebben a [276, 278] irodalmakban lehet olvasni. A dolgozatban szereplő példák diszkretizálásának particionálásához a METIS soros gráfparticionáló csomagot [280] alkalmazom.

2.3.2. A Schur—komplemens-módszer

A Schur—komplemens-módszer még mint primál tartomány dekompozíciós (*primal domain decomposition*) vagy direkt alstruktúra (*direct substructuring*) módszer is ismert [152, 202, 203, 229, 232, 233, 251, 277, 281–283, 283–294]. A Schur—komplemens-módszer, ahogy a neve is mutatja a Schur—komplemens [216, 233, 235] alapszik, de ezt az elnevezést jellemzően a matematikusok használják. A mérnöki munkákban (primál) tartomány dekompozíciós vagy alstruktúra módszernek nevezik. Ahogy már említettem, a módszer alkalmazása több, mint fél évszázados múltra tekint vissza, amikor a számítógépekben lévő RAM még nem volt elég a teljes feladat kezelésére. A számítógép



(a) A teljes feladat diszkrétizálása háromszögelemekkel.



(b) A két altartományra felbontott feladat.

2.14. ÁBRA A felbontott feladat a Schur—komplement-módszernél.

memóriájának korlátai miatt ahhoz, hogy kezelhető legyen a probléma, a feladatot kisebb részekre bontjuk, melyet gyakran alkalmaznak a numerikus szimulációknál. Az is gyakori, hogy az ismeretlenek csökkentésének érdekében, a nem szükséges ismeretleneket kiküszöböljük. Az előbb említett felbontás, és ismeretlen kiküszöbölés egyaránt igaz a Schur—komplement-módszere. A primál tartomány dekompozíciós elnevezés arra utal, hogy ennél a módszernél csak az eredeti ismeretleneket használjuk a teljes számítás alatt. A Schur—komplement-módszert nagyon sok cikk és könyv írja le mérnöki szempontból [229, 233, 251, 277, 281–287] vagy matematikai szempontok szerint [232, 283, 288–290]. Az elektromágneses térszámítás esetében ezt a módszert inkább mint prekondicionáló alkalmazzák, megoldó eljárásaként csak ritkán lehet vele találkozni a szakirodalomban.

Tartomány dekompozíció esetében, ahogy a 2.13(b) és a 2.14(b) ábrák is mutatják, a tartományt felbontjuk részekre, aminek következtében a (2.34) egyenlet is szétesik kisebb egyenletekre. A 2.14(a) ábrán látható kétdimenziós hálót alapul véve, a feladatot felbontjuk a végelemek két szétszétolt nyitott halmazára (Ω_1 és Ω_2), közöttük Γ peremmel, ahogy a 2.14(b) ábra mutatja. Ha a halmazokhoz tartozó, a tartományokon lévő ismeretleneket átszámozzuk, olyan módon, hogy először a belső ismeretlenek (2.14(b) ábrán kék pontok), majd legvégül a Γ peremhez tartozó ismeretlenek (2.14(b) ábrán piros négyzetek) következzenek, akkor a globális egyenletrendszer a következő alakban írható [229, 232, 233, 287, 291–295]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{1\Gamma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{2\Gamma} \\ \mathbf{K}_{\Gamma 1} & \mathbf{K}_{\Gamma 2} & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_\Gamma \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

ahol a $\mathbf{K}_{i\Gamma}$ ($i=1,2$) részmatrixa a $\mathbf{K}_{\Gamma i}$ blokk transzponáltja, és minden főátlóbeli \mathbf{K}_{ii} blokk felveszi a globális mátrix \mathbf{K} előnyös tulajdonságait, ezek is szimmetrikus pozitív definit mátrixok.

Ha a feladatot felbontjuk N_S altartományra, az eredeti egyenletrendszer szétesik N_S különálló blokkra. Az i altartományhoz tartozó egyenletrendszer a lokális számozásnak megfelelően (belső ismeretleneket számozzuk először, majd a peremen lévő ismeretlenek)

ket) a következő lesz [229, 232, 233, 282, 291–295]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{i\Gamma\Omega_i} \\ \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i i} & \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i\Gamma\Omega_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{\Gamma\Omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ \mathbf{b}_{\Gamma\Omega_i} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

ahol $i = 1, \dots, N_S$, a $\mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i\Gamma\Omega_i}$ nem nulla elemei kapcsolják össze, az előző példához (lásd 2.13(b) ábra) visszatérve, az Ω_1 és Ω_2 altartományokat, vagyis az eredeti feladat felbontásából létrejött Γ peremen elhelyezkedő ismeretleneket. A globális egyenletben szereplő $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}$ almátrixot az N_S altartományhoz tartozó blokk megfelelő asszemblálásával kapjuk. Két altartománynál: $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} = \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_1\Gamma\Omega_1} + \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_2\Gamma\Omega_2}$. Ugyanez igaz az egyenletrendszer Γ -hoz tartozó jobb oldali blokkjára (\mathbf{b}_{Γ}) és a Γ peremen elhelyezkedő ismeretlenekre is (\mathbf{x}_{Γ}). A \mathbf{K}_{ii} , \mathbf{b}_i és a $\mathbf{K}_{i\Gamma\Omega_i} = (\mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i i})^T$ blokkok pedig a (2.38) egyenlettől függetlenek, tehát ezek nem eredményeznek semmiféle kommunikációt az egyes altartományok között. A $(\mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i i})^T$ kifejezésben a felső indexnél lévő T a transzponálást jelöli.

Az altartományokhoz tartozó egyenletrendszer, a (2.38) egyenlet egymástól függetlenül kezelhető, tehát ezek asszemblálása párhuzamosan történik. Csak a $\mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i\Gamma\Omega_i}$ és $\mathbf{b}_{\Gamma\Omega_i}$ blokkok, amik a globális egyenletrendszerre nézve nem függetlenek. Tehát a globális $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}$ mátrix és \mathbf{b}_{Γ} vektor összeállításához a lokális $\mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i\Gamma\Omega_i}$ és $\mathbf{b}_{\Gamma\Omega_i}$ blokkokra van szükség, ami kommunikációt jelent a processzorok között.

A globális $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}$ mátrix és \mathbf{b}_{Γ} vektor összeállítására azért van szükség, hogy a felbontás miatt, a tartományok között létrejött peremen (Γ) meghatározzuk az ismeretlenek értékét. Ehhez a következő egyenletet kell megoldani [229, 233, 291–293, 295]:

$$\left(\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} - \sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i i} (\mathbf{K}_{ii})^{-1} \mathbf{K}_{i\Gamma\Omega_i} \right) \mathbf{x}_{\Gamma} = \mathbf{b}_{\Gamma} - \sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i i} (\mathbf{K}_{ii})^{-1} \mathbf{b}_i, \quad (2.39)$$

melyet a redukált egyenletrendszernek nevezünk, mivel ebben csak a Γ peremen lévő ismeretlenek szerepelnek, a belső ismeretleneket kiküszöböltük. Az egyenletben szereplő $\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} - \sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i i} (\mathbf{K}_{ii})^{-1} \mathbf{K}_{i\Gamma\Omega_i}$ tagot nevezzük a teljes egyenletrendszer Schur-komplementének. A redukált rendszerhez tartozó, az \mathbf{x}_{Γ} vektorban lévő ismeretlenek számítását követően már könnyen meghatározható a belső csomópontokhoz tartozó értéke a (2.38) egyenletből adódó összefüggéssel [229, 233, 291–295]:

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{K}_{ii})^{-1} \left(\mathbf{b}_i - \mathbf{K}_{i\Gamma\Omega_i} \mathbf{x}_{\Gamma\Omega_i} \right). \quad (2.40)$$

A \mathbf{x}_{Γ} meghatározása után az altartomány belső ismeretleneinek (\mathbf{x}_i) megoldása egy-egy Dirichlet-feladatnak tekinthető, ami a (2.40) egyenlettel, egymástól függetlenül, vagyis párhuzamosan megoldható. Az eddig bemutatott összefüggések könnyebb megértéséhez a D. függelékben bemutatom a módszer működését egy egyszerű elektrosztatika példán keresztül.

Az (2.39) és a (2.40) egyenletekben a \mathbf{K}_{ii} mátrix inverze szerepel. Ez gyakorlati szempontból nem előnyös, mivel az invertálás nagyon költséges művelet, és nem melleleg a ritka mátrix inverze sűrű mátrix lesz, így komoly memóriagigénnyel is jár a tárolása [233, 291, 295]. Az invertálás helyett a \mathbf{K}_{ii} mátrix valamilyen faktorizációját alkalmazzuk, vagy az invertálás teljes kihagyásához az egyenletrendszer megoldására iteratív megoldó algoritmust. A következőkben röviden bemutatok egy direkt és egy iteratív megoldó rutint a Schur—komplement-módszernél előálló egyenletek megoldására, amiket én is alkalmazok a problémák megoldása során.

Direkt megoldó algoritmus

A direkt megoldó eljárás tulajdonsága, hogy véges aritmetikai művelet után megkapjuk az algebrai egyenletrendszer megoldását. A direkt megoldó eljárások nagy része a Gauss-féle elimináción alapszik. Ezek közül három gyakran alkalmazott módszer az LU- és az LDU-felbontás, valamint a Cholesky-faktorizáció [216, 217, 219, 223]. Ezek közül az LU-felbontással mutatok be egy párhuzamos direkt megoldási módot [287], mivel az LU-felbontás alkalmazható szimmetrikus és nonszimmetrikus mátrixokra egyaránt. LDU-felbontással történő megoldásra a [282] irodalomban, a Cholesky-faktorizációra pedig a [296] irodalomban található illusztráció.

Az itt bemutatásra kerülő megoldási mód a [287] irodalomban, két tartományra bemutatott algoritmus N_S tartományra kiterjesztett változata [291–294]. A párhuzamos direkt megoldó rutin két fő részre bontható, a faktorizációra és az előre-hátra behelyettesítésre. A Schur—komplement-módszerhez alkalmazott párhuzamos direkt megoldó rutin a következő lépésekből áll:

I. Párhuzamos faktorizálás

1. Lokális együtthatómátrix részleges faktorizációja

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii} &= \mathbf{L}_{ii} \mathbf{U}_{ii} \\ \mathbf{L}_{\Gamma_{\Omega_i} i} &= \mathbf{K}_{\Gamma_{\Omega_i} i} (\mathbf{U}_{ii})^{-1} \\ \mathbf{U}_{i\Gamma_{\Omega_i}} &= (\mathbf{L}_{ii})^{-1} \mathbf{K}_{i\Gamma_{\Omega_i}} \\ \mathbf{S}_i &= \mathbf{K}_{\Gamma_{\Omega_i} \Gamma_{\Omega_i}} - \mathbf{L}_{\Gamma_{\Omega_i} i} \mathbf{U}_{i\Gamma_{\Omega_i}} \end{aligned}$$

2. A globális Schur—komplement asszemblálása és faktorizációja

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{S}_i \\ \mathbf{S} &= \mathbf{L}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{U}_{\Gamma\Gamma} \end{aligned}$$

II. Párhuzamos előre-hátra behelyettesítés

1. A lokális behelyettesítés

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ii} \mathbf{z}_i &= \mathbf{b}_i \\ \mathbf{g}_i &= \mathbf{b}_{\Gamma_{\Omega_i}} - \mathbf{L}_{\Gamma_{\Omega_i} i} \mathbf{z}_i \end{aligned}$$

2. A redukált egyenletrendszer asszemblálása és megoldása

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\Gamma} &= \sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{g}_i \\ \mathbf{L}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{U}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{x}_{\Gamma} &= \mathbf{g}_{\Gamma} \end{aligned}$$

3. A lokális visszahelyettesítés

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \mathbf{z}_i - \mathbf{U}_{i\Gamma_{\Omega_i}} \mathbf{x}_{\Gamma} \\ \mathbf{U}_{ii} \mathbf{x}_i &= \mathbf{g}_i \end{aligned}$$

A faktorizálás és a behelyettesítés részeknél, a második lépésben az adatok összegyűjtése és asszemblálása (szumma művelettel jelöltem) szükséges, tehát itt az altartományokon alapuló párhuzamosítás nem alkalmazható, ez a két lépés szekvenciálisan történik. A többi lépésben csak lokális műveletek vannak, így azok egymással párhuzamosan, külön processzorral elvégezhetőek.

Iteratív megoldó algoritmus

A megoldó algoritmusok másik nagy csoportja az iteratív megoldó eljárások, melyek alapja, hogy egy hibahatáron belül közelítést adjanak a megoldásra. Az olyan iteratív módszerek, mint a Jacobi-módszer, a Gauss–Seidel-féle iterációs eljárás, vagy a szukcesszív túrelaxálás módszere [216, 220–223] jól ismert technikák, egyszerűen megvalósíthatóak, de nem túl hatékonyak, és a végelem-módszerből előálló, gyakran rosszul kondicionált egyenletrendszerhez nem alkalmazzák [222, 233]. Ezeknél jóval korszerűbb és hatékonyabb módszerek, melyek az ortogonális vektorok sorozatán alapszanak, mint a konjugált gradiens és variánsai [216, 220, 222, 223].

Nagy ismeretlenség és processzorszám esetében az iteratív módszer gazdaságosabb, mint a direkt megoldó eljárások. Napjainkban az egyik legnépszerűbb iteratív megoldó algoritmus a konjugált gradiens, az egyszerűsége és hatékonysága miatt. Azonban ha az egyenletrendszernek nagy a kondíciószáma, mely a végelem-módszer esetében gyakori, nem működik már olyan hatékonyan. Ez a probléma a prekondicionálással megoldható, melynek lényege, hogy csökkentsük az együtthatómátrix kondíciószámát. Ezért iteratív megoldó algoritmusnak egy párhuzamos prekondicionált konjugált gradiens (PCG - *Preconditioned Conjugate Gradient*) módszert alkalmazok, ami a [277] irodalomban közölt algoritmuson alapszik.

A prekondicionált konjugált gradiens módszerhez az egyik legegyszerűbb prekondicionálót, a diagonális vagy Jacobi-prekondicionálót [202, 217, 229, 232, 259, 269, 277, 286, 297–299] alkalmazom. Ez a prekondicionáló az együtthatómátrix főátlóbeli elemeit tar-

1. ALGORITMUS PÁRHUZAMOS PREKONDITIONÁLT KONJUGÁLT GRADIENS MÓDSZER

```

1 Inicializálás:  $\mathbf{x}_{\Omega 0} = \mathbf{0}$ ,
2  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b}_{\Omega}$ ,
3  $\mathbf{r}_0$  küldése,  $\mathbf{r}_{\Gamma}^{\text{ext}}$  fogadása  $\rightarrow \bar{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{\Gamma}^{\text{ext}}$ , // Kommunikáció (adatcsere)
4 for  $i = 0, 1, \dots$  do
5    $\mathbf{w}_i = \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{r}}_i$ ,
6    $\gamma_i = (\bar{\mathbf{r}}_i)^T \mathbf{w}_i$ ,
7   Globális  $\gamma_i$  számítása, // Kommunikáció (adatcsere)
8    $\mathbf{w}_i$  küldése,  $\mathbf{w}_{\Gamma}^{\text{ext}}$  fogadása  $\rightarrow \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{\Gamma}^{\text{ext}}$ , // Kommunikáció (adatcsere)
9   if  $i = 0$  then
10    |  $\bar{\mathbf{p}}_i = \bar{\mathbf{w}}_i$ ,
11   else
12    |  $\bar{\mathbf{p}}_i = \bar{\mathbf{w}}_i + (\gamma_i / \gamma_{i-1}) \bar{\mathbf{p}}_{i-1}$ ,
13    $\mathbf{w}_i = \mathbf{K}_{\Omega} \bar{\mathbf{p}}_i$ ,
14    $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{w}_i$ ,
15   Globális  $\beta_i$  számítása, // Kommunikáció (adatcsere)
16    $\mathbf{w}_i$  küldése,  $\mathbf{w}_{\Gamma}^{\text{ext}}$  fogadása  $\rightarrow \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{\Gamma}^{\text{ext}}$ , // Kommunikáció (adatcsere)
17    $\bar{\mathbf{x}}_{\Omega i} = \bar{\mathbf{p}}_{i-1} + (\gamma_i / \beta_i) \bar{\mathbf{p}}_i$ ,
18    $\bar{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{r}}_{i-1} + (\gamma_i / \beta_i) \bar{\mathbf{w}}_i$ ,
19   if  $\gamma_i / \gamma_0 < \xi$  then
20    | return  $\bar{\mathbf{x}}_{\Omega i}$ 

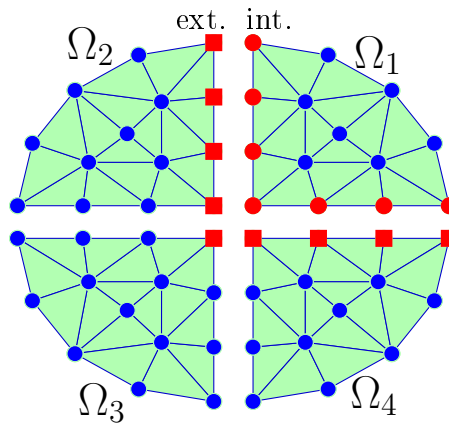
```

talmazza, vagyis

$$\mathbf{M}^{-1} = [\text{diag}(\mathbf{K}_\Omega)]^{-1}. \quad (2.41)$$

Az alkalmazott PCG–módszer pszeudokódját az 1. Algoritmus mutatja [202, 203, 277]. A módszer párhuzamosan oldja meg az altartományokra bontott feladatot. Azonban minden iteráción belül fontos, hogy egyes vektoroknál az elosztott vektorból összegzett legyen. Ez a lépés a processzorok közötti adatküldést és fogadást jelent, ahogy az algoritmusban is jelöltem. Az algoritmusban az összegzett vektorokat felülvonással jelöltem. Az algoritmusban i a futóváltozót jelöli. A \mathbf{K}_Ω és a \mathbf{b}_Ω pedig a lokális együtthatómátrixot és a lokális egyenletrendszer jobb oldalát jelöli (lásd (2.38) egyenlet), az \mathbf{x}_Ω pedig az altartományhoz tartozó ismeretlenek vektorát. Az \mathbf{M} a prekondicionáló mátrixot, az \mathbf{r} a maradékvektort, a \mathbf{w} és a \mathbf{p} vektorok a kisebb műveletigény miatt alkalmazott vektorok, és a ξ az előre definiált hibahatár. A γ és a β egy-egy skalár változó, melyeknél szintén szükség van a globális értékre, vagyis itt a lokális értékek összegzése miatt van adatsere a processzorok között.

Az PCG–algoritmusban szereplő elosztott és összegzett vektor könnyebb megértését szolgálja a 2.15. ábra. Az elosztott vektor csak a lokális értékeket tartalmazza, amíg az összegzett esetben a lokális vektor kiegészül a más altartományokhoz tartozó peremértékekkel. A 2.15. ábrán az Ω_1 peremen helyezkednek el a lokális belső csomópontok (kék pontok) és a lokális peremen lévő csomópontok (piros pontok), míg a másik három tartománynál ($\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$) a külső peremen lévő csomópontok (piros négyzet). Ez is jól mutatja, miért fontos lépés a tartományok felbontása a processzorok közötti kommunikáció szempontjából.



2.15. ÁBRA Négy részre bontott feladat, jelölve az Ω_1 altartományhoz tartozó peremen lévő csomópontokat (int.) és a más altartományon lévő, de a tartományok közötti folytonossághoz és a megoldáshoz szükséges külső csomópontokat (ext.).

2.3.3. A FETI-módszer

A Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI) módszer [230–234, 253, 254, 256, 257, 262, 265–267, 293, 294, 300–318] egy jóval később kidolgozott technika, mint a Schur–komplemens-módszer, melyet először Charbel Farhat és François-Xavier Roux publikált

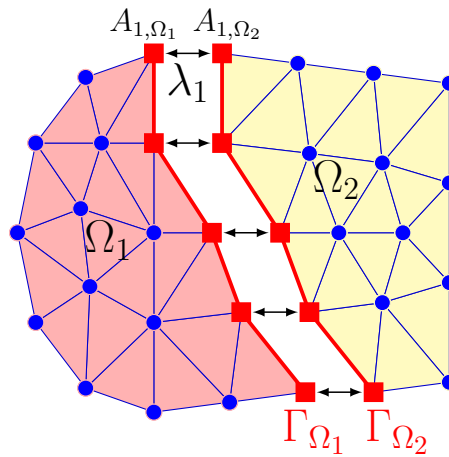
1991-ben [265]. A FETI-módszer a Schur-módszerhez hasonlóan egy átfedés nélküli tartomány dekompozíciós módszer, ahol az ismeretleneket felbontjuk a peremen lévő ismeretlenek és a belső ismeretlenek halmazára. A tartományok között a tér folytonosságát a peremeken alkalmazott Lagrange-multiplikátorokkal hozzuk létre [230, 233, 265–267, 303]. Majd itt is a belső ismeretlenek kiküszöbölése következik, ahol probléma lehet, hogy az együtthatómátrix szinguláris. Ilyen esetben a mátrix inverze helyett a pszeudo inverzét [218, 265, 319] számítjuk. Az ismeretlenek kiküszöbölése után itt is egy redukált feladatot kapunk. Azonban itt az eredeti feladat duálisát kapjuk, mivel az eredeti ismeretleneket (primál változókat) elimináltuk, és csak a duális változók maradnak, vagyis a Lagrange-multiplikátorok. A kiindulási feladat változóit nevezik primál, míg az abból származtatott ismeretleneket duális változóknak. A redukált feladat nem lesz pozitív definit, ezért például itt nem lehet a klasszikus konjugált gradiens módszert megoldó rutinnak alkalmazni. Jelen dolgozatban bemutatásra és alkalmazásra kerülő FETI-módszer még úgy is ismert, mint duális Schur—komplement-módszer, illetve klasszikus vagy egy-szintű (*one-level*) FETI-módszer. Utóbbi két elnevezések amiatt születtek, mivel napjainkra már inkább FETI-módszercsaládról beszélhetünk a különféle variánsok (*Algebraic FETI*, *Two-level FETI*, *Total FETI*, *FETI Helmholtz*, *Dual-Primal FETI*, *Hybrid total FETI*) [237] miatt. A módszert, ahogy a sok variánsa is mutatja, nagyon széles körben alkalmazzák a különféle nagyméretű feladatok megoldására. Legelterjedtebben a szerkezeti mechanikában, áramlástanban kerül felhasználásra, de az elektromágneses térszámításban is egyre többször lehet a módszerrel találkozni.

A numerikus feladat megoldásakor a teljes feladatra definiált energia funkcionált minimalizáljuk, melynek minimuma csak akkor van, ha a potenciál kielégíti a hozzá tartozó parciális differenciálegyenletet és a peremfeltételeket [3, 9, 19, 36]. Az energia egy skalár mennyiség, tehát részek összegeként is számítható, mely nagyon jól felhasználható a tartomány dekompozíció esetében is, ha az eredeti feladatot felbontjuk kisebb részekre. A FETI-módszer, mint tartomány dekompozíció ezt használja ki. A FETI-módszer matematikai alapjairól bővebben a [233, 265–267] irodalmakban lehet olvasni. A feladat tartományának diszkretizálását és altartományokra bontását követően a (2.34) egyenlet helyett a következő algebrai egyenletek hibrid rendszerét kapjuk [230–234, 257, 265–267, 293, 294, 301–306, 310–318]:

$$\mathbf{K}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.42)$$

$$\sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \quad (2.43)$$

ahol $i = 1, \dots, N_S$, és N_S az altartományok száma, \mathbf{x}_i az altartományhoz tartozó ismeretlenek vektora, a $\boldsymbol{\lambda}$ a Lagrange-multiplikátorok vektora, a \mathbf{K}_i és a \mathbf{b}_i pedig az altartományhoz tartozó együtthatómátrix és a rendszer gerjesztését tartalmazó vektor. A \mathbf{B}_i mátrix pedig egy előjeles ± 1 és nulla értékekből álló – leképezési mátrix, mely az altartományhoz tartozó mennyiségekből kiemeli a tartomány peremén lévő elemeket, előjelhelyesen, hogy az előírt kényszerek teljesüljenek. A tartományokhoz tartozó (2.42) egyenlet a megoldást adja adott \mathbf{b}_i gerjesztés és $\mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\lambda}$ peremre előírt kényszer mellett, amíg a (2.43) egyenlet feladata a tartományok peremén lévő mágneses vektorpotenciálok közötti kompatibilitás megteremtése. A 2.16. ábrán a Γ_{Ω_1} és Γ_{Ω_2} peremeken lévő ismeretleneknél, a két felső csomópont közötti kompatibilitás megteremtéséhez, a (2.43) egyenlet a következő lesz, $A_{1,\Omega_1} - A_{1,\Omega_2} = 0$. Egy egyenlet tartozik mindegyik



2.16. ÁBRA A felbontott feladat a FETI-módszer esetében.

pár ismeretlenhez, melyek összekapcsolják az altartományokat. A 2.16. ábrán a fekete nyilakkal összekötött ismeretlenek azok, melyekhez egy-egy kompatibilitási feltétel tartozik.

Legyen a \mathbf{K} mátrix, illetve a \mathbf{B} mátrix, az \mathbf{x} és a \mathbf{b} vektor a következő

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{K}_{N_S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_{N_S} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N_S} \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a jelölésekkel a (2.42) és a (2.43) egyenlet átírható a teljes feladat esetére blokk-diagonális alakba,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Ha az egyik altartomány együtthatómátrixa se szinguláris, a (2.42) és a (2.43) egyenletek adják az eredeti feladat megoldását. Viszont ahogy nő az altartományok száma, egyre valószínűbb, hogy lesz egy vagy több olyan az altartományok között, ahol az együtthatómátrix szinguláris lesz. Ebben az esetben pedig az előbb említett két egyenlet helytelen megoldásra vezet. Az együtthatómátrix olyan tartomány esetén lesz szinguláris, amelyhez nem tartozik egyáltalán vagy csak nagyon kevés olyan peremen lévő csomópont, ahol a Dirichlet-peremfeltételt írtuk elő [265, 266, 293, 294, 301, 311–313, 317]. Ezeket a tartományokat lebegő (*floating*) altartományoknak nevezik, mert a peremén kevés vagy semmiféle kényszer nincs. Ez pedig azt eredményezi a csomóponti végelemek esetében, hogy a normális irányú komponens folytonossága automatikusan teljesül, de a tangenciális irányú komponensé nem. A lebegő altartomány elnevezés matematikailag azt jelenti, hogy az altartományhoz tartozó együtthatómátrix nem invertálható, vagyis determinánsa nullával egyenlő [216–218, 220, 221, 319].

A lebegő altartományok lokális Neumann-feladatnak tekinthetők, ahol az összes peremen a Neumann-peremfeltételt írjuk elő. Ezért ahhoz, hogy a szomszédos tartományokkal meglegyen a folytonosság, egy további speciális feltétel kell a megoldáshoz. Ez a feltétel a szakirodalmi elnevezés alapján a tartomány merev test mozgásának (*rigid body motion*) figyelembevétele [265–267, 311, 312]. A merev test mozgás elnevezés a módszer mechanikai alapjaiból és alkalmazásából ered, ahol az elmozdulás az ismeretlen. Az elektromágneses térszámításban ennek nincs fizikai jelentése, ezért a merev test mozgás helyett a matematikai elnevezését használom a továbbiakban. Matematikailag a lebegő altartomány merev test mozgása nem más, mint az altartomány szinguláris együtthatómátrixának nulltere vagy kernelje [216–218, 221, 319–321]. A $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$ együtthatómátrix nullterén a \mathbf{K}_i mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét értjük [218, 221, 319], vagyis

$$\mathbf{R}_i = \text{Ker } \mathbf{K}_i = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{K}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}\}. \quad (2.46)$$

A (2.42) egyenlet a lebegő tartomány esetében a mátrix nullterével kiegészítve a következő lesz

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{K}_i^\dagger (\mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i^\text{T} \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}_i \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (2.47)$$

ahol a \mathbf{K}_i^\dagger a \mathbf{K}_i mátrix pszeudoinverze és az $\boldsymbol{\alpha}_i$ az i -edik tartományhoz tartozó nulltér együtthatóit tartalmazza, melyeknek köszönhetően az i -edik tartomány peremén is a gerjesztésnek megfelelő értékek lesznek. A továbbiakban a \mathbf{K}_i^\dagger a \mathbf{K}_i mátrix pszeudoinverzére utal, ha szinguláris, és $\mathbf{K}_i^\dagger = \mathbf{K}_i^{-1}$, ha az altartomány együtthatómátrixa reguláris.

Azonban ahhoz, hogy a lebegő altartományhoz tartozó (2.42) szinguláris egyenletnek csak egy megoldása legyen, teljesülnie kell, hogy az egyenlet jobb oldalának, a $(\mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i^\text{T} \boldsymbol{\lambda})$ vektornak ne legyen eleme a szinguláris \mathbf{K}_i mátrix nullterében. Ez csak akkor teljesül, ha a \mathbf{K}_i mátrix nulltere és a (2.42) egyenlet jobb oldala ortogonális, vagyis $(\mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i^\text{T} \boldsymbol{\lambda}) \perp \mathbf{R}_i = \text{Ker } \mathbf{K}_i$, ami egyenlet formájában a következő lesz [265, 266, 293, 303, 312, 313, 317]

$$\mathbf{R}_i^\text{T} \mathbf{K}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{R}_i^\text{T} (\mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i^\text{T} \boldsymbol{\lambda}) = 0. \quad (2.48)$$

A fenti ortogonalitási feltétel felfogható, mint a megoldáshoz szükséges egyenlet, mert N_S altartomány esetében N_S egyenlet adódik a tartományokra. Azonban még ismeretlenként van a $\boldsymbol{\lambda}$ és az $\boldsymbol{\alpha}_i$. Ha a (2.47) egyenletet behelyettesítjük a (2.43) kompatibilitási egyenletbe, csak a következő egyenlet adódna a két ismeretlenre

$$\mathbf{B}_i \mathbf{K}_i^\dagger (\mathbf{b}_i - \mathbf{B}_i^\text{T} \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{B}_i \mathbf{R}_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}, \quad (2.49)$$

de ezt kiegészítve a (2.48) egyenlettel már az ismeretleneknek megfelelő számú egyenletet kapunk.

Ha a (2.48) és a (2.49) egyenleteket átrendezzük, és a teljes feladatra írjuk fel az egyenletrendszert, amelyhez felhasználjuk a (2.44) egyenlet jelöléseit, valamint hogy az $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^\text{T} & \dots & \boldsymbol{\alpha}_{N_S}^\text{T} \end{bmatrix}^\text{T}$ és a $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^\text{T} & \dots & \mathbf{R}_{N_S}^\text{T} \end{bmatrix}^\text{T}$, a következő két mátrixegyenletet kapjuk

$$\begin{aligned} \mathbf{BK}^\dagger \mathbf{B}^\text{T} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{BR} \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{BK}^\dagger \mathbf{b}, \\ -\mathbf{R}^\text{T} \mathbf{B}^\text{T} \boldsymbol{\lambda} &= -\mathbf{R}^\text{T} \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

amely a (2.45) egyenlet, vagyis az eredeti feladat duálisát eredményezi, mert a $\boldsymbol{\lambda}$ a duális változója az \mathbf{x} primál változónak. A fenti egyenletet átalakítva, a következő duális határfelület feladatot kapjuk, ami az egész felbontott feladatra vonatkozik [230, 232–234, 256, 257, 266, 301, 303, 304, 309, 312, 313, 317]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_I & -\mathbf{G}_I \\ -\mathbf{G}_I^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I &= \sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i^\dagger \mathbf{B}_i^T = \mathbf{B} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{B}^T, \\ \mathbf{d} &= \sum_{i=1}^{N_S} \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i^\dagger \mathbf{b}_i = \mathbf{B} \mathbf{K}^\dagger \mathbf{b}, \\ \mathbf{G}_I &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{B}_{N_S} \mathbf{R}_{N_S} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{R}, \\ \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{b}_{N_S}^T \mathbf{R}_{N_S} \end{bmatrix}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

A (2.51) egyenletrendszer egy határfelület feladat, mint a redukált feladat, a (2.39) egyenlet a Schur—komplementum-módszer esetében.

Az altartományokon lévő ismeretlenek meghatározásához a (2.42) egyenletet vagy szinguláris altartomány esetében a (2.47) egyenletet alkalmazzuk. De először a duális feladatot, a (2.51) egyenletrendszert kell megoldani.

A következőkben a direkt megoldónak javasolt eljárás általános áttekintését ismertetem, mely kis duális feladat esetében hatékonyan alkalmazható, valamint bemutatok két iteratív módszert, melyekkel nagyobb ismeretlenség esetében lehet gazdaságosan közelíteni az ismeretlen Lagrange-multiplikátorokat. A bemutatásra kerülő módszerek mindegyike a duális feladat megoldására irányul. A tartományokon lévő ismeretlenek meghatározásához a (2.42) vagy a (2.47) egyenlet megoldása szükséges, amelyhez már alkalmazhatóak az irodalomból jól ismert direkt vagy iteratív megoldó rutinok. A belső ismeretlenek, vagyis a (2.42) vagy a (2.47) egyenlet megoldásához a Matlab *mldivide* algoritmusát [322] alkalmaztam minden esetben. Az *mldivide* egy robusztus lineáris egyenletmegoldó rendszer, amely nagyon hatékonyan kezeli a végeselem-módszerből kapott ritka egyenletrendszert, ezzel minimalizálva a számítási időt [322].

Direkt megoldó algoritmus

A direkt megoldó algoritmus a FETI-módszer esetében nem egy klasszikus felbontási módon alapszik, hanem a duális feladatnál a $\boldsymbol{\lambda}$ vektor közvetlen meghatározását jelenti.

Ahhoz, hogy a (2.51) egyenletrendszerben szereplő Lagrange-multiplikátorok vektorát meghatározzuk, fel kell bontani két összetevőre [230, 266, 293, 294, 303, 311, 312, 317],

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \mathbf{P}(\mathbf{Q}) \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad (2.53)$$

ahol $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{Q} \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{e}$, ami a $\mathbf{G}_I^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}$ egyenlet egy partikuláris megoldása. A $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ egy projektormátrix. Projektormátrixnak azt a \mathbf{P} mátrixot nevezzük, melyre teljesül a $\mathbf{P} \mathbf{P} = \mathbf{P}$ összefüggés [217, 233]. Emellett a $\mathbf{G}_I^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}$ összefüggés miatt, minden

\mathbf{Q} mátrix esetében teljesülnie kell a $\mathbf{G}_I^T \mathbf{P}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ egyenlőségnek. Dolgozatomban a $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ projektormátrix [230, 233, 301, 307, 309, 311, 313]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Q}) = \mathbf{I} - \mathbf{Q} \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{Q} \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{G}_I^T, \quad (2.54)$$

ahol \mathbf{I} az egységmátrix, \mathbf{Q} pedig egy tetszőleges szimmetrikus pozitív definit mátrix. A \mathbf{Q} mátrix és a $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ vektor alkalmas megválasztásával a (2.51) egyenlet megoldását kapjuk.

Az általános bemutatáson túl az általam alkalmazott direkt megoldó eljárást, az eljáráshoz tartozó mátrix és vektor megválasztását és a hozzá tartozó levezetést a modell párhuzamosításához kapcsolódó tézisemnél ismertetem.

Iteratív megoldó algoritmus

Ahogy a módszer bevezetőjénél írtam, a (2.51) egyenlet pozitív szemidefinit, ezért például a klasszikus konjugált gradiens (CG) módszert nem lehet a duális feladat megoldására alkalmazni [216–218, 220, 221]. Az \mathbf{F}_I mátrix pozitív szemidefinit, ha $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}_I \boldsymbol{\lambda} \geq 0$ [217, 221]. Azonban az \mathbf{F}_I mátrix szimmetrikus, így van lehetőség a végelem-módszernél jól bevált módszerek módosított változatának alkalmazására. A FETI-módszernél legelterjedtebben alkalmazott iteratív megoldó algoritmus a konjugált gradiens módszer módosított változata, de a GMRES (*Generalized Minimal Residual Method*) módosított változatára is lehet alkalmazást találni [318].

A (2.51) egyenlet, a FETI peremfeladata nem más, mint egy nyeregponthoz tartozó feladat, mert az egyenletrendszer megoldása egy alkalmas kvadratikus funkcionál nyeregponthoz áll elő [217, 323]. A (2.51) egyenlet megoldása ekvivalens egy feltételes optimalizációs feladat megoldásával. A $\boldsymbol{\lambda}$ vektor közelítését a következő kvadratikus függvény minimalizálásával nyerjük [233, 313]

$$\min_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}_I \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d}, \quad (2.55)$$

melyhez a következő feltétel tartozik:

$$\mathbf{G}_I^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}. \quad (2.56)$$

A konjugált gradiens módszer módosítására azért van szükség, hogy biztosítsuk a (2.56) feltétel teljesülését. Ehhez arra van szükség, hogy már az első lépésben $\boldsymbol{\lambda}_0$ legyen eleget a $\mathbf{G}_I^T \boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{e}$ feltételnek, és minden iterációban az \mathbf{s}_{k+1} keresési iránynak megfelelően meghatározott $\delta \boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_k$ legyen eleget a következő kényszernek

$$\mathbf{G}_I^T \delta \boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \mathbf{G}_I^T (\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_k) = 0. \quad (2.57)$$

A fenti kényszer teljesítéséhez minden konjugált gradiens iterációban a maradékvektor, $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{d} - \mathbf{F}_I \boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ projekciójára [304, 306, 307, 313] van szükség, a következőképpen:

$$\mathbf{r}_{k+1} \rightarrow \mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{P}(\mathbf{Q}) \mathbf{r}_{k+1}, \quad (2.58)$$

ahol $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ a (2.54) egyenletben megadott projekciós mátrix. A módosított konjugált gradiens módszer esetében $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, vagyis egységmátrix. A projekció következtében pedig

a feltétel teljesül, mert

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_I^T \mathbf{w}_{k+1} &= \mathbf{G}_I^T (\mathbf{P}(\mathbf{Q}) \mathbf{r}_{k+1}) = \\
 &= \mathbf{G}_I^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{I} \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{I} \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{G}_I^T \right) \mathbf{r}_{k+1} = \\
 &= \left(\mathbf{G}_I^T \mathbf{I} - \mathbf{G}_I^T \mathbf{I} \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{I} \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{G}_I^T \right) \mathbf{r}_{k+1} = \\
 &= \left(\mathbf{G}_I^T - \mathbf{G}_I^T \right) \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

A konjugált gradiens módszer és a projekció kombinációjából egy módosított konjugált gradiens (MCG) módszert kaptunk [233, 265, 293, 294, 301, 315–317], melyet még konjugált projekciós gradiens (*conjugate projected gradient*) módszernek is nevez a szakirodalom.

Az általam megvalósított és használt módosított konjugált gradiens módszer pszeudokódját a 2. Algoritmus mutatja. A kezdővektorokat, $\boldsymbol{\lambda}_0$, \mathbf{r}_0 , \mathbf{w}_0 a feltételeknek, kényszereknek megfelelően kell megválasztani, különös tekintettel a $\boldsymbol{\lambda}_0$ vektorra, hogy már az első lépésben is teljesüljön a (2.56) feltétel. A $\boldsymbol{\lambda}_0$ vektort nem lehet közvetlenül kiszámítani, mert \mathbf{G}_I nem négyzetes mátrix, tehát a \mathbf{G}_I^T mátrixnak nincs inverze. Azonban ha az egyenletrendszer mindkét oldalát beszorozzuk egységmátrixszal, akkor ez feloldható,

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = (\mathbf{G}_I^T)^{-1} \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{I} \boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{G}_I \mathbf{G}_I^{-1} (\mathbf{G}_I^T)^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{e}, \tag{2.60}$$

ahol már a $\mathbf{G}_I^T \mathbf{G}_I$ egy invertálható mátrix.

A 2. Algoritmusban jelöltem a módszerhez kapcsolódó főbb lépéseket. A módosított konjugált gradiens módszer hatékony megoldó eljárás, és viszonylag egyszerű a megvalósítása is, azonban nagyon ritkán lehet találkozni alkalmazás szintjén a FETI-módszer esetében. Ennek oka, hogy nem tudja kezelni a lebegő tartományokat. Tehát csak olyan esetben alkalmazható, ha a rácspartitionáló algoritmus úgy bontja fel a feladatot, hogy abban ne legyen lebegő altartomány.

A lebegő altartományok kezeléséhez prekondicionáló alkalmazása szükséges, amely a prekondicionált konjugált projekciós gradiens módszert eredményezi [232, 233, 262, 266,

2. ALGORITMUS MÓDOSÍTOTT KONJUGÁLT GRADIENS MÓDSZER

```

1 Inicializálás:  $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{e}$ ,
2  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{d} - \mathbf{F}_I \boldsymbol{\lambda}_0$ ,
3  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{P}(\mathbf{Q}) \mathbf{r}_0$ ,
4  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{w}_0$ ,
5 for  $i = 0, 1, \dots$  do
6    $\beta_i = \frac{(\mathbf{w}_i)^T \mathbf{w}_i}{(\mathbf{s}_i)^T \mathbf{F}_I \mathbf{s}_i}$ , // Lépés hossza
7    $\boldsymbol{\lambda}_{i+1} = \boldsymbol{\lambda}_i + \beta_i \mathbf{s}_i$ , // Közelítés
8    $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \beta_i \mathbf{F}_I \mathbf{s}_i$ , // Maradék
9    $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{P}(\mathbf{Q}) \mathbf{r}_{i+1}$ , // Projekció
10   $\eta_i = \frac{(\mathbf{w}_{i+1})^T \mathbf{w}_{i+1}}{(\mathbf{w}_i)^T \mathbf{w}_i}$ ,
11   $\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{w}_{i+1} + \eta_i \mathbf{s}_i$ , // Keresési irány

```

293, 294, 301–307, 309, 312, 313, 315–317], ami a legelterjedtebben alkalmazott megoldási eljárás a (2.51) egyenlethez. A prekondicionálás javít a módszer konvergenciáján, csökkenti az iterációk számát, és ha megfelelően választjuk meg, a lebegő altartományt tartalmazó feladatot is tudja kezelni. A FETI-módszernél két prekondicionálót alkalmaznak elterjedten a matematikailag optimális Dirichlet prekondicionálót és a koncentrált (*lumped*) prekondicionálót [230, 233, 266, 304–306, 312, 313]. Számítási szempontból a koncentrált prekondicionáló a gazdaságosabb, valamint a szakirodalom ezt javasolja első és másodfokú feladatok esetében, ezért én itt csak ezzel a prekondicionálóval foglalkozom.

A prekondicionáló előállításához a FETI-módszer esetében is arra van szükség, hogy az altartományok együtthatómátrixa a (2.38) egyenletben látható módon legyen particionálva. A koncentrált prekondicionáló a következőképpen számítható [230, 233, 293, 312, 313, 317]

$$\mathbf{F}_I^L = \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{B}_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i\Gamma\Omega_i} \end{bmatrix} \mathbf{B}_i^T, \quad (2.61)$$

ahol a $\mathbf{K}_{\Gamma\Omega_i\Gamma\Omega_i}$ a Schur—komplemens-módszernél bemutatott almátrix, melyben a felbontásból létrejött Γ peremen (lásd 2.14(b) ábra) lévő csomópontok együtthatói vannak. Ahogy már említettem, a \mathbf{Q} mátrix jellemzően egységmátrix, azonban heterogén esetben, ha többféle anyag is jelen van egy altartományon, érdemes a \mathbf{Q} mátrixot a prekondicionálás miatt már kiszámított \mathbf{F}_I^L mátrixnak választani.

A prekondicionált módosított konjugált gradiens módszer algoritmusát a 3. Algoritmus mutatja. Az algoritmus nagyon hasonló a MCG algoritmusához, az egyik különbség a prekondicionálásból származik. A másik pedig az \mathbf{s} számításánál található, ahol az új

3. ALGORITMUS PREKONDICIONÁLT MÓDOSÍTOTT KONJUGÁLT GRADIENS MÓDSZER ORTOGONALIZÁCIÓVAL

```

1 Inicializálás:  $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{G}_I(\mathbf{G}_I^T\mathbf{Q}\mathbf{G}_I)^{-1}\mathbf{e}$ ,
2  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{d} - \mathbf{F}_I\boldsymbol{\lambda}_0$ ,
3  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{P}(\mathbf{Q})^T\mathbf{r}_0$ ,
4  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{P}(\mathbf{Q})\mathbf{F}_I^L\mathbf{w}_0$ ,
5  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{h}_0$ ,
6 for  $i = 0, 1, \dots$  do
7      $\beta_i = \frac{(\mathbf{h}_i)^T\mathbf{s}_i}{(\mathbf{s}_i)^T\mathbf{F}_I\mathbf{s}_i}$ , // Lépés hossza
8      $\boldsymbol{\lambda}_{i+1} = \boldsymbol{\lambda}_i + \beta_i\mathbf{s}_i$ , // Közelítés
9      $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \beta_i\mathbf{F}_I\mathbf{s}_i$ , // Maradék
10     $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{P}(\mathbf{Q})^T\mathbf{r}_{i+1}$ , // Projekció
11     $\mathbf{h}_{i+1} = \mathbf{P}(\mathbf{Q})\mathbf{F}_I^L\mathbf{w}_{i+1}$ , // Prekondicionálás
12    for  $0 \leq j \leq i$  do
13         $\eta_i^j = -\frac{\mathbf{h}_{i+1}^T\mathbf{F}_I\mathbf{s}_j}{\mathbf{s}_j^T\mathbf{F}_I\mathbf{s}_j}$ ,
14     $\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{h}_{i+1} + \sum_{j=0}^i \eta_i^j\mathbf{s}_j$ , // Keresési irány ortogonalizációval
```

keresési irányt ortogonalizációval számítjuk [266, 301, 303, 305], figyelembe véve az előző iterációk során számított irányvektorokat. Fontos megjegyezni, hogy a régebbi keresési irányok vektorainak tárolása további memóriagénnyel jár, azonban ez jellemzően nem jelentős hányada a teljes memóriahasználatnak.

A következő megállási kritériumot használtam mindkettő iteratív algoritmus esetében

$$\frac{\|\mathbf{w}_i\|_2}{\|\mathbf{d}\|_2} \leq \xi, \tag{2.62}$$

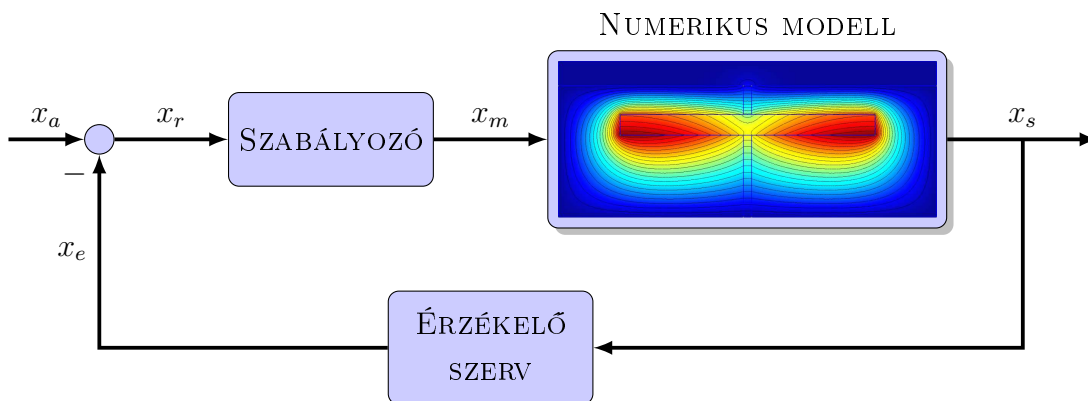
ahol a $\|\mathbf{w}_i\|_2$ az i -edik iteráció projekciós maradékvektorának 2-es normája és a $\|\mathbf{d}\|_2$ a duális feladat jobb oldalának 2-es normája, és ξ egy előre definiált hibahatár.

2.4. A modellek szabályozási körbe illesztése

A különböző villamos berendezésekkel, de legfőképpen az elektromos járművekkel szemben magas követelményeket támasztanak. Emiatt előtérbe került a meghajtást végző elektronika és algoritmus és a meghajtott berendezés összekapcsolása már a tervezés során, a jobb teljesítmény és magasabb hatásfok érdekében. Ehhez elsősorban egy megfelelő modell szükséges a villamos berendezésről, ami összekapcsolható tetszőleges elektronikával és/vagy szabályozóval. De a modell mellett még szükséges az összekapcsolásra alkalmas szimulációs környezet is.

A 2.17. ábra a szabályozási kör sematikus vázlatát mutatja. A szabályozási kör működése során az x_r rendelkező jel, ami az x_a alapjelnek és a szabályozott jellemző pillanatnyi értéktől függő x_e ellenőrző jelnek a különbsége ($x_r = x_a - x_e$), a szabályozót működteti. Az ábrán a szabályozó kimenete az x_m módosított jellemző, amely a szabályozott berendezést befolyásolja, vagyis a szabályozott szakasz bemenőjele. A szabályozott szakaszt jelen esetben a végeselem-módszeren alapuló modell reprezentálja. A szabályozott szakaszban lejátszódó folyamatokról a kimenőjele, az x_s szabályozott jellemző ad információt. A szabályozott jellemzőről az ellenőrző szerv szolgáltat információt az ellenőrző jel formájában [324–330].

Napjainkban egyre több olyan irányítási rendszer van, főleg a szenzormentes irányítás terjedésével, mely tartalmaz valamilyen megfigyelt vagy paraméterbecslőt. Ezek sok esetben identifikáció útján nyert, vagy az állapotváltozós leírásból származó modellek.



2.17. ÁBRA A végeselem-módszeren alapuló modellt tartalmazó szabályozási kör felépítése.

Mindkét esetben szükséges egy létező eszköz és az azon végzett mérések, hogy a modell felépíthető legyen. A prototípus gyártásának, és mérésének kiküszöböléséhez a numerikus modell egy kézenfekvő megoldás, ahogy erre az irodalomban is találni példát, ahol megfigyelőként [331–333] vagy állapotbecslőként [334] alkalmazzák a végeelem-módszerrel nyert modellt. Így anélkül lehet vizsgálni komplett rendszereket, hogy bármilyen eszközt fizikailag megvalósítottunk volna. A végeelem-módszerrel létrehozott modell lehetőséget biztosít arra, hogy a teljesítményelektronikában vagy irányításelméletben jártas szakemberek számára is elérhető, és alkalmazható legyen egy numerikus modell, mint szabályozott szakasz a rendszerben, anélkül hogy átfogó ismereteik lennének annak elméleti háttéréről. A szabályozótervezésénél, tesztelésénél, vagy a meghajtó elektronika vizsgálatánál is gyakran alkalmazott eljárás a SIL (*Software-In-the-Loop*) modell, ahol egy szoftveresen implementált reprezentáció, jelen esetben a végeelem-módszer segítségével felépített modell helyettesíti a szabályozni kívánt eszközt. Az előbb elmondottak egyik alapvető feltétele, hogy egy szimulációs rendszerben lehessen a két részt vizsgálni.

A csatolt végeelem-módszerrel felépített modellt tartalmazó szabályozási kör ritkán vizsgált rendszer a szakirodalom alapján. Ilyen irányítási rendszer sematikus ábráját mutatja a 2.17. ábra. A ritka alkalmazás fő oka, hogy a szabályozási kör és a csatolt modell összekapcsolása és együttes alkalmazása nagyon összetett feladat. Sokkal gyakoribb azzal az esettel találkozni, amikor a FEM-modellből kapott eredményeket felhasználják a szabályozó tervezéséhez, és a szabályozási körben a FEM-modellből nyert paramétereket vagy két- és háromdimenziós keresési táblákat (*look-up table*) alkalmaznak [211, 335–340]. Ennél már összetettebb feladat, amikor a szabályozó és az elektronika kimeneteként előálló jelek képezik a modell bemenetét, mert ebben az esetben az időlépéseket szinkronizálni kell a ki- és bemenetek között [131, 138, 146, 341–344]. De itt még mindig két külön rendszert képez a szabályozó és a modell. A valóságban ez két külön szoftvert, vagy szimulációs környezetet jelent, amelyeket illeszteni kell egymáshoz, vagyis a rendszer gyengén csatolt. Napjainkban a kereskedelmi szoftverek többségében (COMSOL Multiphysics, ANSYS Maxwell, JMAG, Opera, Flux 2D/3D, QuickField) ez a csatolási lehetőség áll rendelkezésre, mert könnyen implementálható, és a felépített modell egyes részei gyorsan módosíthatók [171, 213, 214, 345–347]. A gyenge csatoláshoz képest az erős csatolás ebben az esetben annyit jelent, hogy a szabályozó algoritmus a hozzá kapcsolódó elektronika modelljével és a FEM-modell ugyanabban a szimulációs környezetben valósul meg.

Az elektromágneses térszámítás területén belül az erős csatolást leginkább komplett villamos hajtások vizsgálatára alkalmazzák. Először egy állandó mágneses motor hajtásához használtak erős csatolást, ahol a szabályozó annyiból állt, hogy a forgórész szög helyzetét és sebességét felhasználva szabályozták az elektronikai alkatrészek kapcsolását [348]. Ehhez nagyon hasonló szabályozási kört valósítottak meg aszinkron motoros hajtásra, ahol azonban az egyszerű szabályozás helyett a Park-vektorokon alapuló szabályozást valósítottak meg [349]. Majd lineáris aszinkron motor esetében is alkalmazásra került a vektor-szabályozás [350]. Az előzőekhez hasonló elvek alapján hiszterézises áramszabályozóval megvalósított egyenáramú motoros hajtást [351] és orsómotoros hajtást [352] vizsgáltak zárt szabályozási körben. Az ezidáig publikált ismeretekre alapozva Sami Kanerva a doktori disszertációjában [146] azt vizsgálta, hogy egy szabályozási körben milyen kimenetekkel célszerűbb a FEM-modellt alkalmazni. Az erős csatolás továbbfejlesztéseként, a csatolt numerikus modell eddig csak végeelemeken és a teker-cselés differenciálegyenletén alapuló leírásán változtattak úgy, hogy a meghajtó elektro-

nikát és a tekercsvégeket a módosított csomóponti analízissel (*MNA - Modified Nodal Analysis* [353]) írták le egy tekercselt forgórészű kefe nélküli indítógenerátor vektor-szabályozásában [354]. Emellett természetesen más alkalmazásokkal is lehet találkozni az erős csatolással, mint az indukciós hevítés [355], szívó-folytótetekercs [356] vagy a teljesítményelektronikai áramkörben szereplő transzformátor [357,358] vagy elektromágneses kapcsoló [359].

Az irányításelméletben széles körben alkalmazott szoftver a *Matlab* [322] és azon belül a *Simulink* [99], melyben könnyen és gyorsan implementálható egy szabályozási kör blokksémák segítségével. A *Simulink* jelfolyamhálózat-szimulátorban van lehetőség *Matlab* függvények alkalmazására blokkok formájában. Ennek köszönhetően a *Matlab/Simulink* környezet alkalmas a végeelem-módszeren alapuló modellt tartalmazó szabályozási kör megvalósítására. Az én esetemben a FEM-modell egy *Matlab* szkript és C-programnyelven megvalósított, a végeelem-módszert alkalmazó megoldó eljárást jelent, ahogy azt majd a 5. fejezetben bemutatom. Itt fontos megjegyezni, hogy az ingyenesen hozzáférhető *Scilab* és *Xcos* [100] segítségével is megvalósítható a 2.17. ábrán vázolt szabályozási kör. Természetesen nem törvényszerű az ilyen rendszerhez saját szoftver megvalósítása, mivel a rendszer megvalósítható még minden olyan programmal ahol egy rendszerszimulátorba beágyazható egy numerikus térszámításon alapuló modell.

Amellett, hogy a végeelemeken alapuló modellnek köszönhetően egy pontosabb modellt kapok, azt is fontos megemlíteni, hogy ez jelentősen növeli az eredeti szabályozási kör szimulációs idejét. Az szimulációs idő növekedésének fő oka az ismeretlenek számában keresendő. Közönséges differenciálegyenletek esetében a legbonyolultabb irányítási rendszereknél is az ismeretlenek száma (szabadsági fok vagy állapotváltozók száma) nagyságrendekkel kisebb a végeelem-módszer révén nyert modelleknél. A megnövekedett számítási idő csökkentésére a numerikus térszámítás párhuzamosítása az egyik lehetőség, amelyhez az előző részben ismertetett tartomány dekompozíciós módszereket alkalmazom. Természetesen önmagában a párhuzamosítással nem lehet az eredeti értékre vagy annál kisebbre csökkenteni a számítási időt, de ezzel is jelentős időmegtakarítás érhető el, melyet az is kompenzál, hogy a körben egy, a valóságot pontosabban leíró modell működik.

Dolgozatomnak nem célja a vizsgálandó elektrodinamikai rendszer meghajtó elektronikájának és a hozzá kapcsoló szabályozónak a vizsgálata. Ezért kapott nagyobb hangsúlyt az irodalomkutatás során is az elektromágneses térszámítás témaköre. A módszerek bemutatáshoz alkalmazott példánál is a szabályozási körök egyszerűek, mert a fő cél a két rendszer egy szimulációs környezetben történő megvalósítása. Emiatt a dolgozatban, ahogy már az előzőekben is utaltam rá, a szabályozót és a végrehajtó szervet nem választom szét. A 2.17. ábrán a szabályozó blokk mindkét részt tartalmazza, és ezért a módosított jellemző a szabályozó kimenete. Az ábrán szintén szerepel, a valós rendszereknél a visszacsatolásban jelentős szerepet betöltő érzékelő szerv. Egy pontosan modellezett rendszerben fontos figyelembe venni az érzékelők viselkedését, átviteli függvényét. Viszont ennek szintén nincs jelentősége a dolgozatom szempontjából, így a vizsgált esetekben egységnyi átviteli függvénnyel veszem figyelembe az érzékelő szervet.

2.5. A meglévő eredmények hiányosságai

A mechanikai mozgás és a feszültségegyenlet csatolása napjaink kereskedelmi szoftvereiben is megtalálható. Azonban ezek vagy nem közvetlen csatolást jelentenek, vagy

nem alkalmasak a párhuzamosításra. A mozgás figyelembevételére alkalmazott, ismert és publikált technikák kétdimenziós esetben is jelentős műveletigénnyel és újabb ismeretlenek bevezetésével járnak együtt. Emellett a csatolt végeselem-módszer segítségével felépített modell közvetlenül nem illeszthető be egy jelfolyamhálózatba.

A tartomány dekompozíciót, mint párhuzamosítási lehetőséget elterjedten alkalmazzák gépészeti szimulációkban. A villamosmérnöki gyakorlatban rádiófrekvenciás szimulációknál lehet találkozni a tartomány dekompozíció átlapolt változatával, de az alacsonyfrekvenciás elektromágneses feladatoknál csak elvétve található példa az alkalmazására. A szakirodalomban megtalálható a nem átlapolt tartomány dekompozíció elmélete gépészeti és matematikai aspektus szerint, azonban az elektromágneses térszámításban vannak olyan sajátosságok, amelyekre egyáltalán nincs megoldás. Ilyen a villamos beavatkozóknál a feszültségegyenlet és a mozgó rész merev test mozgásának kezelése. Emellett magyar szakirodalom nincs a tartomány dekompozícióval történő párhuzamosításra, így dolgozatomban ezt a hiányosságot is szeretném orvosolni.

Az irodalomkutatásomból jól látszik, hogy széles körben foglalkoznak a végeselem-módszerrel nyert modell irányítási körbe vagy hajtásrendszerbe illesztésével. A kereskedelemben kapható szoftvereknél is van lehetőség a koncentrált paraméterű rendszer vagy jelfolyamhálózat és az elosztott paraméterű modell összekapcsolására, de itt is jellemzően gyenge csatolásról beszélhetünk. Tehát a közvetlen és a közvetett csatolásra is létezik megoldás, de ennek a területnek egyik hiányossága, hogy mindig szekvenciálisan fut a nagy számításigényű modell.

3. FEJEZET

Feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt modell

3.1. Motiváció

A Maxwell-egyenletekben, és az ezekből levezethető potenciálformalizmusokban is az áram vagy áramsűrűség szerepel gerjesztőmennyiségként. Tehát, alapesetben az így előálló numerikus modellel csak akkor vizsgálhatók egy feszültséggel gerjesztett rendszert, ha ismerem a feszültség következtében meginduló áram időfüggvényét, melyet előírok mint gerjesztést. Vagy stacionárius állapotban vizsgálom a rendszert, amikor az áram időfüggvényének tranziens része már elhanyagolható, vagyis a rendszer állandósult állapotban van. Ez a két feltétel valós rendszerek esetében nagyon ritkán vagy csak elhanyagolásokkal teljesül. Ezért az elektromágneses rendszereknél fontos figyelembe venni a tekercselés feszültségegyenletét, aminek köszönhetően megvalósítható a feszültséggel gerjesztés és a villamos kör átmeneti jelenségei is vizsgálhatóvá válnak.

Nagyon széles alkalmazási köre van a különféle elektromechanikai rendszereknek, ezért fontos a viselkedésük minél pontosabb ismerete. Ehhez nem elegendő a rendszerben lejátszódó elektromágneses jelenségek leírása, hanem a mozgórészek merev test mozgásában fellépő átmeneti jelenségek figyelembevételére is fontos. Erre a (2.31) mechanikai tranziens egyenlete ad lehetőséget. Ezzel az egyenlettel figyelembe vehető az elektromechanikai rendszerben lévő tetszőleges súrlódás, a mozgást végző rész tehetetlensége és a mozgórészhez kapcsolt, azt terhelő nyomaték. Illetve ezáltal lehetőség van tetszőleges indításnál vagy gyorsításnál a mechanikai tranziens vizsgálatára.

A két egyenlet csatolásának a fő célja a megfelelő bemenettel és kimenettel rendelkező numerikus modell létrehozása a szabályozási körbe illesztéshez. A feszültségegyenlet és a mechanikai egyenlet figyelembevételére többféle technika létezik, ahogy azt az irodalmi áttekintésben már ismertettem. Dolgozatomban a feszültségegyenlet csatolásánál csak az erős csatolást alkalmaztam. A mechanikai egyenlet figyelembevételénél az egyréteges mozgósáv és a csúszófelület módszereket implementáltam. A kétféle megvalósítás célja a módszerek behatóbb ismerete, és annak vizsgálata, hogy melyik módszert célszerűbb alkalmazni majd a tartomány dekompozícióval együtt.

Ebben a fejezetben bemutatom az általam `Matlab` szkript és `C`-programnyelv formájában írt, a végeselem-módszert alkalmazó szoftverhez megvalósított technikákkal kapott eredményeket és azok összehasonlítását. A technikák helyes működéséhez a következő három illusztrációt alkalmazom. A feszültségegyenlet csatolását egy hengerszimmetrikus szolenoid példáján mutatom be. A mechanikai mozgás figyelembevételére a T.E.A.M. 30a háromfázisú tesztfeladatot alkalmazom, és végül a feszültség- és mechani-

kai egyenlet csatolását egy 3 kW-os háromfázisú aszinkron motor példáján demonstrálok. Emellett, ismertetem az egyréteges mozgósáv módszerhez kidolgozott technikám, ami tudja kezelni az elemek deformációját és a szakirodalomból ismert megvalósításokhoz képest [41, 106, 153, 189] kisebb számítási igényvel bír.

3.2. Feszültséggel gerjesztett modell

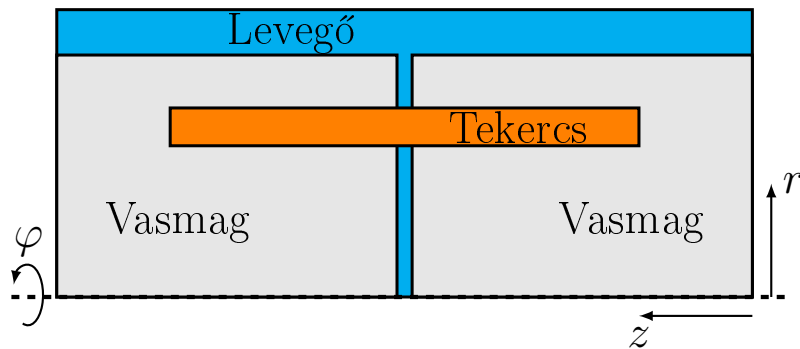
A tekercs feszültségegyenletének erős csatolását egy hengersizmetrikus vasmagos szolenoid példáján mutatom be, ami a 3.1. ábrán látható. A feladathoz tartozó geometriai és anyagparaméterek az F. függelékben találhatóak. Ebben a függelékben ismertetem a vizsgált feladat mágneses körök elméletén alapuló analitikus megoldását, melyet felhasználok a numerikusan kapott eredmény helyességének igazolására, és az analitikus modellből származó hiányosságok demonstrálására.

A hengersizmetrikus feladatot kézenfekvő hengerkoordináta rendszerben vizsgálni (r -radiális távolság, φ -azimut, z -magasság), a már bemutatott \vec{A} mágneses vektorpotenciálra alapuló formalizmussal [41, 48, 64, 360]. Hengerkoordináta rendszerben a \vec{B} mágneses fluxussűrűséget, a (2.6) egyenletnek megfelelően az A_φ mágneses vektorpotenciál cirkulációjaként írjuk le. Ebben az esetben is két komponense van a mágneses fluxussűrűségnek [360–362],

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

mert itt is, mint a Descartes-féle koordináta-rendszerénél, a kétdimenziós esetben egy komponense van az \vec{A} mágneses vektorpotenciálnak. A fenti összefüggésben r a z forgástengelytől mért távolság, vagyis a rádiusz. De míg a (2.11) egyenletnél a két összetevő azonos, és az elemegyenlet szimmetrikus, addig ebben az esetben az elemegyenlet aszimmetrikus a mágneses fluxussűrűség z -komponensének következtében, ha a Galjorkin-módszert alkalmazzuk [41, 360]. Ahhoz, hogy az aszimmetriából fakadó kellemetlenségeket, mint az együtthatómátrix aszimmetriája elkerüljük, bevezetünk egy A' változót [360, 361], ami

$$A' = r A_\varphi, \quad (3.2)$$



3.1. ÁBRA A hengersizmetrikus vasmagos szolenoid.

melyet felhasználva, a (2.30) egyenletben szereplő parciális differenciálegyenlet a következő alakú [360–362]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r\mu} \frac{\partial A'}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\mu} \frac{\partial A'}{\partial r} \right) - \frac{N_{\text{tek}}}{A_{\text{tek}}} i_{\text{tek}} = 0. \quad (3.3)$$

A (3.3) parciális differenciálegyenlet érvényes a teljes feladatra statikus mágneses tér esetben, valamint a levegő és a gerjesztőtekercshez tartozó tartományokra örvényáramú feladatnál. Örvényáramú esetben az $\Omega_{\text{ö}}$ vezető tartományra a következő egyenletet írrom elő:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r\mu} \frac{\partial A'}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\mu} \frac{\partial A'}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A'}{\partial t} = 0. \quad (3.4)$$

Az új változó bevezetésével a tekercs (2.30) egyenletben szereplő feszültségegyenlete is módosul, amely a következő lesz [361, 362]:

$$\frac{N_{\text{tek}} l}{A_{\text{tek}} r} \int_{A_{\text{tek}}} \frac{\partial A'}{\partial t} dA_{\text{tek}} + R_{\text{tek}} i_{\text{tek}} = u_{\text{tek}}. \quad (3.5)$$

Közvetlen csatolásnál egyszerre oldom meg, egy egyenletrendszerként a tartományokhoz tartozó parciális differenciálegyenletet és a hozzá tartozó közös differenciálegyenletet. A közvetlen csatolással előálló egyenletrendszer a teljes tartományra a következőképpen néz ki [361, 362]:

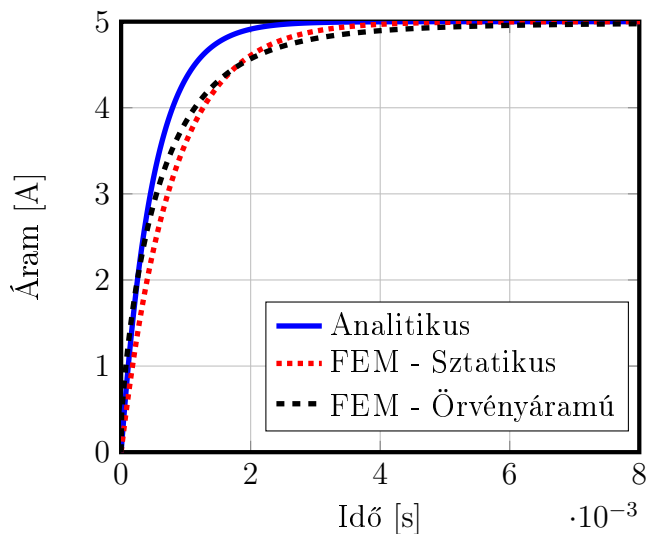
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r\mu} \frac{\partial A'}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\mu} \frac{\partial A'}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A'}{\partial t} - \frac{N_{\text{tek}}}{A_{\text{tek}}} i_{\text{tek}} &= 0, \\ \frac{N_{\text{tek}} l}{A_{\text{tek}} r} \int_{A_{\text{tek}}} \frac{\partial A'}{\partial t} dA_{\text{tek}} + R_{\text{tek}} i_{\text{tek}} &= u_{\text{tek}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Az idő szerinti deriváltak közelítéséhez a hátralépő Euler-sémát [27, 41, 157–159, 220] alkalmaztam. A feladat felbontásához a véges elem-módszert alkalmazva, ami a parciális differenciálegyenletek gyenge alakján alapszik [2, 12, 13, 15, 19, 24], az előző egyenlet mátrixos alakban írva a következő [361, 362]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} + \frac{\mathbf{N}}{\Delta t} & -\mathbf{P} \\ \frac{\mathbf{Q}}{\Delta t} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{I}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{N}}{\Delta t} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{Q}}{\Delta t} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t - \Delta t) \\ \mathbf{I}(t - \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{U}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

ahol \mathbf{A} az ismeretlen mágneses vektorpotenciálokat, \mathbf{I} az ismeretlen tekercsáramokat és \mathbf{U} az tekercs kapcsainál ismert gerjesztőfeszültséget tartalmazó vektor. Az \mathbf{S} a μ permeabilitással, az \mathbf{N} a σ vezetőképességgel kapcsolatos mátrixok. A \mathbf{P} a tekercselésben meginduló áramokhoz, míg \mathbf{Q} a tekercselés fluxuskapcsolódáshoz tartozó mátrix. Az \mathbf{R} mátrix egy diagonális mátrix, melynek a főátlóját a tekercs ellenállásának egyenáramú összetevői alkotják. Ennél a feladatnál egy tekercs van, tehát az \mathbf{R} mátrix 1×1 méretű.

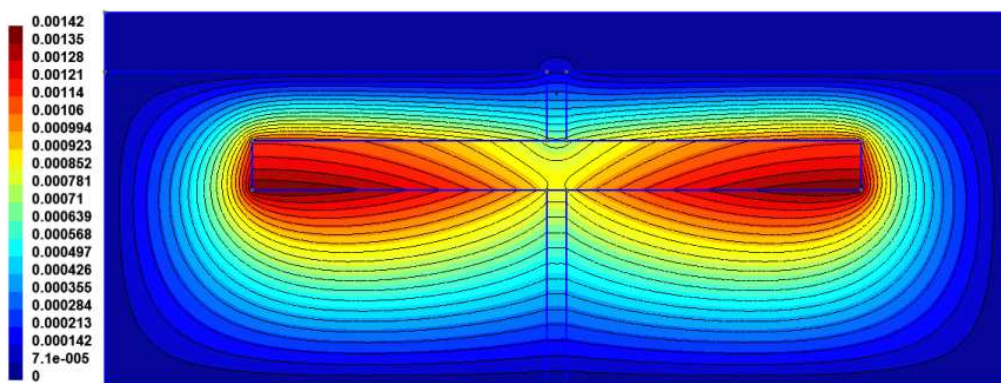
A mintapéldát statikus mágneses – a (3.3) és a (3.5) egyenletek felhasználásával – és örvényáramú – a (3.3), a (3.4) és a (3.5) egyenletek felhasználásával – esetben vizsgáltam. A vizsgált feladat geometriájának felbontásához a GMSH [91, 92] szoftvert alkalmaztam.



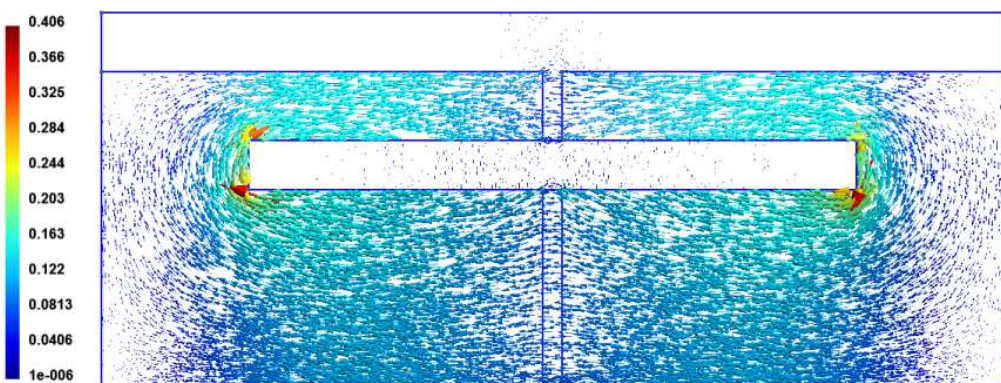
3.2. ÁBRA A szolenoid tekercsében kialakuló áram időfüggvénye az analitikus számítás, és a sztatikus mágneses és örvényáramú szimuláció alapján.

A gerjesztés a $t = 0$ időpillanatban bekapcsolt 10 V amplitúdójú egyenfeszültség, amit a feladathoz kapcsolódó mellékletben az F.2. ábra mutat.

A 3.2 ábra a szolenoid tekercsében kialakuló áram időfüggvényét mutatja. A numeri-

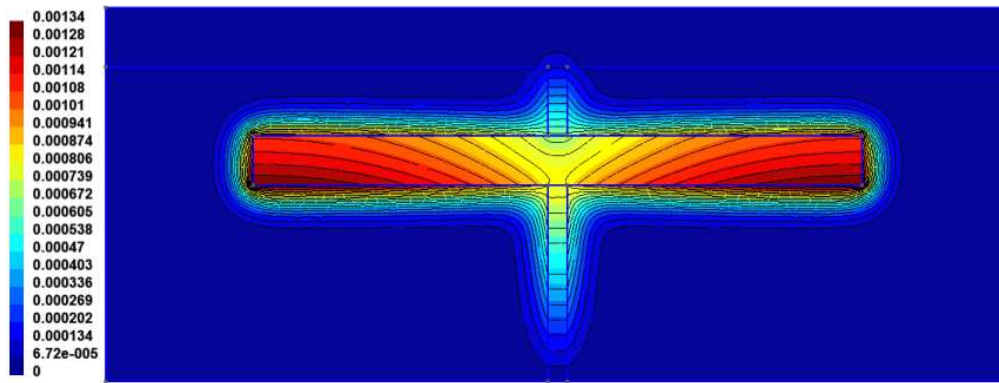


(a) Az A' mágneses vektorpotenciál.

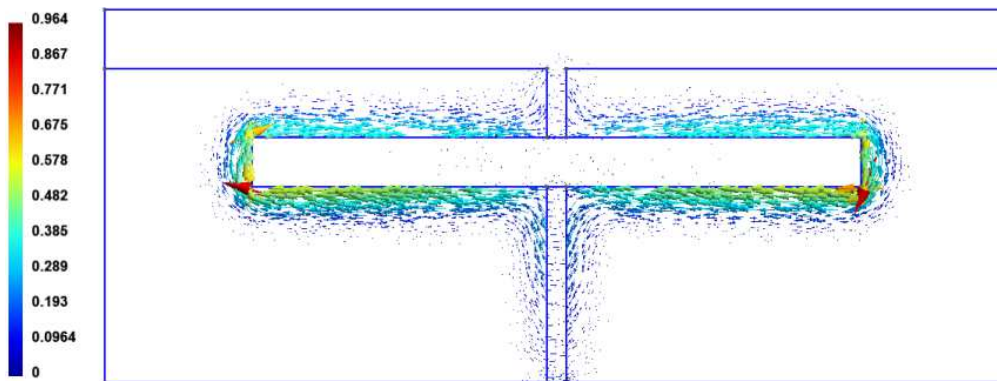


(b) A mágneses fluxussűrűség vektorai.

3.3. ÁBRA A sztatikus mágneses megoldással kapott eredmények.



(a) Az A' mágneses vektorpotenciál.



(b) A mágneses fluxussűrűség vektorai.

3.4. ÁBRA Az örvényáramú megoldással kapott eredmények.

kusan kapott eredmények is jó egyezést mutatnak az analitikusan kapott, az (F.7) egyenletből származó eredménnyel. De az ábrán az is jól látszik, hogy az analitikusan számított eredmény gyorsabban eléri az állandósult állapotot, mint a végeselem-módszerrel számított időfüggvények. Ennek az oka, hogy a feladat valódi induktivitása nagyobb az analitikus számítással kapott értéknél. Az analitikus számítás során a vasmagban lejátszódó jelenségeket elhanyagolják. A numerikus térszámítással kapott megoldás figyelembe veszi a vasmagban végbemenő jelenségeket, hogy a fluxus a vasmagon is keresztülhalad. Vagyis a végeselem-módszerrel nyert megoldások esetében az induktivitás értéke pontosabb. A sztatikus mágneses és az örvényáramú megoldás között az eltérés nem csak az induktivitás miatt van, hanem az örvényáramok következtében az R-L-kör ellenállása is változik.

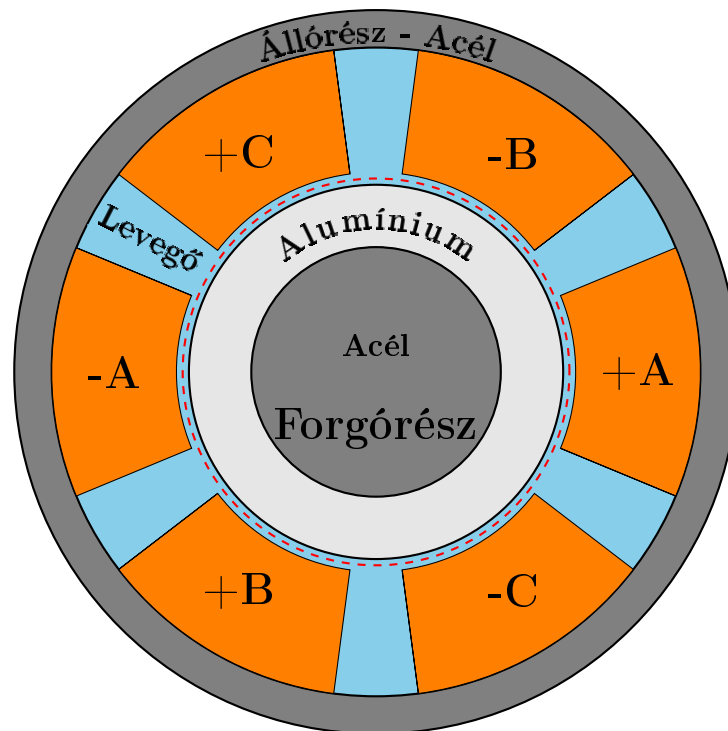
Az előbbi megállapításokat támasztja alá, ha megnézzük a 3.3. és a 3.4. ábrákat. Sztatikus mágneses esetben a vasmag teljes keresztmetszetében haladnak az erővonalak, míg az örvényáramú esetet nézve, az örvényáramok következtében a mágneses fluxus kiszorul a vasmagnak a tekercset körülvevő részére.

A bemutatott példával igazoltam a megvalósított végeselem-módszeren alapuló függvénykönyvtár és az erős csatolás együttes alkalmazhatóságát sztatikus mágneses és örvényáramú esetben. Az eredményekből pedig jól kitűnik, hogy ilyen egyszerű geometriával rendelkező feladatnál is eltérést okoz a rendszer induktitásának idealizálása és az örvényáramok figyelembevétele vagy elhagyása.

3.3. A forgás figyelembevétele

Az irodalmi áttekintésben bemutatott csúszófelület és mozgó sáv módszer helyes működésének igazolására a T.E.A.M. (*Testing Electromagnetic Analysis Methods*) 30a tesztfeladat [155,164,363,364] háromfázisú indukciós modellmotorját választottam. A feladat méretei és paramétereit a tesztfeladat online is elérhető leírásában találhatók [365]. A modellmotor teljes mértékben megfelel a mozgás figyelembevételére alkalmazott módszerek működésének vizsgálatára, mert a numerikus megoldása mellett az analitikusan számított eredményei is ismertek [366]. A tesztfeladat további előnye, hogy a mozgás vizsgálata mellett a nyomatékszámítási módszerek is vizsgálhatók. A 3.5. ábra a motor sematikus ábráját mutatja, ahol a piros szaggatott vonal a csúszófelület vagy a mozgó sáv helyét mutatja. Minden általam megoldott feladatnál, a csúszófelület vagy a mozgó sáv a légrés közepén helyezkedik el, ahogy az előbb említett 3.5. ábrán is látható. A nyomaték értéke függ az erőkartól, ahogy az (B.1) vagy a (B.2) összefüggések is mutatják. Ezért a nyomatékszámítás szempontjából lényeges, hogy a légrés melyik részén helyezkedik el a mozgás figyelembevételéhez szükséges sáv vagy réteg, ha ezeket használjuk a nyomaték számítása során.

Mielőtt rátérek az eredmények bemutatására, ismertetem az általam kidolgozott, a szakirodalomból ismert megvalósításoknál kisebb számítási igénnyel járó mozgó sáv módszert. Ennél a feladatnál minden esetben ismert a szögsebesség, így a csúszófelület módszernél alkalmazható a legegyszerűbb változata, a zárt lépéses módszer. Abban az esetben, ha előírjuk a mozgás sebességét vagy szögsebességét, a csúszófelület és a mozgó sáv módszernél nem csak az időlépés, hanem az egy időlépéshez tartozó szögelfordulás is állandó lesz a teljes szimuláció alatt.

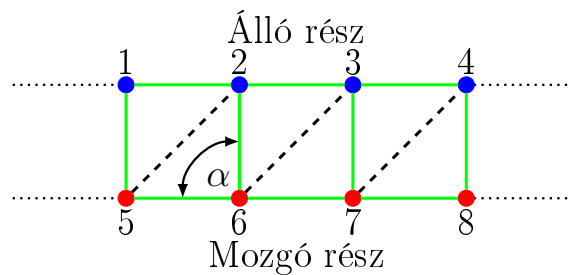


3.5. ÁBRA A T.E.A.M. 30a tesztfeladatból a háromfázisú indukciós motor.

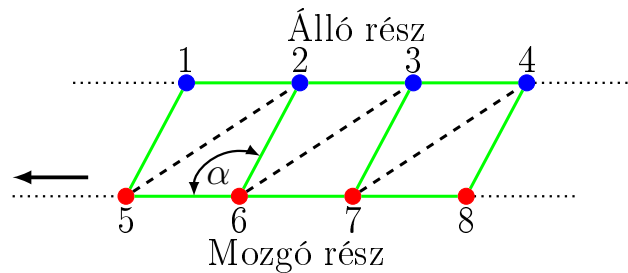
3.3.1. Egyszerűsített egyréteges mozgó sáv

A módszer irodalmának áttekintésénél már ismertettem a meglévő három módszer-csoportot [41, 106, 153, 189]. A következőkben bemutatom az általam kidolgozott variáns [187] működését és összehasonlítom azt a meglévő módszerekkel.

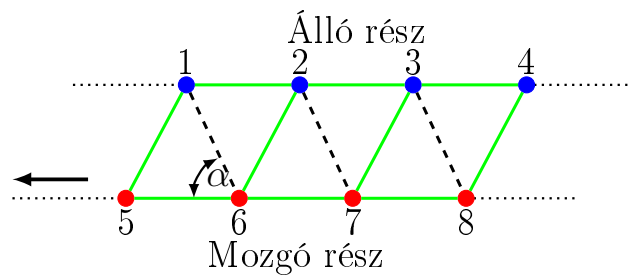
Az én esetemben a kapcsolódási mátrixot változtatom az elmozdulásnak megfelelően, mint a [41, 106, 153] irodalmakban, és az álló és mozgó rész peremén is ekvidisztáns felbontást alkalmazok úgy, hogy a két peremen azonos számú csomópont legyen. A módszer működése során nem engedem, hogy a mozgó sávban lévő végelemek torzulása az elmozdulás miatt nagy legyen. Álló állapotban a mozgó sávban lévő elemeket a 3.6(a) ábra mutatja. Ez a módszer is, a [153] cikkben és a [41] könyvben bemutatott módszerhez hasonlóan azon alapul, hogy az álló és mozgó rész peremén lévő elemek összekötése után előálló téglalapot diagonálisan tovább bontjuk háromszögekre. Az eltérés az elem minőségnek megállapításában és a háromszögek figyelembevételében van. Az elem minőségéhez, egy a [41] irodalomban közöltnél kisebb számításigényű módszert alkalmazok.



(a) Mozgó sáv elemek alapállapotban.



(b) A mozgó sáv elemek deformálódása.



(c) A mozgó sáv elemek módosítása az elem minőségének függvényében.

3.6. ÁBRA Egyszerűsített egyréteges mozgó sáv működése.

A 3.6(a) ábrán jelölt α szöget vizsgálom,

$$\text{Az elem minősége} = \begin{cases} \text{jó} : & \text{ha } \alpha \leq 90^\circ, \\ \text{nem jó} : & \text{ha } \alpha > 90^\circ. \end{cases} \quad (3.8)$$

A módszernél nincs szükség arra, hogy a mozgó sávban lévő elemekhez egy minőségi számot rendeljek, elegendő csak a fenti két állapotot vizsgálni. A 3.6(a) ábrán látható elem még pont jó, de bármilyen kis elmozdulás esetében módosítani kell. A 3.6(b) ábrán a nyílnak megfelelő elmozdulás esetében az α szög nagyobb lesz 90° -nál, ezért a kapcsolódási mátrixot a 3.6(c) ábrának megfelelően kell megváltoztatni. Ennél a módszernél, a mozgó sávban lévő elemek teljesen egyformák, így elegendő csak egy elemre vizsgálni a minőséget. Ezzel nagy mértékben csökkenthető az eddig publikált megoldási módszerekhez képest a számítási kapacitás.

Az általam kidolgozott módszer előnye a [106] cikkben bemutatotthoz képest, hogy figyelembe veszi a végelemek torzulását, és annak megfelelően változik a kapcsolódási mátrix. A másik két módszerhez [41, 153, 189] képest pedig jóval kisebb számítási igénye van, és a [189] cikkben bemutatottnál jóval egyszerűbb megvalósítani a módszert. Azonban a kevés vagy nagyméretű végelemekkel felbontott légrés a módszer pontatlanságához vezet. De mivel a légrésben a nyomatékszámítás pontosságának biztosításához több (az ökölszabály szerint legalább öt) réteg végelemet kell alkalmazni, ezért ez a hátrány nem mutatkozik az eredményekben. Ezt az állításumat a következőkben közölt számítási eredményekkel is alátámasztom.

3.3.2. A szimulációs eredmények bemutatása

A T.E.A.M. 30a feladat háromfázisú motorjánál hét szögsebességre közlik az analitikusan számított eredménye, amely a nyomatékot is magában foglalja. A hét szögsebességhez tartozó nyomatékokat, mind az előbb említett analitikus, mind a különféle mozgást modellező technikát alkalmazó végelem-módszerrel kapott eredményeket, a 3.1. táblázatban foglaltam össze. Az analitikus megoldás a [365] irodalomból származik. A COMSOL megoldás a COMSOL Multiphysics [213] szoftverrel kapott eredményt jelöli [155], mely a csúszófelület módszert alkalmazza, ahol az álló- és mozgórész közötti folytonosságot Lagrange-multiplikátorokkal teremti meg. A nyomatékot a Maxwell-féle feszültségtenzor módszerrel számolja. A $\vec{v} \times \vec{B}$ megoldás az általam implementált végelemek alkalmazó programot jelöli a Minkowski-transzformációval figyelembe vett mozgással. Itt szintén a feszültségtenzor-módszert alkalmazom a légrés közepére felvett peremnél. Az analitikus megoldás mellett a COMSOL és a $\vec{v} \times \vec{B}$ megoldásokat numerikus referencia megoldásnak szántam. A T.E.A.M. 30a feladat kiírójával, Kent Davey professzorral folytatott konzultációk alapján, az analitikus és numerikus megoldások közötti eltérés oka, nem csak a numerikus megoldás pontatlansága lehet, hanem a nem elég magas fokú Bessel-függvények [30] alkalmazása az analitikus megoldás során. Ezt támasztják alá a szakdolgozatomban [155] és a [164] publikációmban közölt számítási eredmények is, ahol a mágneses vektorpotenciálon alapuló formalizmus mellett, az áramvektor potenciálon alapuló formalizmussal is megoldottam a feladatot idő- és frekvenciatartományban.

A 3.1. táblázatban nem csak a különféle, forgás figyelembevételére alkalmas technikákat hasonlítom össze, hanem a két elterjedten alkalmazott nyomatékszámítási eljárást is. Ez a két módszer a Maxwell-féle feszültségtenzor módszer (MST) [15, 153, 155] és

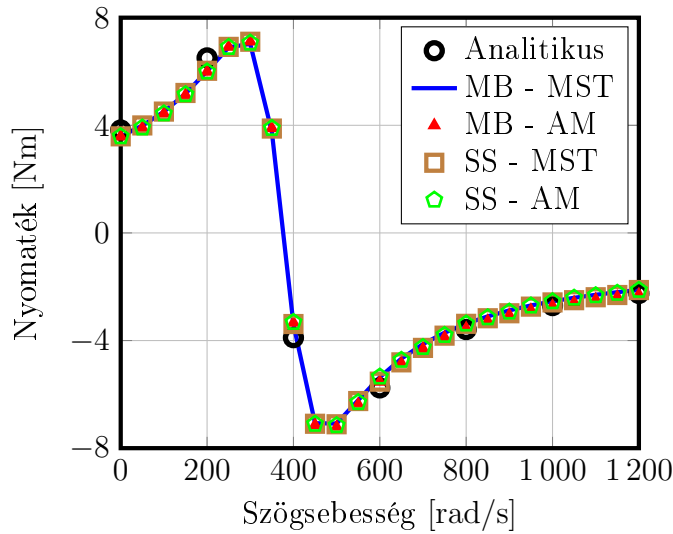
3.1. TÁBLÁZAT A számítással kapott nyomatékok összehasonlítása.

Szögsebesség [rad/s]	0	200	400	600	800	1000	1200
Analitikus [Nm]	3,8258	6,5050	-3,8926	-5,7593	-3,5907	-2,7005	-2,2499
COMSOL [Nm]	3,5915 (6,124%)	6,0207 (7,445%)	-3,3980 (12,706%)	-5,6397 (2,076%)	-3,3783 (5,915%)	-2,5473 (5,673%)	-2,1251 (5,547%)
$\vec{v} \times \vec{B}$ [Nm]	3,5884 (6,206%)	5,9835 (8,017%)	-3,2942 (15,372%)	-5,3482 (7,138%)	-3,3763 (5,971%)	-2,5472 (5,676%)	-2,1249 (5,556%)
Mozgó sáv MST [Nm]	3,5863 (6,261%)	6,0139 (7,549%)	-3,3938 (12,814%)	-5,3615 (6,907%)	-3,3720 (6,09%)	-2,5416 (5,884%)	-2,1191 (5,813%)
Mozgó sáv AM [Nm]	3,5818 (6,378%)	5,9905 (7,909%)	-3,3367 (14,281%)	-5,5316 (3,953%)	-3,5476 (1,2%)	-2,7154 (-0,55%)	-2,2917 (-1,85%)
Csúszófelület MST [Nm]	3,5902 (6,159%)	5,9964 (7,818%)	-3,3858 (13,019%)	-5,5284 (4,009%)	-3,3785 (5,909%)	-2,5527 (5,473%)	-2,1222 (5,675%)
Csúszófelület AM [Nm]	3,5847 (6,303%)	5,9903 (7,912%)	-3,3181 (14,758%)	-5,3482 (7,138%)	-3,3763 (5,97%)	-2,5472 (5,676%)	-2,1249 (5,556%)

az Arkkio-módszer (AM) [41, 103]. Mindkettőt egyaránt alkalmazom az általam javasolt egyréteges mozgó sáv és a csúszófelület módszernél, hogy megvizsgálhassam, melyik két technika kombinációja adja a legjobb eredményt. Az eredmények könnyebb összehasonlíthatósága miatt a numerikusan számított nyomatékok analitikushoz viszonyított százalékos értékét az eredmények alatt zárójelben közlöm.

Az összes numerikusan kapott eredményre igaz, hogy a legnagyobb eltérés a 400 rad/s értéknél mutatkozik. Ennek egyik lehetséges oka a vizsgált gép szinkron fordulatszámának közelsége (≈ 377 rad/s), mert ezen a szakaszon a nyomaték - fordulatszám karakterisztika nagyon meredek, így kisebb szögsebességbeli hiba is nagy eltérést eredményezhet a nyomaték értékében. A nyomaték szinkron fordulatszám körüli meredekségét a 3.7. ábra is jól mutatja. Ezen az ábrán 50 rad/s lépésközzel ábrázoltam a nyomatékot. A táblázatban szereplő nyomaték és hiba értékeket összehasonlítva, vagy a 3.7. ábrát nézve az eredmények között nincs jelentős eltérés, ha nem vesszük figyelembe a Arkkio-módszerrel kombinált mozgó sáv módszernél a 800, 1000 és 1200 rad/s szögsebességnél kapott értékeket.

A 3.1. táblázatban közölt eredményekből a mozgó sáv módszer az Arkkio-módszerrel, és a csúszófelület módszer a Maxwell-féle feszültségtenzor módszerrel adta a legjobb eredményt. Ez összecseng a szakirodalommal, ahol ebben a két kombinációban alkalmazzák legelterjedtebben ezeket a módszereket. A két legpontosabb módszernél azonban az eredmények jól mutatják, hogy a mozgó sáv módszer a generátoros üzemben, a csúszófelület pedig a motoros üzemben ad pontosabb eredményt. De míg a csúszófelülettel kapott eredménynél a hiba a többi numerikus megoldás hibájához hasonlóan változik, addig a mozgó sáv esetében ez nem igaz. Ennél a módszernél a generátoros üzemben



3.7. ÁBRA A tesztfeladatnál kapott nyomaték - szögsebesség karakterisztika.

a szögsebességgel együtt nő a hiba. Ezek alapján jóval megbízhatóbb módszernek tűnik a csúszófelület módszer. A továbbiakban, a kapott eredmények alapján a mozgás figyelembevételére a csúszófelület módszert a lineáris interpolációval, és a Maxwell-féle feszültségtenzor módszerrel vagy az egyréteges mozgó sáv módszert az Arkkio-módszerrel alkalmazom.

3.4. A feszültség és a mechanikai egyenlet figyelembevétele

Az eddigiek során bemutattam egy-egy modellen keresztül a feszültségegyenlet erős csatolását és a mozgás figyelembevételét. A mozgás figyelembevételére eddig ismertett módszer az állandósult állapot vizsgálatára alkalmas. A villamosenergia-átalakítók mechanikai jelenségei, és az abban fellépő tranziensek ismerete legtöbb esetben alapvető, ezért fontos figyelembe venni a (2.31) és a (2.32) egyenleteket. A mechanikai egyenlet csatolása önmagában nem nehéz, ha már megvalósításra került a mozgás figyelembevételére alkalmas technika. A következő mátrixegyenlettel lehet figyelembe venni a forgó mozgáshoz a külső terhelést, a tehetetlenséget és a különféle súrlódások hatását

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 + \Delta t \frac{K_s}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^t \\ \Theta^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^{t-\Delta t} \\ \Theta^{t-\Delta t} + \Delta t \frac{1}{J} (M_{\text{em}}^{t-\Delta t} - M_T) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

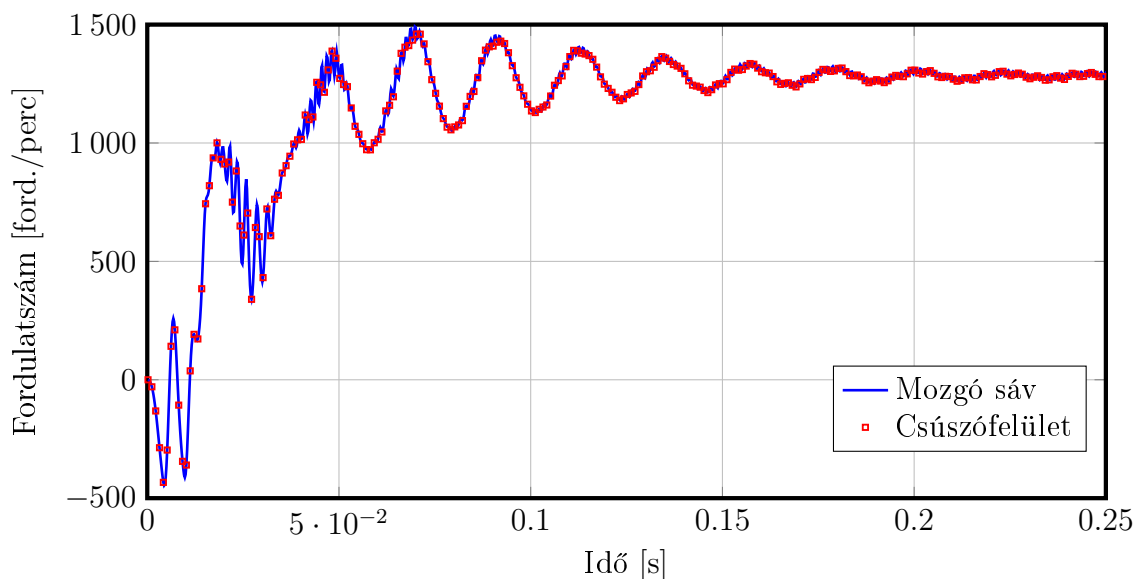
ahol a felső t index az aktuális, a $t - \Delta t$ az előző időpillanathoz tartozó mennyiséget jelöli. A $M_{\text{em}}^{t-\Delta t}$ az előző időlépésben számított elektromágneses nyomaték, az $\omega^{t-\Delta t}$, a $\Theta^{t-\Delta t}$ az előző időpillanathoz tartozó szögsebesség és szögelfordulás és Δt a szimuláció során alkalmazott időlépés. Ezek ismeretében lehet meghatározni az aktuális időpillanathoz tartozó Θ^t szögelfordulást és ω^t szögsebességet. Mindig az aktuális szögelfordulásnak megfelelően mozdul el a forgórész.

A mechanikai egyenlet figyelembevételére a csúszófelület módszert és az egyréteges mozgó sáv módszert az általam kidolgozott technikával alkalmazom, a módszerhez ha-

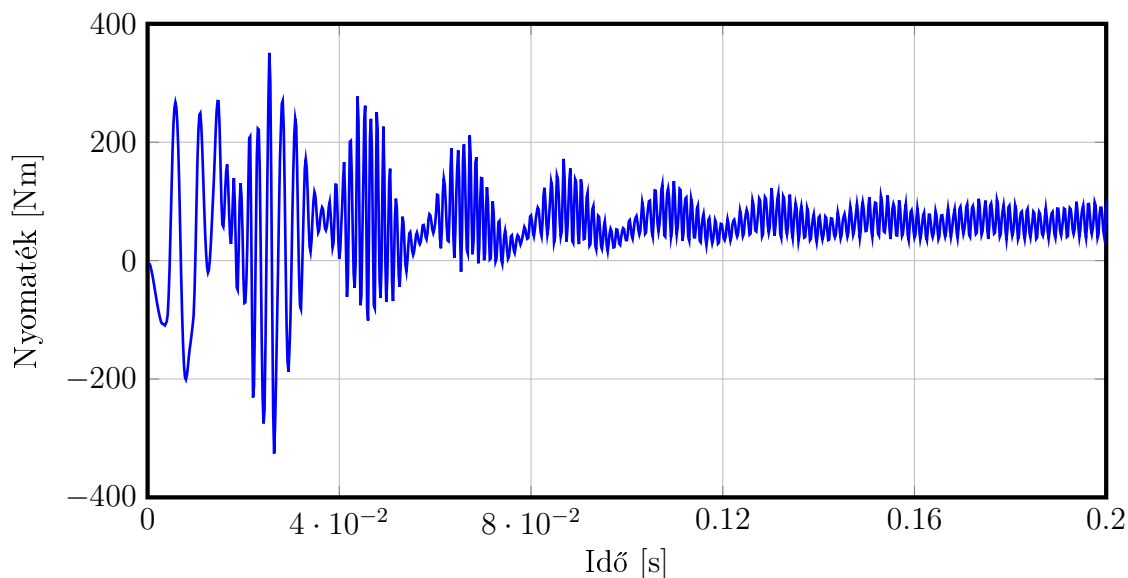
tékonynak talált nyomatószámítással. Ezzel a feladattal szeretném igazolni, hogy az általam kidolgozott módszer valós, ipari feladatok megoldására is alkalmas lehet.

A csatolt szimuláció bemutatásához egy négyfázisú 3 kW-os kalickás forgórészű aszinkron motor modelljét alkalmazom. A motor állórész tekercselése delta kapcsolású, ami közvetlenül a háromfázisú hálózatra van kapcsolva. A csillag vagy delta kapcsolás a numerikus szimulációnál csak az előírt gerjesztőfeszültség értékében, a fázisfeszültségben ($\Delta/Y - 400/230$ V) jelent különbséget. A motor tengelyének inerciája $1,469 \cdot 10^{-2}$ kgm², a viszkózus súrlódás $3,03 \cdot 10^{-3}$ Nms/rad és a tengelyre kapcsolt terhelés nyomatéka 65 Nm. A minél valóságosabb eredmények érdekében a tekercsfaj inductivitását is figyelembe vettem, amely $0,72 \mu\text{H}$, a [367–369] könyvek alapján. A motor névleges fordulatszáma 1420 fordulat/perc. A feladat a ONELAB (*Open Numerical Engineering LABoratory*) nyílt forráskódú, a végeelem-módszert alkalmazó szoftver [370] mintapéldái közül származik, ahol megtalálhatóak az aszinkron motor pontos geometriai adatai és az anyagparaméterei. A mechanikai egyenlet figyelembevételét az aszinkron motor közvetlen hálózatról történő indításán keresztül demonstrálom [371], az előzőleg már megadott terhelés mellett.

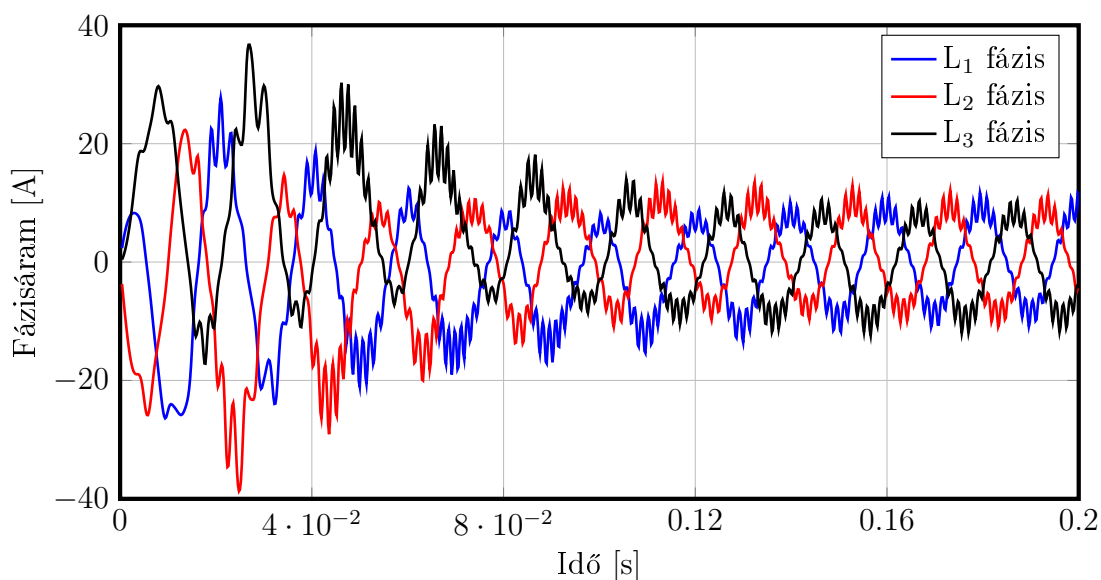
A végeelem-módszerrel kapott eredményeket a 3.8., a 3.9. és a 3.10. ábrák mutatják, amelyek jól összecsengenek az irodalomban található [372,373] és a G. függelékben közölt eredményekkel. A 3.8. ábrán a motor fordulatszám időfüggvénye látható. Az ábra jól mutatja, hogy miért fontos a mechanikai egyenlet figyelembevétele, mert nélküle nem lenne semmiféle információnk a gép dinamikus viselkedéséről, a tranziensek lefolyásáról. Az adott terhelés mellett 0,2 másodperc kell ennek az elektromechanikai rendszernek az állandósult állapot eléréséhez. A motor fordulatszáma az adott terhelés mellett 1285,5 fordulat/perc, vagyis a szlip 9,5%. Ezek mellett, az ábrán látható eredmények jól mutatják, hogy valós problémák esetében, közel azonos sűrű diszkretizálás mellett nincs jelentős eltérés a két módszerrel kapott eredmény között [41,209]. A 3.9. ábra a vizsgált motor nyomatékát ábrázolja az idő függvényében, az egyréteges mozgó sáv módszerrel végzett számításból. A csúszófelülettel kapott eredmény és az ábrázolt között



3.8. ÁBRA Az aszinkron motor fordulatszáma az idő függvényében közvetlen indításnál.



3.9. ÁBRA Az aszinkron motor nyomaték időfüggvénye.



3.10. ÁBRA Az aszinkron motor három fázisában kialakuló áramok közvetlen indításnál.

nincs szignifikáns eltérés. A nyomaték időfüggvényben látható nagy lüktetés egyik oka, hogy a kétdimenziós szimuláció során a forgórész kalickarúdjainak ferdítését nem vettem figyelembe [374–376]. A 3.10. ábra az egyes fázisokban kialakuló áramokat mutatja. Itt szintén az egyréteges mozgó sávval kapott eredményt ábrázoltam, de itt sincs számottevő eltérés az ábrázolt és a csúszófelülettel kapott eredmény között. A 3.10. ábrán látható időfüggvények jól demonstrálják, hogy közvetlen indításnál milyen nagy áramot vesz fel a hálózatból a gép. A gép névleges árama delta kapcsolásban 12,3 A, amíg az ábrán jól látható, hogy az L₂ és az L₃ fázisokban van, hogy 30 A-nél nagyobb az áramerősség amplitúdója.

3.5. Új tudományos eredmények

Realizáltam egy olyan végeelem-módszeren alapuló csatolt elektrodinamikai modellt, aminek a bemenete alkalmas tetszőleges elektronikával történő összekapcsolásra, és amelynél kimenetként már rendelkezésre állnak a mechanikai mozgás jellemzői (M_{em}, Θ, ω). A mechanikai mozgás figyelembevételére implementált technikákhoz jól alkalmazható nyomtatékszámítási módszerre is javaslatot tettem. Az egyréteges mozgó sáv módszerhez kidolgoztam egy új eljárást, ami a szakirodalomból ismert megvalósításoknál kisebb számítási igénnyel jár, és a sávban lévő elemek torzulását is figyelembe veszi. A kidolgozott módszer kétdimenziós szimulációkban történő alkalmazhatóságát egy nemzetközi tesztfeladaton és egy kalickás forgórészű aszinkron motor modelljén keresztül igazoltam [95, 155, 164, 187, 188, 364, 377–381].

- (a) Realizáltam egy Matlab-szkript és C-programozási nyelven írt, a végeelem-módszert alkalmazó függvénykönyvtárat olyan módon, hogy a feszültségegyenlet közvetlen csatolásával és a mechanikai egyenlet figyelembevételével együtt alkalmas a tartomány dekompozícióra alapuló párhuzamosításra. Az elkészült függvénykönyvtár működését három példán keresztül igazoltam. A vasmagos szolenoid numerikus szimulációjával kapott eredményekkel demonstráltam a modell pontosságának jelentőségét.
- (b) A mozgás figyelembevételére használt egyréteges mozgó sáv módszerhez kidolgoztam egy, a szakirodalomból ismert variánsoknál kisebb számítási igénnyel járó módszert kétdimenziós szimulációkhoz. A módszer figyelembe veszi az elemek mozgása során bekövetkező deformációját, és elegendő csak egy elem torzulását vizsgálni, miáltal csökken a műveletigény.
- (c) Egy nemzetközileg kiírt tesztfeladaton keresztül igazoltam, hogy az általam kidolgozott módszer alkalmas a forgórész mozgásának figyelembevételére. A mechanikai egyenlet csatolását egy aszinkron motor kétdimenziós modelljén keresztül demonstráltam. A szimulációval kapott eredmények jól mutatják, hogy az általam kidolgozott módszer alkalmas a mechanikai tranziensek vizsgálatára is. A kidolgozott módszerrel, valamint a csúszófelület módszerrel kapott eredmények jó egyezést mutatnak, és összecsengenek a szakirodalomban fellelhető eredményekkel is.
- (d) Megvizsgáltam a mechanikai mozgást megvalósító technikáknál a Maxwell-féle feszültségtenzor módszer és az Arkkio-módszer pontosságát. A kapott eredmények alapján javaslatot tettem az egyes módszerekhez hatékonyan alkalmazható és könnyen illeszthető nyomtatékszámítási eljárásra, vagyis a mozgósáv módszernél az Arkkio-módszerrel, a csúszófelület módszernél a Maxwell-féle feszültségtenzor módszerrel érhető el a pontosabb eredmény.

4. FEJEZET

Modell párhuzamosítása tartomány dekompozícióval

4.1. Motiváció

Numerikus szimulációk esetében nagyon ritka eset az, amikor a szimuláció nem jár együtt nagy számítási- és memóriaigénnyel. Az ilyen típusú mérnöki munkákhoz a legtöbb számítógépgyártó valamilyen "munkaállomást" (*workstation*) ajánl, amely napjainkra többmagos processzorral és jelentős belső memóriával rendelkezik. Azonban az ilyen típusú gépek mellett, hogy magas az áruk, sem képesek a legnagyobb feladatokkal megbirkózni. A nagy számítási igénnyel járó numerikus feladatok megoldására az egyik lehetőség a párhuzamosítás, hiszen napjainkban már vannak olyan mobiltelefonok is, amelyek többmagos processzorral rendelkeznek, új számítógép pedig csak többmagos processzorral vásárolható. Tehát a párhuzamosításhoz a hardver rendelkezésre áll. De adott esetben, ahogy az irodalmi áttekintésben is szerepel, régi, használaton kívüli gépekből is összeállítható egy klaszter, ami alkalmas a párhuzamosításra.

A számítógépes szimuláció párhuzamosításának két fő célja van: a számítás felgyorsítása, és a nagy méretű feladatok megoldása. Az én esetemben a végeselem-módszer párhuzamosításával a számítás felgyorsítása a fő cél, de a rendelkezésre álló számítási teljesítmény tükrében a másik szempont sem elhanyagolható. A dolgozat egyik célkitűzése, a numerikus modell szabályozási körbe való illesztése. De a numerikus modell szabadságfokainak száma nagyságrendekkel nagyobb, mint általában a szabályozott szakasz modellje, mely jelentős növekedést eredményez a szabályozási rendszer szimulációjának futási idejében. A megnövekedett szimulációs időt a párhuzamosítás lehetőségének kihasználásával szeretném csökkenteni.

A párhuzamosításra a szilárdságtani és áramlástani problémák numerikus analízisében elterjedten alkalmazott tartomány dekompozíciót alkalmazom. Azon belül is a Schur—komplemens-módszert és a FETI-módszert. A párhuzamosításon felül, dolgozatomban célozom ezeknek a módszereknek az elektromágneses térszámításban való alkalmazhatóságának és hatékonyságának igazolása, ezzel megalapozva a szélesebb körű alkalmazásukat ezen a tudományterületen belül. Ennek érdekében a vizsgálataim során az elektromágneses térszámításban a szinte kizárólagosan alkalmazott strukturálatlan felbontást alkalmazom a tématerületen előforduló problémáknál.

A számítások futtatását egy SUN Fire X2250 típusú számítógépen végeztem. A számítógép két Quad-Core Intel® Xeon® 5400 processzorral, azaz összesen 8 fizikai processzormaggal és 32GB osztott memóriával rendelkezik. A számítógépen Linux operációs rendszer futott a számítások elvégzésekor.

A számítások során az eredeti feladatot mindig az alkalmazott processzormagok számával egyező altartományra bontottam fel. Az összes iteratív megoldóknál ugyanazt a konvergenciakritériumot alkalmaztam, $\xi = 10^{-8}$, melynek összefüggése a Schur-komplemens-módszernél a 1. Algoritmus 19. sorában (35. oldal) található, a FETI-módszernél pedig a (2.62) egyenlet definiálja.

A párhuzamosítás mértékének egyik alapvető összehasonlítási mennyisége a teljes számítás futási ideje. A közölt időeredményeket a következő képlettel számítottam:

$$T_{\text{DDM}} = \frac{1}{run - 2} \left(\sum_{i=1}^{run} T_i - \min \{T_1, \dots, T_{run}\} - \max \{T_1, \dots, T_{run}\} \right), \quad (4.1)$$

ahol T_i ($i = 1, \dots, run$) a futtatással kapott végrehajtási idő (*wall-clock time*) és run a futtatások száma. A mérési pontatlanság miatt az összes szimulációt tizenötször futtattam le ($run = 15$), majd a kapott időkből a legkisebb és a legnagyobb időt kivéve a maradék tizenhárom érték számtani középértékét határoztam meg. A végrehajtási idő mellett a másik mennyiség, melyen keresztül a párhuzamos algoritmusok összehasonlíthatóak a gyorsítás mértéke. A gyorsítást a következőképpen számítottam [233, 317, 382]:

$$S_{N_P} = \frac{T_{N_P}}{T_{\text{base}}} \quad (4.2)$$

ahol T_{base} a szekvenciális számítás végrehajtási ideje, vagy olyan esetben, ahol a feladat mérete miatt ez nem lehetséges, a legkevesebb processzormaggal végzett számítás ideje. A T_{N_P} az adott altartományra felbontott feladathoz tartozó végrehajtási idő, ahol az N_P alsó index az alkalmazott processzormagok számát jelöli.

A fejezet célja megvizsgálni kétdimenziós feladatokra, melyik tartomány dekompozíciós módszer alkalmasabb a csatolástól mentes és a csatolt sztatikus mágneses és örvényáramú feladatok megoldására, és milyen – direkt vagy iteratív – megoldó eljárással. A mechanikai egyenlettel csatolt feladatoknál megvizsgálom a mozgás következtében változó kapcsolódási mátrixszal rendelkező diszkretizálás hatását a párhuzamosításra, és javaslatot teszek az ilyen típusú feladatok felbontására. Ezen felül igazolni szeretném, hogy a FETI-módszernél eredetileg prekondicionálónak javasolt technika alkalmas a direkt megoldóként történő alkalmazásra.

Sztatikus mágneses feladatként egy egyfázisú transzformátort, elektrosztatika példaként pedig egy párhuzamos fegyverzetű kondenzátort vizsgállok. Örvényáramú tesztfeladatként szintén az egyfázisú transzformátort vizsgálom. A csatolt feladat párhuzamosításánál a feszültségegyenlettel összekapcsolt hengersizmetrikus szolenoidot vizsgálom (lásd 3.1. ábra). A feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt párhuzamosított feladatként az előzőekben már röviden bemutatott közvetlen indítású 3 kW-os aszinkron motort alkalmazom. A motor példáján keresztül vizsgálom a mechanikai mozgásból származó hatásokat a különböző megoldási módokra, ha nem csak álló- és mozgó részre bontom a feladatot, hanem még altartományokra is.

De mielőtt rátérnék a párhuzamosított elektrodinamikai problémák eredményeinek ismertetésére, bemutatom az általam direkt megoldási módszernek alkalmazott eljárást.

4.2. FETI-módszer – Direkt megoldó algoritmus

A szakirodalom alapján a FETI-módszerhez mindig iteratív megoldó algoritmust alkalmaznak, mert az hatékonyabban kezeli a nagy és szinguláris altartományokat tartal-

mazó feladatokat. Azonban a dolgozatban kitűzött gyorsítási célokhoz, kis duális feladat ((2.51) egyenlet) mellett egy direkt megoldó eljárás hatékonyabb lehet a nagy egyenlet-rendszerekhez kidolgozott iteratív algoritmusoknál.

A következőkben bemutatásra kerülő direkt megoldó eljárás eredetileg egy prekondicionáló az iteratív megoldó algoritmusához [311,383], melyet az általam ismert szakirodalom alapján én alkalmaztam először, mint direkt megoldó eljárást. A direkt megoldó alapötlete a [311] cikkből származik, ahol a szerzők egy megjegyzésként említik, hogy a \mathbf{Q} és $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ megfelelő megválasztása következtében a $\boldsymbol{\lambda}_0$ partikuláris megoldásra már a pontos megoldást kapjuk. Én a [311] irodalomban említettekén annyit változtattam, hogy ami a cikkben $\boldsymbol{\lambda}_{00}$ -ként szerepel, az nálam $\boldsymbol{\lambda}_0$, és ami a cikkben $\boldsymbol{\lambda}_0$, nálam az lett a $\boldsymbol{\lambda}$, ahogy a témához kapcsolódó publikációimban is szerepel [293,294,317,382].

Az általam direkt megoldási eljárásnak javasolt módszer esetében a $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_I^\dagger$, és a $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{d}$ alkalmaztam [293,294,311,317].

Ha a (2.53) egyenletbe behelyettesítünk, és a elvégzünk néhány átalakítást a (2.51) egyenlet pontos megoldását kapjuk,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \right)^{-1} \mathbf{e} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \right)^{-1} \mathbf{G}_I^\top \right) \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{d} = \\
 &= \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \right)^{-1} \mathbf{e} + \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{d} - \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \right)^{-1} \mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{d} = \\
 &= \mathbf{F}_I^\dagger \left(\mathbf{d} - \mathbf{G}_I \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \right)^{-1} \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{d} - \mathbf{e} \right) \right) = \\
 &= \mathbf{F}_I^\dagger (\mathbf{d} - \mathbf{G}_I \boldsymbol{\alpha}),
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ahol $\boldsymbol{\alpha} = \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{G}_I \right)^{-1} \left(\mathbf{G}_I^\top \mathbf{F}_I^\dagger \mathbf{d} - \mathbf{e} \right)$. Az előbb levezetett két egyenlet előállítható a (2.51) egyenletből is, de ez csak amiatt van, mert $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_I^\dagger$.

4.3. Statikus problémák párhuzamosított megoldása

Ahogy már a motivációban említettem, statikus feladatként egy egyfázisú transzformátort és egy párhuzamos fegyverzetű kondenzátort vizsgállok. Az egyfázisú transzformátor mintapéldája a [40] könyvből származik, ezért a feladat pontos leírásáról – geometriai és anyagparaméterei – is ott található részletes leírás. A párhuzamos fegyverzetű kondenzátor részletes leírása a [42] könyvben található. Ennél a két példánál vizsgálni fogom a 2. fejezetben bemutatott két tartomány dekompozíciós módszert és a hozzájuk kapcsoló direkt és iteratív megoldó eljárásokat. A céloom ezzel a vizsgálattal meghatározni, melyik módszer, milyen megoldó algoritmussal a legalkalmasabb ilyen típusú feladat párhuzamosított végeselem-módszerrel történő megoldására. A statikus feladatoknál a Schur–komplement-módszer iteratív megoldó algoritmusához a Jacobi-prekondicionálót alkalmazom.

A számításokat a két mintapéldán keresztül három esetben vizsgáltam. Az első két esetben a teljes feladatot oldottam meg, ami a transzformátornál 55933, a kondenzátornál 37661 ismeretlent jelent. Majd harmadik példaként a transzformátor negyedét vizsgáltam, kihasználva a szimmetriasíkokat, hogy a felbontott feladat tartalmazzon lebegő altartományt, vagyis lesz olyan altartomány, ahol az együtthatómátrix szinguláris lesz. Ebben az esetben az ismeretlenek száma 71655.

4.3.1. Elektrosztatika feladat párhuzamosított megoldásának eredményei

A (2.7) egyenlet átalakítható az elektrosztatika példák megoldása során előálló Laplace-Poisson egyenletté, ha a ν helyett ε permittivitást, az egykomponensű vektorpotenciál helyett V elektromos skalárpotenciált, és a gerjesztést jelentő áramsűrűség helyett ρ töltéssűrűséget írunk,

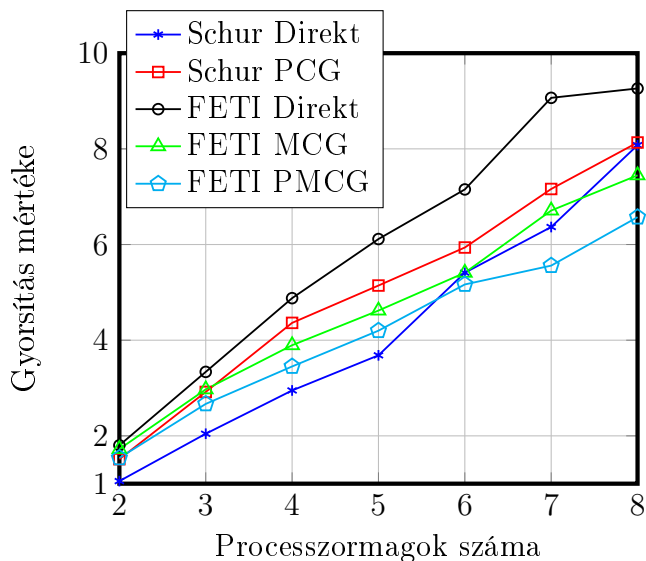
$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla V) = \rho, \tag{4.4}$$

ahol $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\varepsilon_0 = 8,8541 \cdot 10^{-12}$ As/Vm a vákuum permittivitása és ε_r a relatív permittivitás.

A 4.1. táblázatban a számításokhoz tartozó végrehajtási idők találhatók. Az N_P az alkalmazott processzormagok, és ezzel együtt az altartományok számát jelöli, az N_{DoF} az egy altartományhoz tartozó átlagos ismeretlenek száma. A táblázat fejlécének alsó sorában szereplő rövidítések az iteratív algoritmusokat jelölik, a PCG a prekondicionált konjugált gradiens módszert, az MCG a módosított, a PMCG a prekondicionált módosított konjugált gradiens módszert jelöli. A táblázatban közölt időeredmények is jól mutatják, hogy a párhuzamosítással sikerült elérni a célkitűzéseket, mivel a T_{DDM} idő folyamatosan csökken, ahogy az N_P nő. Azonban ennél jóval szemléletesebb az elért gyorsítást ábrázolni. A vizsgált feladat egyprocesszoros megoldásának a végrehajtási ideje $T_1 = 87,91$ másodperc, ehhez az időhöz hasonlítom a 4.1. táblázatban közölt időeredményeket. Az elért gyorsítások görbéit a 4.1. ábra mutatja. Az ábrából jól látszik, hogy a FETI direkt megoldó rutinnal sikerült a legnagyobb gyorsítást elérni. Emellett még a Schur—komplemens-módszer két megoldó eljárásával is közel azonos, nyolcszoros gyorsítást sikerült elérni. A FETI-módszer két iteratív megoldó algoritmus is több mint hétszeresére (FETI MCG) illetve hatszorosára (FETI PMCG) gyorsította a számítást. Az eredmények alapján a FETI direkt megoldó rutinja a leghatékonyabb a gyorsítás szempontjából, azonban ennek egyik oka a feladat mérete, a másik pedig a lebegő altartomány hiánya. De ennek a feladatnak az eredményei jól demonstrálják, hogy ilyen

4.1. TÁBLÁZAT A Schur—komplemens és a FETI-módszerek végrehajtási ideje elektrosztatika példánál.

N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]				
		Schur—komplemens		FETI		
		Direkt	PCG	Direkt	MCG	PMCG
2	19 014	83,39	58,13	48,77	51,00	57,13
3	12 713	43,01	30,13	26,34	29,58	32,95
4	9 613	29,81	20,15	18,02	22,57	25,48
5	7 671	23,87	17,10	14,38	19,03	20,94
6	6 402	16,25	14,81	12,29	16,25	17,02
7	5 490	13,81	12,28	9,70	13,10	15,85
8	4 865	10,89	10,81	9,491	11,81	13,38

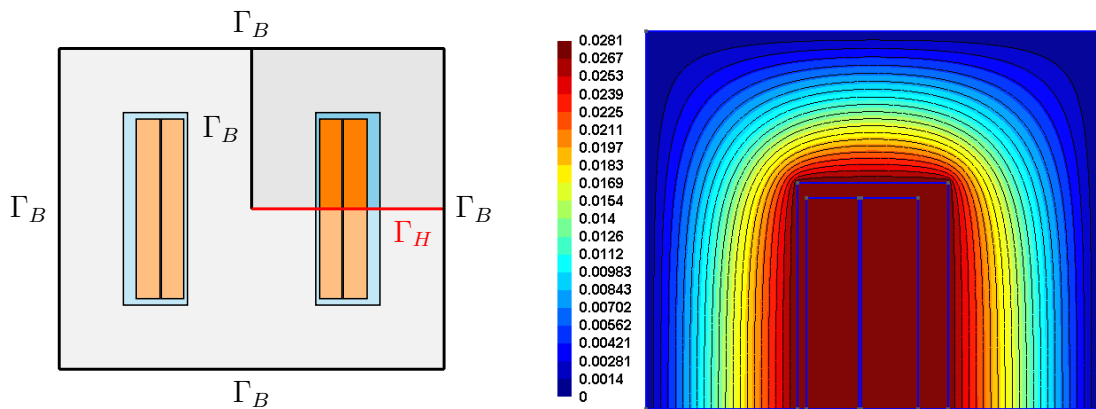


4.1. ÁBRA Az elektrosztatika példánál elért gyorsítás.

típusú és méretű feladatnál a FETI-módszerhez direkt megoldási eljárásnak javasolt módszer hatékonyabb, mint a széles körben alkalmazott megoldó algoritmusok vagy a Schur—komplemens-módszer.

4.3.2. Az egyfázisú transzformátor párhuzamosított megoldásának eredményei

A következőkben vizsgált példa egy köpeny típusú, egyfázisú transzformátor, melynél nem használtam ki a szimmetriasíkok adta egyszerűsítési lehetőségét, így a teljes feladatot vizsgáltam. A feladat felépítése a 4.2. ábrán látható. A teljes feladatra a (2.7) egyenletet oldottam meg a peremekre előírt Dirichlet-peremfeltétellel (a 4.2. ábrán Γ_B -vel jelöltem), tehát ebben az esetben sem volt lebegő altartomány, mint az elektrosztatika példánál.



(a) Az egész és negyed feladat sematikus ábrája a Γ_B és Γ_H peremfeltételekkel. (b) A negyed transzformátor megoldása az erővonalakkal.

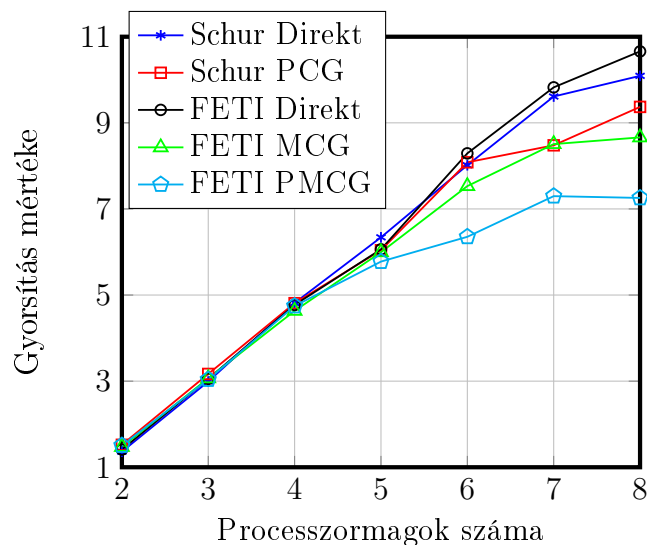
4.2. ÁBRA A vizsgált egyfázisú köpeny típusú transzformátor.

4.2. TÁBLÁZAT A Schur—komplemens és a FETI-módszerek végrehajtási ideje sztatikus mágneses példánál.

N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]				
		Schur—komplemens		FETI		
		Direkt	PCG	Direkt	MCG	PMCG
2	28 094	141,65	126,80	136,70	131,07	128,19
3	18 992	64,50	60,91	63,19	62,92	63,51
4	14 475	40,06	40,11	40,45	41,64	40,66
5	11 837	30,43	31,94	31,83	32,18	33,40
6	10 101	24,07	23,87	23,27	25,62	30,37
7	8 844	20,07	22,76	19,64	22,68	26,44
8	7 935	19,12	20,59	18,10	22,27	26,59

Az egyes megoldó rutinokhoz tartozó végrehajtási időket a 4.2. táblázatban közlöm. Az időeredmények itt is jól mutatják, hogy eredményes volt a párhuzamosítás. Az időeredményeknél, a két processzormagos esetben ($N_P = 2$) az időket összehasonlítva jól látszik, hogy mind a Schur—komplemens-módszernél, mind a FETI-módszernél az iteratív megoldóknál a legkisebb a feladat megoldásához szükséges idő. Ez jól mutatja, hogy egy bizonyos altartományhoz tartozó elemszám fölött az iteratív megoldó hatékonyabb, mint a direkt megoldó. Ez az elemszám függ a feladattól is, de a szakirodalom és a saját tapasztalataim alapján, ha egy altartományhoz $N_{DoF} \geq 20\,000 - 25\,000$ ismeretlen tartozik, akkor az iteratív megoldó már hatékonyabb.

Az eredmények könnyebb összehasonlíthatósága végett, itt is ábrázolom az egyes megoldó algoritmusoknál elért gyorsítást a szekvenciális megoldás végrehajtási idejéhez



4.3. ÁBRA A sztatikus mágneses példánál elért gyorsítás.

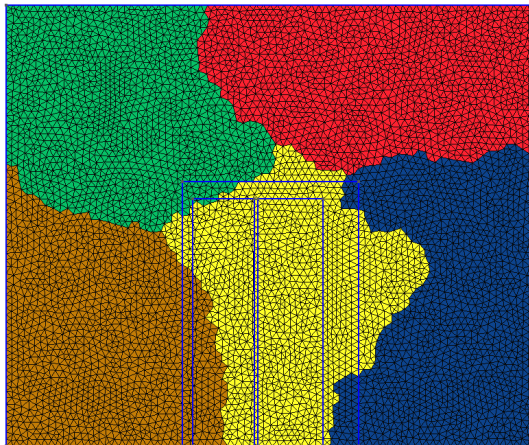
viszonyítva. A szekvenciális megoldás végrehajtási ideje 192,93 másodperc. A gyorsítás görbéinél jól látható, hogy öt processzormagig mindegyik megoldó rutin közel azonos hatékonysággal oldja meg a feladatot, de $N_P = 5$ után már nagy eltérés mutatkozik az egyes megoldó rutinok között. A FETI két iteratív megoldó eljárásánál az úgynevezett telítés is megfigyelhető. A telítés oka, hogy hiába csökken az altartományokhoz tartozó elemszám, mert az altartományok száma nő, és ezzel együtt a mesterséges peremen lévő ismeretlenek és a Lagrange-multiplikátorok száma is. Tehát a processzormagok közötti kommunikáció is egyre nagyobb időt jelent a feladat megoldásához képest a teljes végrehajtási időből.

Ennél a feladatnál a két direkt megoldó rutin, azok közül is a FETI-módszer direkt megoldó eljárása bizonyult a leghatékonyabbnak, amellyel közel 11-szeres gyorsítást sikerült elérnem $N_P = 8$ esetében. Az iteratív algoritmusok közül a Schur—komplement-módszerhez tartozó prekondicionált konjugált gradiens módszerrel értem el a legnagyobb gyorsítást.

4.3.3. A negyed transzformátor párhuzamosított megoldásának eredményei

A harmadik stacionárius példa az előzőleg vizsgált transzformátornak a negyede, ahol kihasználom a szimmetriasíkok adta egyszerűsítési lehetőséget. A két szimmetriasík közül az egyik Neumann-peremfeltétel lesz (a 4.2. ábrán Γ_H -val jelöltem), ahol a mágneses térerősség tangenciális komponense zérus, másik pedig a külső peremhez hasonlóan Dirichlet-peremfeltétel (Γ_B), ahol a mágneses fluxussűrűség normál irányú komponense zérus. Ennél a példánál a lebegő altartomány hatását vizsgálom a FETI-módszer direkt és PMCG megoldási eljárásánál. A módosított konjugált gradiens (MCG) módszert ebben az esetben nem tudom alkalmazni, mert nem tudja a lebegő altartományokat kezelni. A Schur—komplement-módszernél nem jelent problémát a Dirichlet-peremfeltétel nélküli altartomány.

Ennél a feladatnál legalább öt részre kellett bontottam a feladatot, ahogy azt a 4.4. ábra mutatja. Így mindig lesz olyan altartomány a feladatban, amelyhez egyáltalán nem kapcsolódik Dirichlet-peremfeltétel. Tehát itt minden esetben lesz szinguláris együtthatómátrixszal rendelkező (lebegő) altartomány a FETI-módszernél. Az így

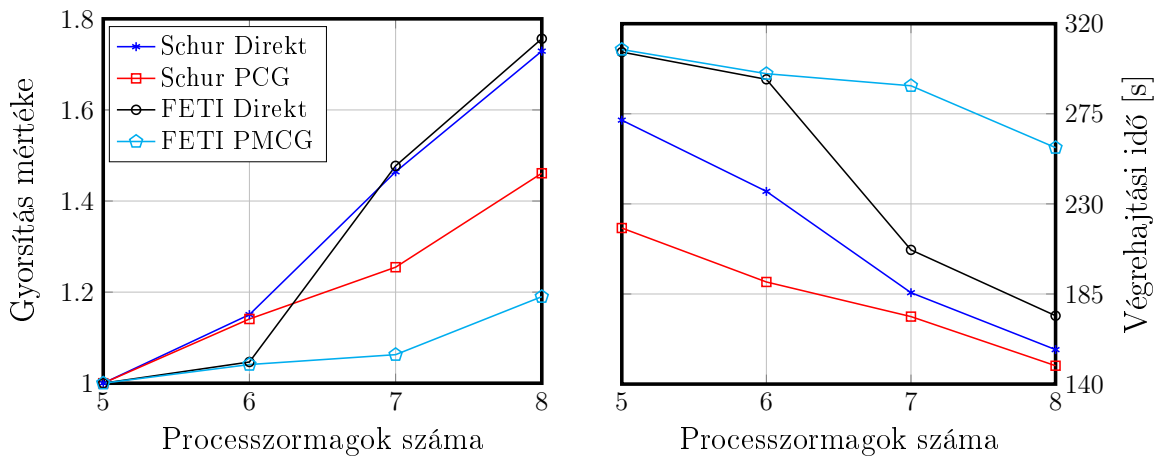


4.4. ÁBRA A transzformátor diszkrétizálásának felbontása öt altartományra.

4.3. TÁBLÁZAT A Schur—komplemens és a FETI-módszerek végrehajtási ideje a Neumann-peremfeltételt tartalmazó sztatikus mágneses példánál.

N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]			
		Schur—komplemens		FETI	
		Direkt	PCG	Direkt	PMCG
5	15 065	271,83	217,95	305,83	307,11
6	13 054	236,25	191,01	292,21	295,03
7	11 334	185,65	173,71	207,03	288,99
8	10 184	157,21	149,17	174,13	258,08

kapott időeredményeket a 4.3. táblázatban foglaltam össze. Ebben az esetben nincs szekvenciális megoldás, ezért a gyorsítás számításánál mindegyik megoldó rutinnál az $N_P = 5$ végrehajtási időhöz viszonyítottam az időeredményeket. A 4.5(a) ábrán látható görbéknél az összes esetben önmagához viszonyítva mutatja az elért gyorsítást. Ez alapján a két direkt megoldó tűnik a leghatékonyabbnak, legalábbis önmagához képest ezen két megoldó eljárásnál sikerült a legnagyobb mértékben tovább gyorsítani a számítást. De ezen ábrán keresztül nem lehet ténylegesen összehasonlítani a megoldási eljárásokat, emiatt ábrázoltam a végrehajtási időt a 4.5(b) ábrán. Ebből az ábrából már jól látszik, hogy a leggyorsabb a Schur—komplemens-módszer iteratív algoritmusosa volt. Ennél az ábránál az is jól látható, hogy a szinguláris altartomány miatt a FETI-módszer megoldó rutinjai nehezebben állítják elő a megoldást, míg az előző példánál a FETI direkt megoldó eljárása volt a leggyorsabb.



(a) A példánál elért gyorsítás.

(b) A példa megoldásához szükséges idő.

4.5. ÁBRA A Neumann-peremfeltételt tartalmazó sztatikus mágneses példánál kapott eredmények.

4.4. Örvényáramú feladat párhuzamosított megoldása

Örvényáramú tesztfeladatként szintén az egyfázisú transzformátort (lásd 4.2. ábra) vizsgálom. Az első esetben az egész feladatot, majd a szimmetriákat kihasználva, csak a feladat negyedét vizsgálom. Örvényáramú esetben a [40] könyvben található statikus példán két dolgot változtatok. Figyelembe veszem a vasmag vezetőképességét, ami $\sigma = 1 \cdot 10^6$ S/m, de a vastest lemezelését elhanyagolom és az eredetileg konstans gerjesztés helyett azzal azonos amplitúdójú 50 Hz-es szinuszos gerjesztőáramot írok elő. A feladat megoldásánál a vasmagra a (2.18) egyenletet alkalmazom. De mivel a feladat gerjesztéseként a tekercs áramsűrűségét írom elő, ezért az elektromos skalárpotenciált nullának választottam. A feladatot nullától 0,2 másodpercig, vagyis 10 periódust vizsgáltam, ahol a teljes időtartományt 4000 időlépésre bontottam fel.

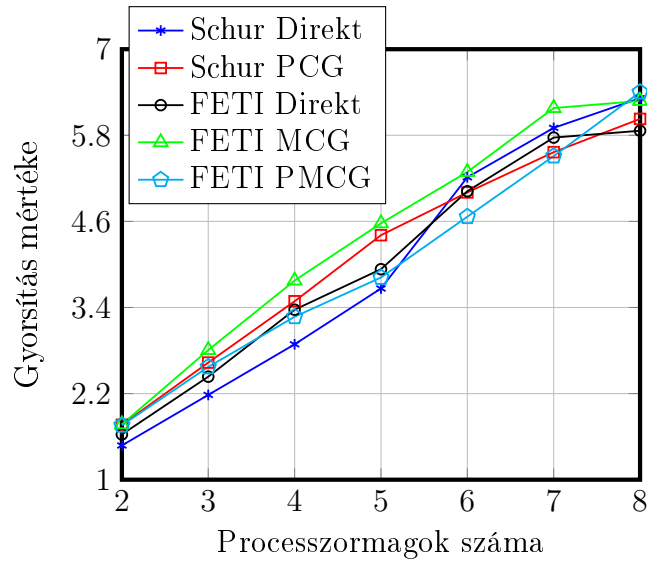
4.4.1. Az egész transzformátor párhuzamosított megoldásának eredményei

A számítás idejének jobb összehasonlíthatóság végett egy periódus átlagos végrehajtási idejét adom meg. Azért célszerűbb így megadni az időt, valamint ezt használni az összehasonlításhoz, mert például a FETI-módszernél a leképezési mátrixot vagy a Schur—komplementnél a redukált feladat leképezési mátrixát csak egyszer kell előállítani ami az egyes módszerek sajátossága, és jelentős számítási idővel járnak együtt az időlépés iterációjához képest. Emellett így hangsúlyosabban szerepel az időeredményben a megoldás előállítására fordított idő. A teljes transzformátor vizsgálatánál az ismeretlenek száma 55 933. A 4.4. táblázatban közölt időeredmények az átlagos periódusidőt jelentik.

Az időeredményekből jól látszik, hogy ha nagy az altartományhoz tartozó elemszám, az iteratív algoritmusok gyorsabban megoldják a feladatot. De az egyes megoldó rutinok közötti kezdeti eltérés az altartományok méretének csökkenésével egyre kisebb lesz. A

4.4. TÁBLÁZAT A Schur—komplement és a FETI-módszerek végrehajtási ideje az egész transzformátornál az örvényáramok figyelembevételével.

N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]				
		Schur—komplement		FETI		
		Direkt	PCG	Direkt	MCG	PMCG
2	28 094	1 196,49	1 001,01	1 083,80	997,38	1 005,20
3	18 992	810,06	671,41	725,47	629,58	687,22
4	14 475	612,17	506,81	524,54	468,06	540,33
5	11 837	482,21	400,94	449,24	386,41	462,80
6	10 101	338,90	353,19	352,00	334,07	378,78
7	8 844	299,35	317,56	306,36	285,95	320,71
8	7 935	279,71	293,12	301,39	281,44	276,05



4.6. ÁBRA Az egész transzformátornál elért gyorsítás az örvényáramok figyelembevételével.

Schur—komplemens direkt megoldási módszerénél figyelhető meg, hogy $N_P = 5$ után jelentősen csökken a számítás ideje. Nyolc processzormag alkalmazásánál a FETI PMCG megoldó algoritmus bizonyult a leggyorsabbnak ilyen örvényáramú feladatoknál, melynél a végrehajtási időket nézve, egy közel lineáris csökkenést mutat ahogy nő az altartományok száma.

Az előbbi állításaimat jobban szemlélteti a megoldó rutinoknál elért gyorsítások görbéje, amit a 4.6. ábra mutat. A végrehajtási időket a szekvenciális megoldás idejéhez hasonlítottam, ami 1 767,12 másodperc. A görbékét nézve, a megoldó eljárások között nincs jelentős eltérés örvényáramú esetben, ha nincs szinguláris együtthatómátrix egyik altartományban se. A görbék az altartományok számának növekedésével közel lineárisan emelkednek vagyis skálázható és nincs olyan nagy eltérés, mint a hasonló méretű sztatikus mágneses feladat esetében.

4.4.2. A negyed transzformátor párhuzamosított megoldásának eredményei

A feladat felbontása ebben az esetben 90 386 lineáris háromszögelemből áll, ami 45 192 ismeretlent jelent. A számításból kapott átlagos végrehajtási időket a 4.5. táblázatban közlöm. Itt sem szerepel a FETI-módszer megoldó rutinjaként az MCG algoritmus, mert öt altartomány esetében már itt is van lebegő altartomány.

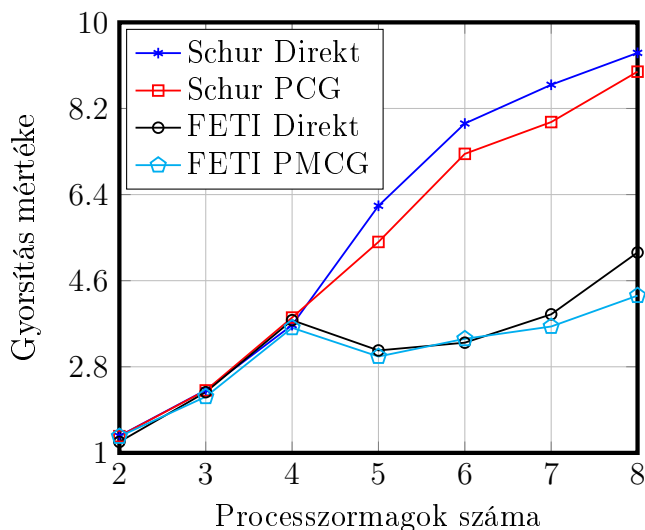
A 4.5. táblázatban a FETI-módszer végrehajtási idejeinél jól megfigyelhető, hogy a lebegő altartomány szingularitása miatt mennyire megnő a számítási idő. Az idő növekedésének egyik fő oka a nulltér és a pszeudo inverz előállítás. Valamint, itt jobban kitűnik, mint a sztatikus mágneses feladatnál a Schur—komplemens-módszer előnye a FETI-módszerhez képest, ha a feladatban van lebegő altartomány.

Az elért gyorsítást a szekvenciális megoldás végrehajtási idejéhez viszonyítottam, ami 1 037,37 másodperc. Az elért gyorsítást a processzormagok számának függvényében a 4.7. ábra mutatja. Az ábrán sokkal szembetűnőbb a szinguláris altartomány hatása a FETI-módszer megoldó eljárásainál, öt altartományánál ($N_P = 5$) visszaesik a

4.5. TÁBLÁZAT A Schur—komplemens és a FETI-módszerek végrehajtási ideje az örvényáramú transzformátor negyedénél.

N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]			
		Schur—komplemens		FETI	
		Direkt	PCG	Direkt	PMCG
2	22 738	766,01	768,86	843,62	772,57
3	15 581	448,56	449,93	457,19	477,27
4	12 148	282,54	270,94	274,88	287,03
5	9 038	168,26	191,75	330,19	344,14
6	8 223	131,54	143,05	314,00	306,48
7	7 464	119,30	131,05	266,21	284,84
8	6 779	110,80	115,66	199,87	241,97

gyorsítás mértéke. A leghatékonyabb megoldó eljárásnak a Schur—komplemens-módszer direkt módszere bizonyult, amellyel több mint kilencszeres gyorsítást sikerült elérnem. Ez annyit jelent, hogy az eredetileg közel három órás számítást kevesebb mint 20 perc alatt sikerült elvégezni az eredeti feladat nyolcfelé bontásával. De az altartományokhoz tartozó ismeretlenek számát nézve, az iteratív megoldó is nagyon jól működött ennél a feladatnál. FETI-módszernél is a direkt megoldóval sikerült nagyobb gyorsítást elérnem. A görbékéből még az is látszik, hogy örvényáramú esetben a FETI-módszer megoldóival elért gyorsításban nincs olyan nagy különbség, mint a sztatikus mágneses feladat esetében jelentkezett.



4.7. ÁBRA A negyed transzformátornál elért gyorsítás az örvényáramok figyelembevételével.

4.5. A csatolt probléma párhuzamosítása

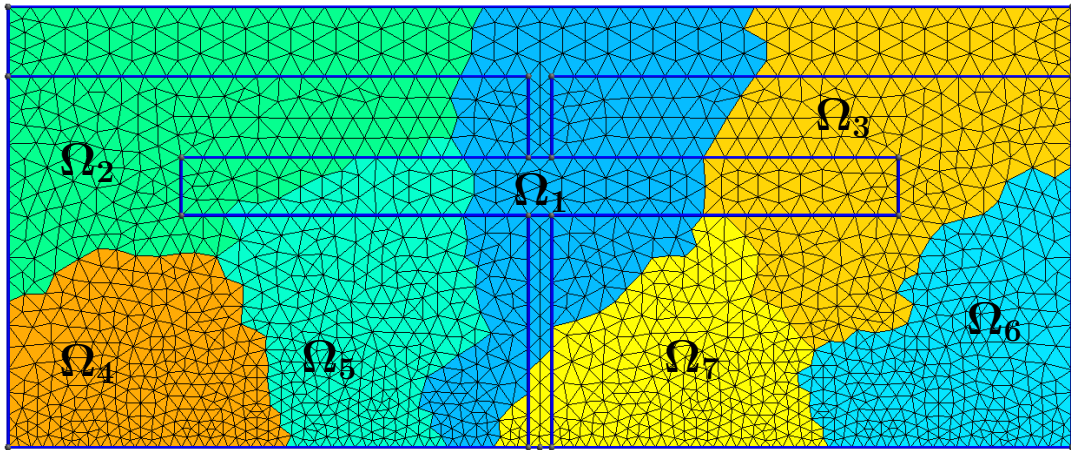
A csatolt feladatok párhuzamosításánál céлом vizsgálni a feszültségegyenlet csatolásának hatását az egyes megoldási módszerek esetében, mivel a feszültséggel gerjesztés figyelembevétele módosítja az egyenletrendszeret. Céлом még megvizsgálni melyik megoldó algoritmust célszerű alkalmazni olyan feladatoknál ahol nincs mozgás, illetve szükséges a mechanikai egyenletet figyelembevétele valamilyen elmozdulás következtében. Ezek mellett demonstrálni szeretném a már bemutatott, és szekvenciálisan megoldott, csatolt feladatok megoldásának felgyorsítását tartomány dekompozícióval.

4.5.1. Feszültségegyenlettel csatolt feladat párhuzamosított megoldása

Feszültséggel gerjesztett feladatként az F. függelékben ismertetett, és a 3.2. alfejezetben megoldott feladatot alkalmazom. Sztatikus mágneses és örvényáramú feladatként egyaránt vizsgálni fogom, ezzel igazolva, hogy mindkét esetben alkalmas a tartomány dekompozíció a feszültségegyenlettel csatolt szimuláció felgyorsítására.

Ha feszültséggel gerjesztett feladatnál alkalmazom a tartomány dekompozíciót, ahhoz, hogy a feszültségegyenlet révén a tekercsben kialakuló áramértéket kapjam, két lehetőséget találtam. Az egyik, hogy a gerjesztőtekercs teljes tartománya, vagyis a tekercselés tartományán lévő összes végelem egy altartományhoz tartozik. A legtöbb elektromechanikai átalakítónál – például a villamos forgógépek többsége – ez könnyen alkalmazható, mivel a tekercselés több kisebb tartományként jelenik meg a feladatban. Azonban ha ez nem lehetséges, mint például a vasmagos szolenoid feladatban, a tartomány dekompozíció következtében a gerjesztőtekercselés tartománya $N_{\text{stek}} \geq 2$ altartományra esik szét. A 4.8. ábra is ezt mutatja, ahol a feladat közepén elhelyezkedő gerjesztőtekercs tartománya négy részre esik szét. Ebben az esetben a tekercselés úgy viselkedik, mint egy hosszú vezeték, melyet kisebb részekre vágunk, majd sorosan kapcsolunk. A kisebb tekercsrészek soros kapcsolásának következtében visszkapjuk a teljes vezeték induktivitását és rezisztenciáját. A szolenoid példájában ez utóbbi módszert alkalmaztam az összes szimuláció esetében, mert saját rácspartitionáló algoritmust kellett volna implementálnom, hogy a teljes tekercs tartománya egy altartományra kerüljön. A mechanikai egyenlettel is csatolt modelleknél már könnyen megvalósítható volt a Metis programcsomag [280] segítségével, hogy a teljes tekercs egyben maradjon.

Feszültséggel gerjesztett feladat felbontásánál a (3.7) egyenletnek megfelelő egyenleteket kapok az altartományokon. Az előző részben bemutatott feladatokhoz képest annyiban módosul a megoldás menete, hogy nem csak a felbontásnál létrejövő Γ_{Ω_i} peremen található ismeretlenek vagy az ezeket összekapcsoló Lagrange-multiplikátorok miatt van kommunikáció a peremek között, hanem a feszültségegyenlet miatt is. Ahhoz, hogy a tekercsrészt tartalmazó altartományokon a teljes feszültségegyenletet oldjam meg, szükséges ezek között az altartományok között a tekercshez tartozó belső csomópontok értékeit is átadni. Ez a járulékos kommunikáció nem változtat semmit az irodalmi áttekintésben bemutatott módszereken, csupán a megoldandó egyenletrendszer változik. Ebben az esetben a következőképpen néz ki egy tetszőleges Ω_1 altartomány egyenletrendszere, amelyhez hozzátartozik a tekercs tartományába eső, de az altartományon



4.8. ÁBRA A szolenoid diszkrétizált tartományának hét részre bontása.

kívüli ismeretlenek feszültségegyenlethez kapcsolódó része,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\Omega_1} + \frac{\mathbf{N}_{\Omega_1}}{\Delta t} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{\Omega_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{Q}_{\Omega_1}}{\Delta t} & \frac{\mathbf{Q}_{\Gamma_{\text{tek}}}}{\Delta t} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1}(t) \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{\text{tek}}}(t) \\ \mathbf{I}(t) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{N}_{\Omega_1}}{\Delta t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{Q}_{\Gamma_{\text{tek}}}}{\Delta t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{Q}_{\Omega_1}}{\Delta t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_1}(t - \Delta t) \\ \mathbf{A}_{\Gamma_{\text{tek}}}(t - \Delta t) \\ \mathbf{I}(t - \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{U}(t) \end{bmatrix}, \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

ahol az Ω_1 alsó index az altartományhoz tartozó mátrixokat és vektorokat jelöli, a Γ_{tek} alsó index, pedig az Ω_1 altartományon kívüli, de a tekercs tartományához tartozó ismeretlenek vektorpotenciál értékeit és fluxuskapcsolódását jelöli. Az így nyert, altartományokhoz tartozó egyenletrendszerek a processzormagok közötti terheléeloszlást kis mértékben elrontják, de a számítási idő szempontjából ezt találtam a hatékonyabb módszernek, például a tekercs miatti külön iterációhoz képest. A mátrixokban szereplő nullák szintén nem jelentenek problémát, mert a mátrixokat eredetileg is ritka mátrixként tároltam, így nincs jelentős memóriaigény-növekedés. Valamint a mátrix–mátrix és a mátrix–vektor szorzásoknál nem tapasztaltam változást a művelet végrehajtási idejében, mert ritka mátrixokra hajtottam végre a kétféle mátrix szorzást, vagyis a nulla elemnél nem végez műveletet a végrehajtó algoritmus.

Az eredmények bemutatása

Az előbb vázolt elmélet működésének igazolásához a feszültséggel gerjesztett vasmas szolenoid párhuzamosításával kapott eredmények szolgálnak. A teljes feladat diszkrétizálása 328 220 elsőfokú háromszögelemből áll, ami 163 397 ismeretlent jelent. Statikus

és örvényáramú esetben ugyanazt a felbontást alkalmaztam. A 10 V-os egyenfeszültség-gel gerjesztett szolenoidot a $[0, \dots, 0,01]$ másodperces intervallumban oldottam meg. Az időintervallumot 1000 időpillanatra bontottam fel. A szekvenciális megoldásnál a sztatikus mágneses feladat megoldásához 2866,24 másodpercre, az örvényáramú változatnál ugyanehhez 3028,5 másodpercre volt szükség.

A sztatikus mágneses szolenoidhoz tartozó időeredményeket a 4.6. táblázatban, az örvényáramok figyelembevételével kapott időeredményeket pedig a 4.7. táblázatban közlöm. A megoldó eljárások között nem szerepel a FETI MCG algoritmus, mert nagy ismeretlenség mellett könnyen előfordulhat szinguláris együtthatómátrixszal rendelkező altartomány. A táblázatokban közölt időeredmények is jól mutatják, hogy a párhuzamosítás csökkentette a megoldáshoz szükséges időt, azonban ennél sokkal szemléletesebb a (4.2) összefüggéssel számított gyorsítást ábrázolni.

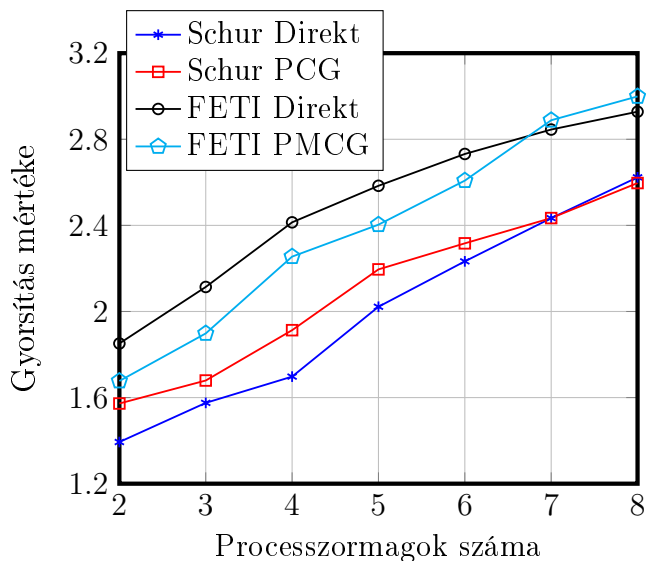
A gyorsításnál a szekvenciális megoldás idejéhez hasonlítottam a 4.6. és a 4.7. táb-

4.6. TÁBLÁZAT A sztatikus mágneses szolenoid párhuzamosításának eredményei.

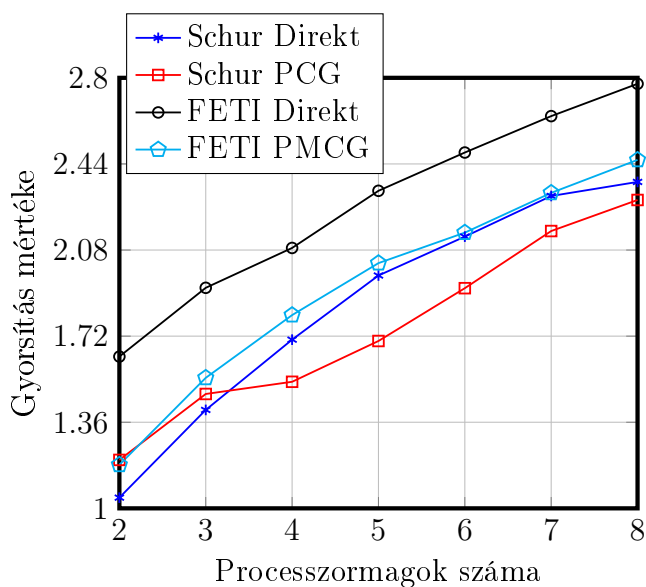
N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]			
		Schur—komplemens		FETI	
		Direkt	PCG	Direkt	PMCG
2	80866	2056,77	1822,69	1548,20	1709,10
3	54435	1819,36	1706,80	1355,91	1510,11
4	41437	1688,57	1498,17	1187,28	1271,14
5	33943	1417,54	1305,49	1109,26	1192,63
6	29010	1283,66	1237,28	1049,23	1099,03
7	25632	1177,78	1177,62	1007,38	992,32
8	22585	1092,61	1103,81	978,87	955,70

4.7. TÁBLÁZAT Az örvényáramú szolenoid párhuzamosításának eredményei.

N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]			
		Schur—komplemens		FETI	
		Direkt	PCG	Direkt	PMCG
2	80866	2912,02	2519,55	1892,81	2566,52
3	54435	2146,35	2049,05	1577,34	1960,19
4	41437	1776,24	1980,58	1456,01	1675,98
5	33943	1537,31	1792,01	1305,39	1495,55
6	29010	1384,77	1577,01	1217,73	1406,77
7	25632	1300,34	1402,73	1147,59	1305,95
8	22585	1283,26	1328,29	1093,32	1236,12



4.9. ÁBRA A sztatikus mágneses szolenoidnál elért gyorsítás a processzormagok függvényében.



4.10. ÁBRA Az örvényáramú szolenoidnál elért gyorsítás a processzormagok függvényében.

látatokban közölt eredményeket. A 4.9. és a 4.10. ábrák mutatják a feladatok megoldásánál elért gyorsítást a processzormagok függvényében. Mindkét ábrán jól látszik, hogy a FETI-módszerhez tartozó megoldó rutinok felülmúlták a Schur—komplement-módszerhez tartozó megoldó eljárásokat. Ez az örvényáramú esetre különösen igaz, ahol a FETI direkt megoldó rutinja és a többi megoldó rutin között jelentős eltérés mutatkozik, az előbbi javára. Tehát az eredmények alapján a feszültséggel gerjesztett sztatikus mágneses és örvényáramú szolenoidnál a FETI-módszer bizonyult hatékonyabbnak. A feszültséggel gerjesztett sztatikus mágneses feladatnál a FETI prekondicionált módosított konjugált gradiens algoritmussal 3-szoros, az örvényáramú feladatnál a FETI direkt megoldó eljárásával majdnem 2,8-szoros gyorsítást sikerült elérnem $N_P = 8$ esetében.

4.5.2. Mechanikai egyenlettel csatolt feladat párhuzamosított megoldása

A mozgás figyelembevételének hatását a tartomány dekompozíciós párhuzamosításra az előző fejezetben már ismertetett közvetlen indítású 3 kW-os aszinkron motor példáján keresztül vizsgálom. A motorban az örvényáramokat figyelembe veszem és a feladatot úgy bontottam fel altartományokra, hogy a gerjesztőtekercs tartományához tartozó összes végelelem egy altartományhoz tartozzon. Ebben az esetben egy tekercset tartalmazó tetszőleges Ω_2 altartomány egyenletrendszere a következőképpen változik a (4.5) egyenlethez képest

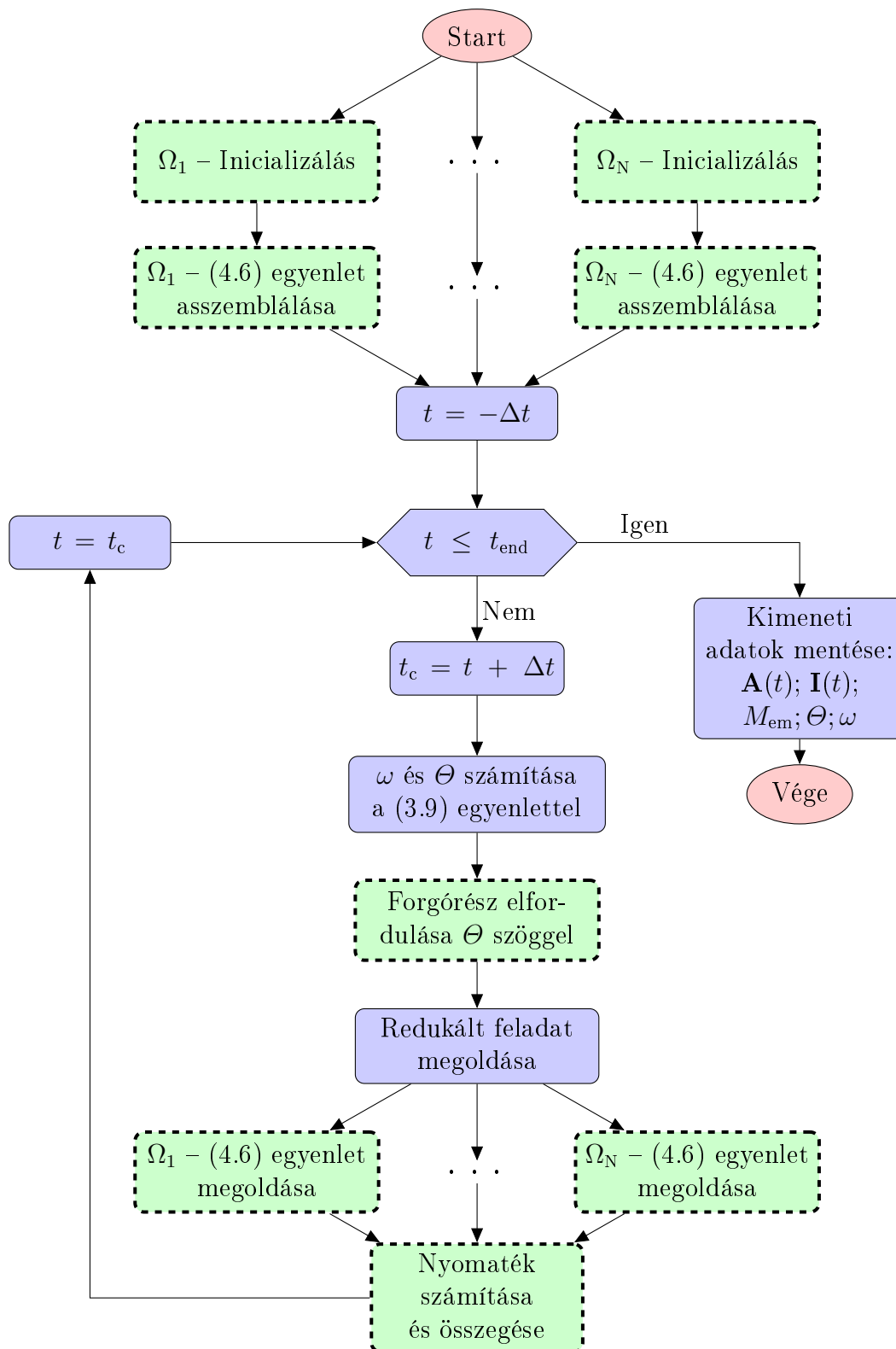
$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\Omega_2} + \frac{\mathbf{N}_{\Omega_2}}{\Delta t} & -\mathbf{P}_{\Omega_2} \\ \frac{\mathbf{Q}_{\Omega_2}}{\Delta t} & \mathbf{R} + \frac{\mathbf{L}_{fej}}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_2}(t) \\ \mathbf{I}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{N}_{\Omega_2}}{\Delta t} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{Q}_{\Omega_2}}{\Delta t} & \frac{\mathbf{L}_{fej}}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Omega_2}(t - \Delta t) \\ \mathbf{I}(t - \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{U}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

ami megfelel a (3.7) egyenletnek, az egyetlen eltérés az \mathbf{L}_{fej} tekercsfej szórási induktivitásának figyelembevétele.

A mechanikai egyenlet figyelembevétele alapvetően kétféleképp lehetséges. Az egyik módszer, ha tetszőlegesen felbontom a feladatot, a másik lehetőség, ha az állórészt és a forgórészt külön-külön bontom fel. Ha tetszőlegesen bontom fel a feladatot, a forgás következtében az altartományok között lévő peremek minden időlépésben változnak. Ennek az a következménye, hogy az altartományok közötti folytonosság megteremtése további jelentős számításgigénnel jár, mivel minden időlépésben újra meg kell keresni az összetartozó ismeretlenpárokat, vagy a Lagrange-multiplikátorokhoz szükséges \mathbf{B} leképezési mátrixot újra létre kell hozni. Ezt a módszert teszt jelleggel valósítottam meg és vizsgáltam, de a kapott gyorsítási eredmények alapján elvettem és a továbbiakban nem is vizsgáltam, mert legjobb esetben is a szekvenciális számítás idejét sikerült elérnem.

A másik lehetőség, ha az álló- és forgórészt külön bontom fel, mivel ekkor csak az álló- és mozgó rész közötti sávban vagy peremen változik a végelelemháló, vagyis az altartományok peremén. A mozgó sáv és csúszófelület módszer közül a csúszófelület alkalmasabb ehhez a felbontáshoz. A mozgó sáv módszernél, egy sávban új végelelemeket hozok létre, ami miatt mindig asszemblálni kell. A csúszófelület módszernél az álló és az elmozduló rész között a folytonosságot kell megteremteni, ami egy mátrixműveletet jelent. Ezt csak jobban erősíti, ha a T.E.A.M. 30a feladatból kapott eredményeket is figyelembe veszem, ahol a csúszófelület módszerrel pontosabb eredményeket kaptam. Így a mechanikai egyenlettel csatolt párhuzamosított feladatnál a csúszófelület módszert alkalmazom az elsőfokú interpolációval. De fontos megjegyezni, hogy mivel a mozgó és álló részt külön bontom fel, a terheléseloszlás nem biztosított. Az én esetemben a két részen az ismeretlenek száma közel azonos, ezért ha az altartományok száma páros, akkor a processzormagok közötti terheléseloszlás egyenletes lesz.

Az ilyen típusú feladat párhuzamos megoldásához kidolgozott eljárás folyamatábráját a 4.11. ábra mutatja. Az indítást (Start) követően a feladat inicializálása történik, amely a diszkretizálást leíró csomópontkoordináták, a csomópontok kapcsolódási mátrixát, és a tartományok anyagparamétereinek beolvasását jelenti. Ez már párhuzamosan történik, melyet az ábrán a szaggatottal szegélyezett zöld téglalapok jelölnek. Ezután az egyes altartományok egyenletrendszerének összeállítása következik. Az ezt követő lépések szekvenciálisan történnek, mert az időt, mint globális paraméter alkalmazom.



4.11. ÁBRA A mechanikai egyenlettel csatolt párhuzamos feladat megoldásának folyamatábrája.

A szekvenciális műveleteket a folytonos vonallal körülvett kék téglalappal jelöltem. A tartomány dekompozíciónál a szekvenciális műveleteket a mester (*master*) processzor

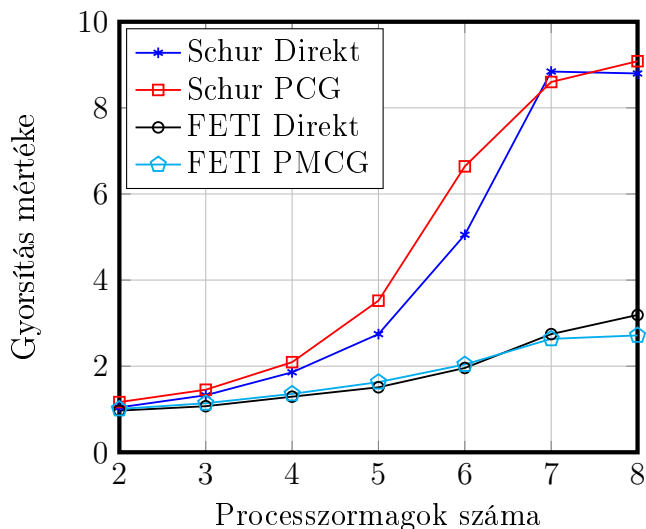
végzi, míg a párhuzamos lépéseknél a mester és a szolga (*slave*) processzorok ugyanazt a műveletet végzik. Az iteráció egy döntés blokkal kezdődik, ahol azt vizsgálom, hogy a számítás t ideje kisebb vagy nagyobb-e mint $t_{\text{end}} = 0,3$ másodperc. Ha nagyobb, akkor az eredmények mentése és megjelenítése következik, a megoldási folyamat pedig véget ér. Ha kisebb, akkor folytatódik az iteráció. Az idő növelését követően a mechanikai egyenletből meghatározom az új t időpillanathoz tartozó aktuális ω_m szögsebességet és Θ_m szögelfordulást. Az ezt követő lépés ismét több processzormagon történik. De ez a lépés nem vonatkozik az összes altartományra, csak a forgórészen elhelyezkedő altartományoknál kell végrehajtani. Ennél a lépésnél a forgórészek altartományánál módosítani kell a csúszófelületen lévő ismeretlenek folytonosságához az összetartozó ismeretlenek és a Lagrange-multiplikátorok mátrixát. Ezután a redukált feladat megoldása következik, mely szekvenciális művelet a tartomány dekompozíciónál. A FETI-módszernél ez a lépés a nyeregpon-t feladat megoldását jelenti. A redukált feladat megoldása után az altartományokhoz tartozó egyenletrendszer meghatározása következik, mely ismét párhuzamos művelet. Ez a két lépés, a redukált feladat és az altartományok ismeretleneinek megoldása a Schur—komplemens iteratív megoldó algoritmusánál nem válik külön. Az 1. Algoritmusnál (35. oldal), a kommunikációval jelölt sorok, amik, a tartományok közötti folytonosság megteremtése miatt a szekvenciális műveletet jelképezik. Majd az altartományok egyenletrendszerének megoldása után a csúszófelületen meghatározom a nyomatókat az egyes altartományokon, majd azokat összegezem. Az így nyert iteráció alkalmas feszültséggel és mechanikai egyenlettel csatolt feladatok megoldására. De minden olyan esetben, ahol az iteráción belül szükség van az egyenletrendszer módosítására (például a nemlinearitás figyelembevételénél), ott ez a lépés a forgórész elfordulása és a redukált feladat megoldása blokkok közé fog kerülni.

Az eredmények bemutatása

A háromfázisú aszinkron motor modelljét az indítástól számított 0,3 másodpercig vizsgáltam, és az időtartományt 450 időlépésre bontottam. A feladat 390 887 elsőfokú

4.8. TÁBLÁZAT A Schur—komplemens és a FETI-módszerek végrehajtási ideje a feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt problémánál.

N_P	N_{DoF}	N_{Sta}	N_{Rot}	T_{DDM} [s]			
				Schur—komplemens		FETI	
				Direkt	PCG	Direkt	PMCG
2	96 886	95 800	97 973	59 756,4	53 450,2	64 395,0	61 937,8
3	65 070	95 800	49 706	47 053,2	42 888,8	58 238,8	54 702,9
4	49 072	48 439	49 706	33 549,8	29 774,7	48 257,4	45 939,0
5	39 950	48 439	33 624	22 705,3	17 698,6	41 270,5	38 238,5
6	33 464	33 304	33 624	12 334,5	9 383,11	31 826,5	30 552,3
7	29 270	33 304	26 244	7 047,03	7 245,49	22 705,3	23 655,8
8	25 885	25 526	26 244	7 082,35	6 860,45	19 537,1	22 955,4



4.12. ÁBRA A feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt problémánál elért gyorsítás.

háromszögelemből áll, ami 192 747 ismeretlent jelent. A mechanikai mozgás egyenletével csatolt feladatnál is a Schur—komplemens-módszer és a FETI-módszer direkt és iteratív megoldó eljárásait hasonlítom össze. De az általam hatékonynak talált felbontásnál, a mozgó részt, jelen esetben a motor forgórészét külön bontom fel. Emiatt az összes forgórészből kapott altartomány lebegő altartomány, vagyis az együttthatómátrix szinguláris lesz. Így a következőkben közölt eredmények csupán az egyfázisú transzformátor negyedének vizsgálatánál kapott eredményeket (lásd 4.7. ábra) támasztják alá. Vagyis azt, hogy az általam megvalósított FETI-módszer képes kezelni a lebegő altartományokat, de nem elég hatékonyan.

A feladat párhuzamosításával kapott időeredményeket a 4.8. táblázatban közlöm. Az időeredmények a teljes számítás idejét jelentik. A táblázatban szerepel az altartományokhoz tartozó átlagos ismeretlenség (N_{DoF}), valamint az átlagos ismeretlenség az állórészen (N_{Sta}) és a forgórészen (N_{Rot}). Ezeket az értékeket azért közlöm a táblázatban, hogy jól látható legyen, mennyire egyenlőtlen a terheléeloszlás, ha az altartományok száma páratlan. Azonban, már az időeredmények is jól mutatják, hogy az egyenlőtlen terheléeloszlás ellenére is folyamatosan csökken a számítási idő, tehát a processzormagok függvényében nő a gyorsítás.

De itt is érdemes kirajzoltatni az elért gyorsítást a processzormagok függvényében, ami jobban szemlélteti a megoldó rutinok hatékonyságát a mechanikai mozgás egyenletével csatolt feladatra. Az elért gyorsítást a 4.12. ábra mutatja. Ez az ábra is alátámasztja, hogy a klasszikus FETI-módszer nem tudja kellően hatékonyan kezelni a lebegő altartományokat. De ennél a feladatnál is sikerült demonstrálnom, hogy az általam megoldó eljárásnak javasolt direkt módszer alkalmas az ilyen típusú feladatok kezelésére is, a szakirodalomból jól ismert PMCG algoritmushoz hasonlóan. Az eredmények alapján a mechanikai egyenlettel csatolt feladatot a Schur—komplemens-módszerrel lehet hatékonyabban gyorsítani, ahol az iteratív megoldó rutinnal kilencszeres gyorsítást sikerült elérnem. A gyorsítási görbékéből az is kitűnik, hogy az általam javasolt felbontásnál, páratlan altartomány esetében előáll egyenlőtlen terheléeloszlás nem okoz jelentős problémát egyik megoldó algoritmusnak sem.

4.6. Új tudományos eredmények

A szimuláció gyorsításának érdekében realizáltam a Schur—komplemens-módszert és a FETI-módszert. Megvizsgáltam a két módszer alkalmazhatóságát strukturálatlan felbontással rendelkező alacsony frekvenciás elektrodinamikai problémák megoldásának előállítására és elemzése során. A módszereknél vizsgáltam a direkt és az iteratív megoldó algoritmusok hatékonyságát az altartományok és az alkalmazott processzormagok számának függvényében. A témához kapcsolódó szakirodalom alapján én javasoltam és alkalmaztam először az eredetileg a FETI-módszer iteratív algoritmusához prekondicionálónak használt eljárást az elektromágneses térszámításban direkt megoldó rutinként. Megvizsgáltam a realizált tartomány dekompozíciós módszerek alkalmazhatóságát csatolt numerikus feladatokra és javaslatot tettem a vizsgált tartomány felbontására, a minél hatékonyabb párhuzamosítás érdekében [152, 202, 203, 291–294, 315–317, 382].

- (a) Megvizsgáltam a Schur—komplemens-módszert és a FETI-módszert egyaránt direkt és iteratív megoldó algoritmussal elektrosztatikus, sztatikus mágneses és örvényáramú feladatokra, fókuszálva arra, hogy melyik tartomány dekompozíciós módszer alkalmasabb az elektromágneses térszámításban felmerülő, két dimenzióban vizsgálható problémák megoldására. A kapott eredmények alapján a FETI-módszer bizonyult a csatolástól mentes feladatok esetében a hatékonyabb megoldó technikának. Csatolt szimulációk esetében, a feszültségegyenlettel csatolt feladatnál a FETI-módszer, a mechanikai mozgást tartalmazó feladat esetében a Schur—komplemens-módszer bizonyult hatékonyabbnak a kapott eredmények alapján.
- (b) Demonstráltam a dolgozatban megvizsgált példákon keresztül, hogy a FETI-módszernél az iteratív megoldó algoritmusához prekondicionálónak javasolt módszer alkalmas technika a redukált feladat megoldásához, és képes kezelni a lebegő altartományt. A vizsgált időben állandó kis méretű elektrodinamikai feladatoknál, melyeknél nincs lebegő altartomány a leghatékonyabb megoldó eljárásnak bizonyult az alkalmazott algoritmusok között. A javasolt módszer a csatolt feladatoknál is alkalmazható megoldó eljárásnak bizonyult a kapott eredmények alapján.
- (c) Megvalósítottam a feszültségegyenlettel és a mechanikai tranziens egyenlettel csatolt numerikus modell tartomány dekompozícióval történő párhuzamosítását, amellyel a szimuláció számítási idejét lecsökkentettem. A feszültségegyenlettel csatolt feladatnál olyan tartományfelbontási módszert javasoltam, melynél a feszültségegyenlet a felbontást követően is helyes eredményre vezet, és a gyorsítás hatékonysága se csökken jelentősen. A mechanikai mozgást tartalmazó párhuzamosított feladatnál javaslatot tettem a mozgás gazdaságos figyelembevételére és a vizsgált tartomány megfelelő felbontására. Csatolt feladatok párhuzamosításából kapott eredményeken keresztül bemutattam az általam javasolt módszerek alkalmazhatóságát.

5. FEJEZET

Modell szabályozási körbe illesztése

5.1. Motiváció

A legtöbb elektromos vagy elektromechanikai rendszer elvárt működéséhez beavatkozásra van szükség, vagyis elengedhetetlen hozzá egy megfelelő szabályozó. A szabályozót legelterjedtebben az állapotter modellel vagy identifikáció útján nyert egyéb modell segítségével tervezik. Az állapotter modellnél a közöséges differenciálegyenletek felírásához elhanyagolásokra és közelítésekre van szükség. Erre jó példa a villamos forgógépek légzésében szinuszos mezőeloszlást feltételezni, amivel sok olyan hatást nem veszünk figyelembe, ami befolyással bír a gép veszteségeire és lüktetőnyomatékára. Az identifikációval nyert modellhez pedig szükség van legalább egy elkészült prototípusra. A prototípus gyártásának és mérésének jelentős idő- és költségigénye van, és ebben az esetben a szabályozni kívánt berendezés változtatása sem egyszerű.

Ahhoz, hogy a szabályozott berendezést és a szabályozót magába foglaló rendszer hatékonyan működjön, elengedhetetlen a pontos és könnyen változtatható modell. A pontosságra azért van szükség, hogy a megépítésre kerülő berendezést nagy pontossággal leíró modellhez tervezzük a szabályozót, amivel lehetőség nyílik a valóságos rendszerben lévő zavaró hatások kompenzálására. A könnyen változtatható modell azért szükséges, hogy legyen lehetőség az egész rendszer optimalizálására, amellyel nem csak a szabályozási kör egy-egy összetevőjének növelhető a hatékonysága az előírt szempontok szerint, hanem a teljes rendszeré is.

Az előzőekben vázolt hiányosságok és hátrányok kezelésére egy lehetséges megoldás a végelem-módszeren alapuló modell alkalmazása. A numerikus modell pontosabb eredményre vezet, mint a közöséges differenciálegyenletekből nyerhető leírás, mert a fizikai jelenségek nem csak az időtől, hanem a térváltozóktól is függenek. Emellett a numerikus modell tetszőleges változtatása könnyen kivitelezhető, aminek következtében a feladat ismételt megoldására van szükség az újabb eredményekhez. Ezzel jelentős idő és költség is megtakarítható, tehát nem csak a működés, hanem a tervezés menete is hatékonyabbá tehető.

De ahhoz, hogy a szabályozási körbe, mint szabályozott szakasz egy végelem-módszeren alapuló modell beilleszthető legyen, fontos a bemeneteket és kimeneteket illeszteni. Emiatt a Maxwell-egyenletekből nyert modell önmagában nem elegendő, hanem a feszültségegyenlet és ha szükséges a mechanikai mozgást leíró egyenlet csatolására is szükség van. A csatolással nyert numerikus modell alkalmazásának az előnyök mellett hátránya is van. A végelem-módszernél az ismeretlenek száma nagyságrendekkel több, mint például az állapotter modellnél, ami jelentősen megnöveli a szabályozási kör tervezési és szimulációs idejét. Ennek a hátrálynak a mérséklésére alkalmazom a tartomány

dekompozícióval történő párhuzamosítást, amivel lehetőségem van a végelemekeken alapuló modell futási idejének csökkentésére.

Az irodalmi áttekintésben és az előző két fejezetben már bemutattam az alkalmazott módszerek elméleti hátterét, és a belőlük nyert modellek működését az eredményeken keresztül. Ebben a fejezetben ezek együttes működését és viselkedését fogom vizsgálni, ha a numerikus modellt egy szabályozási körben alkalmazom. Az első szabályozásba illesztett modell a már vizsgált feszültséggel gerjesztett vasmagos szolenoid. Ennél a feladatnál céлом vizsgálni a modell pontosságának hatását a szabályozó tervezésére, és a párhuzamosítással elérhető gyorsítást. A feladaton keresztül bemutatom továbbá az analitikus modell alapján tervezett szabályozó hatását a rendszer kimenetére. A másik szabályozási körben vizsgált rendszer egy háromfázisú (állórészen 6 pólus, forgórészen 4 pólus) kapcsolt reluktancia motor, ahol a gerjesztést a forgórész szöghelyzetének megfelelően szabályozom. Itt a párhuzamosítással elérhető gyorsítás mellett a feszültségkényszer fontosságát mutatom be a szabályozással kapott sebesség időfüggvényeken keresztül.

Dolgozatomban nem céлом irányításelméleti szempontok szerint vizsgálni a rendszereket, ezért alkalmazom a modellekhez a lehető legegyszerűbb szabályozást. De az általam implementált szabályozások tetszőleges, az irányításelméletből ismert módszerrel kiválthatók. A bemutatásra kerülő rendszereken keresztül a numerikus modell szabályozásban való alkalmazásának lehetőségét és működését demonstrálok.

A fejezetben bemutatásra kerülő számításokat négy IBM HS21 Blade (CPU: 2x Intel Xeon L5240 @ 3,00 GHz, memória: 8 GB) végezte. Mind a négy számítógép 1 GB/s hálózati összeköttetéssel rendelkezik a beépített hálózati modulon keresztül. Ezzel az összeállítással összesen 16 processzormag és 32GB memória állt rendelkezésre a számításhoz. A számítógépre Debian Linux 7 operációs rendszer és Matlab R2015a Distributed Computing Toolbox lett telepítve.

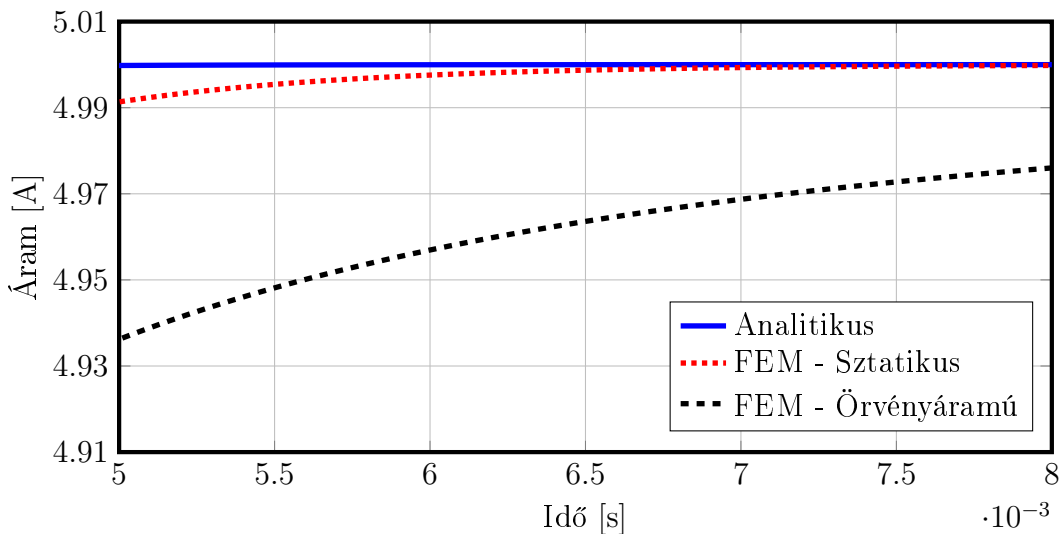
5.2. Feszültségegyenlettel csatolt modell szabályozási körbe illesztése

Mielőtt rátérek a szabályozási kör bemutatására és vizsgálatára, a mágneses rendszer viselkedését vizsgálom az ugrásválaszok alapján. A rendszer bemenete a szolenoid tekercsének gerjesztőfeszültsége, és a kimeneti változó a tekercsben kialakuló áram. A vizsgált mágneses rendszer ugrásválaszának meghatározásához az F.2. ábrán látható gerjesztőjelet alkalmaztam. Az egyes modellekhez tartozó válaszjelek a 3.2. ábrán láthatóak. Az analitikus számítás menetét az F. függelékben ismertetem. A sztatikus mágneses és örvényáramú megoldások leírását a 3.2. alfejezetben adtam meg.

Az irányításelméletben a rendszerek többsége könnyebben kezelhető a komplex frekvenciatartományban, mint az időtartományban. Én is az F. függelékben meghatározott átmeneti függvény helyett az átviteli függvényt alkalmazom, mert ez könnyebben kezelhető, és egyszerűbb belőle megállapításokat tenni a rendszer viselkedésére [324–327, 329, 330]. Ennek az elektromágneses rendszernek az átviteli függvényét az (F.6) egyenlet Laplace-transzformációjával és átrendezésével kapjuk. A vasmagos szolenoid átviteli függvénye a komplex frekvenciatartományban

$$W(s) = \frac{1}{sL + R}, \tag{5.1}$$

ahol L és R a rendszer induktivitása és rezisztenciája, és s a komplex változó.



5.1. ÁBRA A válaszok kinagyított része a beállási idő szemléltetéséhez.

Már a 3.2. ábrán is látható, hogy van különbség az ugrásválaszok között, és az eltérés egy kinagyított részen, az 5.1. ábrán még szembetűnőbb. Az eltérés amiatt van, mert a modellek más-más pontossággal írják le a valós szolenoid viselkedését, és az induktivitás ennek megfelelően változik. A mágneses rendszer induktivitása 0,9869 mH, 1,5464 mH és 1,5703 mH az analitikus, a sztatikus mágneses és az örvényáramú feladat esetében. De az örvényáramok figyelembevételével, az induktivitás mellett az egész rendszer ellenállása is megváltozik. Az átviteli függvényből is jól látszik, hogy az L és R értéke, ami meghatározza a rendszer viselkedését. A beállási idő például az induktivitás és az ellenállás függvénye, mert az időállandó ennél a rendszernél $\tau = L/R$. Tehát azt kaptam, hogy ahogy nő az induktivitás, a beállási idő (közelítőleg 5τ) is ennek megfelelően egyre nagyobb lesz. Ezt jól szemlélteti a 5.1. ábra, ahol az analitikus megoldásnál a legkisebb, és az örvényáramú esetben a legnagyobb a beállási idő.

A szabályozási körben nagyon sok lehetőség van a szolenoid tekercsében kialakuló áram szabályozására. Ilyen lehet az arányos-integráló-differenciáló (PID - *Proportional-Integral-Derivative*) tagból álló szabályozó [384], valamilyen optimális irányítás [335,337,385], adaptív szabályozás, vagy egy lágyszámítási eljárás (neurális hálózat, fuzzy logika) alapuló szabályozó [324]. A vasmagos szolenoid áramának szabályozásához egy arányos és integráló tagból álló szabályozót alkalmazok. Ez az elektromágneses rendszer egy soros R–L-körnek, vagyis egy elsőrendű rendszernek felel meg, amelynek szabályozásához elegendő a PI-szabályozó.

5.2.1. A szabályozó

A szakirodalomban nagyon sokféle PI-szabályozó konfiguráció található, de a legelterjedtebben alkalmazott változata az egy bemenettel és egy kimenettel rendelkező hurok-ként felépített. A dolgozatban is ezt a változatát alkalmazom a SISO (*Single-Input and Single-Output*) rendszerhez, ahol a szabályozás célja, hogy a tekercs árama a legrövidebb időn belül elérje az állandósult állapotot. A szolenoidnál a referenciajel az elvárt tekercs-áram, és a rendszer kimenete a végelelem-módszerből számítással kapott tekercsáram. A kimeneti és referencia áramérték különbségéből előálló hibajel a PI-szabályozó bemenete,

a kimenetén pedig a rendszer gerjesztő jelét kapom. Ez a kimeneti gerjesztő jel nem más, mint egy feszültségérték, ami a mágneses rendszer tekercsének gerjesztőfeszültsége lesz. A gerjesztőfeszültség képlete [324,386]

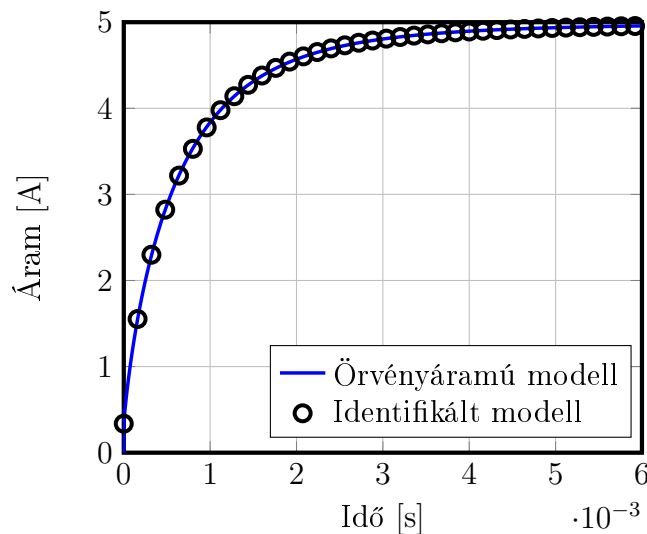
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau, \tag{5.2}$$

ahol K_P és K_I a szabályozó paraméterei, az arányos tag és az integráló tag erősítése.

A szabályozóhoz tartozó erősítési paraméterek (K_P , K_I) közelítésére a törtrendű (*fractional order*) PID-hangoló algoritmust [387] használtam, ami a Matlab / Simulink egy beépített blokkja. A 5.1. táblázat tartalmazza a PI-szabályozóhoz tartozó paramétereit. Ebben a táblázatban a proporcionális és integráló taghoz tartozó hangolt erősítések találhatóak, amiket az analitikus és a végeselem-módszerrel felépített modellhez hangoltam. A mágneses rendszer (5.1) átviteli függvényét alkalmaztam mindkettő numerikus modell hangolásánál. A végeselem-módszerrel felépített statikus modell átviteli függvénye könnyen megadható a kiszámított induktivitás és a feladatban megadott tekercsel-lenállás segítségével. Ez a dinamikus FEM-modellnél már nem lehetséges, mert amíg az induktivitás továbbra is számítható, az ellenállást nem tudom meghatározni. Ezért a legkisebb négyzetek módszerét [388] alkalmaztam a rendszer azonosítására, mert az ellenállás változik az időben az örvényáram hatására. Az azonosításkor törekedtem arra, hogy az átviteli függvény fokszáma minél kisebb legyen. A következő harmadfokú

5.1. TÁBLÁZAT A PI-szabályozó paraméterei.

	K_P	K_I
Analitikus	2,6371	9 040,8411
FEM – Sztatikus	2,6371	5 769,5489
FEM – Örvényáramú	6,9853	17 160,486



5.2. ÁBRA A dinamikus FEM-modell és az $W_{ec}(s)$ azonosított modell ugrásválasza.

átviteli függvény, amely már jól visszaadja a dinamikus modell működését

$$W_{ec}(s) = \frac{0,03368s^3 + 1\,309s^2 + 5,244 \cdot 10^6s + 2,389 \cdot 10^9}{s^3 + 8\,858s^2 + 1,403 \cdot 10^7s + 4,786 \cdot 10^9}. \quad (5.3)$$

Az 5.2. ábra az identifikáció eredményeként kapott átviteli függvény és a dinamikus FEM-modell ugrásválaszának összehasonlítását mutatja. Az identifikálás hibája 1%-on belüli, ezért nem látható eltérés az ábrán a két görbe között.

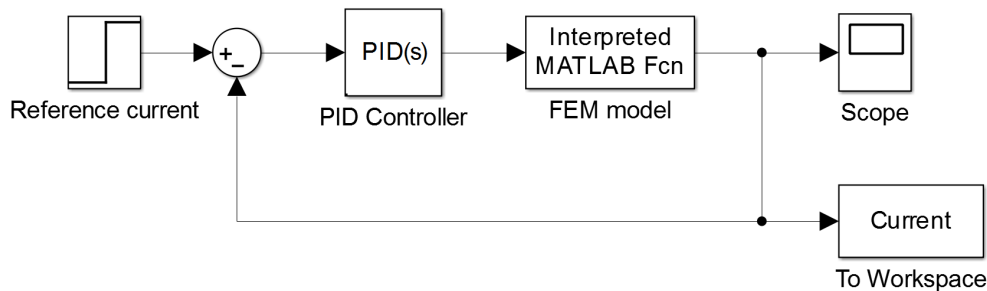
5.2.2. A szabályozott modell

A szabályozási kört `Matlab / Simulink` környezetben valósítottam meg, ahogy az 5.3. ábra mutatja, ahol a PI-szabályozó egy beépített blokk, amit nem csak a szabályozásra, hanem a paraméterek hangolására is használtam. A szabályozónak a kimenete pedig a tartomány dekompozícióval párhuzamosított csatolt végelem-módszeren alapuló modell bemenete.

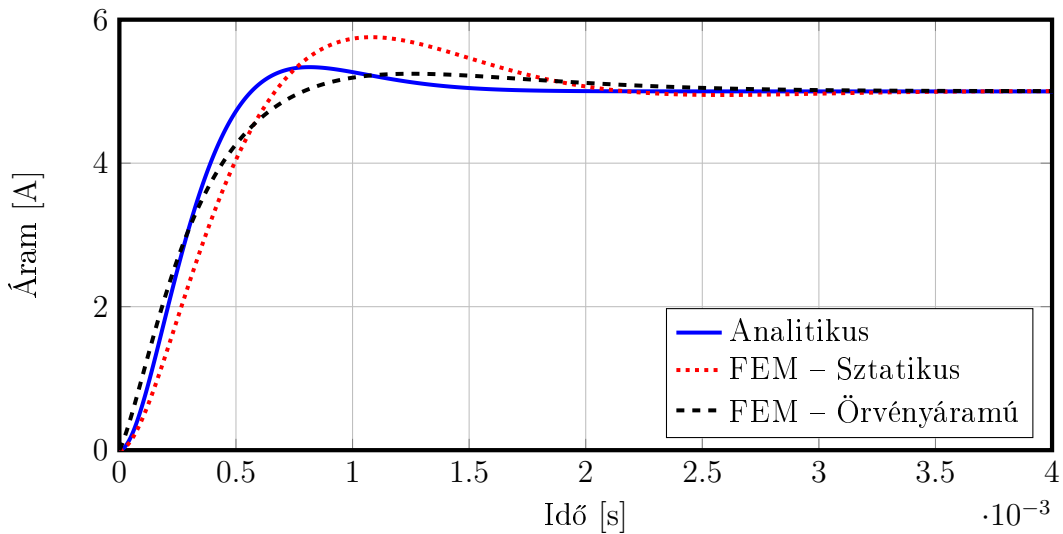
A párhuzamosított numerikus modellt `Matlab` függvényként illesztettem a `Simulink` modellbe. De a blokk nem tartalmazza a végelem-módszer minden lépését. Az anyagtulajdonságok, a háló beolvasása és az egyenletrendszer változatlan részeinek asszembálása, vagyis a statikus lépések és műveletek végrehajtása az első időlépés előtt történik. A szabályozási körben lévő blokkban pedig azok a lépések, műveletek szerepelnek, amelyek ismételt végrehajtása szükséges a megoldáshoz. Ennek oka, hogy a párhuzamosítás mellett ezzel is csökkentsem a futási időt.

A megvalósított szabályozási körnél az elérhető gyorsítás mellett két esetben vizsgáltam annak viselkedését. Az első esetben az arányos-integráló szabályozót az analitikus számításból kapott átviteli függvényhez hangoltam, és így alkalmaztam a numerikus modellek szabályozására. A második eset azt mutatja, hogy mi történik, ha a statikus modellhez hangolt szabályozót használom a sztatikus mágneses esetben, és ugyanígy járunk el az örvényáramú esetben is. Tehát a két eredmény összevetésével látható lesz, miért fontos a szabályozó tervezésénél is a modell pontossága, és miért lehet célszerű igény szerint a numerikus modell alkalmazása az analitikus helyett.

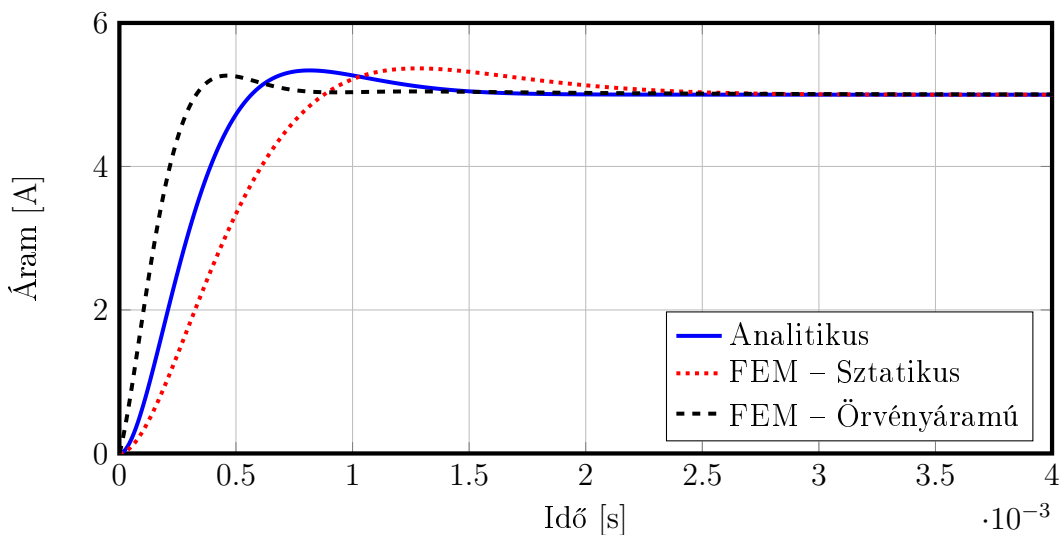
Az 5.4. és az 5.5. ábra a szolenoid tekercsében kialakuló áram időbeli változását mutatja. Az ábrák 4 ms ideig ábrázolják az eredményeket, mert utána az összes időfüggvény eléri az állandósult állapotot. A két ábrán látható sztatikus és örvényáramú modellből kapott eredményekben megfigyelhető különbség alátámasztja azt, hogy az örvényáram mégsem elhanyagolható jelenség a vizsgált feladatnál. Az 5.4. ábra azokat az időfüggvényeket mutatja, amikor az analitikus modellhez tervezett szabályozót alkalmaztam a



5.3. ÁBRA A zárt körbe illesztett numerikus modell blokkdiagramja.



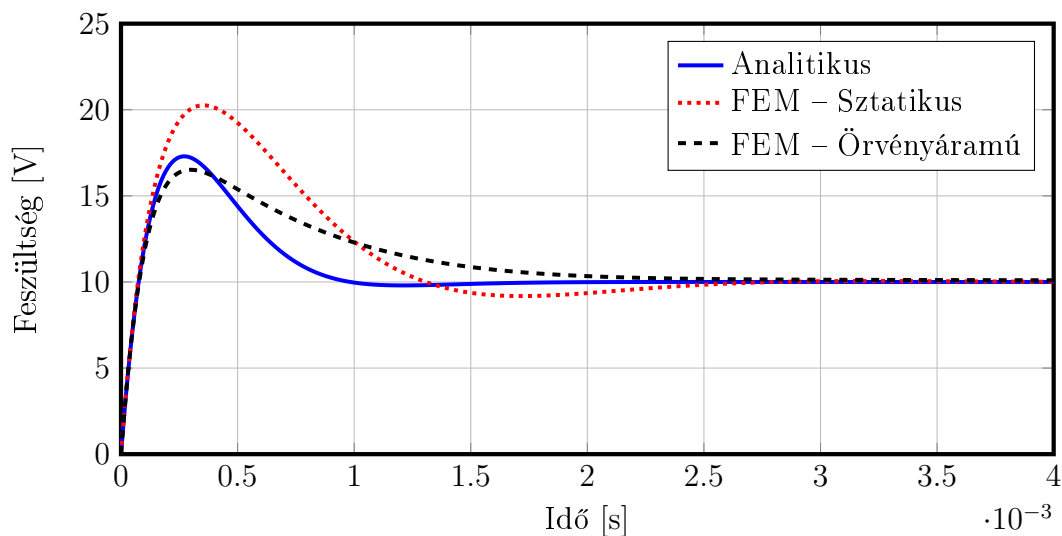
5.4. ÁBRA Az analitikus modell alapján hangolt szabályozóval kapott áram időfüggvények.



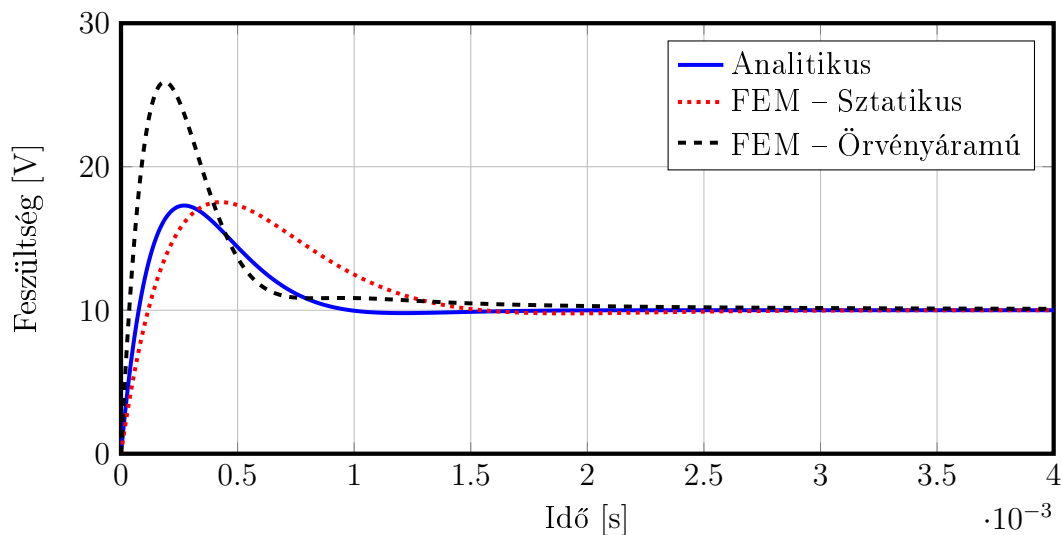
5.5. ÁBRA A szabályozott modellhez hangolt szabályozóval kapott áram időfüggvények.

numerikus modellekhez. Itt jól látszik, hogy a valós vasmagos szolenoidot jobban leíró FEM-modellnél a PI-szabályozó nem tud a kívánt elvárásoknak megfelelően beavatkozni. A sztatikus mágneses feladatnál nő a túllövés, és a beállási idő mindkét esetben hosszabb, mint az analitikusnál. A statikus modellnél az állandósult állapot elérése előtt túllendül azon, és végül alulról közelíti. Ezek a problémák már nem figyelhetőek meg az 5.5. ábrán, ahol a statikus és örvényáramú modellek szabályozójának hangolásához a sztatikus mágneses modellt, és az örvényáramú modellhez identifikált átviteli függvényt alkalmaztam. Ebben az esetben a vizsgált mágneses rendszer tranziensénél már nem figyelhető meg a nagy túllövés, és a beállási idő is jelentősen csökkent. A három időfüggvény közül a második esetben már az örvényáramú FEM-modellt szabályozó körrel sikerült legjobban teljesíteni a gyors beállítás és kis túllövés kritériumot.

Az áram időfüggvények mellett a PI-szabályozó kimenetét is ábrázoltam, ami nem



5.6. ÁBRA Az analitikus modell alapján hangolt szabályozó kimenetének időfüggvényei.



5.7. ÁBRA A szabályozott modellhez hangolt szabályozó kimenetének időfüggvényei.

más, mint a szolenoid gerjesztőfeszültsége. A mágneses rendszer gerjesztőfeszültségének időfüggvényeit az 5.6. és az 5.7. ábrák mutatják. Ez a két ábra is alátámasztja az előzőekben tett megállapításokat.

Ezeknek az ábráknak az összehasonlítása jól szemlélteti, miért fontos a szabályozó tervezéséhez használt modell pontossága. Természetesen az 5.4. ábrán látható, hogy működik a szabályozás a numerikus modellekre is, de nem teljesíti a kritériumokat olyan jól, mint ahogy az 5.5. ábrán lévő eredményeknél. A megfelelő modellhez tervezett szabályozó sokkal jobban teljesíti a szabályozás minőségi paramétereit.

5.2.3. A párhuzamosítással elért gyorsítás

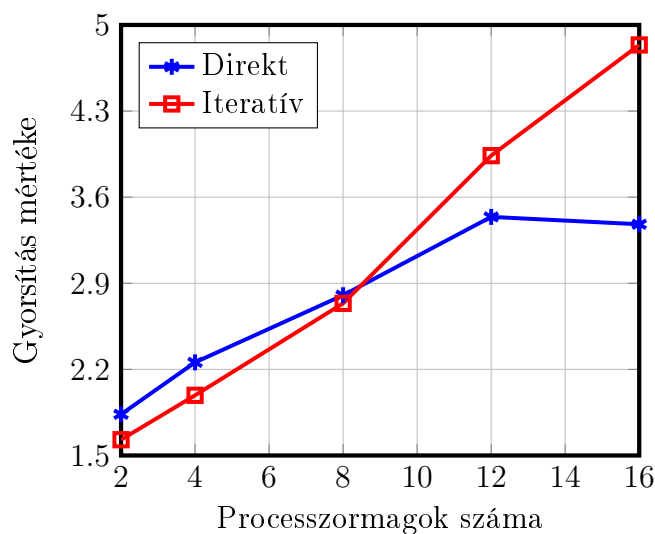
Az előző fejezetben bemutatott eredmények alapján, a feszültségegyenlettel csatolt sztatikus mágneses (lásd 4.9. ábra) és örvényáramú (lásd 4.10. ábra) feladatnál a FETI-

módszer bizonyult hatékonyabbnak. Ezért itt már csak ezt a tartomány dekompozíciós módszert vizsgálom. A feladat diszkretizálása és időbeli felbontása megegyezik az előző fejezetben bemutatottal. A párhuzamos futtatások időeredményeit a szekvenciális végelelem-módszerekből kapott időhöz hasonlítom. A szekvenciális FEM-modellt tartalmazó szabályozási kör szimulációs ideje a statikus és az örvényáramú esetben 3 507,8 és 3 620,05 másodperc. Ebben az esetben a számítás ideje, a teljes szabályozási kör szimulációs idejét jelenti. Azért nem hasonlítom össze az analitikus modell szabályozásának idejével, mert a modellek pontosságában jelentős eltérés van. De természetesen még a párhuzamosított modellel összeállított szabályozási körnek is nagyobb a szimulációs ideje, mint az analitikus modellt tartalmazóé.

A párhuzamosítással kapott időeredményeket az 5.2. és az 5.3. táblázatokban közlöm. Ennél a feladatnál az $N_P = [2, 4, 8, 12, 16]$ eseteket vizsgáltam, mert ebből is már jól látható, a FETI-módszernél a két megoldási eljárás közül melyik a hatékonyabb, és mekkora gyorsítás érhető el a szabályozási kör szimulációjának futásában a párhuzamosítással. Az időeredmények mellett, a könnyebb áttekinthetőség miatt az 5.8. és az

5.2. TÁBLÁZAT A párhuzamosított sztatikus mágneses szolenoid futási ideje.

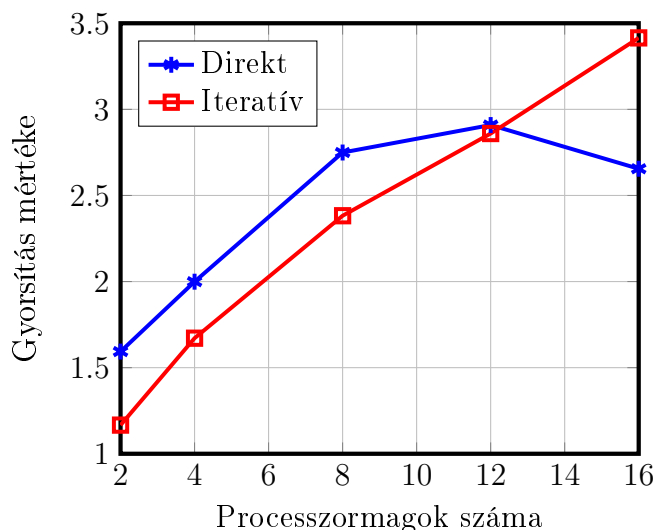
N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]	
		FETI	
		Direkt	PMCG
2	80 866	1 973,10	2 223,55
4	41 437	1 603,92	1 819,91
8	22 585	1 291,50	1 322,66
12	14 843	1 052,43	919,31
16	11 252	1 071,13	748,32



5.8. ÁBRA A sztatikus mágneses feladatnál elért gyorsítás a processzormagok függvényében.

5.3. TÁBLÁZAT A párhuzamosított örvényáramú szolenoid futási ideje.

N_P	N_{DoF}	T_{DDM} [s]	
		FETI	
		Direkt	PMCG
2	80 866	2 271,83	3 103,47
4	41 437	1 810,69	2 166,22
8	22 585	1 316,66	1 519,60
12	14 843	1 244,45	1 265,93
16	11 252	1 363,42	1 060,07



5.9. ÁBRA Az örvényáramú feladatnál elért gyorsítás a processzormagok függvényében.

5.9. ábrákon felrajzoltam a párhuzamosítással elért gyorsítást a processzormagok függvényében. Az eredményekből egyértelműen látható, hogy a direkt megoldó hatékonyabban kezelte a feladatot $N_P \leq 8$ esetében, mint az iteratív megoldó. De ha nő az altartományok száma ($N_P > 8$), a lokális feladat megoldásának komplexitása csökken, de nő a belső peremen lévő ismeretlenek száma, vagyis a duális feladat. Emiatt az iteratív megoldóval értem el nagyobb gyorsítást, mert az jobban kezeli a nagy duális feladatot. A sztatikus mágneses feladatnál 4,83-szoros, amíg az örvényáramú feladatnál 3,41-szeres gyorsítást sikerült elérnem. Minden megoldó eljárásnál van egy processzorszám, aminél telítődik, és utána nő a számítás ideje. Az 5.9. ábrán látható, hogy a direkt megoldónak jelentősen nő a számítási ideje 16 processzormagnál.

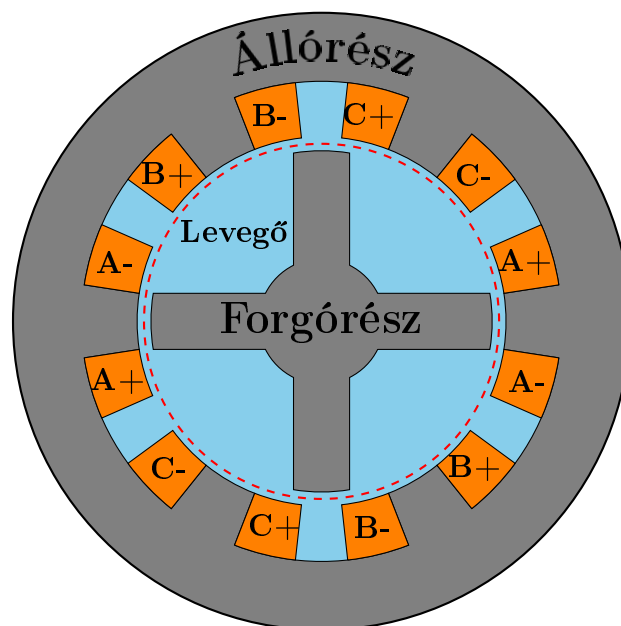
5.3. Mechanikai egyenlettel csatolt modell szabályozása

A különféle villamos motorok pontos szabályozása világszerte aktívan kutatott terület [211, 335, 337, 344, 349, 354]. Nagy erőfeszítéseket tesznek, hogy olyan megoldást

találjanak, ami garantálja, hogy a hajtáslánc ellenálló legyen a külső zavaró hatások ellen, mint a gyors és jelentős terhelésváltozás. Ez ma nagyon aktuális, mert például az elektromos hajtású közúti járműveknél a nagy terhelésváltozások könnyen előfordulhatnak. Ezért ezeknél az alkalmazásoknál nagyon fontos a pontos modell a hajtáslánc együttes tervezésénél. Egy villamos gép állapotterez modelljének felírása szinte lehetetlen egyszerűsítések vagy elhanyagolások nélkül. Identifikációnál prototípusra van szükség, amelyhez jelentős idő és gyártási költségek társulnak. A végeselem-módszer segítségével felépített modell egy jó alternatíva lehet az egyszerűsítések nélküli vagy a mérésmentes modell elkészítéséhez. Illetve, villamos hajtásoknál nagyon jellemző, hogy a meghajtó elektronika és a villamos forgógép két külön rendszerként, egymástól függetlenül készül. Pedig ahhoz, hogy a két rész egy hajtásként hatékonyan együttműködjön, már a tervezési, fejlesztési fázisban is egy rendszerként kellene kezelni, ahogy azt a következőkben bemutatott példánál teszem.

A szabályozásba illesztett, feszültségégyenlettel és mechanikai mozgás egyenletével csatolt feladathoz példaként egy háromfázisú kapcsolt reluktancia motort (SRM - *Switched Reluctance Motor*) [211,389–391] és annak egy konverteres táplálását választottam. A párhuzamosítással kapott eredmények bemutatása előtt megvizsgálom a modell viselkedését árammal és feszültséggel gerjesztett esetben. Az árammal gerjesztett feladattal a modell működésének helyességét igazolom. Valamint ezen keresztül bemutatom, milyen nagy eltérés lesz a szögsebességben attól függően, hogy feszültséggel vagy árammal gerjesztem a modell tekercselését. Ennél az összehasonlításnál a kritérium az, hogy a feszültségkényszerrel működő modellnél az átmeneti jelenséget követően az áramerősség értéke az áramkényszeres modell gerjesztésének megfelelő értékre álljon be. Ezzel az összehasonlítással illusztrálom a gerjesztőtekercsben lejátszódó tranziens jelenségek figyelembevételének fontosságát és hatását a rendszer mechanikai jelenségeire.

Az 5.10. ábrán a választott feladat látható, ami az egyik legegyszerűbb felépítésű kapcsolt reluktancia motor. Ennek a típusnak hat állórészpólusa és négy forgórészpólusa van, emiatt 6/4 SRM a szakirodalomban használt rövidítése. Nincs tekercselés a



5.10. ÁBRA A vizsgált kapcsolt reluktancia motor geometriája [172].

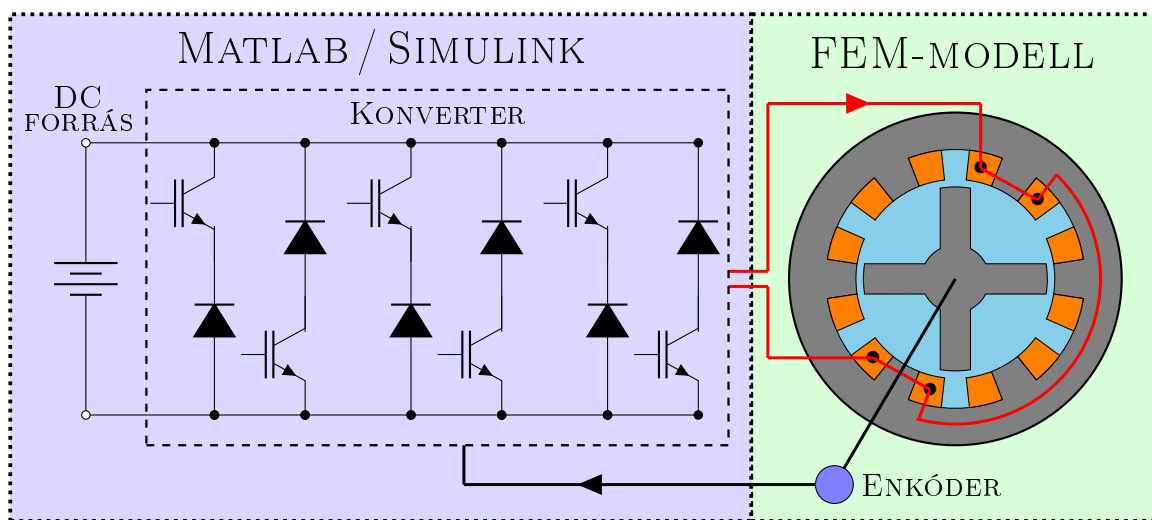
forgórészén, és jól használható nagyfordulatszámú alkalmazásokban. De, ahogy a neve és felépítése – az álló és forgórészen kiálló pólusok vannak – is mutatja, az egyik fő hátránya, hogy a működése során reluktancia nyomatékot hoz létre, ami jelentős zajjal és nyomatéklüktetéssel jár együtt.

5.3.1. Irányítási körbe illesztett modell

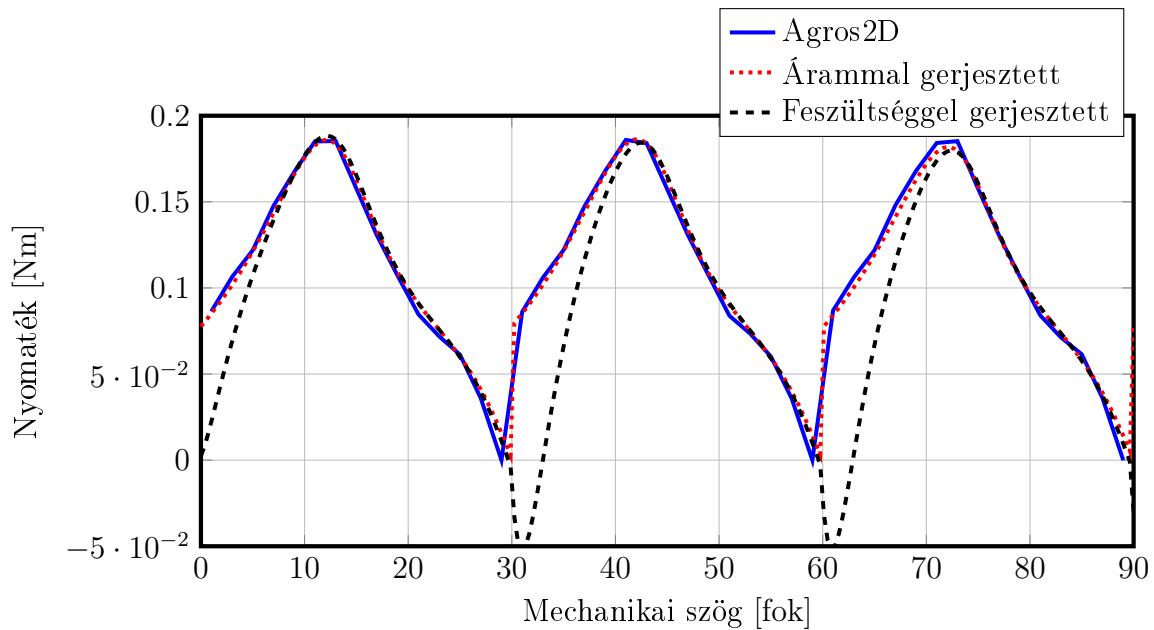
Az irányítási rendszer ennél a feladatnál a szabályozott szakasz végeelem-módszerrel felépített numerikus modelljét és a meghajtáshoz szükséges elektronikát és irányítási algoritmust jelenti, ahogy ezt az 5.11. ábra mutatja. Az SRM irányításához nem használok a szakirodalomból jól ismert módszereket, melyek a fázisáram, a fluxuskapcsolódás vagy a nyomaték felhasználásával befolyásolják a motor viselkedését [211]. A irányítás ennél a feladatnál azt jelenti, hogy a motor forgórészének szöghelyzetét használva kapcsolom ki vagy be a fázisok gerjesztőfeszültségét.

A 5.11. ábrán látható rendszerben a feszültségforrást külön nem modelleztem, az egy előírt állandó feszültségérték. Az egyszerű felépítése miatt elterjedten alkalmazott az aszimmetrikus félhidakból felépülő konverter [211,389,391,392], amelyet én is alkalmazok, mint meghajtó elektronika. Az aszimmetrikus konverternek az egyszerűsége mellett még nagy előnye, hogy így egymástól függetlenül, rugalmasan lehet a fázisok gerjesztését szabályozni. A konverterben szereplő bipoláris tranzisztorokat (IGBT - *Insulated Gate Bipolar Transistor*) és diódákat, mint kétállapotú kapcsolóelemeket (vezet vagy szakadás) modelleztem, és így valósítottam meg a fázisok táplálásához szükséges kétféle működési módot. A kapcsolókból előálló konvertert Simulink-ben valósítottam meg.

A befolyásolt szakaszként alkalmazott numerikus modellnél a mechanikai egyenlet figyelembevételére a legjobbnak talált csúszófelület módszert alkalmazom ennél a feladatnál is. Ebből következik, hogy az elektromágneses nyomaték számítására a Maxwell-féle feszültségtenzor módszert alkalmazom. A példa árammal gerjesztett sztatikus mágneses változata az ingyenesen hozzáférhető Agros2D [172] szoftver egyik mintapéldája, így a pontos geometria méretei ott találhatóak. A feszültséggel gerjesztett esetben a tekercs menetszáma 15, és a tekercs ellenállása 0,4 Ω. Árammal gerjesztésnél a négyszögjel amplitúdója 13,1 A (ez megfelel az eredeti feladatban előírt áramsűrűségnek), a feszültséggel



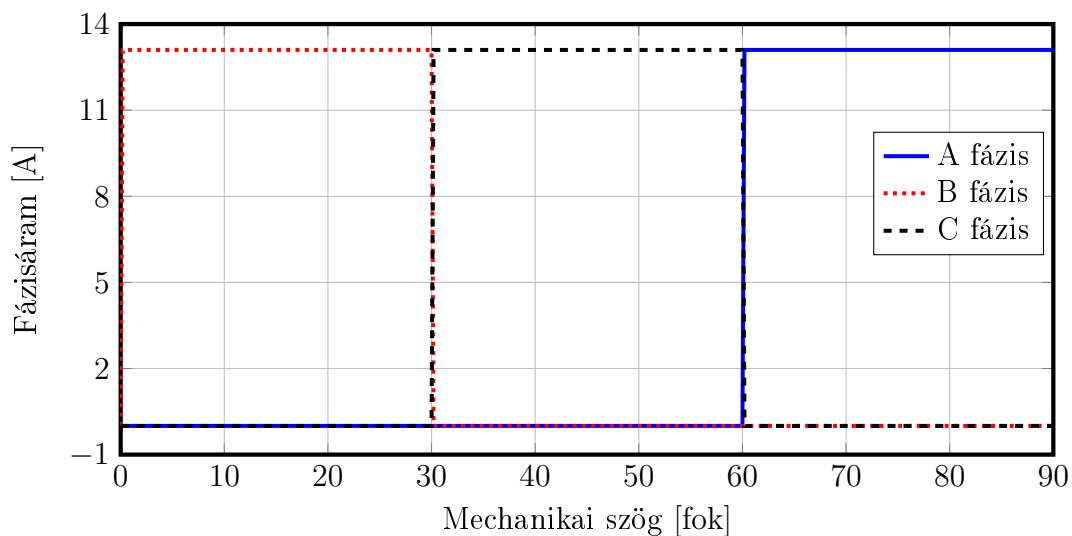
5.11. ÁBRA A kapcsolt reluktancia motor szabályozásának sematikus ábrája.



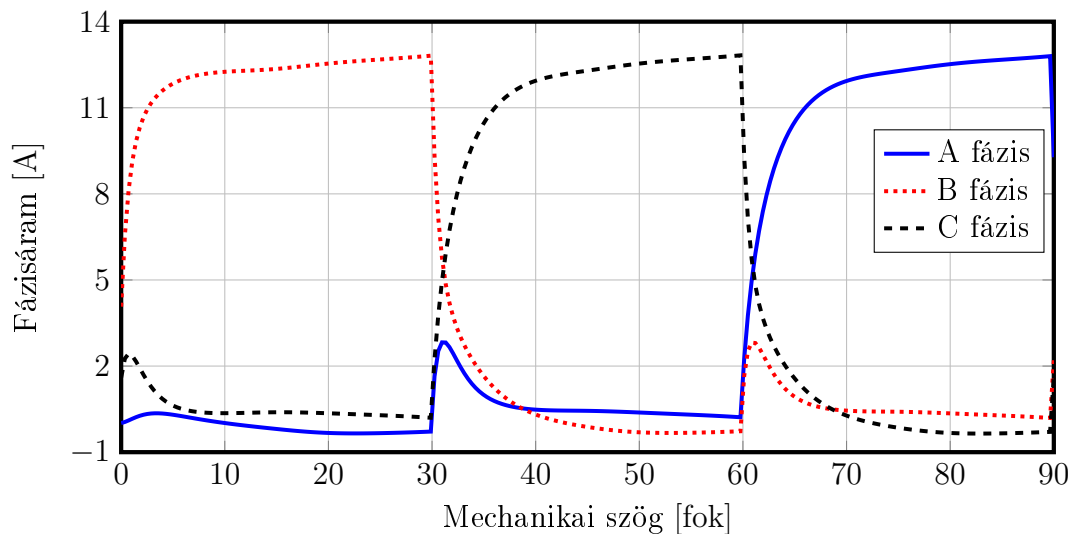
5.12. ÁBRA Az árammal- és feszültséggel gerjesztett modell elektromágneses nyomatéka.

gerjesztésnél pedig 10 V az amplitúdó. A tekercselést szimmetrikusnak veszem, és mivel vékony vezetőkből áll, ezért az örvényáramok hatását elhanyagolom. A motor tengelyének inerciája $0,0054 \text{ kgm}^2$, a viszkózus súrlódás $0,005 \text{ Nms/rad}$, és a tengelyt terhelő nyomaték $0,07 \text{ Nm}$.

Először a szekvenciális numerikus modellt magába foglaló szabályozási körből kapott eredményeket tekintem át. Az 5.12. ábrán a számított elektromágneses nyomatékok a mechanikai szög függvényében láthatóak. Itt egyik esetben sem volt a forgórész mozgását leíró egyenlet csatolva, mert állandó szögsebességgel forgott a forgórész. Emellett az összehasonlítás miatt a párhuzamosított modellel ellentétben, itt az örvényáramokat nem

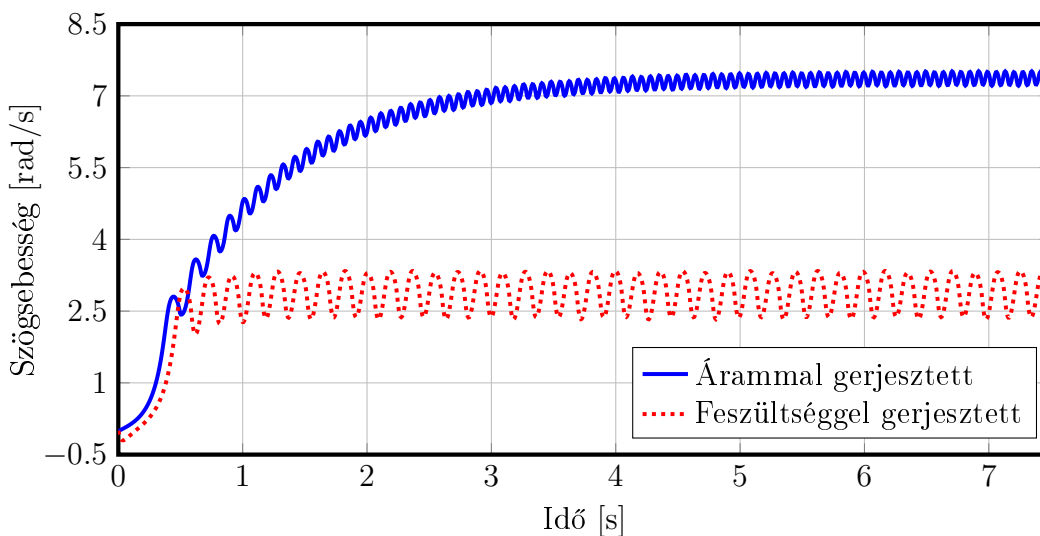


5.13. ÁBRA Az árammal gerjesztett modell fázisáramai.



5.14. ÁBRA A feszültséggel gerjesztett modell fázisáramai.

vettem figyelembe. Az ábrán jól látható, hogy az árammal gerjesztett modellel kapott eredmény jó közelítéssel megegyezik az Agros2D szoftverrel kapott eredménnyel. De az árammal és a feszültséggel gerjesztett eredmények között már jelentős eltérés mutatkozik. Ennek oka, hogy a tekercsek öninduktivitását és kölcsönös induktivitását elhanyagoltuk az árammal hajtott modell esetében. Az 5.13. és az 5.14. ábra is alátámasztja ezt az állítást. Az 5.13. ábra a gerjesztőáram időfüggvényét mutatja. Árammal gerjesztésnél a bekapcsolás pillanatától kezdve a tekercsben folyó áram a gerjesztésként előírt áramértéknek felel meg. Ez csak egy állandósult állapot vizsgálatánál helyes, bekapcsolásnál nem. Egy valós induktivitással rendelkező rendszerben – mint a tekercs – csak végtelen nagy feszültség mellett történhet ilyen. Én annyival javítottam a gerjesztőáram jelalakján, hogy nem rögtön, hanem adott meredekséggel éri el az áram a maximumot. De így sem a valódi áramjelalakkal gerjesztünk, ami az 5.14. ábrán látható.



5.15. ÁBRA A motor szögsebességének változása az idő függvényében.

A következő ábra (5.15. ábra) a kapcsolt reluktancia motor indítását mutatja, a 0,07 Nm terheléssel a forgórészen. Ennél az ábránál is jelentős eltérés mutatkozik az kétféle gerjesztés között. Az árammal gerjesztett modellnél a szögsebesség állandósult állapota közel háromszor nagyobb, mint a feszültséggel gerjesztett esetben, amellet hogy az áramjelalakok (5.13. és 5.14. ábrák) amplitúdója közel azonos és nincs ilyen nagy eltérés. A pozíció alapján befolyásoltam a motor gerjesztését, és amikor a megállási kritérium egy adott szögelfordulás volt, az árammal gerjesztett modell közel háromszor gyorsabban elérte a kívánt pozíciót. Emellett a feszültséggel gerjesztett modellnél jelentősen nőtt a motor nyomatékának lüktetése. Az itt kapott eredmények is összecsengenek a szolenoidnál kapottakkal, hogy jelentős befolyással bír a szabályozási kör eredményében a modell pontossága.

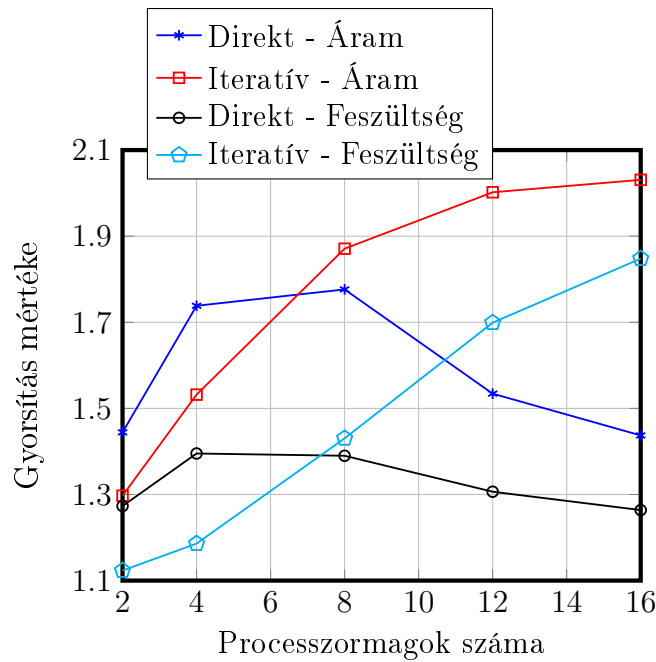
5.3.2. A párhuzamosítással elért gyorsítás

A feladat diszkretizálásának particionálásához is az általam kidolgozott módszert alkalmaztam, vagyis az állórészt és a mozgó részt külön bontottam fel. A 4. fejezetben, az aszinkron motornál kapott eredményekből jól látszik, hogy a lebegő altartomány miatt a dolgozatban alkalmazott FETI-módszer nem kezeli megfelelően a lebegő altartományokat. Emiatt a szabályozásba illesztett numerikus modell párhuzamosításánál csak a Schur—komplemens-módszer direkt és prekondicionált konjugált gradiens megoldóját vizsgálok. A kapcsolt reluktancia motort 94 389 elsőfokú háromszögelemre bontottam fel, ami 46 048 ismeretlent jelent. A párhuzamosításnál nem csak a feszültséggel gerjesztett esetet vizsgáltam, hanem mellette az árammal gerjesztettet is. Itt is a teljes szabályozási kör idejét vizsgáltam. A szabályozás leállási kritériuma a 7,5 másodperc idő volt, és az időlépés 1 ms, ami 7 500 időlépést jelent. Az árammal gerjesztett modellnél 1 033,99 másodperc, a feszültséggel gerjesztetténel 1096,25 másodperc volt a szekvenciális modellt tartalmazó Simulink modell futási ideje.

Az 5.4. táblázatban foglaltam össze a párhuzamos modellt tartalmazó szabályozási kör futási idejét. Az árammal gerjesztett párhuzamos modellnél a szekvenciális árammal gerjesztett modell idejéhez hasonlítottam a futási időket, és ugyanígy jártam el a

5.4. TÁBLÁZAT A párhuzamosított SRM modellel összeállított szabályozási kör futási ideje.

N_P	N_{DoF}	N_{Sta}	N_{Rot}	T_{DDM} [s]			
				Schur—komplemens-módszer			
				Áram		Feszültség	
				Direkt	PCG	Direkt	PCG
2	22 524	23 621	21 427	715,85	797,09	861,01	920,45
4	11 095	11 991	10 828	594,81	674,93	785,72	871,84
8	5 756	6 043	5 469	582,09	552,64	788,69	722,84
12	3 855	4 064	3 645	673,94	516,48	839,11	608,56
16	2 937	3 084	2 789	719,45	509,13	867,40	559,54



5.16. ÁBRA A kapcsolt reluktancia motornál elért gyorsítás árammal- és feszültséggel gerjesztésnél.

feszültséggel gerjesztett modellnél is. A táblázatban közlöm az állórészen (N_{Sta}) és a forgórészen (N_{Rot}) lévő ismeretlenek számát is. Itt nem vizsgáltam az egyenlőtlen terhelésselosztás hatását, mert az előző fejezetben kapott eredmények alapján nem befolyásolja nagy mértékben a megoldás idejét a tartományok közötti elemszámeltérés. A táblázatban szereplő időket tekintve látszik, hogy a két direkt megoldóval kapott eredménynél egy adott processzormagszám után, már nem csökken tovább a futási ideje. Az árammal gerjesztett modellnél ez $N_P = 8$, a feszültséggel gerjesztett modellnél már $N_P = 4$ után bekövetkezik a telítődés. Itt is ábrázoltam az 5.16. ábrán az elért gyorsításokat az altartományok számának függvényében, ami a telítődést is nagyon szemléletesen mutatja. A szakirodalommal összezseng az itt kapott eredmény, hogy az iteratív megoldó algoritmusok jobban kezelik az egyre nagyobb redukált feladatot. A görbék tekintve egyértelmű, hogy nagy altartomány számnál az iteratív megoldó algoritmus kezeli jobban a felbontott feladatot. A feladat gyorsítását tekintve az árammal gerjesztett feladatnál kétszeres, a feszültséggel gerjesztett modellel felépített szabályozási körnél 1,85-szörös gyorsítást sikerült elérnem.

5.4. Új tudományos eredmények

A feszültségegyenlettel, illetve a feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt végeselem-módszeren alapuló numerikus modellt, mint szakaszt a szabályozási körbe illesztettem. A szakasz megnövekedett számítási idejét a tartomány dekompozícióval történő párhuzamosítással csökkentettem. A szimulációval kapott eredmények összevetésével igazoltam, hogy az erre alkalmassá tett végeselem-módszeren alapuló modell megfelelően alkalmazható szakaszként az irányítási kör tervezése során. A két vizsgált feladaton keresztül demonstráltam, hogy a figyelembe vett hatások és a modell pontossága befolyással bír a

szabályozó tervezésénél. A tartomány dekompozícióval párhuzamosított modellel összeálló szabályozási kör vizsgálatával igazoltam, hogy a tartomány dekompozíciós módszerek eredményesen alkalmazhatóak a szabályozásba illesztett modellenél a futási idő csökkentésére [211, 361, 362, 390, 391].

- (a) Megvalósítottam a végeselem-módszeren alapuló csatolt numerikus modell irányítási körbe illesztését `Matlab / Simulink` szimulációs környezetben. Igazoltam, hogy a numerikus modell hatékonyan alkalmazható a szabályozási körben, mint szabályozott szakasz, amely alkalmas lehet a koncentrált paraméterű modell kiváltására. Ezzel jelentős költség és idő takarítható meg a szabályozó tervezés során, amellett, hogy a valóságot nagy pontossággal leírni képes modellt alkalmazok a szabályozó tervezésekor.
- (b) A dolgozatban vizsgált példákon keresztül bemutattam, hogy a modell pontossága nagy befolyással bír a szabályozó tervezésénél és jelentős eltérést is eredményezhet a kimeneti változóban. Ennek következtében a valós rendszer irányításánál a tervezett szabályozó nem biztos, hogy teljesíti a szabályozási körrel szemben támasztott minőségi paramétereit.
- (c) A numerikus modell alkalmazása révén a szabályozott szakasz szabadsági fokainak száma nagyságrendekkel megnőtt, ami miatt a szimuláció futási ideje is hosszabb lett. A megnövekedett számítási időt az elektrodinamikai modell tartomány dekompozíciós párhuzamosításával hatékonyan csökkentettem, ezzel mérsékelve a csatolt, végeselem-módszeren alapuló modell szabályozási körbe illesztésénél jelentkező legnagyobb hátrányt, és igazoltam, hogy a tartomány dekompozíciós módszerek alkalmasak a futási idő csökkentésére.

6. FEJEZET

Új tudományos eredmények összefoglalása

1. tézis

Realizáltam egy olyan végeelem-módszeren alapuló csatolt elektrodinamikai modellt, aminek a bemenete alkalmas tetszőleges elektronikával történő összekapcsolásra, és amely-nél kimenetként már rendelkezésre állnak a mechanikai mozgás jellemzői (M_{em}, Θ, ω). A mechanikai mozgás figyelembevételére implementált technikákhoz jól alkalmazható nyomatékszámítási módszerre is javaslatot tettem. Az egyréteges mozgó sáv módszerhez kidolgoztam egy új eljárást, ami a szakirodalomból ismert megvalósításoknál kisebb számítási igénnyel jár, és a sávban lévő elemek torzulását is figyelembe veszi. A kidolgozott módszer kétdimenziós szimulációkban történő alkalmazhatóságát egy nemzetközi tesztfeladaton és egy kalickás forgórészű aszinkron motor modelljén keresztül igazoltam [95, 155, 164, 187, 188, 364, 377–381].

- (a) Realizáltam egy Matlab-szkript és C-programozási nyelven írt, a végeelem-módszert alkalmazó függvénykönyvtárat olyan módon, hogy a feszültségegyenlet közvetlen csatolásával és a mechanikai egyenlet figyelembevételével együtt alkalmas a tartomány dekompozíción alapuló párhuzamosításra. Az elkészült függvénykönyvtár működését három példán keresztül igazoltam. A vasmagos szolenoid numerikus szimulációjával kapott eredményekkel demonstráltam a modell pontosságának jelentőségét.
- (b) A mozgás figyelembevételére használt egyréteges mozgó sáv módszerhez kidolgoztam egy, a szakirodalomból ismert variánsoknál kisebb számítási igénnyel járó módszert kétdimenziós szimulációkhoz. A módszer figyelembe veszi az elemek mozgása során bekövetkező deformációját, és elegendő csak egy elem torzulását vizsgálni, miáltal csökken a műveletigény.
- (c) Egy nemzetközileg kiírt tesztfeladaton keresztül igazoltam, hogy az általam kidolgozott módszer alkalmas a forgórész mozgásának figyelembevételére. A mechanikai egyenlet csatolását egy aszinkron motor kétdimenziós modelljén keresztül demonstráltam. A szimulációval kapott eredmények jól mutatják, hogy az általam kidolgozott módszer alkalmas a mechanikai tranziensek vizsgálatára is. A kidolgozott módszerrel, valamint a csúszófelület módszerrel kapott eredmények jó egyezést mutatnak, és összeesengenek a szakirodalomban fellelhető eredményekkel is.
- (d) Megvizsgáltam a mechanikai mozgást megvalósító technikáknál a Maxwell-féle feszültségtenzor módszer és az Arkkio-módszer pontosságát. A kapott eredmények

alapján javaslatot tettem az egyes módszerekhez hatékonyan alkalmazható és könnyen illeszthető nyomatékszámítási eljárásra, vagyis a mozgósáv módszernél az Arkkio-módszerrel, a csúszófelület módszernél a Maxwell-féle feszültségtenzor módszerrel érhető el a pontosabb eredmény.

2. tézis

A szimuláció gyorsításának érdekében realizáltam a Schur—komplemens-módszert és a FETI-módszert. Megvizsgáltam a két módszer alkalmazhatóságát strukturálatlan felbontással rendelkező alacsony frekvenciás elektrodinamikai problémák megoldásának előállítására és elemzése során. A módszereknél vizsgáltam a direkt és az iteratív megoldó algoritmusok hatékonyságát az altartományok és az alkalmazott processzormagok számának függvényében. A témához kapcsolódó szakirodalom alapján én javasoltam és alkalmaztam először az eredetileg a FETI-módszer iteratív algoritmusához prekondicionálónak használt eljárást az elektromágneses térszámításban direkt megoldó rutinként. Megvizsgáltam a realizált tartomány dekompozíciós módszerek alkalmazhatóságát csatolt numerikus feladatokra és javaslatot tettem a vizsgált tartomány felbontására, a minél hatékonyabb párhuzamosítás érdekében [152, 202, 203, 291–294, 315–317, 382].

- (a) Megvizsgáltam a Schur—komplemens-módszert és a FETI-módszert egyaránt direkt és iteratív megoldó algoritmusokkal elektrosztatikus, sztatikus mágneses és örvényáramú feladatokra, fókuszálva arra, hogy melyik tartomány dekompozíciós módszer alkalmasabb az elektromágneses térszámításban felmerülő, két dimenzióban vizsgálható problémák megoldására. A kapott eredmények alapján a FETI-módszer bizonyult a csatolástól mentes feladatok esetében a hatékonyabb megoldó technikának. Csatolt szimulációk esetében, a feszültségegyenlettel csatolt feladatnál a FETI-módszer, a mechanikai mozgást tartalmazó feladat esetében a Schur—komplemens-módszer bizonyult hatékonyabbnak a kapott eredmények alapján.
- (b) Demonstráltam a dolgozatban megvizsgált példákon keresztül, hogy a FETI-módszernél az iteratív megoldó algoritmusához prekondicionálónak javasolt módszer alkalmas technika a redukált feladat megoldásához, és képes kezelni a lebegő altartományt. A vizsgált időben állandó kis méretű elektrodinamikai feladatoknál, melyeknél nincs lebegő altartomány a leghatékonyabb megoldó eljárásnak bizonyult az alkalmazott algoritmusok között. A javasolt módszer a csatolt feladatoknál is alkalmazható megoldó eljárásnak bizonyult a kapott eredmények alapján.
- (c) Megvalósítottam a feszültségegyenlettel és a mechanikai tranziens egyenlettel csatolt numerikus modell tartomány dekompozícióval történő párhuzamosítását, amellyel a szimuláció számítási idejét lecsökkentettem. A feszültségegyenlettel csatolt feladatnál olyan tartományfelbontási módszert javasoltam, melynél a feszültségegyenlet a felbontást követően is helyes eredményre vezet, és a gyorsítás hatékonysága se csökken jelentősen. A mechanikai mozgást tartalmazó párhuzamosított feladatnál javaslatot tettem a mozgás gazdaságos figyelembevételére és a vizsgált tartomány megfelelő felbontására. Csatolt feladatok párhuzamosításából kapott eredményeken keresztül bemutattam az általam javasolt módszerek alkalmazhatóságát.

3. tézis

A feszültségegyenlettel, illetve a feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt végelem-módszeren alapuló numerikus modellt, mint szakaszt a szabályozási körbe illesztettem. A szakasz megnövekedett számítási idejét a tartomány dekompozícióval történő párhuzamosítással csökkentettem. A szimulációval kapott eredmények összevetésével igazoltam, hogy az erre alkalmassá tett végelem-módszeren alapuló modell megfelelően alkalmazható szakaszként az irányítási kör tervezése során. A két vizsgált feladaton keresztül demonstráltam, hogy a figyelembe vett hatások és a modell pontossága befolyással bír a szabályozó tervezésénél. A tartomány dekompozícióval párhuzamosított modellel összeállító szabályozási kör vizsgálatával igazoltam, hogy a tartomány dekompozíciós módszerek eredményesen alkalmazhatóak a szabályozásba illesztett modellenél a futási idő csökkentésére [211, 361, 362, 390, 391].

- (a) Megvalósítottam a végelem-módszeren alapuló csatolt numerikus modell irányítási körbe illesztését `Matlab / Simulink` szimulációs környezetben. Igazoltam, hogy a numerikus modell hatékonyan alkalmazható a szabályozási körben, mint szabályozott szakasz, amely alkalmas lehet a koncentrált paraméterű modell kiváltására. Ezzel jelentős költség és idő takarítható meg a szabályozó tervezés során, amellet, hogy a valóságot nagy pontossággal leírni képes modellt alkalmazok a szabályozó tervezésekor.
- (b) A dolgozatban vizsgált példákon keresztül bemutattam, hogy a modell pontossága nagy befolyással bír a szabályozó tervezésénél és jelentős eltérést is eredményezhet a kimeneti változóban. Ennek következtében a valós rendszer irányításánál a tervezett szabályozó nem biztos, hogy teljesíti a szabályozási körrel szemben támasztott minőségi paramétereket.
- (c) A numerikus modell alkalmazása révén a szabályozott szakasz szabadsági fokainak száma nagyságrendekkel megnőtt, ami miatt a szimuláció futási ideje is hosszabb lett. A megnövekedett számítási időt az elektrodinamikai modell tartomány dekompozíciós párhuzamosításával hatékonyan csökkentettem, ezzel mérsékelve a csatolt, végelem-módszeren alapuló modell szabályozási körbe illesztésénél jelentkező legnagyobb hátrányt, és igazoltam, hogy a tartomány dekompozíciós módszerek alkalmasak a futási idő csökkentésére.

7. FEJEZET

Konklúzió, jövőbeli tervek

A disszertációm fő témája a csatolt végeelem-módszerrel felépített elektromechanikai modell számítási idejének redukálása párhuzamosítással és szabályozási körbe illesztése. A csatolással a feszültséggel való gerjesztést és a rendszer merev test mozgását valósítottam meg. A végeelem-módszerrel felépített modell szabadsági fokainak száma miatt megnő a szimuláció futási ideje, amit a modell párhuzamosításával csökkentettem. A párhuzamosításhoz a gépészeti szimulációban elterjedten alkalmazott tartomány dekompozíciót, azon belül is a Schur-komplement- és a FETI-módszert alkalmaztam. Végül az elkészített csatolástól mentes és csatolt szekvenciális és párhuzamosan futtatható modelleket szabályozási körbe illesztettem.

A dolgozatomban a feszültségegyenletet közvetlen, vagyis erős csatolással vettem figyelembe, mert ez a technika robusztus, és a tekercs egyenletében szereplő induktivitás értékét a végeelem-módszerből nyeri. A mechanikai tranzienszt leíró egyenletnél a két legelterjedtebben alkalmazott technikát, a csúszófelület és a mozgó sáv módszert implementáltam. A mozgó sáv módszerhez kidolgoztam egy kis számításigényű eljárást, ami megfelelően figyelembe veszi az alkalmazott háromszögelemek torzulását és nagyon könnyen implementálható. A kidolgozott módszer alkalmazhatóságát példákon keresztül demonstráltam. Vizsgáltam a csúszó felület és mozgó sáv módszerek pontosságát a nyomaték számításban, amihez a Maxwell-féle feszültségtenzor módszert és az Arkkio-módszert alkalmaztam. Majd a kapott eredmények alapján a mozgás figyelembevételére alkalmazott technikákhoz nyomaték számítási módot javasoltam, vagyis a mozgósáv módszernél az Arkkio-módszerrel, a csúszófelület módszernél a Maxwell-féle feszültségtenzor módszerrel érhető el a pontosabb eredmény.

A tartomány dekompozíció széles körben alkalmazott a mechanikai szimulációkban, de az elektromágneses térszámításban csak ritkán lehet vele találkozni. Ezért fontosnak tartottam a két megvalósított módszer behatóbb analizisét strukturálatlan felbontással rendelkező, az elektromágneses térszámításban előforduló problémákra, direkt és iteratív megoldó algoritmussal egyaránt. A FETI-módszernél, egy a szakirodalomban prekondicionálónak használt módszert direkt megoldó eljárásnak javasoltam, amit én alkalmaztam először az elektromágneses térszámításban. A feszültségegyenlettel csatolt feladat tartomány dekompozíciós párhuzamosításához megoldási módszert javasoltam, ami a feszültségegyenlet helyes megoldásához vezet, ha a feladaton belül a tekercs tartományát is több részre daraboljuk. A mechanikai mozgással csatolt párhuzamosított feladathoz felbontási módszert javasoltam, aminél nem lesz jelentős további számítási igény a mozgórész elmozdulása következtében. A javasolt módszerek működését és alkalmazhatóságát példákon keresztül demonstráltam. A kapott eredmények alapján igazoltam, hogy a direkt megoldási módszernek javasolt eljárás nem csak a csatolástól mentes, hanem a csatolt feladatoknál is alkalmazható. Továbbá az eredmények alapján a FETI-módszer

bizonyult a csatolástól mentes feladatok esetében a hatékonyabb megoldó technikának. Csatolt szimulációk esetében, a feszültségegyenlettel csatolt feladatnál a FETI-módszer, a mechanikai mozgást tartalmazó feladat esetében a Schur—komplemens-módszer bizonyult hatékonyabbnak a kapott eredmények alapján.

Végül, a már megvalósított csatolt és párhuzamosított numerikus modell szabályozásba illesztésével foglalkoztam. A Matlab / Simulink programcsomagban valósítottam meg a szabályozási kör és a numerikus modell összekapcsolását. Két példát vizsgáltam, a feszültségegyenlettel csatolt és a feszültség- és mechanikai egyenlettel csatolt numerikus modell szabályozásba illesztését. Az első esetben egy proporcionális—integráló szabályozást, a másodikonál egy pozíciószabályozást valósítottam meg. Mindkét esetben vizsgáltam a modell pontosságának hatását a szabályozó kimenetére, és az eredmények azt mutatják, hogy nagy jelentősége van a szabályozó tervezésnél és a kimeneti eredményeknél. Ezt követően, az előző eredményekre támaszkodva, megvizsgáltam mekkora gyorsítás érhető el a szabályozási kör futási idejénél, ha szabályozott szakasznak a tartomány dekompozícióval párhuzamosított modellt alkalmazom. A megoldott példákkal igazoltam, hogy a tartomány dekompozícióval csökkenthető a számítás ideje, és megfelelő kimenettel és bemenettel rendelkező modell könnyen összekapcsolható tetszőleges szabályozási rendszerrel, ami magában foglalja a meghajtó elektronikát.

Legvégül a disszertációmban levezetett és bemutatott csatolási technikákkal célozom elősegíteni a kereskedelmi szoftverek révén nap mint nap használt módszerek elméleti hátterének megismerését a kutató- és fejlesztőmérnökök számára. Ezzel is ösztönözve őket a technikák fejlesztésére vagy újak kidolgozására. Valamint a tartomány dekompozíciós módszerek bemutatásával, és a két függelékben szereplő iskolapéldával sikerül elérnem ezeknek a technikáknak a szélesebb körű alkalmazását az elektromágneses tér-számításban.

— * —

A doktori értekezésben vizsgált problémák és módszerek nagyon sok további kérdést és kutatási lehetőséget vetnek fel. A csatolt feladatoknál a feszültségkényszer figyelembevételére az erős csatolást alkalmaztam, de célszerűnek tartom megvizsgálni, és összehasonlítani a gyenge csatolást is, aminek köszönhetően rugalmasabban módosítható a feszültségegyenlet. A mechanikai mozgásnál bemutatott módszerek háromdimenziós példákon való vizsgálata és fejlesztése, amiknél még napjainkban is komoly számítási igénnyel jár a mozgás figyelembevétele. A megvalósított tartomány dekompozíciós módszereket szintén szeretném kiterjeszteni háromdimenziós feladatokra, ahol már nem csak a megoldás gyorsítása, hanem a túl nagy feladat kezelhetősége is cél. A dolgozatban a klasszikus FETI-módszert alkalmaztam, de a jövőben helyette a FETI—DP-módszert (FETI—Dual-Primal) [393,394] szeretném alkalmazni, amely módszer ötvözi a FETI- és a Schur—komplemens-módszer előnyeit, ezzel reményeim szerint egy a Schur—komplemens-módszernél hatékonyabb megoldót kapok a mechanikai mozgást is tartalmazó feladatokhoz. A szabályozási körnél pedig célozom létrehozni egy olyan SIL (*Software In The Loop*) szimulációs környezetet, a megfelelő interfészekkel, ahol egyszerűen összekapcsolható a teljesítményelektronika, a szabályozási algoritmus és az elektromechanikai energiaátalakító numerikus modellje, valamint ezek könnyen és gyorsan cserélhetőek.

A. FÜGGELÉK

A vékony vezető erős csatolása

Ebben a függelékben a vékony (sodrott) vezetősálakból álló tekercs feszültségegyenletének levezetését ismertetem.

A (2.5) összefüggésből kell kiindulni a feszültségegyenlet csatolásához. Ebben az összefüggésben az szerepel, hogy tekercs esetében \vec{J}_0 áramsűrűség van. De a feszültséggel gerjesztés esetén a tekercselés is örvényáramú tartománynak számít, hiszen elektromos szempontból vezető anyagról van szó, mivel a σ vezetőképessége nagy. Tehát a (2.17) egyenletet behelyettesítve a (2.5) egyenlet örvényáramú tartományra vonatkozó összefüggésébe a következőt kapjuk:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \right). \quad (\text{A.1})$$

A következő lépésként a (2.1) gerjesztési törvény mindkét oldalának divergenciáját véve a

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{A.2})$$

egyenlőséghez jutunk, mely a kétszeres vektorderiváltak azonosságából következik, ahogy a mágneses vektorpotenciál esetében már bemutattam. Azonban a fenti összefüggés csak időben változatlan töltés esetén divergenciamentes, vagyis ez csak olyan zárt áramkör esetében lesz igaz, mint például a villamos beavatkozók tekercselése.

Az (A.1) összefüggést behelyettesítve az (A.2) egyenlőségbe, és kihasználva a (2.12) egyenletet, vagyis, hogy az \vec{A} mágneses vektorpotenciált állandónak vesszük a z irányban, az elektromos skalárpotenciálra a következő összefüggést kapjuk:

$$\nabla \cdot \nabla V = 0. \quad (\text{A.3})$$

Tetszőleges skalárpotenciál definiálható az előbbi összefüggéshez, amely kielégíti azt. Ilyen a következő polinom

$$V = D_1 z + D_0, \quad (\text{A.4})$$

amelynek a kétszeres térbeli deriváltja ténylegesen zérus lesz, ahol D_1 és D_0 konstansok.

A vékony vezetőben indukálódó $u_{\text{vez}} = u_{\text{vez}}(t)$ feszültség, a (2.16) összefüggés alapján felírható, és felhasználva az (A.4) skalárpotenciálra felírt összefüggést

$$u_{\text{vez}} = \int_0^l -\nabla V \, dl = -D_1 l \quad (\text{A.5})$$

végeredményt kapjuk, ahol l a vezető hossza a z irányba. A vékony vezetőben lévő áramot megkapjuk, ha a vezeték teljes keresztmetszetére, A_{vez} -re integráljuk az (A.1) egyenletet. Valamint felhasználva, hogy $\nabla V = D_1 \vec{e}_z$, és az (A.5) alapján $D_1 = -u_{\text{vez}}/l$, a tekercs $i_{\text{vez}} = i_{\text{vez}}(t)$ árama

$$i_{\text{vez}} = \int_{A_{\text{vez}}} \vec{J} \cdot d\vec{A}_{\text{vez}} = - \int_{A_{\text{vez}}} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{vez}} + \int_{A_{\text{vez}}} \sigma \frac{u_{\text{vez}}}{l} \vec{e}_z \cdot d\vec{A}_{\text{vez}}. \quad (\text{A.6})$$

Az (A.6) összefüggés jobb oldali második tagjához bevezetjük a vezeték egyenáramú ellenállását

$$R_{\text{vez}} = \frac{l}{\sigma A_{\text{vez}}}, \quad (\text{A.7})$$

melyet behelyettesítve (A.6)-ba és átrendezve megkapjuk a vezeték feszültségegyenletét

$$u_{\text{vez}} = R_{\text{vez}} i_{\text{vez}} + R_{\text{vez}} \int_{A_{\text{vez}}} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{vez}}, \quad (\text{A.8})$$

ahol a jobb oldali első tag a vezeték rezisztenciáján létrejövő feszültségesés, a második tag pedig az örvényáram okozta feszültségesés.

A vezetékhez tartozó parciális differenciálegyenlethez pedig az (A.6) összefüggést kell behelyettesíteni a (2.18) egyenletbe, mivel abból indultunk ki, hogy a tekercselés örvényáramú tartomány, azaz

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \frac{u_{\text{vez}}}{l} \vec{e}_z = \vec{0}. \quad (\text{A.9})$$

Az így kapott egyenletbe behelyettesítve a vezeték feszültségegyenletét a vezetékre vonatkozó egyenlet a következő lesz:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{i_{\text{tek}}}{A_{\text{vez}}} \vec{e}_z - \frac{1}{A_{\text{vez}}} \int_{A_{\text{vez}}} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{vez}} = \vec{0}, \quad (\text{A.10})$$

ahol az i_{vez} áramerősséget átírtam i_{tek} áramerősségre, mivel a vezetők soros kapcsolásáról van szó, így a két mennyiség azonos. A vékony vezetőnél a kialakuló áramokat homogénnek tekintjük a vezeték keresztmetszetére nézve, aminek következtében a fenti egyenlet bal oldalán a második és negyedik tag kiejti egymást, mert

$$-\frac{1}{A_{\text{vez}}} \int_{A_{\text{vez}}} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{vez}} = -\frac{1}{A_{\text{vez}}} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot A_{\text{vez}} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.11})$$

Az eddig levezetett egyenletek egy vezetékre vonatkoznak. Azonban egy tekercs N_{tek} számú ilyen A_{vez} keresztmetszetű vezeték soros kapcsolásából áll össze. Tehát a tekercs teljes keresztmetszete $A_{\text{tek}} = N_{\text{tek}} A_{\text{vez}}$, vagyis a tekercs egyenletének végső alakja

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \frac{N_{\text{tek}}}{A_{\text{tek}}} i_{\text{tek}} \vec{e}_z = \vec{0}. \quad (\text{A.12})$$

A tekercselés feszültségegyenletét, a soros kapcsolás miatt, a vezeték feszültségegyenletének N_{tek} -szereseként kapjuk meg,

$$\begin{aligned}
 u_{\text{tek}} &= N_{\text{tek}} u_{\text{vez}} = N_{\text{tek}} R_{\text{vez}} i_{\text{vez}} + N_{\text{tek}} R_{\text{vez}} \int_{A_{\text{vez}}} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{vez}} = \\
 &= R_{\text{tek}} i_{\text{tek}} + N_{\text{tek}} \frac{l}{A_{\text{vez}}} \int_{A_{\text{vez}}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{vez}} = \\
 &= R_{\text{tek}} i_{\text{tek}} + \frac{N_{\text{tek}} l}{A_{\text{tek}}} \int_{A_{\text{tek}}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{tek}},
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

ahol $R_{\text{tek}} = N_{\text{tek}} R_{\text{vez}}$ a teljes tekercs rezisztenciája. Az (A.13) egyenletnél van lehetőség a tekercsvégek induktivitásának figyelembevételére, ha kiegészítjük az egyenlet jobb oldalát az $L_{\text{tek}} di_{\text{tek}}/dt$ taggal.

Tehát erős csatolás esetében egy tekercselés tartományára az (A.12) és az (A.13) egyenleteteket, azaz

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \frac{N_{\text{tek}}}{A_{\text{tek}}} i_{\text{tek}} \vec{e}_z &= \vec{0} \quad \text{az } \Omega_0 \text{ tartományon,} \\
 \frac{N_{\text{tek}} l}{A_{\text{tek}}} \int_{A_{\text{tek}}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_{\text{tek}} + R_{\text{tek}} i_{\text{tek}} &= u_{\text{tek}} \quad \text{az } \Omega_0 \text{ tartományon}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

kell előírni.

B. FÜGGELÉK

Nyomatékszámítás

A szakirodalom alapján többféle erő- és nyomatékszámítási eljárás ismert. Az elektromágneses térszámításban legerjedtebben alkalmazott módszerek a következők:

1. Maxwell-féle feszültségtenzor módszer (*Maxwell's stress tensor method*) [15, 40–42, 45, 46, 151, 153, 155, 156, 187, 192, 209, 395–400];
2. Arkkio-módszer (*Arkkio's method*) [41, 103, 153, 187, 209, 400];
3. Mágneses koenergia változásán alapuló módszer (*Method of the magnetic co-energy variation*) [15, 41, 153, 209];
4. Jacobi-mátrix deriváltján alapuló módszer (*Method of local Jacobian matrix derivation*) [40–42, 45, 46, 153, 209, 397, 399–402];
5. Mágnesező áram módszer (*Magnetizing current method*) [153, 398, 400, 403, 404].

Az egyes módszerekhez megadott irodalmak a módszerhez kapcsolódó alapvető művek, de a [398], [153], [400] és [41] irodalmak alapján, azokból kiindulva mindegyikhez jóval nagyobb szakirodalom található. A következőkben csak a dolgozatban alkalmazott két módszert, a Maxwell-féle feszültségtenzor módszert és az Arkkio-módszert ismertetem.

B.1. Maxwell-féle feszültségtenzor módszer

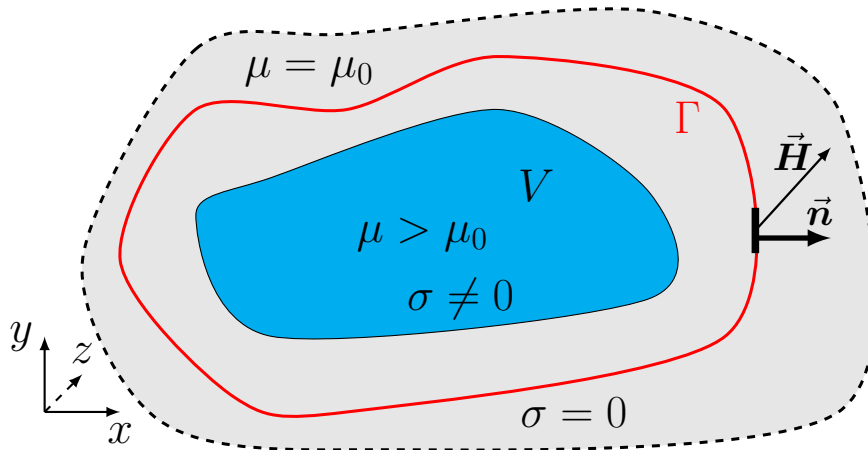
A Maxwell-féle feszültségtenzor módszer a leggyakrabban használt számítási eljárás az elektromágneses erő és nyomaték számítására a villamos berendezések numerikus analízisében.

Egy véges, zárt V térfogatra ható elektromágneses nyomaték az \vec{f} erőssűrűség V térfogatra eső részéből számítható [41, 133, 163, 395, 405],

$$\vec{T}_{\text{em}} = \int_V \vec{r} \times \vec{f} \, dV, \quad (\text{B.1})$$

ahol \vec{r} a helyvektor. A fenti térfogatra vett integrál átalakítható a $\vec{\sigma}$ felületi feszültség egy, a V térfogatot magába foglaló tetszőleges zárt Γ felületre vett integráljává [41, 103, 163, 395, 405], azaz

$$\vec{T}_{\text{em}} = \oint_{\Gamma} \vec{r} \times \vec{\sigma} \, d\Gamma, \quad (\text{B.2})$$



B.1. ÁBRA Γ felülettel határolt mágneses térbe helyezett V térfogatú test.

ahol $\vec{\sigma}$ a Maxwell-feszültségtenzor. A V térfogattal szemben az is követelmény, hogy az levegőben legyen vagy $\mu = \mu_0$ permeabilitású anyag vegye körül [39, 41], illetve a tetszőlegesen felvett zárt Γ felületen legyen ismert a \vec{H} mágneses térerősség. A B.1. ábra a V térfogatot mutatja, melyet egy tetszőleges Γ felület határol, ahol ismert a \vec{H} térerősség, és \vec{n} a felület normálvektora. A (B.2) egyenletben szereplő Maxwell-feszültségtenzor a következő összefüggéssel számítható [41, 103, 395, 405]:

$$\vec{\sigma} = \mu_0(\vec{H} \cdot \vec{n})\vec{H} - \frac{\mu_0}{2}H^2\vec{n} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{B} - \frac{1}{2\mu_0}B^2\vec{n}, \quad (\text{B.3})$$

ahol $H = |\vec{H}|$ és $B = |\vec{B}|$ a mágneses térerősség és a mágneses fluxussűrűség abszolút értéke.

Dolgozatomban a problémák mindegyike kétdimenziós, ezért a zárt Γ felületből egy zárt Γ görbe lesz a (B.2) összefüggésben, melyet a Γ felület z irányba vett hosszával szorzok. Tehát kétdimenziós esetben a (B.2) összefüggésből a következő lesz [41, 103, 155]:

$$\vec{T}_{\text{em}} = l \oint_{\Gamma} \vec{r} \times \vec{\sigma} d\Gamma = l \oint_{\Gamma} \vec{r} \times \left(\frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{B} - \frac{1}{2\mu_0}B^2\vec{n} \right) d\Gamma, \quad (\text{B.4})$$

ahol l a Γ felület mélysége, a gyakorlatban a kétdimenziós feladat z irányba vett hossza.

Egy feladat pontos megoldása esetében, a $\mu = \mu_0$ térrészben felvett tetszőleges Γ perem esetében a nyomatók független lesz a helyvektortól. De a végeselem-módszer, egy közelítő eljárás, ezért a nyomatókszámítás pontossága erősen függ attól, hogy hova vesszük fel a Γ peremet. A gyakorlat szerint legcélszerűbb a légrés közepére felvenni a Γ peremet, vagy a mozgó és álló rész peremén elvégezni a számítást és az eredményt átlagolni. De erre a problémára megoldásként már létezik az integrálási sugár számítás közbeni becslése [156], mellyel csökkenthető a hiba.

B.2. Arkkio-módszer

Ez a módszer a Maxwell-féle feszültségtenzor módszer egy villamos forgógépekre specializált variánsa. A módszer célja, hogy kiküszöbölje az integrálási útból fakadó pontatlanságot és alacsony ismeretlenség mellett is pontos eredményt adjon [103].

Kétdimenziós esetben, a (B.2) egyenletből egy vonalintegrál lesz. Ha r rádiuszú kör mentén integrálunk, akkor a nyomaték felírható a következő összefüggéssel [41, 103]

$$T_{\text{em}} = l \int_{\Gamma} r F_{\Theta} d\Gamma, \quad (\text{B.5})$$

ahol F_{Θ} az $\vec{\sigma}$ feszültségtenzor tangenciális irányú komponense. A tangenciális irányú komponens a (B.3) összefüggésből [41, 103, 405]

$$F_{\Theta} = \frac{1}{\mu_0} B_r B_{\Theta}, \quad (\text{B.6})$$

ahol B_r és B_{Θ} a mágneses fluxussűrűség radiális és tangenciális komponense. A (B.5) egyenletbe behelyettesítve a feszültségtenzor tangenciális komponensét, és átírva a $d\Gamma$ tagot a hengerkoordináta-rendszernek megfelelően $r d\Theta$ összefüggésre, a következő egyenletet kapjuk [41, 103]:

$$T_{\text{em}} = l \int_0^{2\pi} r \left(\frac{1}{\mu_0} B_r B_{\Theta} \right) r d\Theta = \frac{l}{\mu_0} \int_0^{2\pi} r^2 B_r B_{\Theta} d\Theta. \quad (\text{B.7})$$

A villamos aktuátoroknál az r sugarú kör a légrésben helyezkedik el, és a légrést az r_{R} belső és az r_{S} külső sugara határolja. Elméletileg a nyomaték független a rádiusztól, ezért ha a (B.7) egyenletet integráljuk sugárirányba, a következőt kapjuk [41, 103]

$$\begin{aligned} T_{\text{em}}(r_{\text{S}} - r_{\text{R}}) &= \int_{r_{\text{R}}}^{r_{\text{S}}} T_{\text{em}} dr = \frac{l}{\mu_0} \int_{r_{\text{R}}}^{r_{\text{S}}} \left\{ \int_0^{2\pi} r B_r B_{\Theta} d\Theta \right\} dr = \\ &= \frac{l}{\mu_0} \int_{S_{\text{lr}}} r B_r B_{\Theta} dS_{\text{lr}}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ahol S_{lr} a légrés területe, amit az r_{S} és az r_{R} sugarak határolnak. A (B.8) egyenletet átalakítva kapjuk a végképletet [41, 103, 153, 209]:

$$T_{\text{em}} = \frac{l}{\mu_0(r_{\text{S}} - r_{\text{R}})} \int_{S_{\text{lr}}} r B_r B_{\Theta} dS_{\text{lr}}, \quad (\text{B.9})$$

mely jóval megbízhatóbb eredményt szolgáltat, és a Maxwell-feszültségtenzor módszerhez hasonlóan, könnyen implementálható.

— * —

A bemutatott két nyomatékszámítási módszer számítógépes megvalósítását tekintve nem mutat jelentős eltérést. A Maxwell-féle feszültségtenzor módszer több lépésből áll, de összességében majdnem egyező műveletigénnyel bírnak ezek a lépések, mint az Arkio-módszer lépései. Így számítási idő szempontjából a kettő között nincs jelentős eltérés.

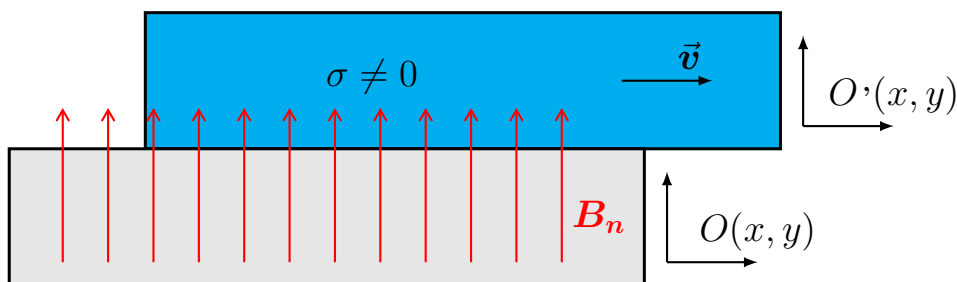
C. FÜGGELÉK

Mozgás figyelembevételével Minkowski-transzformációval

Ha egy σ vezetőképességgel bíró térrész mozog \vec{v} sebességgel a \vec{B} mágneses térben (lásd C.1. ábra), akkor $\vec{v} \times \vec{B}$ feszültség indukálódik benne, aminek következtében áram indul meg, ha a térrész villamos szempontból zárt kört alkot. Az így létrejött áram mágneses teret hoz létre, mely megpróbálja ellensúlyozni a mozgás miatt bekövetkező mágneses fluxus változást. A mozgás következtében létrejövő örvényáramok vizsgálata és szimulációja az alkalmazott referenciasíktól függ. Az Euler-közelítés esetében egy megfelelő transzformációval csökkentjük a síkok számát a modellben, vagyis a C.1. ábrán nem lesz külön álló és mozgó referenciasík [46, 103, 144, 155, 164].

A végelem-módszer esetében, a térjellemzőket kell transzformálni, mivel a mozgó rész \vec{v} sebességgel mozog az $O(x, y)$ álló referenciasíkhöz képest. Vagyis az eredeti feladatban lesz egy $O'(x, y)$ referenciasík, mely a mozgó résszel együtt mozog \vec{v} sebességgel. Mindkét referenciasíkra a (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) és (2.5) Maxwell-egyenletek lesznek érvényesek. A különbség a két referenciasík mennyiségei – \vec{H} , \vec{J} , \vec{E} , \vec{B} – között, hogy a mozgó részen, a vezetőképességgel rendelkező anyagban a mozgás következtében feszültség indukálódik. Tehát a mozgó referenciasíkban a \vec{H}' mágneses térerősség, \vec{J}' áramsűrűség és \vec{B}' mágneses fluxussűrűség megegyezik az álló referenciasík \vec{H} , \vec{J} és \vec{B} mennyiségeivel. Csak az \vec{E}' elektromos térerősség esetében lesz eltérés [144, 155, 163, 164].

Viszont, ha a mozgó referenciasíkban lévő \vec{E}' esetében megfelelő transzformáció segítségével figyelembe vesszük a mozgás hatását, – vagyis a $\vec{v} \times \vec{B}$ indukált feszültséget – már nincs szükség a két referenciasíkra, mivel a mozgó mennyiségeket áttranszformáltuk az álló referenciasíkra. Tehát az $O'(x, y)$ mozgó referenciasík mennyiségei és az $O(x, y)$ álló referenciasík mennyiségei között a Minkowski-transzformáció teremti meg a



C.1. ÁBRA Mozgó részt tartalmazó feladat sematikus ábrája.

kapcsolatot [103, 144, 155, 163, 164]:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}' &= \vec{H}, \\
 \vec{J}' &= \vec{J}, \\
 \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \\
 \vec{B}' &= \vec{B}.
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

Az így kapott összefüggések már könnyen behelyettesíthetők, felhasználhatóak a különféle potenciálformalizmusokhoz, melynek nagy előnye, hogy nem szükséges semmiféle határfeltétel a mozgás figyelembevételéhez [144, 155, 164].

A technika jól alkalmazható nem sima felülettel, például horonnyal rendelkező mozgórész esetében is, a felület egyenlőtlenségeinek, a hornyoknak a homogenizálásával [144, 406]. Azonban komoly hátrányai is vannak a technikának. Mivel ez esetben egy konvekciós-diffúziós egyenletet oldunk meg, stabilitási problémák lépnek fel a megoldásban [144, 377]. Erre a problémára a h -FEM, vagyis a felbontás finomítása az egyik megoldás, vagy valamilyen adaptív felbontásfinomító módszer. Azonban, ahogy nő a \vec{v} sebesség, egyre jelentősebb az egyenletrendszerben a konvekciós tag, ezért egyre kisebb felbontást kell alkalmazni a numerikus instabilitás elkerülése érdekében [144, 377].

D. FÜGGELÉK

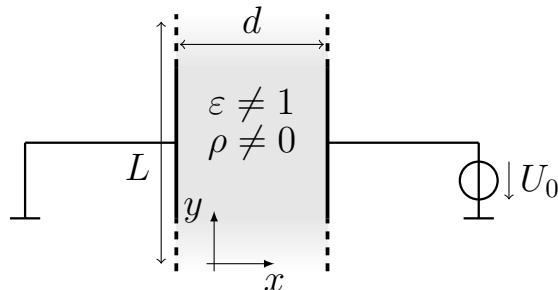
Schur—komplemens-módszer - 1D mintapélda

A függelékben a D.1. ábrán látható párhuzamos fegyverzetű kondenzátor megoldását mutatom be a Schur—komplemens-módszer segítségével. Az itt bemutatott megoldás a módszer elméleti alapjainak megértését segíti elő. Ipari feladatok megoldásához, a hatékony megvalósításhoz mindenképpen szükséges a kapcsolódó szakirodalom áttekintése [232, 233, 235, 282, 284, 287]. Az itteni mintapélda bemutatásának alapötlete a [233] irodalomból származik, ahol egy síkbeli mechanikai problémán (kéttámaszú tartó) keresztül ismertetik a megoldás menetét Schur—komplemens-módszerrel. Véges differenciák módszere esetében a [235] irodalomban található egy, az ittenihez hasonlóan megoldott feladat.

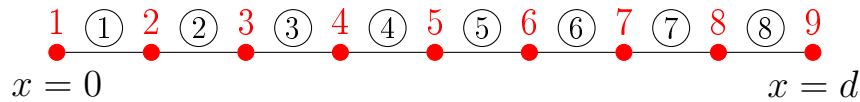
A mintapélda egydimenziós feladatnak tekinthető, mivel $L \gg d$, és emiatt a kondenzátor fegyverzetei között homogénnek tekinthető az elektromos térerősség. Az egyik fegyverzet potenciálértékét nullának tekintem, a másik pedig $U_0 = 10$ V. A fegyverzetek közötti dielektrikum relatív permittivitása $\varepsilon_r = 10$ és $\rho = 10^{-2}$ C/m töltéssűrűség van a fegyverzetek között. A fegyverzetek közötti távolság, $d = 1$ mm. A feladat a fegyverzetek közötti potenciál meghatározása. A feladat analitikus megoldása [11]-ből ismert:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon} x^2 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon} d \right) x. \quad (\text{D.1})$$

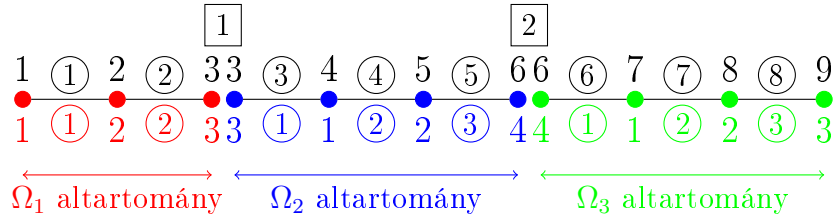
A numerikus megoldásához nyolc végelemre bontom fel a feladatot, ahogy a D.2. ábrán látható. A bekarikázott számok a végelemeket, a számok pedig a csomópontokat jelölik, ahol a φ_i , $i = 1, \dots, 9$ potenciálértéket keresem. Az egyes ($\varphi_1 = 0$ V) és kilences ($\varphi_9 = U_0$) csomópontokra, ahol ismert a potenciál értéke, ott előírom a feladat megoldásához szükséges peremfeltételeket.



D.1. ÁBRA Párhuzamos fegyverzetű kondenzátor.



D.2. ÁBRA A diskretizált egydimenziós példa.



D.3. ÁBRA Tartomány dekompozícióval felbontott feladat.

A feladatot három altartományra bontom fel, a D.3. ábrának megfelelően. A D.3. ábrán a vonal fölötti sima számok a csomópontok eredeti számozását jelölik (*globális számozás*), a karikázott számok pedig végeelem számát. A vonal alatti számok a felbontást követően előálló számozást (*lokális számozás*) és végeelem számot jelölik. A téglalappal körülvevett szám pedig a feladat felbontásának helyét és a Schur–komplementhez tartozó globális csomópontszámozást jelöli.

Az elemegyenletből egy végeelemre előálló együtthatómátrix és gerjesztés vektor az alábbi

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0,7083 \cdot 10^{-6} & -0,7083 \cdot 10^{-6} \\ -0,7083 \cdot 10^{-6} & 0,7083 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_e = \begin{bmatrix} 0,625 \cdot 10^{-6} \\ 0,625 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

A későbbi egyszerűbb jelölés érdekében kiemelek az egy végeelemhez tartozó mátrixból $K_K = 0,7083 \cdot 10^{-6}$ és vektorból $K_b = 0,625 \cdot 10^{-6}$ értéket. Így az egyes tartományokra előálló együtthatómátrixok és vektorok a peremfeltétellel kiegészítve a következők lesznek,

$$\mathbf{K}_{\Omega_1} = K_K \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{K_K} & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & \\ \hline 0 & -1 & & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{b}_{\Omega_1} = K_b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\Omega_2} = K_K \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{b}_{\Omega_2} = K_b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\Omega_3} = K_K \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_K} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{b}_{\Omega_3} = K_b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{K_b} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az egyes tartományhoz tartozó ismeretlenek pedig a következők:

$$\mathbf{x}_{\Omega_1} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{1,2} \\ \varphi_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} \varphi_{2,1} \\ \varphi_{2,2} \\ \varphi_{2,3} \\ \varphi_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_3 \\ \varphi_6 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\Omega_3} = \begin{bmatrix} \varphi_{3,1} \\ \varphi_{3,2} \\ \varphi_{3,3} \\ \varphi_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_6 \end{bmatrix},$$

ahol az első oszlopban a lokális, a másodikban pedig a globális számozásnak megfelelően jelöltem az ismeretleneket. A következő lépés a redukált egyenletrendszer elkészítése, melyhez a lokális Schur—komplementst és a jobb oldali vektort kell kiszámítani először.

Az első altartomány esetében a lokális Schur—komplementst

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{K}_{\Gamma_{\Omega_1}\Gamma_{\Omega_1}} - \mathbf{K}_{\Gamma_{\Omega_1}\Gamma_{\Omega_1}}(\mathbf{K}_{11})^{-1}\mathbf{K}_{1\Gamma_{\Omega_1}} = \\ &= K_K \left\{ \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{K_K} & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2}K_K, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

és a redukált egyenletrendszer jobb oldala

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{b}_{\Gamma_{\Omega_1}} - \mathbf{K}_{\Gamma_{\Omega_1}\Gamma_{\Omega_1}}(\mathbf{K}_{11})^{-1}\mathbf{b}_1 = \\ &= K_b \left\{ \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{K_K} & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = 2K_b. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

A másik két tartomány esetében

$$\mathbf{S}_2 = K_K \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = K_b \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{3}K_K, \quad \mathbf{g}_3 = 6,7777K_b.$$

A $\mathbf{Sx}_\Gamma = \mathbf{g}_\Gamma$ redukált egyenletrendszer a lokális értékek megfelelő asszemblálásával áll össze

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 + S_{2,11} & S_{2,12} \\ S_{2,21} & S_{2,22} + \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1^2 \\ \mathbf{g}_2^2 + \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,0884 \\ 19,4855 \end{bmatrix} \text{V.} \quad (\text{D.5})$$

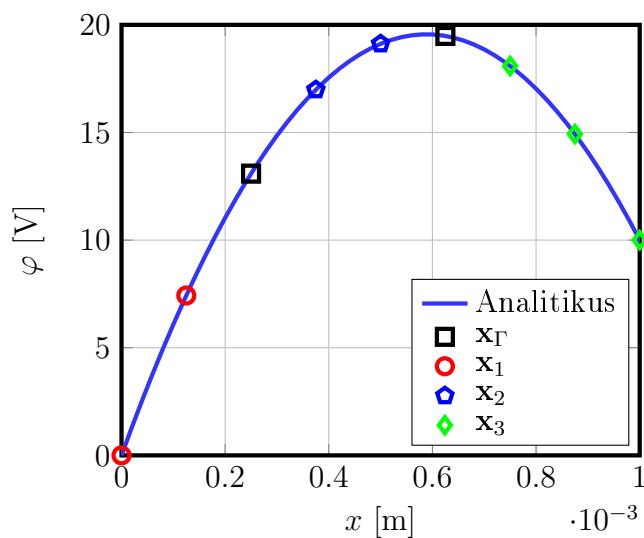
A redukált egyenletrendszerből kapott megoldást felhasználjuk az altartományok belső ismeretleneinek meghatározásához, melyek egy-egy Dirichlet-feladatnak tekinthetők. Az első altartomány esetében az $(\mathbf{x}_1)^T = [\varphi_1 \ \varphi_2]$ ismeretlen potenciálokat a következőképpen határozzuk meg

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (\mathbf{K}_{11})^{-1}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{K}_{1\Gamma_{\Omega_1}}\mathbf{x}_{\Gamma_{\Omega_1}}) = \\ &= K_K \begin{bmatrix} \frac{1}{K_K} & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \left(K_b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - K_b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,0884 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 7,4265 \end{bmatrix} \text{V,} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

ahol $\mathbf{x}_{\Gamma_{\Omega_1}}$ az Ω_1 tartományhoz tartozó peremen lévő ismeretlen potenciálérték, ebben az esetben $\mathbf{x}_{\Gamma_{\Omega_1}} = \varphi_3$. A másik két tartománynál a potenciálértékek

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,9855 \\ 19,1179 \end{bmatrix} \text{ V}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,0884 \\ 14,9265 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ V}.$$

A végeelem-módszerrel kapott eredményeket az analitikussal összehasonlítva a D.4. ábra mutatja. A numerikusan kapott végeredmény az analitikusan számolt vonalon helyezkedik el, tehát a tartomány dekompozícióval felbontott végeelemes feladat végeredménye jó közelítéssel visszaadja az egzakt megoldást.



D.4. ÁBRA Az analitikusan és numerikusan számított potenciálértékek.

E. FÜGGELÉK

FETI-módszer - 1D mintapélda

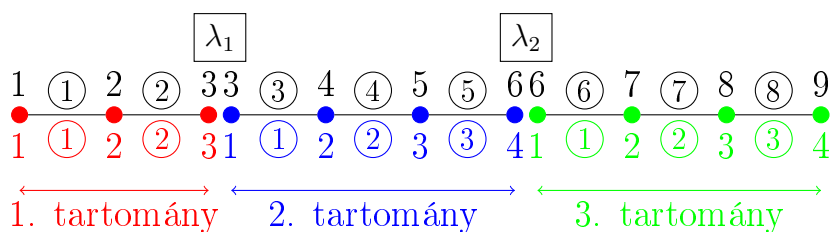
Ebben az esetben is a D. függelékben bemutatott, a D.1. ábrán látható mintapéldát alkalmazzuk tesztfeladatként. Azonban itt is fontos megemlíteni, hogy a következőkben bemutatott megoldás az elmélet könnyebb megértését és oktatási célokat szolgál. A valós feladatokhoz történő alkalmazás esetében itt is szükséges a kapcsolódó szakirodalom áttekintése [230, 232–234, 265, 266, 293, 294, 301, 304–306, 309, 311–313, 318]. Ahogy a Schur—komplemens-módszerhez, a FETI-módszerhez is található egy egydimenziós mechanikai mintapélda a [233] irodalomban.

A numerikus megoldásához a D.2. ábrán már bemutatott diszkretizálást és peremfeltételeket alkalmazzuk itt is. A feladatot ismételtlen három altartományra bontjuk fel, az E.1. ábrának megfelelően. Az E.1. ábrán a vonal fölötti sima számok a csomópontok eredeti számozását jelölik (*globális számozás*), a karikázott számok pedig a végeelem számát. A vonal alatti számok a felbontást követően előálló számozást (*lokális számozás*) és a végeelem számot jelölik. A téglalappal körülvett λ_1 és λ_2 a feladat felbontásának helyét és az altartományokat összekapcsoló Lagrange-multiplikátorokat jelöli.

Az elemegyenletből egy végeelemre előálló együtthatómátrix és gerjesztés vektor megegyezik a D. függelékben megadottakkal, és itt is alkalmazom az ott bemutatott kiemelést. Így az egyes tartományokra előálló együtthatómátrixok és vektorok a peremfeltétellel kiegészítve a következők lesznek:

$$\mathbf{K}_{\Omega_1} = K_K \begin{bmatrix} \frac{1}{K_K} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\Omega_1} = K_b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\Omega_2} = K_K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\Omega_2} = K_b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$



E.1. ÁBRA Tartomány dekompozícióval felbontott feladat.

$$\mathbf{K}_{\Omega_3} = K_K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\Omega_3} = K_b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \frac{10}{K_b} \end{bmatrix}.$$

A kettes tartományhoz tartozó \mathbf{K}_{Ω_2} együtthatómátrix szinguláris, mert nem tartozik hozzá Dirichlet-peremfeltétel. Ez a tartomány egy Neumann-feladatnak tekinthető, mert a peremén nincs semmiféle kényszer.

A feladat felbontását követően, az egyes altartományokhoz tartozó ismeretlenek pedig a következők lesznek:

$$\mathbf{x}_{\Omega_1} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{1,2} \\ \varphi_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} \varphi_{2,1} \\ \varphi_{2,2} \\ \varphi_{2,3} \\ \varphi_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\Omega_3} = \begin{bmatrix} \varphi_{3,1} \\ \varphi_{3,2} \\ \varphi_{3,3} \\ \varphi_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \end{bmatrix},$$

ahol az első oszlopban a lokális, a másodikban pedig a globális számozásnak megfelelően vannak jelölve az ismeretlenek.

A következő lépés meghatározni az altartományokhoz tartozó együtthatómátrixok nullterét, ami

$$\mathbf{R}_{\Omega_1} = \mathbf{R}_{\Omega_3} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az együtthatómátrix nullterének számításáról bővebben a következő irodalmakban lehet olvasni [265, 301, 309, 311, 312, 320, 321].

A gyakorlatban nem számítjuk ki a mátrix inverzét vagy pszeudoinverzét, helyette valamilyen faktorizációt vagy iteratív módszert alkalmazunk. Mivel a \mathbf{K}_{Ω_2} mátrix szinguláris, ezért értelemszerűen a Moore-Pensore-féle pszeudoinverzét számítom [233, 265, 319]. Az együtthatómátrixok inverze a következő lesz:

$$\mathbf{K}_{\Omega_1}^{-1} = \frac{1}{K_K} \begin{bmatrix} K_K & 0 & 0 \\ K_K & 1 & 1 \\ K_K & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\Omega_2}^{-1} = \mathbf{K}_{\Omega_2}^\dagger = \frac{1}{K_K} \begin{bmatrix} 0.8749 & 0.1249 & -0.3749 & -0.6249 \\ 0.1249 & 0.3749 & -0.1249 & -0.3749 \\ -0.3749 & -0.1249 & 0.3749 & 0.1249 \\ -0.6249 & -0.3749 & 0.1249 & 0.8749 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\Omega_3}^{-1} = \frac{1}{K_K} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & K_K \\ 2 & 2 & 1 & K_K \\ 1 & 1 & 1 & K_K \\ 0 & 0 & 0 & K_K \end{bmatrix}.$$

A módszer egyik fontos lépése elkészíteni az altartományokhoz tartozó Lagrange-multiplikátorok leképezési mátrixát. Ezt a mátrixot logikai leképezési mátrixnak is nevezik, mivel -1 , 0 és 1 ami szerepel benne. Ennél a feladatnál a leképezési mátrixok a következők lesznek:

$$\mathbf{B}_{\Omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\Omega_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezzel együtt fontos előállítani az eredeti peremfeladat duális egyenletrendszerében, a (2.51) egyenletben lévő almátrixokat és alvektorokat. Erre a feladatra az \mathbf{F}_I és a \mathbf{G}_I mátrix, valamint a \mathbf{d} és az \mathbf{e} vektor a következő lesz,

$$\mathbf{F}_I = \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{\Omega_j} \mathbf{K}_{\Omega_j}^{-1} \mathbf{B}_{\Omega_j}^T = \frac{1}{K_K} \begin{bmatrix} 2,8749 & 0,625 \\ 0,625 & 3,8749 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_I = [\mathbf{B}_{\Omega_1} \mathbf{R}_{\Omega_1}, \mathbf{B}_{\Omega_2} \mathbf{R}_{\Omega_2}, \mathbf{B}_{\Omega_3} \mathbf{R}_{\Omega_3}] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{\Omega_j} \mathbf{K}_{\Omega_j}^{-1} \mathbf{b}_{\Omega_j} = \begin{bmatrix} -3,7501 \\ 18,1619 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e} = [\mathbf{b}_{\Omega_1}^T \mathbf{R}_{\Omega_1}, \mathbf{b}_{\Omega_2}^T \mathbf{R}_{\Omega_2}, \mathbf{b}_{\Omega_3}^T \mathbf{R}_{\Omega_3}] = -5,2944 \cdot K_b.$$

Miután kész a feladat duálisának egyenletrendszere, abból meghatározzuk az ismeretleneket, az $\boldsymbol{\alpha}$ és a $\boldsymbol{\Lambda}$ vektorokat a FETI-módszernél bemutatott direkt megoldó eljárással,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{G}_I^T \mathbf{F}_I^{-1} \mathbf{G}_I)^{-1} (\mathbf{G}_I^T \mathbf{F}_I^{-1} \mathbf{d} - \mathbf{e}) = 17,1694,$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{F}_I^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}_I \boldsymbol{\alpha}) = K_K \begin{bmatrix} 4,7796 \\ -0,5148 \end{bmatrix}.$$

Az előbb kiszámított két vektor segítségével már meghatározható az egyes altartományokhoz tartozó ismeretlen potenciálok értéke. A végeredmény két részből áll. A megoldás első része, az $\mathbf{x}_{\Omega_j}^1$ ($j=1,2,3$) a (2.42) összefüggésből számítható, a második rész, az $\mathbf{x}_{\Omega_j}^2$ pedig a tartományokhoz kapcsolódó merev test mozgás. Az első altartományhoz tartozó potenciálértékek a merev test mozgás nélkül,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\Omega_1}^1 &= \mathbf{K}_{\Omega_1}^{-1} (\mathbf{b}_{\Omega_1} - \mathbf{B}_{\Omega_1}^T \boldsymbol{\Lambda}) = \\ &= \frac{1}{K_K} \begin{bmatrix} K_K & 0 & 0 \\ K_K & 1 & 1 \\ K_K & 1 & 2 \end{bmatrix} \left(K_b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - K_K \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,7796 \\ -0,5148 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 7,4266 \\ 13,0884 \end{bmatrix} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A másik két tartomány esetében a végeredmény a merev test mozgás nélkül

$$\mathbf{x}_{\Omega_2}^1 = \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,0809 \\ -0,1838 \\ 1,9486 \\ 2,3162 \end{bmatrix} \text{ V}, \quad \mathbf{x}_{\Omega_3}^1 = \begin{bmatrix} \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,4855 \\ 18,0884 \\ 14,9266 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ V}.$$

Ha csak az eredmény első összetevőjét ábrázoljuk (lásd az E.2. ábrán), jól látható, hogy a peremfeltétel nélküli második tartomány megoldása teljesen rossz. Azonban ha az $\mathbf{x}_{\Omega_j}^2$ merev test mozgást is hozzáadjuk a tartományokhoz, akkor már a helyes eredményt kapjuk.

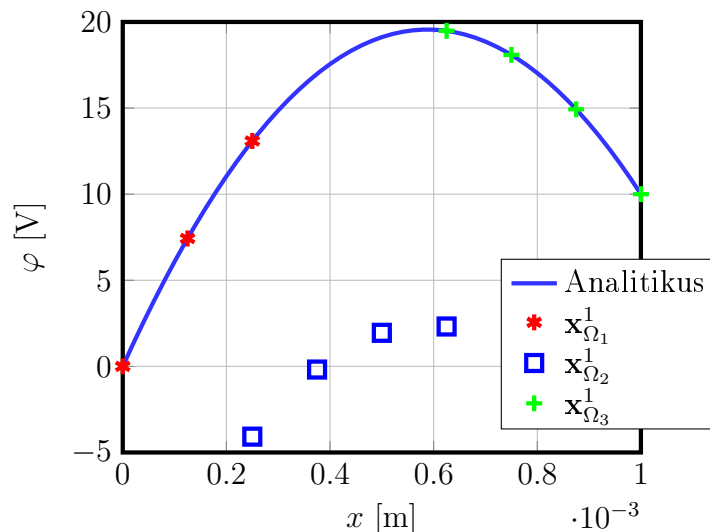
Az egyes tartományokhoz tartó merev test mozgás, ahol α_{Ω_1} és α_{Ω_3} nullával egyenlő,

$$\mathbf{x}_{\Omega_1}^2 = \mathbf{R}_{\Omega_1} \alpha_{\Omega_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_{\Omega_3}^2 = \mathbf{R}_{\Omega_3} \alpha_{\Omega_3} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{x}_{\Omega_2}^2 = \mathbf{R}_{\Omega_2} \alpha_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 17,1694 = \begin{bmatrix} 17,1694 \\ 17,1694 \\ 17,1694 \\ 17,1694 \end{bmatrix}.$$

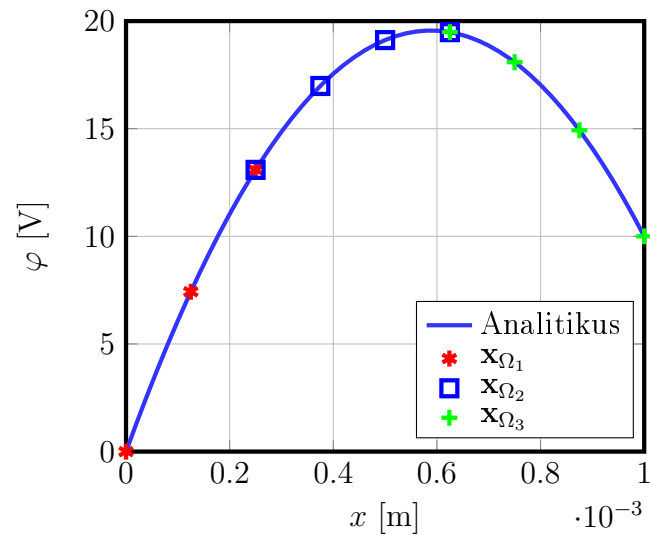
Az első és a harmadik tartomány esetében a merev test mozgás nulla, ezért $\mathbf{x}_{\Omega_1} = \mathbf{x}_{\Omega_1}^1$ és $\mathbf{x}_{\Omega_3} = \mathbf{x}_{\Omega_3}^1$ lesz a tartomány helyes megoldása. A második tartomány esetében a két összetevő összegeként kapott eredmény adja a helyes megoldást,

$$\mathbf{x}_{\Omega_2} = \mathbf{x}_{\Omega_2}^1 + \mathbf{x}_{\Omega_2}^2 = \begin{bmatrix} -4,0809 \\ -0,1838 \\ 1,9486 \\ 2,3162 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17,1694 \\ 17,1694 \\ 17,1694 \\ 17,1694 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,0884 \\ 16,9855 \\ 19,1179 \\ 19,4855 \end{bmatrix} \text{ V}.$$



E.2. ÁBRA A (2.42) egyenlet megoldásával kapott eredmény.

A teljes végeredményt az E.3. ábra mutatja. A numerikusan kapott végeredmény az analitikusan számolt vonalon helyezkedik el, tehát a FETI-módszerrel megoldott példa jó közelítéssel megegyezik az egzakt megoldással.



E.3. ÁBRA Az analitikusan és numerikusan számított potenciálértékek.

F. FÜGGELÉK

Feszültséggel gerjesztett szolenoid

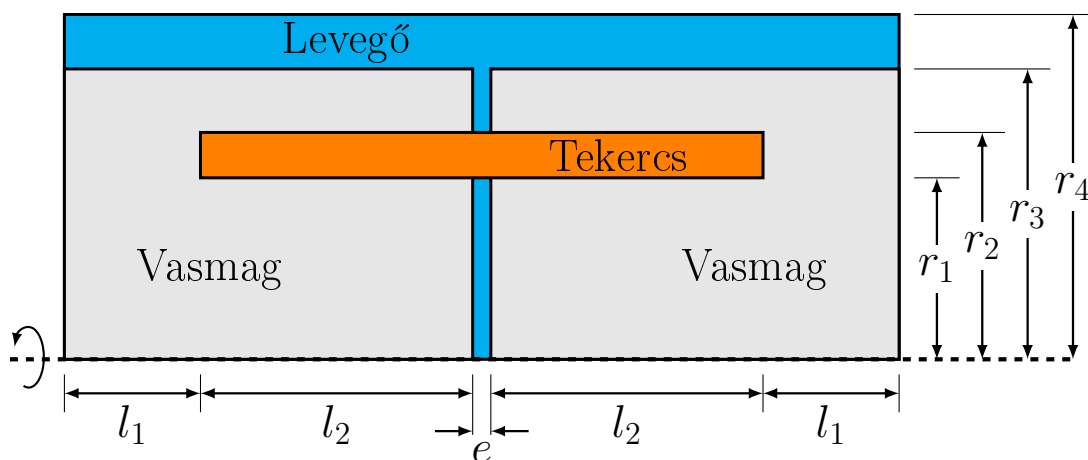
Ebben a függelékben a mintapéldául szolgáló szolenoidhoz tartozó adatokat, geometria méreteit és az analitikus megoldását közlöm. A mintapélda a [41] hivatkozásból származik.

Az F.1. ábrán a hengersizmetrikus elrendezés látható. A fazékvasmag két részből áll, melyben a tekercs helyezkedik el. A fazékvasmag mágnesezési karakterisztikáját lineárisnak tekintem, és az analitikus megoldás során az örvényáramok hatását elhanyagolom. A feladat geometriai méretei az alábbiak:

$$l_1 = 15 \text{ mm}; \quad l_2 = 30 \text{ mm}; \quad e = 2 \text{ mm};$$

$$r_1 = 20 \text{ mm}; \quad r_2 = 25 \text{ mm}; \quad r_3 = 32 \text{ mm}; \quad r_4 = 38 \text{ mm}.$$

A tekercs menetszáma, $N = 50$, és a rezisztenciája, $R = 2 \Omega$, a vasmag relatív permeabilitása pedig $\mu_r = 3000$.



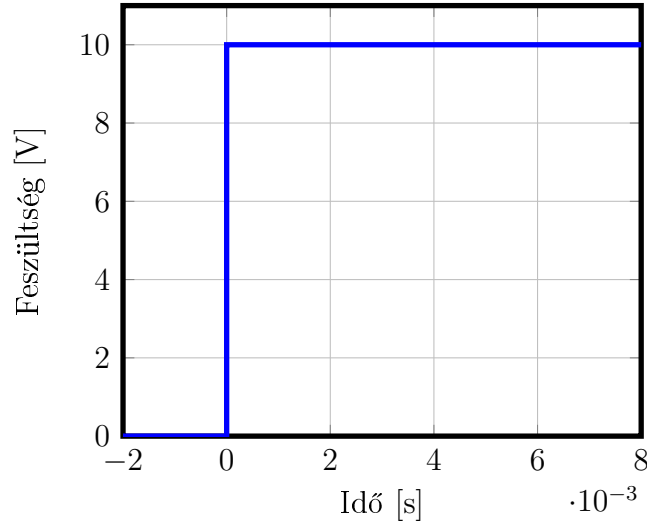
F.1. ÁBRA A feszültséggel gerjesztett szolenoid geometriája.

A tekercs gerjesztőfeszültsége egy 10 V amplitúdójú ugrásfüggvény, amit a $t = 0$ másodpercben kapcsolunk be. A gerjesztés időfüggvényét az F.2. ábra mutatja.

Az analitikus megoldás a mágneses körök elméletén alapszik [376, 407]. A légrés kis mérete miatt az erővonalak szóródása elhanyagolható, valamint a vasmagra jutó mágneses feszültség szintén elhanyagolható a nagy relatív permeabilitás miatt [11, 39, 407]. Így a gerjesztési törvény

$$H_1 e + H_2 e = NI, \tag{F.1}$$

ahol H_1 és H_2 a két légrésben létrejövő mágneses térerősség, e a légrés hossza, N a tekercs



F.2. ÁBRA A szolenoid gerjesztőfeszültségének időfüggvénye.

menetszáma és I a tekercsben folyó áram. A fluxusmegmaradás értelmében [11, 39, 407]

$$\Phi_1 = \Phi_2 \rightarrow B_1 A_1 = B_2 A_2 \rightarrow \mu_0 H_1 A_1 = \mu_0 H_2 A_2, \quad (\text{F.2})$$

ahol Φ_1 és Φ_2 a két légrésben létrejövő mágneses fluxus, A_1 és A_2 a légrések keresztmetszete, és $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m a vákuum permeabilitása. Mivel a két légrés keresztmetszete közel azonos, $\pi r_1^2 \cong \pi(r_3^2 - r_2^2)$, ezért az (F.2) összefüggésből azt kapjuk, hogy $B_1 = B_2 = B$, illetve $H_1 = H_2 = H$. Ezt felhasználva az (F.1) egyenletben, a következő összefüggést kapjuk a mágneses térerősségre

$$H = \frac{NI}{2e}. \quad (\text{F.3})$$

Állandósult állapotban az áram értékét az Ohm-törvény segítségével tudjuk kiszámítani, $I = U/R = 5$ A. Az áram értékéből és az (F.3) összefüggés segítségével meghatározható a térerősség értéke, $H = 62,5$ kA/m. Így már az (F.2) egyenlőségekből a fluxus értéke is meghatározható:

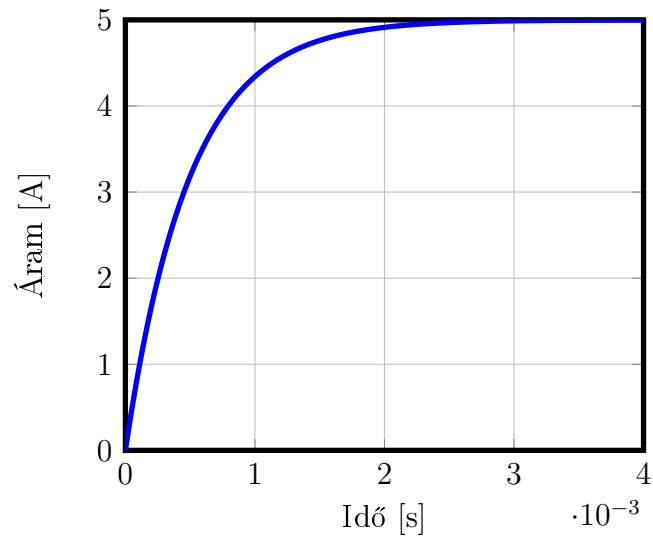
$$\Phi = \mu_0 H A_1 = \mu_0 H \pi r_1^2 = 98,7 \mu\text{Wb}. \quad (\text{F.4})$$

A fluxus és az áram állandósult értékének ismeretében pedig már a mágneses kör induktivitása is meghatározható [11, 39, 407]:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = 0,987 \text{ mH}. \quad (\text{F.5})$$

Mivel a vasmag karakterisztikáját lineárisnak tekintem, és az örvényáramok hatását is elhanyagoltam, a fluxus arányos az árammal. Emiatt az induktivitás állandó lesz az átmeneti állapotban. Az eddigi feltételezésekkel élve, a szolenoid egy R ellenállást és L induktivitást tartalmazó soros körnek tekinthető, melyre rákapcsoljuk az $u_g(t) = 10$ V-os ugrásfüggvényt. A Kirchhoff-féle huroktörvény értelmében, a körben lévő feszültségek algebrai összege minden pillanatban zérus [11, 21, 408],

$$u_g(t) = u_R(t) + u_L(t) = Ri(t) + \frac{d\Psi(t)}{dt} = Ri(t) + \frac{d\Psi(t)}{di(t)} \frac{di(t)}{dt} = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (\text{F.6})$$



F.3. ÁBRA A szolenoid tekercsében kialakuló áram időfüggvénye.

melyből az áram időfüggvényére – zérus kezdeti feltételek mellett – a homogén rész általános, és az inhomogén rész egy partikuláris megoldása a következő jól ismert összefüggést eredményezi [11, 21, 408],

$$i(t) = \frac{u_g(t)}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 5(1 - e^{-2026,42t}) \text{ A.} \quad (\text{F.7})$$

A szolenoid tekercsének áramát, az előzőekben végigvezetett analitikus megoldás alapján, az idő függvényében az F.3. ábra mutatja.

G. FÜGGELÉK

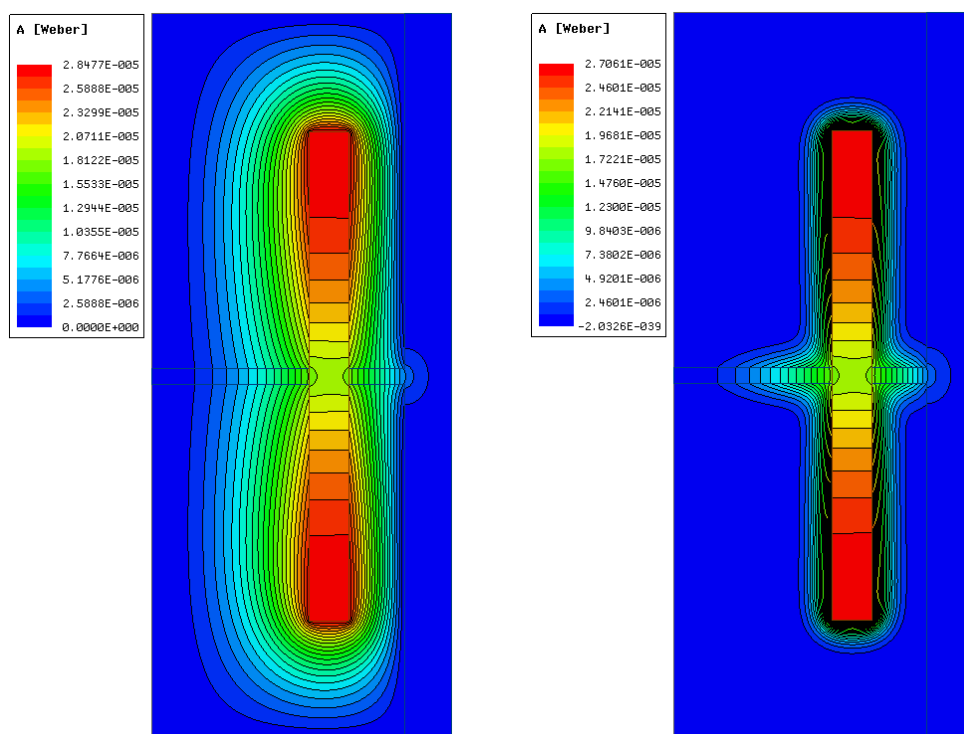
Szimulációs feladatok eredményeinek validálása ANSYS Maxwell szoftverrel

A függelékben bemutatott szimulációs eredmények célja a dolgozatban alkalmazott feladatok eredményeinek validálása egy széles körben alkalmazott kereskedelmi szoftverrel. A validációhoz használt szoftver az ANSYS Maxwell [214].

G.1. Feszültséggel gerjesztett szolenoid

A G.1(a) és a G.1(b) ábrák a mágneses vektorpotenciál eloszlását és az ekvipotenciális görbéket mutatják a szolenoid tekercsében kialakuló áram állandósult állapotát követően.

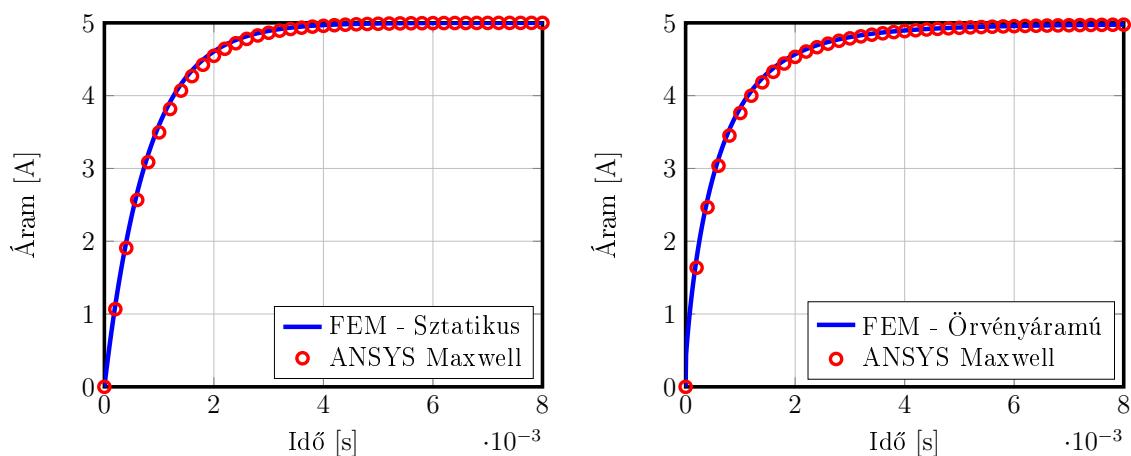
A következő két ábra (G.2(a) és G.2(b) ábrák) a tekercsben kialakuló áram időfüggvényét mutatja sztatikus mágneses és örvényáramú esetben. A dolgozatban használt



(a) Sztatikus mágneses megoldás.

(b) Örvényáramú megoldás.

G.1. ÁBRA A mágneses vektorpotenciál és az ekvipotenciális vonalak a szolenoidban.



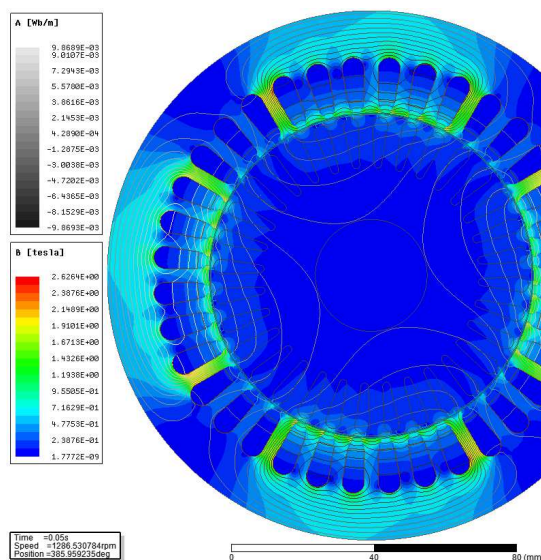
(a) A sztatikus mágneses szimuláció esetében. (b) Az örvényáramú szimuláció esetében.

G.2. ÁBRA A szolenoid tekercsében kialakuló áram időfüggvénye.

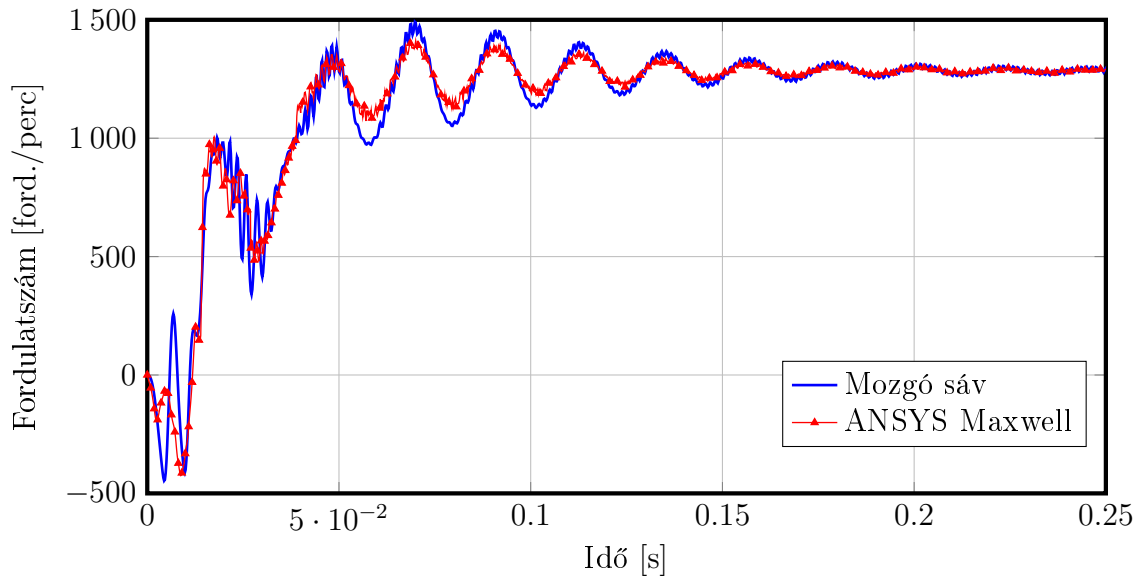
programmal és a kereskedelmi szoftverrel kapott eredmény között nincs jelentős eltérés, ahogy az a tekercsben kialakuló áram időfüggvények is mutatják a G.2(a) és a G.2(b) ábrákon.

G.2. Háromfázisú aszinkron motor

A dolgozatban vizsgált direkt indítású aszinkron motor megoldását ANSYS Maxwell-ben a G.3. ábra mutatja. A forgásszimmetria adta egyszerűsítési lehetőséget itt se használtam ki, ahogy a dolgozatban vizsgált példánál se tettem. A G.3. ábra a mágneses fluxussűrűséget és az ekvipotenciális vonalakat mutatja 1286,5 fordulat/perc fordulat-számmal.



G.3. ÁBRA A mágneses vektorpotenciál és az ekvipotenciális vonalakat az állandósult állapotban.



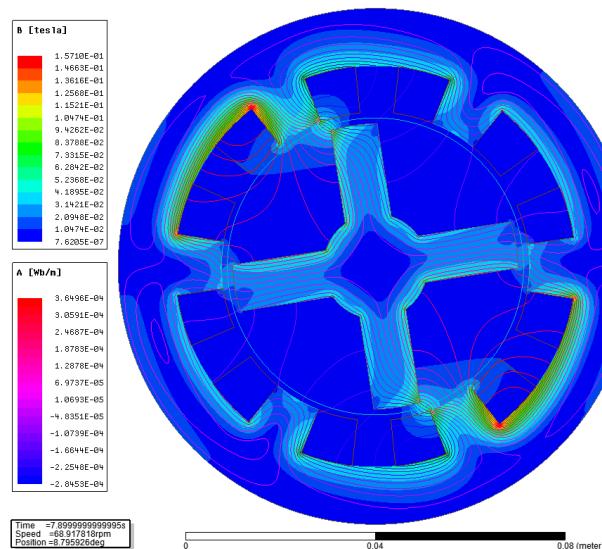
G.4. ÁBRA Az aszinkron motor fordulatszáma az idő függvényében.

A G.4 ábra a mozgó sáv módszerrel és a kereskedelmi szoftverrel kapott fordulatszám időfüggvényt mutatja. A két függvény között a tranziens résznél jelentkezik jelentősebb eltérés, az állandósult állapothoz közeledve egyre kisebb a két görbe között a különbség.

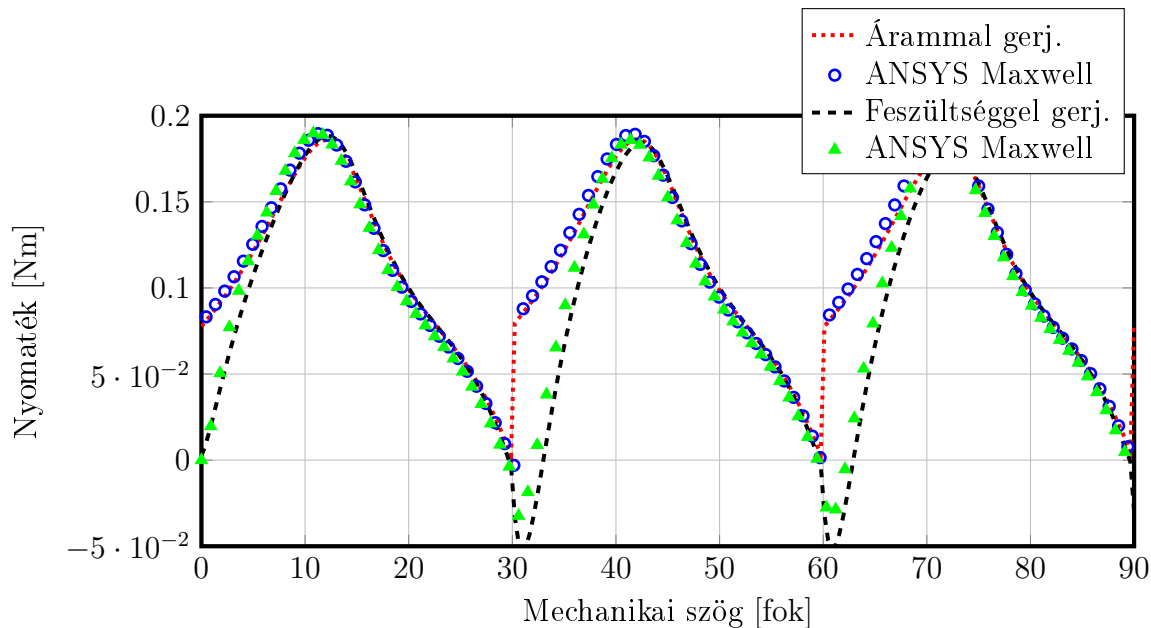
G.3. Kapcsolt reluktancia motor

A G.5 ábra az árammal gerjesztett reluktancia motor megoldását mutatja.

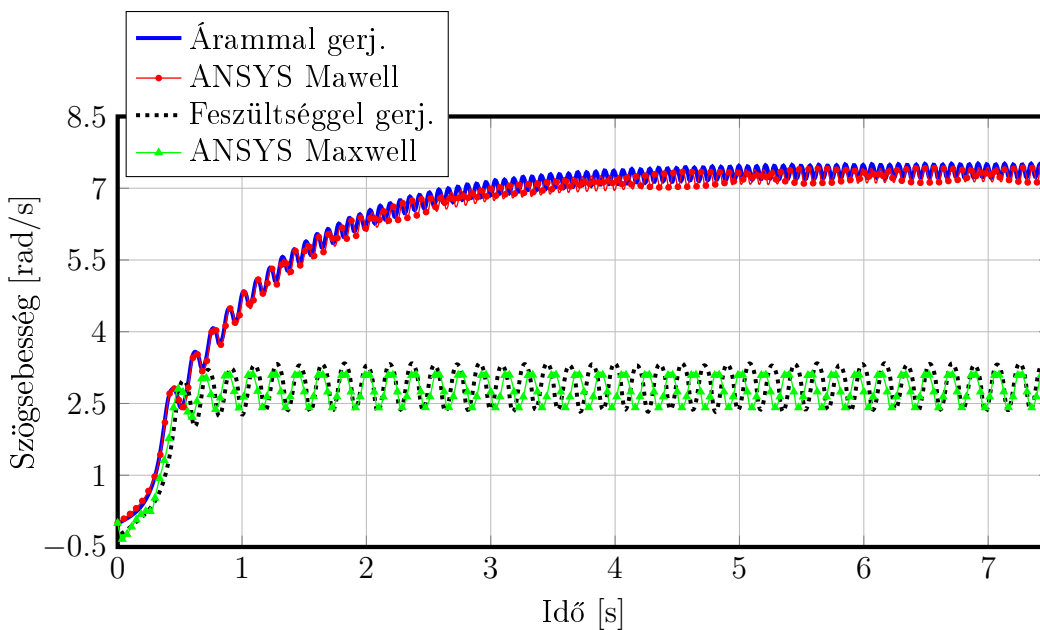
A további két ábra (G.6 és G.7 ábrák) a motor nyomatékát és szögsebességét mutatja. A G.6. ábrán jól látható, hogy nincs jelentős eltérés az általam megvalósított programmal és az ANSYS Maxwell-lel kapott eredmények között.



G.5. ÁBRA A mágneses vektorpotenciál és az ekvipotenciális vonalak a kapcsolt reluktancia motorban.



G.6. ÁBRA Az árammal- és feszültséggel gerjesztett modell elektromágneses nyomatéka.



G.7. ÁBRA A motor szögsebességének változása az idő függvényében.

A motor terhelésének vizsgálatánál is gyakorlatilag azonos eredmény jött ki az árammal gerjesztett hajtás esetében. Nagyobb eltérés a feszültséggel gerjesztett modellnél jelentkezett, amely betudható az ANSYS Maxwell-nél összeállított elektronikának, ami a valóságnak jobban megfelel, mint az általam implementált ideális kapcsolóelemekből álló hajtásrendszer.

Irodalomjegyzék

- [1] Maxwell J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Macmillan and Co, London, 1873.
- [2] Iványi A. *Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003.
- [3] Bossavit A. *Computational Electromagnetism*. Academic Press, Boston, 1998.
- [4] Stratton J. A. *Electromagnetic Theory*. McGraw Hill, London, 1941.
- [5] Jackson J. D. *Classical Electrodynamics*. J. Wiley, New York, 1962.
- [6] Smythe W. R. *Static and Dynamic Electricity*. McGraw Hill, London, 1968.
- [7] Binns K. J., Lawrenson P. J., and Trowbridge C. W. *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*. J. Wiley, New York, 1992.
- [8] Fodor Gy. *Elméleti elektrotechnika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [9] Iványi A. *Magnetic Field Computation with R-functions*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1998.
- [10] Fodor Gy. *Elektromágneses terek*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996.
- [11] Simonyi K. and Zombory L. *Elméleti villamosságtan*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.
- [12] Jin J. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [13] Bíró O. and Richter K. R. CAD in electromagnetism. *In Series Advances in Electronics and Electron Physics, Academic Press, New York, 82, 1991*.
- [14] Standeisky I. *Elektrodinamika*. Universitas-Győr, Győr, 2006.
- [15] Luomi J. *Finite Element Methods for Electrical Machines*. Chalmers University of Technology, Göteborg, 1993.
- [16] Koltai M. and Zombory L. *Elektromágneses terek gépi analízise*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [17] Bíró O. *Potenciálfüggvények örvényáramterek végeselem-analízisében*. DSc disszertáció, Magyar Tudományos Akadémia, 2003.
- [18] Iványi A. *R-Functions in Electromagnetism (Technical Report No. TUB-TR-93-EE08)*. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 1993.

- [19] Kuczmann M. and Iványi A. *The Finite Element Method in Magnetics*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [20] Lonngren K. E. and Savov S. V. *Fundamentals of Electromagnetics with Matlab*. SciTech Publishing Inc., 2005.
- [21] Fodor Gy. *Jelek, rendszerek és hálózatok*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998.
- [22] Kuczmann M. *Jelek és rendszerek*. Universitas-Győr, Győr, 2005.
- [23] Schnell L. (szerk.). *Jelek és rendszerek méréstechnikája*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [24] Silvester P. P. and Ferrari R. L. *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [25] Pepper D. W. and Heinrich J. C. *The Finite Element Method*. Taylor and Francis Group, New York, 2006.
- [26] Zimmerman W. B. J. *Multiphysics Modelling with Finite Element Method*. World Scientific Publishing Co., 2006.
- [27] Zienkiewicz O. C. and Taylor R. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, Maidenhead, 1991.
- [28] Bojtár I. and Gáspár Zs. *Végeselem-módszer építőmérnököknek*. TERC, Budapest, 2003.
- [29] Schwarz H. R. *Methode der Finiten Elemente*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [30] Bronstein I. N., Szemengyajev K. A., Musiol G., and Mühlig H. *Matematikai kézikönyv*. TEX Kiadó, Budapest, 2000.
- [31] Popper Gy. *A végeselem-módszer matematikai alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [32] Égert J. *A végeselem-módszer mechanikai alapjai*. Universitas-Győr, Győr, 2007.
- [33] Páczelt I. *A végeselem-módszer alapjai*. Miskolci Egyetem, Miskolc, 1993.
- [34] Szabó B. A. *Finite Element Analysis*. Wiley, New York, 1991.
- [35] Kovács M. and Scharle P. *A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [36] Gockenbach M. S. *Understanding and Implementing the Finite Element Method*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.
- [37] Lowther D. A. and P. P. Silvester. *Computer Aided Design in Magnetics*. Springer Verlag, New York, 1986.
- [38] Sabonnadierre J. C. and Coulomb J. L. *Finite Element Methods in CAD*. Springer Verlag, New York, 1989.

- [39] Ida N. and Bastos J. P. A. *Electromagnetics and Calculation of Fields*. Springer-Verlag, New York, NY, 1997.
- [40] Bianchi N. *Electrical Machine Analysis Using Finite Elements*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- [41] Bastos J. P. A. and Sadowski N. *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*. Marcel Dekker, New York, 2003.
- [42] Hameyer K. and Belmans R. *Numerical Modelling and Design of Electrical Machines and Devices*. WIT Press, Southampton, 1999.
- [43] Sykulski J. K. *Computational Magnetics*. Springer-Science+Business Media, Dordrecht, 1995.
- [44] Meunier G. (szerk.). *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Wiley-ISTE, 2008.
- [45] Salon S. J. *Finite Element Analysis of Electrical Machines*. Springer Science+Business Media, New York, 1995.
- [46] Kaltenbacher M. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. Springer, Berlin, 2007.
- [47] Kuczmann M. *Neural Network Based Vector Hysteresis Model and the Nondestructive Testing Method*. PhD thesis, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2005.
- [48] Bíró O. Edge element formulations of eddy current problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 169(3):391–405, 1999.
- [49] Liu Y., Bondeson A., Bergström R., Larson M.G., and Samuelsson K. Methods for computing eddy currents in laminated materials using edge elements. *Proceedings of the 10th IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 2002. szeptember 16-18*, pp:351–356.
- [50] Hano M., Miyamura T., and Hotta M. Finite element eddy current analysis by novel mixed-order vector elements. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 14:19–22, 2001/2002.
- [51] Yioultsis T. V. and Tsiboukis T. D. Multiparametric vector finite elements: a systematic approach to the construction of three-dimensional, higher order, tangential vector shape functions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32:1389–1392, 1996.
- [52] Yioultsis T. V. and Tsiboukis T. D. Development and implementation of second and third order vector finite elements in various 3-D electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33:1812–1815, 1997.
- [53] Yioultsis T. V., Kantartzis N. V., Antonopoulos C. S., and Tsiboukis T. D. A fully explicit Whitney element - time domain scheme with higher order vector finite elements for three-dimensional high frequency problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34:3288–3291, 1998.

- [54] Tsuboi H., Tanaka M., and Seshima N. Finite element method for eddy current analysis taking account of arbitrary line source currents. *Proceedings of the 11th IGTE Symposium, Graz, Ausztria, 2004. szeptember 12-15*, pp:47–51.
- [55] Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., and Okada Y. Improvements of the $\mathbf{T} - \Omega$ method for 3-D eddy current analysis. *IEEE Transactions on Magnetism*, 24:94–97, 1988.
- [56] Nakata T. 3-D electromagnetic field analysis. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 9:263–274, 1990.
- [57] Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., and Imai T. Effects of permeability of magnetic materials on errors of the $\mathbf{T} - \Omega$ method. *IEEE Transactions on Magnetism*, 26:698–701, 1990.
- [58] Bíró O., Preis K., Vrisk G., and Richter K. R. Computation of 3-D magnetostatic fields using a reduced scalar potential. *IEEE Transactions on Magnetism*, 29:1329–1332, 1993.
- [59] Simkin J. and Trowbridge C. W. Three-dimensional nonlinear electromagnetic field computation, using scalar potentials. *IEE Proc.*, 127:368–374, 1980.
- [60] Simkin J. and Trowbridge C. W. On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:423–440, 1979.
- [61] Preis K., Bardi I., Bíró O., Magele C., Renhart W., Richter K. R., and Vrisk G. Numerical analysis of 3D magnetostatic fields. *IEEE Transactions on Magnetism*, 27:3798–3803, 1991.
- [62] Webb J. P. and Forghani B. A single scalar potential method for 3D magnetostatics using edge element. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:4126–4128, 1989.
- [63] Preis K., Bárdi I., Bíró O., Magele C., Vrisk G., and Richter K. R. Different finite element formulations of 3D magnetostatic field. *IEEE Transactions on Magnetism*, 28:1056–1059, 1992.
- [64] Bíró O. and Preis K. On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:3145–3159, 1989.
- [65] Bíró O., Preis K., and Richter K. R. On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems. *IEEE Transactions on Magnetism*, 32:651–654, 1996.
- [66] Bíró O. and Preis K. Finite element analysis of 3-D eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetism*, 26:418–423, 1990.
- [67] Preis K., Bárdi I., Bíró O., Magele C., Renhart W., Richter K. R., and Vrisk G. Numerical analysis of 3D magnetostatic fields. *IEEE Transactions on Magnetism*, 27:3798–3803, 1991.

- [68] Bíró O., Preis K., Vrisk G., Richter K. R., and Tícar I. Computation of 3-D magnetostatic fields using a reduced scalar potential. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29:1329–1332, 1993.
- [69] Ren Z. and Ida N. Derivation of various dual formulations in magnetostatics via error based energy approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35:1167–1170, 1999.
- [70] Demerdash N. A., Nehl T. W., and Fouad F. A. Finite element formulation and analysis of three dimensional magnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 16:1092–1094, 1980.
- [71] Coulomb J. L. Finite element three dimensional magnetic field computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 17:3241–3246, 1981.
- [72] Kamerai A. K. Calculation of transient 3D eddy current using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:466–469, 1990.
- [73] Ziarani A. K. and Konrad A. Galerkin’s method and the variational procedure. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38:190–199, 2002.
- [74] Costabel M. and Dauge M. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. *IRMAR Technical Report, Rennes, France*, pp:1–26, 2001.
- [75] Kameari A. K. Three dimensional eddy current calculation using edge elements for magnetic vector potential. *Journal of Applied Electromagnetic in Material*, pp:225–236, 1989.
- [76] Rodger D. and Eastham J. F. Multiply connected regions in the $\mathbf{A} - \Phi$ three-dimensional eddy current formulation. *IEE Proc. A 134/1*, pp:58–66, 1987.
- [77] Mohammed O. A., Xiaodi Z., and Uler F. G. An iterative technique for 3D eddy current computations by finite elements and scalar potential. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 9:17–20, 1990.
- [78] Drago G., Molfino P., Nervi M., Orlando R. A., and Sabbi G. L. A symmetric undifferentiated fully gauged $\mathbf{T}, \Psi - \mathbf{A} - \Psi$ formulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31:1352–1355, 1995.
- [79] Kameari A. K. Calculation of transient 3D eddy currents using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:466–469, 1990.
- [80] Kaltenbacher M. and Reitzinger S. Appropriate finite-element formulations for 3-D electromagnetic-field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38:513–516, 2002.
- [81] Tran T. S., Meunier G., Labie P., and Aime J. Comparison of FEM-PEEC coupled method and finite-element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(4):996–999, 2010.

- [82] Brebbia C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, 1980.
- [83] Forsythe G. E. and Wason W. *Finite Difference Method for Partial Differential Equations*. J. Wiley, New York, 1960.
- [84] Taflove A. *Computational Electromagnetics, The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, 1995.
- [85] Gibson W. C. *The Method of Moments in Electromagnetics*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2008.
- [86] Harrington R. F. *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1993.
- [87] Garg R. *Analytical and Computational Methods in Electromagnetics*. Artech House, 2008.
- [88] Kis P. *Jiles-Atherton Model Implementation to Edge Finite Element Method*. PhD thesis, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2007.
- [89] Gyimóthy Sz. *Adaptív automatikus hálógenerálás a végelem módszerhez*. PhD thesis, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2003.
- [90] Stoyan G. (szerk.). *Matlab - frissített kiadás*. TypoTex Kiadó, 2005.
- [91] Gmsh. <http://gmsh.info/>. Utolsó megtekintés: 2016. november 15.
- [92] Geuzaine C. and Remacle J.-F. Gmsh: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309 – 1331, 2009.
- [93] Budai T. *Acceleration of the Finite Element Method by Using Parallel Computation Techniques*. Széchenyi István Egyetem, 2014.
- [94] PETSc. <http://www.mcs.anl.gov/petsc/>. Utolsó megtekintés: 2016. november 15.
- [95] Kuczmann M., Budai T., Kovács G., Marcsa D., Friedl G., Prukner P., Unger T., and Tomozi Gy. Application of PETSc and other useful packages in finite element simulation. *Pollack Periodica*, 8(2):141–148, 2013.
- [96] Marcsa D. and Kuczmann M. Optimization and finite element analysis of 3-pole magnetic bearing with nonlinear material. *Przeegląd Elektrotechniczny*, 86(12):91–94, 2010.
- [97] Marcsa D. Computer-aided design and analysis of a three-pole radial magnetic bearing. Diplomamunka, Széchenyi István Egyetem, 2011.
- [98] Marcsa D. and Kuczmann M. Modeling of radial magnetic bearing by finite element method. *Pollack Periodica: An International Journal for Engineering and Information Sciences*, 6(2):13–24, 2011.

- [99] Simulink. <https://www.mathworks.com/products/simulink/>. Utolsó megtekintés: 2016. október 30.
- [100] Scilab. <http://www.scilab.org/>. Utolsó megtekintés: 2016. október 30.
- [101] Strangas E. G. Coupling the circuit equations to the nonlinear time dependent field solution in inverter driven induction motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6):2408–2411, 1985.
- [102] Strangas E. G. and Theis K. R. Shaded pole motor design and evaluation using coupled field and circuit equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(5):1880–1882, 1985.
- [103] Arkkio A. *Analysis of Induction Motors Based on the Numerical Solution of the Magnetic Field and Circuit Equations*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, 1987.
- [104] Del Vecchio P., Sacerdoti G., and Veca G. M. Electromagnetic behaviour of a rotating screen for a superconducting inductor of a synchronous machine. In *COM-PUMAG 76 - Conference on the Computation of Magnetic Field*, pages 350–356, Oxford, UK, március 31 - április 2. 1976. Rutherford Laboratory.
- [105] Bárdi I. and Bíró O. Aszinkron gép légrésében fellépő elektromágneses tér számítása variációs módszerrel. *Elektrotechnika*, 72(9-10):266–269, 1979.
- [106] Davat B., Ren Z., and Lajoie-Mazenc M. The movement in field modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-21(6):2296–2298, 1985.
- [107] Silvester P., Cabayan H. S., and Browne B. T. Efficient techniques for finite element analysis of electric machines. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-92(4):1274–1281, 1973.
- [108] Chari M. V. K. and Silvester P. Analysis of turboalternator magnetic fields by finite elements. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-90(2):454–464, 1971.
- [109] Hameyer K., Driesen J., De Gersem H., and Belmans R. The classification of coupled field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1618–1621, 1999.
- [110] Kumbhar G. B., Kulkarni S. V., Escarela-Perez R., and Campero-Littlewood E. Applications of coupled field formulation to electrical machinery. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 26(2):489–523, 2007.
- [111] Schmidt E. Finite element analysis of electrical machines and transformers - state of the art and future trends. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 30(6):1899–1913, 2011.
- [112] Sykulski J. K. Computational electromagnetics for design optimisation: The state of the art and conjectures for the future. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Sciences*, 57(2):123 – 131, 2009.

- [113] Shen D., Meunier G., Coulomb J. L., and Sabonnadière J. C. Solution of magnetic fields and electrical circuits combined problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-21(6):2288–2291, 1985.
- [114] Vassent E., Meunier G., and Foggia A. Simulation of induction machines using complex magnetodynamic finite element method coupled with the circuit equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(5):4246–4249, 1991.
- [115] Nakata T., Takahashi N., and Fujiwara F. A stability paradox for time-stepping schemes in coupled field-circuit problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):170 – 173, 1988.
- [116] Nakata T., Takahashi N., Fujiwara F., and Ahagon A. A stability paradox for time-stepping schemes in coupled field-circuit problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(6):2582 – 2584, 1988.
- [117] Lombard P. and Meunier G. A general method for electric and magnetic coupled problem in 2D and magneto-dynamic domain. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1291–1294, 1992.
- [118] Charpentier J. F., Lefèvre Y., and Piquet H. An original and natural method of coupling electromagnetic field equations with circuit equations put in a state form. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):2489–2492, 1998.
- [119] Tsukerman I. A., Konrad A., and Lavers J. D. A method for circuit connections in time dependent eddy current problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1299–1302, 1992.
- [120] Bedrosian G. A new method for coupling finite element field solutions with external circuits and kinematics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1664 – 1668, 1993.
- [121] Sadowski N., Carlson R., Arruda S. R., da Silva C. A., and Lajoie-Mazenc M. Simulation of single-phase induction motor by a general method coupling field and circuit equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1908–1911, 1995.
- [122] Väänänen J. Circuit theoretical approach to couple two-dimensional finite element models with external circuit equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(2):400–410, 1996.
- [123] Fu W. N., Zhou P., Lin D., Stanton S., and Cendes Z. J. Modeling of solid conductors in two-dimensional transient finite-element analysis and its application to electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2):426–434, 2004.
- [124] Arkkio A. Finite element analysis of cage induction motors fed by static frequency converters. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):551–554, 1990.
- [125] Preston T. W., Reece A. B. J., and Sangha P. S. Analysis of switched reluctance drives by the finite element time-stepping method. In *IEE Fifth International Conference on Electrical Machines and Drives*, pages 933–936, London, UK, september 11-13. 1991. IET.

- [126] Piriou F. and Razek A. Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):274–277, 1988.
- [127] Piriou F. and Razek A. A model for coupled magnetic - electric circuits in electric machines with skewed slots. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):1096–1100, 1990.
- [128] Piriou F. and Razek A. Numerical simulation of a non-conventional alternator connected to a rectifier. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 5(3):512–518, 1990.
- [129] Pawlak A. M. and Nehl T. W. Transient finite element modeling of solenoid actuators: The coupled power electronics, mechanical, and magnetic field problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):270–273, 1988.
- [130] Sadowski N., Carly B., Lefevre B., Lajoie-Mazenc M., and Astier A. Finite element simulation of electric motors fed by current inverter. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1683–1688, 1993.
- [131] Kuo-Peng P., Sadowski N., Bastos J. P. A., Carlson R., Batistela N. J., and Lajoie-Mazenc M. A general method for coupling static converters with electromagnetic structures. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):2004–2009, 1997.
- [132] de Oliveira A. M., Kuo-Peng P., Sadowski N., de Andrade M. S., and Bastos J. P. A. A non-a priori approach to analyze electric machines modeled by FEM connected to static converters. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):933–936, 2002.
- [133] Turowski J. *Computational Magnetics*, chapter 6. Coupled Fields, pages 234–284. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 1995.
- [134] Eustache P., Meunier P., and Coulomb J. L. Finite element toolbox for generic coupling (magnetic, thermal, etc.). *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):1461–1464, 1996.
- [135] Williamson S. and Begg M. C. Analysis of cage induction motors - a combined fields and circuits approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6):2396 – 2399, 1985.
- [136] Lepaul S., Sykulski J. K., Biddlecombe C. S., Jay A. P., and Simkin J. Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3):1602–1605, 1999.
- [137] Driesen J., Fransen J., De Gersem H., Belmans R., and Hameyer K. Object orientend storage of material data for coupled problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3415–3418, 1998.
- [138] Kanerva S., Seman S., and Arkkio A. Inductance model for coupling finite element analysis with circuit simulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5):1620–1623, 2005.

- [139] Zhou P., Fu W. N., Lin D., Stanton S., and Cendes Z. J. Numerical modeling of magnetic devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(4):1803–1809, 2004.
- [140] Piriou F. and Razek A. Simulation of electromagnetic systems by coupling of magnetic and electric equations. *Journal of Mathematics and Computers in Simulations*, 31(3):189 – 194, 1989.
- [141] Piriou F. and Razek A. Finite element analysis in electromagnetic systems accounting for electric circuits. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1669–1675, 1993.
- [142] Tsukerman I. A., Konrad A., Meunier G., and Sabonnadière J. C. Coupled field-circuit problems: Trends and accomplishments. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1701–1704, 1993.
- [143] Costa M. C., Nabeta S. I., and Cardoso J. R. Modified nodal analysis applied to electric circuits coupled with FEM in the simulation of a universal motor. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1431–1434, 2000.
- [144] De Gersem H. *Simulation of Field-Circuit Coupled Motional Eddy Current Problems by Krylov Subspace Methods and Multilevel Techniques*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.
- [145] Lahaye D. *Algebraic Multigrid for Two-Dimensional Time Harmonic Magnetic Field Computations*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.
- [146] Kanerva S. *Simulation of Electrical Machines Circuits and Control Systems Using Finite Element Method and System Simulator*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, 2005.
- [147] Schöps S., De Gersem H., and Weiland T. Winding functions in transient magnetoquasistatic field-circuit coupled simulations. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 32(6):2063–2083, 2013.
- [148] Bartel A., Brunk M., Günther M., and Schöps S. Dynamic iteration for coupled problems of electric circuits and distributed devices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(2):315–335, 2013.
- [149] Gausling K. and Bartel A. Coupling interfaces and their impact in field/circuit co-simulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3):7209304, 2016.
- [150] Muttnyánszki Á. *Kinematika és Kinetika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1961.
- [151] de Oliveira A. M., Antunes R., Kuo-Peng P., and Sadowski N. Electrical machine analysis considering field - circuit - movement and skewing effects. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 23(4):1080–1091, 2004.
- [152] Marcса D. and Kuczmann M. Primal domain decomposition method with direct and iterative solver for circuit-field-torque coupled parallel finite element method to electric machine modelling. *Advances in Electrical and Electronic Engineering - Zilina*, 13(5):458–465, 2015.

- [153] Sadowski N., Lefèvre Y., Lajoie-Mazenc M., and Cros J. Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1410–1413, 1992.
- [154] Antunes O. J., Bastos J. P. A., Sadowski N., Razek A., Santandrea L., Bouillault F., and Rapetti F. Torque calculation with conforming and nonconforming movement interface. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4):983–986, 2006.
- [155] Marcsa D. Induction motors simulation by finite element method and different potential formulations with motion voltage term. Szakdolgozat, Széchenyi István Egyetem, 2009.
- [156] Stepien S. Determination of electromagnetic torque with on-line computation of the optimal radius of the integration contour. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 29(3):686–698, 2010.
- [157] Tsukerman I. A stability paradox for time-stepping schemes in coupled field-circuit problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1857 – 1860, 1995.
- [158] Dular P. and Kuo-Peng P. An efficient time discretization procedure for finite element-electric circuit equation coupling. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 21(2):274 – 285, 2002.
- [159] Ho S. L., Fu W. N., and Wong H. C. Application of automatic choice of step size for time stepping finite element method to induction motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):1370–1373, 1997.
- [160] Andersen O. W. and Fehrle K. G. Practical solution of eddy current problems by finite elements. In *COMPUMAG 78 - Conference on the Computation of Magnetic Field*, page 5.1, Grenoble, Franciaország, szeptember 4-6. 1978. Laboratoire d’Electrotechnique.
- [161] Lowther D. A. and Silvester P. P. Finite element models of exterior regions containing moving conductors. In *COMPUMAG 78 - Conference on the Computation of Magnetic Field*, page 3.4, Grenoble, Franciaország, szeptember 4-6. 1978. Laboratoire d’Electrotechnique.
- [162] Rodger D., Karaguler T., and Leonard P. J. A formulation for 3D moving conductor eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(5):4147–4149, 1989.
- [163] Woodson H. H. and Melcher J. R. *Electromechanical Dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.
- [164] Marcsa D. and Kuczmann M. Comparison of the $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ and the $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ formulations for the 2-D analysis of solid-rotor induction machine. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(9):3329–3333, 2009.
- [165] Ho S. L., Zhao Y., and Fu W. N. A characteristic Galerkin method for eddy-current field analysis in high-speed rotating solid conductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(11):4634–4637, 2012.

- [166] Barret P. Computation of electromagnetic, thermal and mechanical quantities during asynchronous starting up of solid salient pole synchronous machines. Experimental verification. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-100(1):190–202, 1981.
- [167] Vassent E., Meunier G., and Sabonnadière J. C. Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(4):3064–3066, 1989.
- [168] Vassent E., Meunier G., Foggia A., and Sabonnadière J. C. Simulation of induction machine operation using a step-by-step finite-element method. *Journal of Applied Physics*, 67(9):5809–5811, 1990.
- [169] Miyata K. and Maki K. Air-gap remeshing technique for rotating machines in 3D finite element modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1492–1495, 2000.
- [170] Finite Element Method Magnetics. <http://www.femm.info/wiki/HomePage>. Utolsó megtekintés: 2016. augusztus 30.
- [171] QuickField. <http://www.quickfield.com/index.htm>. Utolsó megtekintés: 2016. augusztus 30.
- [172] Agros2D. <http://www.agros2d.org/>. Utolsó megtekintés: 2016. augusztus 30.
- [173] Erdélyi E. A. and Fuchs E. F. Nonlinear magnetic field analysis of DC machines, part I: Theoretical fundamentals. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(7):1546–1554, 1970.
- [174] Fuchs E. F. and Erdélyi E. A. Nonlinear magnetic field analysis of DC machines, part II: Application of the improved treatment. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(7):1555–1564, 1970.
- [175] Aldefeld B. Calculation of the dynamic behaviour of electromagnetic actuators. In *COMPUMAG 76 - Conference on the Computation of Magnetic Field*, pages 389–393, Oxford, UK, március 31 - április 2. 1976. Rutherford Laboratory.
- [176] Abdel-Razek A. A., Coulomb J. L., Feliachi M., and Sabonnadière J. C. Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-18(2):655–659, 1982.
- [177] De Gersem H. and Weiland T. Reformulation and generalisation of the air-gap element. *International Compumag Society Newsletter*, 12(1):1–8, 2005.
- [178] Gerber S. and Wang R.-J. Implementation of a moving band solver for finite element analysis of electrical machines. In *Proceedings of the 22nd South African Universities Power engineering Conference 2014*, pages 249–254, Durban, Dél-afrikai Köztársaság, január 30-31. 2014. Rutherford Laboratory.
- [179] Gerber S. and Wang R.-J. Evaluation of movement facilitating techniques for finite element analysis of magnetically geared electrical machine. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(2):7400206, 2015.

- [180] Wang R., Mohellebi H., Flack T. J., Kamper M. J., Buys J. D., and Feliachi M. Two-dimensional cartesian air-gap element (CAGE) for dynamic finite-element modeling of electrical machines with a flat air gap. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):1357–1360, 2002.
- [181] De Gersem H., Ion M., Wilke M., Weiland T., and Demenko A. Trigonometric interpolation at sliding surface and in moving bands of electrical machine models. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 25(1):31–42, 2006.
- [182] De Gersem H., Gyselinck J., Dular P., Hameyer K., and Weiland T. Comparison of sliding-surface and moving-band techniques in frequency-domain finite-element models of rotating machines. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 23(4):1006–1014, 2004.
- [183] Shi X., Le Menach Y., Ducreux J.-P., and Piriou F. Comparison of slip surface and moving band techniques for modelling movement in 3D with FEM. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 25(1):17–30, 2006.
- [184] Antunes O. J., Batos J. P. A., and Sadowski N. Using high-order finite elements in problems with movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2):529–532, 2004.
- [185] Dular P., Geuzaine C., da Luz M. V. F., Sadowski N., and Bastos J. P. A. Connection boundary condition with different types of finite elements applied to periodicity conditions and to the moving band. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 20(1):109–119, 2001.
- [186] da Luz M. V. F., Dular P., Sadowski N., Geuzaine C., and Bastos J. P. A. Analysis of a permanent magnet generator with dual formulations using periodicity conditions and moving band. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):961–964, 2002.
- [187] Marcsa D. Rotational motion modelling for numerical analysis of electric machines. *Acta Technica Jaurinensis*, 10(2):124 – 136, 2017.
- [188] Marcsa D. A feszültség és a mechanikai egyenlet alkalmazása a végelelemes szimulációban. In *IV. Mechwart András Ifjúsági Találkozó*, page Paper Marcsa 4 p., Debrecen, szeptember 9. 2014.
- [189] Demenko A. Movement simulation in finite element analysis of electric machine dynamics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):1553–1556, 1996.
- [190] Arkkio A., Biernat A., Bucki B., Kaminski G., Niemenmaa A., Smak A., and Staszewski P. Finite-element analysis for a rolling-rotor electrical machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2727–2730, 2010.
- [191] Niemenmaa A., Salmai L., Arkkio A., and Saari J. Modeling motion, stiffness, and damping of a permanent-magnet shaft coupling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2763–2766, 2010.

- [192] Im D.-H. and Kim C.-E. Finite element force calculation of a linear induction motor taking account of the movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5):3495–3498, 1994.
- [193] Salon S. J. and Schneider J. M. A hybrid finite element - boundary integral formulation of the eddy current problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-18(2):461–466, 1982.
- [194] Nicolet A., Delincé F., Genon A., and Legros W. Finite element - boundary element coupling for the movement modeling in two-dimensional structures. *Journal de Physique III*, 2(11):2035–2044, 1992.
- [195] Henrotte F., Nicolet A., Hédia A., Genon A., and Legros W. Modelling of electromechanical relay taking into account movement and electric circuits. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5):3236–3239, 1994.
- [196] Preston T. W., Reece A. B. J., and Sangha P. S. Induction motor analysis by time-stepping technique. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):471–474, 1988.
- [197] Rodger D., Lai H. C., and Leonard P. J. Coupled elements for problems involving movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):548–550, 1990.
- [198] Ho S. L., Li H. L., Fu W. N., and Wong H. C. A novel approach to circuit-field-torque coupled time stepping finite element modeling of electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1886–1889, 2000.
- [199] Marechal Y., Meunier G., Coulomb J. L., and Magnin H. A general purpose tool for restoring inter-element continuity. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2):1728–1731, 1992.
- [200] Perrin-Bit R. and Coulomb J. L. A three dimensional finite element mesh connection for problems involving movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1920–1923, 1995.
- [201] Dreher T., Perrin-Bit R., Meunier G., and Coulomb J. L. A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):1070–1073, 1996.
- [202] Marcsa D. and Kuczmann M. Schur-complement based parallel finite element analysis coupled with circuit and mechanical equations. *Computational Problems of Electrical Engineering*, 4(1):23–28, 2014.
- [203] Marcsa D. and Kuczmann M. Schur complement method with iterative solver for 2D field-circuit coupling finite element problem with movement. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2014(12):145–148, 2014.
- [204] De Gersem H. and Weiland T. Harmonic weighting functions at the sliding interface of a finite-element machine model incorporating angular displacement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2):545–548, 2004.

- [205] Ion M., De Gersem H., Wilke M., and Weiland T. Sliding-surface interface conditions for 3D machine models discretised by the finite integration technique. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 25(2):427–439, 2006.
- [206] Antunes O. J., Bastos J. P. A., Sadowski N., Razek A., Santandrea L., Bouillault F., and Rapetti F. Comparison between nonconforming movement methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4):599–602, 2006.
- [207] Rapetti F., Bouillault F., Santandrea L., Buffa A., Maday Y., and Razek A. Calculation of eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1351–1354, 2000.
- [208] Antunes O. J., Bastos J. P. A., Sadowski N., Razek A., Santandrea L., Bouillault F., and Rapetti F. Using hierarchic interpolation with mortar element method for electrical machines analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5):1472–1475, 2005.
- [209] Antunes O. J., Bastos J. P. A., and Sadowski N. Comparison between torque calculation methods in a non-conforming movement interface. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 27(1):27–36, 2008.
- [210] Lange E., Henrotte F., and Hameyer K. A variational formulation for nonconforming sliding interfaces in finite element analysis of electric machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2755–2758, 2010.
- [211] Marcza D. and Kuczmann M. Design and control for torque ripple reduction of a 3-phase switched reluctance motor. *Computers & Mathematics with Applications*, 74(1):89 – 95, 2017.
- [212] Bernardi C., Maday Y., and Patera A. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method. In *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*, pages 13–51. Pitman, 1990.
- [213] COMSOL Multiphysics. <https://www.comsol.com/>. Utolsó megtekintés: 2016. augusztus 30.
- [214] ANSYS Maxwell. <http://www.ansys.com/Products/Electronics/ANSYS-Maxwell>. Utolsó megtekintés: 2016. augusztus 30.
- [215] Lindholm D. A. Automatic triangular mesh generation of surfaces of polyhedra. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-19(6):2539–2542, 1983.
- [216] Rózsa P. *Lineáris Algebra és Alkalmazásai*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [217] Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2003.
- [218] Strang G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge Press, Wellesley, MA, 2009. 4. kiadás.

- [219] Stoyan G. and Takó G. *Numerikus módszerek I.* Typotex Kiadó, Budapest, 1993.
- [220] Faragó I. and Horváth R. *Numerikus Módszerek.* Typotex Kiadó, Budapest, 2013. 2. kiadás.
- [221] Wetzl F. *Lineáris Algebra - azoknak, akik érteni is szeretnék.* Typotex Kiadó, Budapest, 2011.
- [222] Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J. M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., and Van der Vorst H. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [223] Golub G. H. and Van Loan C. F. *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [224] Trowbridge C. W., editor. *Proceedings of the COMPUMAG - Conference on the Computational of Magnetic Fields,* St. Catherine’s College, Oxford, március 31 - április 2. 1976. International Compumag Society, Rutherford Laboratory, Science Research Council, Cilton, Didcot, Oxon, UK.
- [225] Sabonnadiere J. C., editor. *COMPUMAG - Conference on the Computation of Magnetic Fields Communications Proceedings,* Grenoble, szeptember 4 - 6. 1978. International Compumag Society, Laboratoire d’Electrotechnique, Grenoble, Franciaország.
- [226] Sterling T., Becker D. J., Savarese D., Dorband J. E., Ranawake U. A., and Packer C. V. Beowulf: A parallel workstation for scientific computation. In *Proceedings of the 24th International Conference on Parallel Processing,* pages 11 – 14. CRC Press, 1995.
- [227] Top500 supercomputing sites. <https://www.top500.org/>. Utolsó meglejtetés: 2016. augusztus 30.
- [228] Fu H., Liao J., Yang J., Wang L., Song Z., Huang X., Yang C., Xue W., Liu F., Qiao F., Zhao W., Yin X., Hou C., Zhang C., Ge W., Zhang J., Wang Y., Zhuo C., and Yang G. The sunway taihulight supercomputer: System and applications. *Science China Information Science,* 59(7):1–16, 2016.
- [229] Smith B. F., Bjørstad P. E., and Gropp W. D. *Domain Decomposition - Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, 1996.
- [230] Fragakis Y. and Papadrakakis M. The mosaic of high performance domain decomposition methods for structural mechanics: Formulation, interrelation and numerical efficiency of primal and dual methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 192(35-36):3799–3830, 2003.
- [231] Fragakis Y. and Papadrakakis M. The mosaic of high performance domain decomposition methods for structural mechanics - part ii: Formulation enhancements, multiple right-hand sides and implicit dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 193(42-44):4611–4662, 2004.

- [232] Toselli A. and Widlund O. B. *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer, Berlin, 2005.
- [233] Kruis J. *Domain Decomposition Methods for Distributed Computing*. Saxe-Coburg Publications, Kippen, Stirling, 2006.
- [234] Magoulès F. (szerk.). *Mesh Partitioning Techniques and Domain Decomposition Methods*. Saxe-Coburg Publications, Kippen, Stirling, 2007.
- [235] Stoyan G. and Takó G. *Numerikus módszerek III*. Typotex Kiadó, Budapest, 2008.
- [236] Dolean V., Jolivet P., and Nataf F. *An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory, and Parallel Implementation*. Master, Franciaország, 2015.
- [237] Domain decomposition. <http://www.ddm.org/>. Utolsó megtekintés: 2016. augusztus 30.
- [238] Yang G., Chen X., Lei G., Saho K. R., Guo Y., Zhu J., and Lavers J. D. Domain decomposition combined radial basis function collocation method to solve transient eddy current magnetic problems with moving conductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(10):2939–2942, 2011.
- [239] Geiser J. *Decomposition Methods for Differential Equations: Theory and Applications*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2009.
- [240] Bertsekas D. P. and Tsitsiklis J. N. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1997.
- [241] Nakano T., Kawase Y., Yamaguchi T., Nakamura M., Nishikawa N., and Uechara H. Parallel computing of magnetic field for rotating machines on the earth simulator. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):3273–3276, 2010.
- [242] Böhmer S., Lange E., Hafner M., Cramer T., Bischof C., and Hameyer K. Mesh decomposition for efficient parallel computing of electrical machines by means of FEM accounting for motion. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):891–894, 2012.
- [243] Takahashi Y., Iwashita T., Nakashima H., Tokumasu T., Fujita M., Wakao S., Fujiwara K., and Ishihara Y. Parallel time-periodic finite-element method for steady-state analysis of rotating machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):1019–1022, 2012.
- [244] Keränen J., Pippuri J., Malinen M., Ruokolainen J., Råback P., Lyly M., and Tammi K. Efficient parallel 3-D computation of electrical machines with Elmer. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3):7203704, 2015.
- [245] Takahashi Y., Fujiwara K., Iwashita T., and Nakashima H. Parallel finite-element analysis of rotating machines based on domain decomposition considering nonconforming mesh connection. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3):7401604, 2016.

- [246] Hoppe R. H. W., Iliash Y., Ramminger S., and Wachutka G. Domain decomposition methods in electrothermomechanical coupling problems. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering Series : Lecture Notes in Computational Science and Engineering Vol. 40*, pages 387 – 394. Springer, Berlin, 2004.
- [247] Hoppe R. H. W., Petrova S., and Schulz V. 3D structural optimization in electromagnetics. In *Proceedings of the 13th International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 477 – 484, Lyon, Franciaország, október 9-12. 2000. CIMNE, Barcelona.
- [248] Haase G., Kuhn M., and Langer U. Parallel 3D maxwell solvers based on domain decomposition data distribution. In *Proceedings of the 12th International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 353 – 364, Lyon, Franciaország, október 9-12. 2000. CIMNE, Barcelona.
- [249] Langer U., Pohoata A., and Steinbach O. Application of preconditioned coupled FETI/BETI solver to 2D magnetic field problems. Technical report SFB-Report 2004-23, Johannes Kepler University, Linz, 2004.
- [250] Camargos A. F. P., Batalha R. M. S., Martins C. A. P. S., Silva E. J., and Soares G. L. Superlinear speedup in a 3-D parallel conjugate gradient solver. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1602 – 1605, 2009.
- [251] Kanayama H. and Sugimoto S.-I. Effectiveness of $A-\phi$ method in a parallel computing with an iterative domain decomposition method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4):539 – 542, 2006.
- [252] Yao W. *Accurate, Efficient, and Stable Domain Decomposition Methods For Analysis of Electromechanical Problems*. PhD thesis, University of Illinois, 2013.
- [253] Yao W., Jin J.-M., and Krein P. T. A highly efficient domain decomposition method applied to 3-D finite element analysis of electromechanical and electric machine problems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 27(4):1078 – 1086, 2012.
- [254] Yao W., Jin J.-M., and Krein P. T. A finite-element-based domain decomposition method for efficient simulation of nonlinear electromechanical problems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 29(2):309 – 319, 2014.
- [255] Paraschos G. N. and Vouvakis M. N. The dual, overlapping primal FETI (FETI-DOP) domain decomposition. In *2011 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI)*, pages 2983 – 2986, július 2011.
- [256] Rapetti F. and Toselli A. A FETI preconditioner for two dimensional edge element approximations of Maxwell’s equations on non-matching grids. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(2):92 – 108, 2001.
- [257] Toselli A. and Vasseur X. Robust and efficient FETI domain decomposition algorithms for edge element approximations. In *Proceedings of 11th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering*, pages 16 – 21, Graz, Ausztria, szeptember 13-15. 2004. Verlag d. Techn. Univ. Graz.

- [258] Lee S. C., Vouvakis M., and Lee J. F. A non-overlapping domain decomposition method with non-matching grids for modeling large finite element antenna arrays. *Journal of Computational Physics*, 203(1):1 – 21, 2005.
- [259] Pasquetti R., Pavarino L. F., Rapetti F., and Zampieri E. Neumann-Neumann-Schur complement methods for Fekete spectral elements. *Journal of Engineering Mathematics*, 56(3):323 – 335, 2006.
- [260] Dolean V., Gerardo-Giorda L., and Gander M. J. Optimized Schwarz methods for Maxwell equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(3):2193 – 2213, 2009.
- [261] Rawat V. and Lee J. F. Nonoverlapping domain decomposition with second order transmission condition for the time-harmonic Maxwell’s equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(6):3584 – 3603, 2010.
- [262] Zsaki A., Rixen D., and Paraschivoiu M. A substructure-based iterative inner solver coupled with Uzawa’s algorithm for the Stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43(2):215 – 230, 2003.
- [263] Halbach A., Dular P., and Geuzaine C. Comparison of nonlinear domain decomposition schemes for coupled electromechanical problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3):7204904, 2016.
- [264] Marsic N., Waltz C., Lee J.-F., and Geuzaine C. Domain decomposition methods for time-harmonic electromagnetic waves with high-order whitney forms. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3):7204504, 2016.
- [265] Farhat C. and Roux F. X. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205 – 1227, 1991.
- [266] Magoulés F. and F.-X. Roux. Lagrangian formulation of domain decomposition methods: A unified theory. *Applied Mathematical Modelling*, 30(7):593 – 615, 2006.
- [267] Farhat C. A saddle-point principle domain decomposition method for the solution of solid mechanics problems. In *Proceedings of the 5th International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 271 – 292, Norfolk, Virginia, május 6-8. 1991.
- [268] Mandel J. Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3):233–241, 1993.
- [269] Mandel J. and Brezina M. Balancing domain decomposition: Theory and performances in two and three dimensions. Technical report 7, Computational Mathematics Group, University of Colorado at Denver, 1993.
- [270] Schwarz H. A. Über einen grenzübergang durch alternierendes verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15:272–286, 1870.
- [271] Przemieniecki J. S. Matrix structural analysis of substructures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1(1):138–147, 1963.

- [272] Lavers D., Boglaev I., and Sirotkin V. Numerical solution of transient 2-D eddy current problem by domain decomposition algorithms. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3):1413–1416, 1996.
- [273] Sebestyén I. Electric-field calculation for HV insulator using domain-decomposition method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):1213–1216, 2002.
- [274] Perrussel R., Voyer D., Nicolas L., Scorretti R., and Burais N. Domain decomposition for computing extremely low frequency induced current in the human body. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5):886–889, 2011.
- [275] Matlab. *Partial Differential Equation Toolbox User’s Guide*. The MathWorks, Inc., 1996.
- [276] Navarro R. B. and Montoya C. G. *Mesh Partitioning Techniques and Domain Decomposition Methods*, chapter 1. Graph and Mesh Partitioning: An Overview of the Current State-of-the-Art, pages 1 – 26. Saxe-Coburg Publications, Kippen, Stirling, 2007.
- [277] Nikishkov G. P. *Mesh Partitioning Techniques and Domain Decomposition Methods*, chapter 5. Basics of the Domain Decomposition Method for Finite Element Analysis, pages 119 – 142. Saxe-Coburg Publications, Kippen, Stirling, 2007.
- [278] Iványi P. and Radó J. *Előfeldolgozás párhuzamos számításokhoz*. Typotex Kiadó, Budapest, 2014.
- [279] Farhat C. A simple and efficient automatic FEM domain decomposer. *Computers & Structures*, 28(5):579 – 602, 1988.
- [280] Karypis G. and Kumar V. METIS - family of multilevel partitioning algorithms (online: <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>, utolsó látogatás: 2016. szeptember 15.). *Department of Computer Science and Engineering, University of Minnesota, USA*, 2013.
- [281] Dryja M. and Widlund O. B. Towards a unified theory of domain decomposition algorithms for elliptic problems. In *Third International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 3 – 21, Houston, USA, március 6-11. 1989.
- [282] Nikishkov G. P., Makinaouchi A., Yagawa G., and Yoshimura S. Performance study of the domain decomposition method with direct equation solver for parallel finite element analysis. *Computational Mechanics*, 19(1):84 – 93, 1996.
- [283] Bramble J. H., Pasciak J. E., and Vassilev A. T. Analysis of non-overlapping domain decomposition algorithms with inexact solver. *Mathematics of Computation*, 67(221):1 – 19, 1998.
- [284] Guerrero M. S. *Parallel Multigrid Algorithms for Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer - 6. fejezet*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Spanyolország, 2000.

- [285] Bank R. E. and Jimack P. K. A new parallel domain decomposition method for the adaptive finite element solution of elliptic partial differential equations. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 13(5):327 – 350, 2001.
- [286] Cros J.-M. A preconditioner for the Schur complement domain decomposition method. In *Fourteenth International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 373–380, Cocoyoc, Mexikó, január 6-11. 2002.
- [287] Magoulès F. and Roux F.-X. *Mesh Partitioning Techniques and Domain Decomposition Methods*, chapter 4. Algorithms and Theory for Substructuring and Domain Decomposition Methods, pages 89–118. Saxe-Coburg Publications, Kippen, Stirling, 2007.
- [288] Bramble J. H., Pasciak J. E., and Schatz A. H. The construction of preconditioner for elliptic problems by substructuring I. *Mathematical Computation*, 47(175):103 – 134, 1986.
- [289] Bramble J. H., Pasciak J. E., and Schatz A. H. The construction of preconditioner for elliptic problems by substructuring II. *Mathematical Computation*, 49(179):1 – 16, 1987.
- [290] Bramble J. H., Pasciak J. E., and Schatz A. H. The construction of preconditioner for elliptic problems by substructuring III. *Mathematical Computation*, 51(184):415 – 430, 1988.
- [291] Marcza D. and Kuczmann M. Parallel solution of an electrostatic field problem - case study. *Pollack Periodica: An International Journal for Engineering and Information Sciences*, 7(2):25–34, 2012.
- [292] Marcza D. and Kuczmann M. Parallel solution of electrostatic and static magnetic field problems by domain decomposition method. *Przegląd Elektrotechniczny*, 89(2b):49–52, 2013.
- [293] Marcza D. and Kuczmann M. Performance study of domain decomposition methods for 2D parallel finite element analysis. *Pollack Periodica: An International Journal for Engineering and Information Sciences*, 8(3):47–58, 2013.
- [294] Marcza D. and Kuczmann M. Comparison of domain decomposition methods for elliptic partial differential problems with unstructured meshes. *Przegląd Elektrotechniczny*, 88(12b):1–4, 2012.
- [295] Kuczmann M. Parallel finite element method. *Przegląd Elektrotechniczny*, 87(12b):100–102, 2011.
- [296] Yang Y.-S. *Parallel Computing for Nonlinear Dynamic Finite Element Structural Analysis with General Sparse Matrix Technology*. PhD thesis, National Taiwan University, Tajvan, 2000.
- [297] Coulomb F. Domain decomposition and associate block-jacobi method for the diffusion equation. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 410 – 427, Houston, Texas, március 20-22. 1989. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

- [298] De Roeck Y.-H. and LeTallec P. Analysis and test of a local domain-decomposition preconditioner. In *Fourth International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 112 – 128, Moszkva, Oroszország, május 21-25. 1990.
- [299] Goldfeld P. Balancing Neumann-Neumann for (in)compressible linear elasticity and (generalized) Stokes - parallel implementation. In *Fourteenth International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 209 – 216, Cocoyoc, Mexikó, január 6-11. 2002.
- [300] Bhardwaj M., Day D., Farhat C., Lesoinne M., Pierson K., and Rixen D. Application of the FETI method to ASCII problems - scalability results on 1000 processors and discussion of highly heterogeneous problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1 - 3):513 – 535, 2000.
- [301] Kamath C. The FETI level 1 method: Theory and implementation. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.33.5152>, 2000. Utolsó megtekintés: 2016. október 08.
- [302] Farhat C., Mandel J., and Roux F. X. Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, 115(3 - 4):365 – 385, 1994.
- [303] Gosselet P. and Rey C. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(4):515 – 572, 2006.
- [304] Farhat C., Pierson K., and Lesoinne M. The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, 184(2- 4):333 – 374, 2000.
- [305] Farhat C., Crivelli L., and Roux F. X. Extending substructure based iterative solvers to multiple load and repeated analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, 117(1- 2):195 – 209, 1994.
- [306] Gosselet P., Rixen D. J., and Rey C. A domain decomposition strategy to efficiently solve structures containing repeated patterns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(7):828 – 842, 2008.
- [307] Lesoinne M. and Pierson K. An efficient FETI implementation on distributed shared memory machines with independent numbers of subdomains and processors. *Contemporary Mathematics*, 218:318 – 324, 1998.
- [308] Rixen D. J. Dual schur complement method for semi-definite problems. *Contemporary Mathematics*, 218:341 – 348, 1998.
- [309] Konzubek T., Vondrák V., Menšík M., Horák D., Dostál Z., Hapla V., Kabelíková P., and Čermák M. Total FETI domain decomposition method and its massively parallel implementation. *Advances in Engineering Software*, 60–61:14 – 22, 2013. CIVIL-COMP: Parallel, Distributed, Grid and Cloud Computing.

- [310] Tezaur R. *Analysis of Lagrange Multiplier Based Domain Decomposition*. PhD thesis, University of Colorado, Denver, USA, 1998.
- [311] Gosselet P., Rey C., and Rixen D. J. On the initial estimation of interface forces in FETI methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(25):2749 – 2764, 2003.
- [312] Rixen D. J., Farhat C., Tezaur R., and Mandel J. Theoretical comparison of the FETI and algebraically partitioned FETI methods, and performance comparison with a direct sparse solver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4):501 – 533, 1999.
- [313] Farhat C. and Mandel J. The two-level FETI method for static and dynamic plate problems part I: An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, 155(1- 2):129 – 151, 1998.
- [314] Farhat C., Chen P.-S., Mandel J., and Roux F. X. The two-level FETI method part II: Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, 155(1- 2):153 – 179, 1998.
- [315] Marcса D. and Kuczmann M. Parallel edge finite element method to solve eddy current field problems. *Acta Technica CSAV*, 60(3):277–290, 2015.
- [316] Marcса D. Domain decomposition algorithms for edge element based parabolic type problems. *Acta Technica Jaurinensis*, 7(2):193–206, 2014.
- [317] Marcса D. and Kuczmann M. Finite element tearing and interconnecting method and its algorithms for parallel solution of magnetic field problems. *Electrical, Control and Communication Engineering*, 3(1):25–30, 2013.
- [318] Toselli A. FETI domain decomposition methods for scalar advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(43 - 44):5759 – 5776, 2001.
- [319] Ben-Israel A. and Greville T. N. E. *Generalized Inverses - Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2003. 2nd edition.
- [320] Shklarski G. and Toledo S. Computing the null space of finite element problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37 - 40):3084 – 3095, 2009.
- [321] Le Borne S. Block computation and representation of a sparse nullspace basis of a rectangular matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, 428(11 - 12):2455 – 2467, 2008.
- [322] Matlab. <https://www.mathworks.com/products/matlab/>. Utolsó megtekintés: 2016. október 30.
- [323] Karátson J. *Numerikus funkcionálanalízis*. Typotex Kiadó, Budapest, 2014.

- [324] Åström K. J. and Murray R. M. *Feedback Systems - An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [325] Lantos B. *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. - Egyváltozós szabályozások*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2009.
- [326] Franklin G. F., Powell J. D., and Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1994.
- [327] Keviczky L., Bars R., Hetthéssy J., Barta A., and Bányász Cs. *Szabályozástechnika*. Universitas-Győr Nonprofit Kft., Győr, 2008.
- [328] Bokor J. and Gáspár P. *Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal*. Typotex, Budapest, 2008.
- [329] Golten J. and Verwer A. *Control System Design and Simulation*. McGraw-Hill Book Company, London, 1991.
- [330] Tuschak R. *Szabályozástechnika*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998.
- [331] Li K., Feng X., ZHANG J., Zheng J., and Huang D. A new design of flux observer based on finite element method. In *Proceedings of International Conference on Electrical Machines and Systems, 2009. ICEMS 2009*, pages 1 – 5, Nov 2009.
- [332] Hachicha M. R., Ghariani M., and Neji R. Induction machine finite element model for field-oriented control in electric vehicle power train. In *International Conference on Electrical Sciences and Technologies in Maghreb (CISTEM), 2014*, pages 1 – 11, Nov 2014.
- [333] Lee J. H., Kim S. Y., and Kim Y. H. On-line observer design for sensorless vector control of LIM servo system. In *9th IET International Conference on Computation in Electromagnetics (CEM 2014)*, pages 1–2, March 2014.
- [334] Rauh A., Senkel L., and Aschemann H. Finite volume and finite element models for real-time control and state estimation of two-dimensional heat transfer processes. In *19th International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2014*, pages 600 – 605, Sept 2014.
- [335] Bernat J. and Stepien S. Application of optimal current driver for the torque control of BLDC motor. *Archives of Electrical Engineering*, 60(2):149 – 158, 2011.
- [336] Tahmasebi R., Alizadeh H. V., Rahimi S., and Boulet B. Robust H_∞ force control of a solenoid actuator using experimental data and finite element method. In *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 1172 – 1177, október 8-10. 2014.
- [337] de Kock H. W., Rix A. J., and Kamper M. J. Optimal torque control of synchronous machines based on finite-element analysis. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(1):413 – 419, 2010.
- [338] Labiod C., Srairi K., Mahdad B., Benchouis M. T., and Benbouzid M. E. H. Speed control of 8/6 switched reluctance motor with torque ripple reduction taking into account magnetic saturation effects. *Energy Procedia*, 74(1):112 – 121, 2015.

- [339] Singh S. K. and Tripathi R. K. Minimization of torque ripples in SRM drive using DITC for electrical vehicle application. In *Engineering and Systems (SCES), 2013 Students Conference on*, pages 1 – 5, 2013.
- [340] Hu Y. and Ding W. Torque ripple minimization of a novel modular stator switched reluctance motor based on direct instantaneous torque control. In *2016 Eleventh International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)*, pages 1 – 7, 2016.
- [341] Haemmerich D. and Webster J. G. Automatic control of finite element models for temperature-controlled radiofrequency ablation. *BioMedical engineering OnLine*, 4(42):1 – 8, 2005.
- [342] Jenkouk V., Hirt G., Franzke M., and Zhang T. Finite element analysis of the ring rolling process with integrated closed-loop control. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 61(1):267 – 270, 2012.
- [343] Roel Ortiz J. L., Sadowski N., Kuo-Peng P., Batistela N. J., and Bastos J. P. A. Coupling static converter with control loop and non-linear electromagnetic devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5):3514 – 3517, 2001.
- [344] Ito M., Kawabata K., Tajima F., and Motoi N. Coupled magnetic field analysis with circuit and kinematics modelings of brushless motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):1702 – 1705, 1997.
- [345] JMAG. <https://www.jmag-international.com/>. Utolsó megtekintés: 2016. október 30.
- [346] Opera simulation software. <http://operafea.com/>. Utolsó megtekintés: 2016. október 30.
- [347] Flux 2D/3D. <http://www.cedrat.com/software/flux.html>. Utolsó megtekintés: 2016. október 30.
- [348] Demenko A. Time-stepping FE analysis of electric motor drives with semiconductor converters. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5):3264 – 3267, 1994.
- [349] Ohdachi Y., Kawase Y., and Hirako M. Dynamic analysis of vector controlled induction motor using finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1904 – 1907, 1995.
- [350] Ahn S. C., Lee J. H., and Hyun D. S. Dynamic characteristic analysis of LIM using coupled FEM and control algorithm. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):1876 – 1880, 2000.
- [351] Ho S. L., Fu W. N., Li H. L., Wong H. C., and Tan H. Performance analysis of brushless DC motors including features of the control loop in the finite element modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5):3370 – 3374, 2001.
- [352] Jabbar M. A., Phyu H. N., and Liu Z. J. Analysis of the starting process of a disk drive spindle motor by time stepping finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(4):3204 – 3206, 2004.

- [353] Fodor Gy. *Villamos hálózatok csomóponti analízise*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- [354] Bangura J. F. Directly coupled electromagnetic field-electric circuit model for analysis of a vector-controlled wound field brushless starter generator. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 26(4):1033 – 1040, 2011.
- [355] Manot G., Lefèvre Y., Piquet H., and Richardeau F. Integration of control loops in coupled field circuit model to study magnetic devices supplied by power electronic converter and their control. *COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 21(4):563 – 572, 2002.
- [356] Bhide R. S., Kumbhar G. B., Kulkarni S. V., and Koria J. P. Coupled circuit-field formulation for analysis for parallel operation of converters with interphase transformer. *Electric Power Systems Research*, 78(1):158 – 164, 2008.
- [357] Chen J., Zhu J., and Guo Y. A 2-D nonlinear FEA tool embedded in Matlab/Simulink surrounding for application of electromagnetic field analysis in power converters. In *Proceedings of International Conference on Electrical Machines and Systems, 2007 - ICEMS*, pages 1423 – 1427, október 8-11. 2007.
- [358] Chen J., Zhu J., and Guo Y. A general method for designing the transformer of flyback converters based on nonlinear FEA of electromagnetic field coupled with external circuit. In *Proceedings of International Conference on Electrical Machines and Systems, 2007 - ICEMS*, pages 195 – 199, október 8-11. 2007.
- [359] Kuo-Peng P., Bastos J. P. A., Sadowski N., and Carlson R. Analysis of a combined converter - electromagnetic device by taking into account its control loop. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 14(4):1430–1434, 2000.
- [360] Lombard P. and Meunier G. A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymmetric and transient systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1737 – 1740, 1993.
- [361] Marcса D. and Kuczmann M. Closed loop voltage control of a solenoid using parallel finite element method. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 35(4):1439–1449, 2016.
- [362] Marcса D. and Kuczmann M. Closed loop control of finite element model in magnetic system. *Pollack Periodica: An International Journal for Engineering and Information Sciences*, 10(3):19–30, 2015.
- [363] Davey K. R. Analytic analysis of single and three-phase induction motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3721–3727, 1998.
- [364] Marcса D. and Kuczmann M. Nonlinear two-dimensional finite element modeling of a single-phase induction motor. In *Proceedings of the 13th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering and European TEAM Workshop*, pages 44 – 49, Graz, Ausztria, szeptember 21-24. 2008.

- [365] International T.E.A.M. Workshop Problem 30a - Induction Motor Analyses. <http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem30a.pdf>. Utolsó megtekintés: 2016. november 15.
- [366] International T.E.A.M. Workshop Problem 30b - Analytic Analysis of Single and Three Phase Induction Motors. <http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem30b.pdf>. Utolsó megtekintés: 2016. november 15.
- [367] Gieras J. F. *Permanent Magnet Motor Technology - Design and Applications*. CRC Press, New York, 2010. 3rd edition.
- [368] Liska J. *Villamos gépek – IV. Aszinkron gépek*. Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1967.
- [369] Asztalos P. *Villamosgépek II. – Példatár*. Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1968.
- [370] ONELAB - Open Numerical Engineering LABORatory. http://onelab.info/wiki/Main_Page. Utolsó megtekintés: 2016. november 30.
- [371] Retter Gy. *Villamosenergia-átalakítók I*. Műszaki Könyvkideó, Budapest, 1986.
- [372] Gyselinck J., Vandeveld L., Dular P., Geuzaine C., and Legros W. A general method for the frequency domain FE modeling of rotating electromagnetic devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3):1147 – 1150, 2003.
- [373] Gyselinck J. *Twee dimensionale dynamische eindige-elementenmodellering van statische en roterende elektromagnetische energieomzetters*. PhD thesis, University of Gent, 2000.
- [374] Gyselinck J., Vandeveld L., and Melkebeek J. Multi-slice modeling of electrical machines with skewed slots - the skew discretization error. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5):3233 – 3237, 2002.
- [375] Vajda I. *Villamos gépek elmélete és tervezése*. Elektronikus jegyzet, Budapest, 2012.
- [376] Vajda I. and Lázár G. *Számítógéppel segített géptervezés*. Elektronikus jegyzet, Budapest, 2005.
- [377] Marcsa D. and Kuczmann M. Two-dimensional modeling of the motion in induction motor with ferromagnetic hysteresis. *Revue Roumaine des Sciences Techniques - Serie Electrotechnique et Energetique*, 55(4):351–356, 2010.
- [378] Marcsa D. Finite element analysis of a solid-rotor induction machine. *Acta Technica Jaurinensis*, 3(2):197–206, 2010.
- [379] Marcsa D. and Kuczmann M. Nonlinear two-dimensional motional finite element modeling of a rotational eddy current field problem. *Przeglad Elektrotechniczny*, 85(12):110–113, 2009.

- [380] Marcsa D. and Kuczmann M. Motional finite element simulation of a single-phase induction motor. *Pollack Periodica: An International Journal for Engineering and Information Sciences*, 4(2):57–66, 2009.
- [381] Marcsa D. and Kuczmann M. Finite element analysis of single-phase induction motors. In *Proceedings of the COMSOL Conference*, pages 1 – 4, Budapest, Magyarország, november 24. 2008.
- [382] Marcsa D. and Kuczmann M. Domain decomposition algorithms for parallel solution of magnetic field problems. In *Proceedings of the 13th International Symposium "Topical Problems in the Field of Electrical and Power Engineering * Doctoral School of Energy and Geotechnology II"*, pages 102 – 105, Parnu, Észtország, január 14-19. 2013.
- [383] Rixen D. J. Extended preconditioners for FETI method applied to constrained problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(1):1 – 26, 2002.
- [384] Stepień S. and Patecki A. Modelling and position control of voltage forced electro-mechanical actuator. *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 25(2):412 – 426, 2006.
- [385] Bernat J., Stepień S., Stranz A., Szymanski G., and Sykulski J. K. Infinite time horizon optimal current control of a stepper motor exploiting a finite element model. *Bulletin of the Polish Academy of Science - Technical Sciences*, 62(4):835 – 841, 2014.
- [386] Keviczky L. and Bányász Cs. *Két-szabadságfokú irányítási rendszerek*. Széchenyi University Press, 2012.
- [387] Zhao C., Xue D., and Chen Y. Q. A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference Mechatronics and Automation*, pages 216 – 221, 2005.
- [388] Åström K. J. and Höglund T. *PID Controller: Theory, Design, and Tuning*. ISA: The Instrumentation, Systems and Automation Society, Durham, NC, 1995.
- [389] Ahn J.-W. *Torque Control*, chapter 8. - Switched Reluctance Motor, pages 201 – 252. In Tech, 2011.
- [390] Marcsa D. and Kuczmann M. Control of a finite element based dynamic system. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2015(12):155–158, 2015.
- [391] Marcsa D. and Kuczmann M. Finite element analysis of switched reluctance motor with rotor position based control. *Pollack Periodica: An International Journal for Engineering and Information Sciences*, 11(3):153 – 164, 2016.
- [392] Woothipatanapan S., Chanchaoensokk P., and Jangwanitlert A. An improvement asymmetric half-bridge converter for switched reluctance motor in low-speed operation with current regulator mode. *Journal of Power Electronics*, 15(6):1533 – 1546, 2015.

- [393] Farhat C., Lesoinne M., LeTallec P., Pierson K., and Rixen D. FETI - DP: A dual-primal unified FETI method – part I: A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:1523 – 1544, 2001.
- [394] Mandel J. and Tezaur R. On the convergence of a dual-primal substructuring method. *Numerische Mathematik*, 88(3):543 – 558, 2001.
- [395] Reichert K., Freundl H., and Vogt W. The calculation of forces and torques within numerical magnetic field calculation methods. In *COMPUMAG 76 - Conference on the Computation of Magnetic Field*, pages 64–73, Oxford, UK, március 31 – április 2. 1976.
- [396] Aldefeld B. Forces in electromagnetic devices. In *COMPUMAG 78 - Conference on the Computation of Magnetic Field*, page 8.1, Grenoble, Franciaország, szeptember 4-6. 1978.
- [397] Coulomb J. L. A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness. *IEEE Transactions on Magnetics*, 19(6):2514–2519, 1983.
- [398] Müller W. Comparison of different methods of force calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2):1058–1061, 1990.
- [399] Bossavit A. Virtual power principle and Maxwell’s tensor: which comes first? *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 30(6):1804–1814, 2011.
- [400] Henrotte F. Handbook for the computation of electromagnetic forces in a continuous medium. *International Compumag Society Newsletter*, 11(2):2 – 8, 2004.
- [401] Coulomb J. L. and Meunier G. Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, MAG-20(5):1894–1896, 1984.
- [402] Bossavit A. Forces in magnetostatics and their computation. *Journal of Applied Physics*, 67(9):5812–5814, 1990.
- [403] Kabashima T. and Kawahara A. Force calculation using magnetizing currents. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1):451–454, 1988.
- [404] Choi H. S., Park I. H., and Lee S. H. Generalized equivalent magnetizing current method for total force calculation of magnetized bodies in contact. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4):531–534, 2006.
- [405] Tevan Gy. A mágneses erők általános kifejezései. In *A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei - X. kötet*, pages 365–376. Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc, 1964.
- [406] Vinsard G., Dufour S., and Laporte B. An approximation for the air-slots of complex shaped motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(5):2449–2452, 1998.

[407] Retter Gy. *Mágneses terek és körök*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.

[408] Iványi A. *Hardverek villamoságtani alapjai*. Pollack Press, Pécs, 2015.