Egyfázisú és háromfázisú indukciós gép vizsgálata

Írta:

Marcsa Dániel
III. éves Villamosmérnök B.Sc. hallgató
(Automatizálási szakirány)

Konzulens:

Dr. Kuczmann Miklós Ph.D.
egyetemi adjunktus

Elektromágneses Terek Laboratórium
Távközlési Tanszék
Széchenyi István Egyetem
2008. március
Győr

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **2**

2. Az indukciós motor végeselemes modellje **4**

2.1. A mágneses tér és a tekercsek egyenletei 4

2.1.1. A kétdimenziós kvázistacionárius mágneses tér 4

2.1.2. A tér forrása 6

2.1.3. Anyagtulajdonságok 7

2.2. A feladat geometriája 7

2.2.1. Az egyfázisú indukciós motor 7

2.2.2. A háromfázisú indukciós motor 9

2.3. Szimulációs eredmények 10

2.3.1. A polárkoordináta-rendszer 11

2.3.2. A radiális mágneses fluxus 11

2.3.3. Az azimutális mágneses térerősség 13

2.3.4. Nyomaték 15

2.3.5. A tekercsben indukált feszültség 20

3. Összefoglalás **23**

1. fejezet

Bevezető

A villamos gépek mechanikai munkát villamos energiává, vagy villamos energiát mechanikai munkává alakítanak át. Az előbbiek a generátorok, az utóbbiak a motorok. De ezen felosztás csak rendeltetés szempontjából jellemző, működési elvben, és elvi felépítésben nem különböztethetők meg egymástól. Általában akármelyik villamos gép dolgozhat generátorként és motorként, sőt vannak olyan gépek, melyek üzemszerűen váltakozva egyszer generátoros, máskor motoros üzemi állapotban vannak. De egyes gépfajták üzemi tulajdonságai inkább motoros, vagy generátoros üzemben előnyösek, ezért többnyire az adott feladatra alkalmazzák őket. Így például a szinkron gépeket generátornak, az aszinkron gépeket pedig motornak használják. De vannak olyan esetek is, amikor szinkron motorokat, vagy aszinkron generátorokat alkalmaznak [1, 2].

A villamos gépek elterjedésének első éveiben túlnyomórészt egyenáramú gépeket használtak. Később a váltakozó áramú gépek sok alkalmazási területről kiszorították az egyenáramú gépeket. Ennek fő oka, hogy a váltakozó áramú energia átvitele az áramforrástól a fogyasztóig általában sokkal gazdaságosabb az egyenáramúénál. Ez a körülmény vezetett a váltakozó áramú gépek kifejlesztéséhez. De vannak még olyan területek (például villamos vasúti vontatás, hajócsavarok, bányafelvonók hajtása) ahol az egyenáramú gép bizonyos - főként motoros - üzemi tulajdonságai (például indítás, fordulatszámszabályozás) melyek olyan előnyök, amivel a váltakozó áramú gép nem rendelkezik. Alkalmaznak még egyenáramú generátorokat szinkron gépek gerjesztésére is [1, 2].

Az aszinkron gépek a legáltalánosabban használt, legelterjedtebb villamos gépek. Használhatók generátorként, és motorként is, de főként motorként alkalmazzák. Alapvetően háromfázisú kivitelben készülnek.

Az aszinkron motornak számos előnye van a többi villamos motorral szemben, ezért a villamos hajtások legfontosabb villamos gépének tekinthető [1–3]. Ezen előnyök közül a legfontosabbak a háromfázisú válatakozó áramú elosztóhálózat széleskörű elterjedése következtében táplálásuk problémamentes, egyszerű kapcsoló- és indítóberendezéseken keresztül kapcsolható közvetlenül a hálózatra, egyszerű szerkezeti felépítés és működés következtében kezelésük és karbantartásuk nem bonyolult, és szögsebességük a terhelés változásával csak elhanyagolható mértékben változik, ezért állandó szögsebességet igénylő munkagépek hajtásához elterjedten alkalmazzák.

Hátránya viszont, hogy veszteségmentes indítás, szögsebesség változtatás és a fékezési energia visszatáplálás szempontjából nehézkesebb mint például az egyenáramú motor. Ezért nagyobb teljesítményű motorok (körülbelül 100kW felett) főként gyakoribb kapcsolások és szélesebb tartományú szögsebességváltoztatás esetén az alkalmazásuk megfontolandó.

Az aszinkron motor forgórészének szögsebessége a terheléstől függő mértékben, néhány százalékkal elmarad az állórész tekercsében folyó áram által keltett forgó mágneses mező szögsebességétől, tehát nem forog azzal szinkron. Innen az aszinkron elnevezés. A forgórész szögsebességének lemeradását szlipnek (csúszásnak) hívják, és s-sel jelöljük. Mivel az álló- és forgórész között a villamos kapcsolatot az elektromágneses indukció teremti meg, ezért indukciós motornak is nevezik [3].

Az indukciós gépek nemcsak háromfázisú, hanem egyfázisú kivitelben is készülnek. Az egyfázisú motor tulajdonságai közelről sem olyan kedvezőek, mint a háromfázisúé, ezért sokkal kisebb a jelentősége, és csak azokon a helyeken használják, ahol nem áll rendelkezésre háromfázisú hálózat. Ha a motort a hálózatra kapcsoljuk, nem indul el, ha azonban valamelyik irányba forgásba hozzuk, egy bizonyos fordulatszám elérése után, önmagától tovább tud gyorsulni. Ezeket a motorokat használják például kis szivattyúkban, ventillátorokban, háztartási gépekben.

A dolgozatban bemutatásra kerülő probléma, az International Compumag Society honlapján közétett feladatok közül a TEAM Workshops (Testing Electromagnetic Analysis Methods Workshops) 30a feladat [4].

A TEAM egy nyílt nemzetközi munkacsoportot képez, melynek célja a különféle elektromágneses térszámítási eljárások összehasonlítása. A TEAM Workshops-on belül a legkülönfélébb tesztfeladatokkal találkozhatunk az elektromágnesesség témakörön belül.

A feladat egy háromfázisú és egy egyfázisú motor elemzése, és a kiszámított adatok igazolása. A feladat lényege, az adott, lemért adatokat, paramétereket, összehasonlítom az általam kiszámolt adatokkal. A számítás valamilyen numerikus térszámítási eljárással, a mi esetünkben a végeselem-módszerrel (FEM - Finite Element Method) történik.

Ezen adatok a nyomaték, feszültség/fordulat, továbbá a háromfázisú motor esetében az x tengely mentén, adott pontokban a $\boldsymbol{B}_r$ radiális mágneses fluxus valós és képzetes része, és az $\boldsymbol{H}_\theta$ azimutális mágneses tér valós, és képzetes része.

Azért választottam ezt a feladatot, mert a diplomamunkám is az indukciós gépek szimulációjáról fog szólni, és a későbbiekben az itt bemutatásra kerülő különböző paraméterek számítási eljárásit szeretném majd abba felhasználni.

2. fejezet

Az indukciós motor végeselemes modellje

A villamos gépek tervezésekor alapvető a gépben lévő mágneses tér ismerete. A pontos téreloszlást a Maxwell-egyenletekkel lehet meghatározni. A villamos gépek bonyolult felépítése, a vasmag nemlinearitása és telítődése, továbbá a téregyenletek megoldása nagyon nehéz feladat, amely csak numerikus módszerrel végezhetőel. A téregyenleteket a tekercs feszültségegyenleteivel párosítva, a rotor mozgási egyenletei is igen bonyolultak lehetnek.

Az elöbb említett okok miatt, a legtöbb kutatói munkához hozzákapcsolódik valamilyen térszámítási eljárás. A különféle eljárások fejlődésével egyre több és több mágneses térproblémát meglehet oldani. A villamos gép háromdimenziós időfüggő mágneses terének megoldása igen nagy és bonyolult feladat, bár napjaink számítástechnikai tudásával, alkalmas számítógéppel meg lehet ezen feladatokat is oldani. De ezen feladat alapvetően leegyszerűsödik egy kétdimenziós mágneses tér szimulciójára, mert a motort végtelen kiterjedésünek lehet tekinteni, így a motor tengelyirányú kiterjedését elhanyagoljuk. Ezáltal nem foglalkozunk a motor szélein folyó jelenségek vizsgálatával, azonban ez az elhanyagolás a tapasztalatok alapján nem számottevő.

Számos különféle módszer van a mágneses téregyenletek megoldására, mint például a peremelem-módszer, a végesdifferenciák-módszere vagy a végeselem-módszer [5]. Ebben a dolgozatban numerikus eljárásként a végeselem-módszert (FEM) használjuk .

2.1. A mágneses tér és a tekercsek egyenletei

2.1.1. A kétdimenziós kvázistacionárius mágneses tér

Az indukciós motort mágneses terét a kvázistacionárius Maxwell-egyenletekkel lehet leírni [6–9],

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2.2}$$

ahol

$\boldsymbol{H}$ a mágneses térerősség,
$\boldsymbol{J}$ az áramsűrűség,
$\boldsymbol{E}$ az elektromos térerősség,
$\boldsymbol{B}$ a mágneses fluxus,

az eltolási áramot elhanyagolhatjuk, mert az elhanyagolhatóan kicsi a vezetési áramhoz képest,

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right| \ll |\boldsymbol{J}|, \tag{2.3}$$

ahol $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ az eltolási áramsűrűség. Az indukciós gépeknél használt alacsony (általában a hálózat frekvenciája) frekvenciatartomány miatt ez egy jó közelítés.

A lineáris anyagegyenletnél ν-t, a reluktanciát használjuk,

$$\boldsymbol{H} = \nu \boldsymbol{B}. \tag{2.4}$$

A mágneses fluxust az $\boldsymbol{A}$ mágneses vektorpotenciállal adhatjuk meg, mint [6, 9, 10]

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{2.5}$$

és ha behelyettesítjük a (2.5)-ös és a (2.4)-es egyenletet a (2.1)-es Amper-törvénybe, akkor megkapjuk a stacionárius mágneses tér vektorpotenciál-formalizmusának alapegyenletét,

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}. \tag{2.6}$$

A mágneses vektorpotenciál divergenciáját $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, a Coulomb mérték. A Coulomb mérték csak kétdimenziós esetben teljesül automatikusan, háromdimenziós esetben elő-kell írni [9].

A kétdimenziós modell alapja, hogy az áramsűrűségnek csak z irányú komponense, míg a mágneses térerősségnek és a mágneses fluxusnak csak x és y irányú összetevője van [6, 8, 9],

$$\boldsymbol{J} = J(x, y, t)\boldsymbol{e}_z, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{H} = H_x(x, y, t)\boldsymbol{e}_x + H_y(x, y, t)\boldsymbol{e}_y, \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{B} = B_x(x, y, t)\boldsymbol{e}_x + B_y(x, y, t)\boldsymbol{e}_y. \tag{2.9}$$

A mágneses vektorpotenciálnak is csak z irányú összetevője van [6, 8, 9],

$$\boldsymbol{A} = A(x, y, t)\boldsymbol{e}_z, \tag{2.10}$$

mivel

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial y} - \boldsymbol{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial x}. \tag{2.11}$$

Az egy komponensből álló mágneses vektorpotenciál divergenciája pedig egyenlő nullával,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial z} = 0, \tag{2.12}$$

azaz a Coulomb mérték automatikusan teljesül.
Ennek következtében a (2.6)-os egyenletből következik [6–9],

$$-\nabla \cdot (\nu \nabla \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J}, \tag{2.13}$$

a $\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nu \nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \boldsymbol{A})$ azonoság szerint.

2.1.2. A tér forrása

A (2.6)-os egyenlet jobb oldalán lévő áramsűrűség vezető anyagban a következő anyagegyenlettel határozható meg [6, 8, 9],

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{2.14}$$

ahol σ az anyag vezetőképessége. A (2.2)-es és a (2.5)-ös egyenletet kombinálva a következőt kapjuk,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{2.15}$$

ami eleget tesz a következőképp meghatározott áramsűrűségnek,

$$\boldsymbol{J} = -\sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi, \tag{2.16}$$

ahol ϕ az elektromos skalárpotenciál [6,7,9]. Ez az egyenlet az örvényáramokat adja meg a vezető anyagban.

A fázistekercsben a szkinhatást kizárjuk, és az áramsűrűséget a következőképp adjuk meg,

$$\boldsymbol{J}_w = \frac{N_w i_w}{S_w} \cdot \boldsymbol{e}_z, \tag{2.17}$$

ahol N_w a tekercs menetszáma, i_w a tekercsben lévő áram, S_w a tekercs keresztmetszete [6, 7].
$\boldsymbol{J}$ tehát a fázistekercsben adott, míg vezető anyagban a térszámítással kaphatjuk meg.

2.1.3. Anyagtulajdonságok

Az örvényáram okozta Joule-veszteség a fémet melegíti, ami a villamos gépekben hátrányos, mert káros túlmelegedéshez vezethet. Ezért a villamos gépek vastestét az örvényáram csökkentése céljából lemezelik. A lemezelés készülhet úgynevezett transzformátorlemezből, vagy dinamólemezből. A lemezeket a fluxus iránya mentén kell elhelyezni. A főfluxus irányára merőleges síkban kifejlődő örvényáramok a szigetelőrétegbe ütköznek, és zárt kört csak a lemez vékony keresztmetszetén belül találnak. Egy lemez kis keresztmetszetén a fluxus is kicsi így az általuk okozott örvényáramok is kicsik, sokszor elhanyagolhatók [3].

A lemezelt vasmag mágneses tulajdonságát, a reluktanciával modellezzük, ami lágy mágneses anyagok esetén a $\boldsymbol{B}$ mágneses fluxus egyértékű nemlineáris függvénye, ami íly módon kizárja a mágneses hiszterézis hatását a vizsgálatból. Jelenleg tovább egyszerüsödik a kapcsolat, mert ν lineáris, a feladat kiírása során.

A tengely és a pólussaru, általában acélból készül, amit vassal modellezünk, a nemlineáris mágnesezési görbével együtt. De mivel a feladat lineáris, ezért itt a vas nemlinearitását nem vesszük figyelembe. Kétféle vas van, az egyikben elhanyagolható, a másikban nem az örvényáram nagysága. Az előbbi a lemezelés miatt. Az örvényáramot megkapjuk (2.16)-os egyenletből, amikor az elektromos skalárpotenciálnak nulla, mert kétdimenziós esetben nullának vehető a ϕ skalárpotenciál [6, 7, 9].

Eredményül a fent leírtakból a mágneses tér a különböző anyagban a következőképpen írható le,

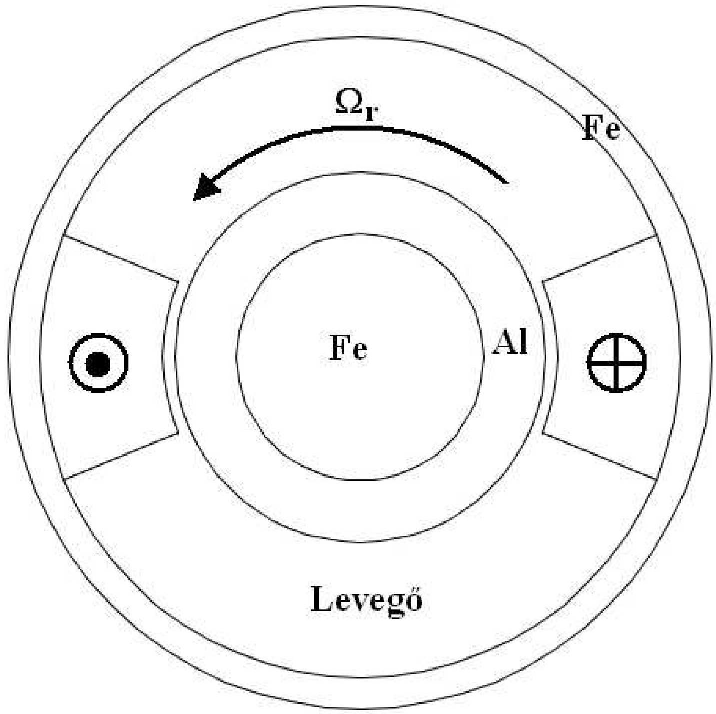
$$-\nabla \cdot (\nu \nabla \boldsymbol{A}) = \begin{cases} 0, & \text{levegőben és lemezelt vasban,} \\ N_w i_w / S_w, & \text{a fázistekercsekben,} \\ -\sigma \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{A}, & \text{a vasban, ahol az örvényáram nem hanyagolható el.} \end{cases} \tag{2.18}$$

2.2. A feladat geometriája

2.2.1. Az egyfázisú indukciós motor

Az 2.1-es ábrán az egyfázisú indukciós gép tengelyre merőleges keresztmetszete látható. A tömör forgórész áll egy vasmagból és körülötte aluminium rétegből. A vasmag relatív permeabilitása: $\mu_r = 30$, és vezetőképessége $\sigma = 1,6 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$. A vasmagot körülfogó aluminium vezetőképessége: $\sigma = 3,72 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$. A tekercsek nincsenek a hornyokba süllyesztve. A tekercsekben folyó egyenletes eloszlású áramsűsűrség nagysága $|\boldsymbol{J}| = 3,1 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$. A lemezelt állórész relatív permeabilitása $\mu_r = 30$, és benne az örvényáramok elhanyagolhatók. A motor minden anyaga lineáris mágneses karakterisztikával rendelkezik.

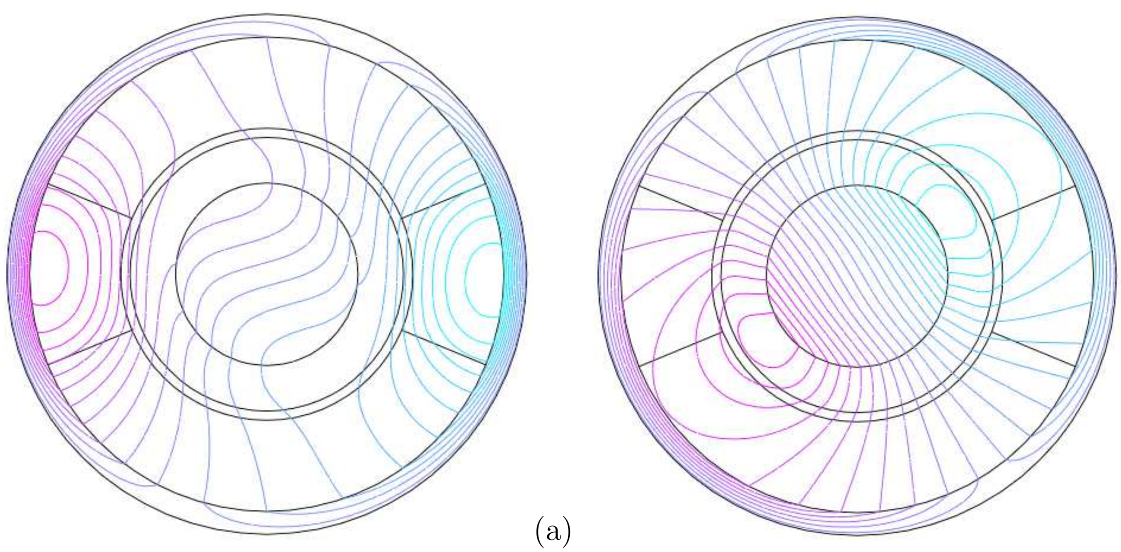
A frekvencia f=60 Hz, mivel ezt a feladat egy amerikai professzortól származik [4], és ott a hálózati frekvencia 60 Hz. A 60 Hz-es szinuszosan váltakozó áram, amit rákapcsolunk az indukciós gépre pedig olyan mágneses mezőt hoz létre, amelynek térbeli eloszlása változatlan, csak a nagysága változik az idő függvényében. Ezt lüktető mágne-



2.1. ábra. Egyfázusú indukciós motor felépítése

ses mezőnek nevezik.

A 2.2-es ábrán az egyfázisú motor mágneses fluxusvonalai látható, azon a fordulatszámon ($\Omega_r \approx 278.55 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$) ahol a maximális nyomatékot adja le. Az (a) ábrán a mágneses fluxusvonalak valós részét, míg a (b) ábrán a mágneses fluxusvonalak képzetes részét lehet látni.

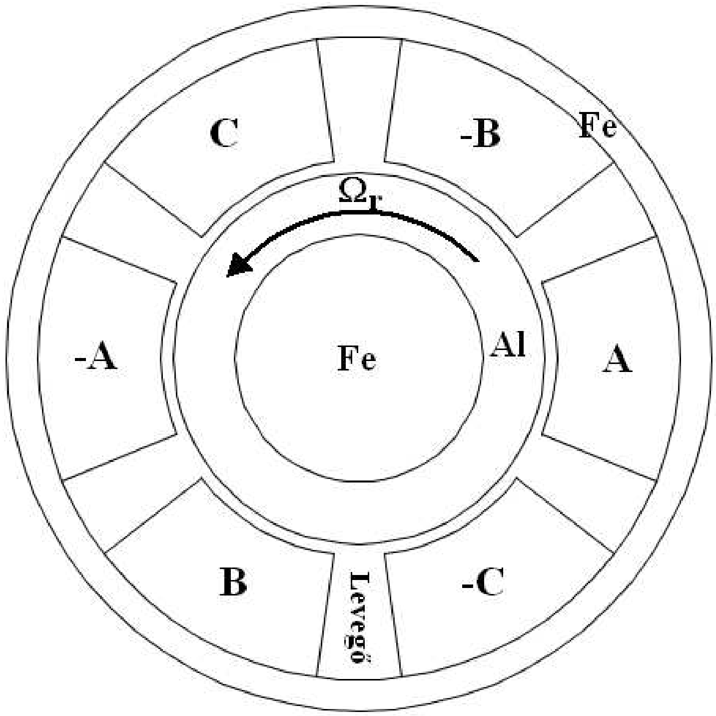


(a) (b)

2.2. ábra. Az egyfázisú indukciós motor mágneses fluxusvonalai

2.2.2. A háromfázisú indukciós motor

A 2.3-as ábrán a háromfázisú indukciós gép tengelyre merőleges keresztmetszete látható. A háromfázisú motor felépítésében a plussz két pár tekercsben különbözik az



2.3. ábra. Háromfázisú indukciós motor felépítése

egyfázisútól, anyagában tekintve teljesen megegyeznek. A tekercseket itt is f=60 Hz frekvenciájú szinuszos árammal gerjesztjük. Ebből következik, a szinkron fordulatszám $\boldsymbol{\Omega}_s$=377$\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, ami úgy kapunk meg, $\boldsymbol{\Omega}_s = 2\pi \cdot f$.

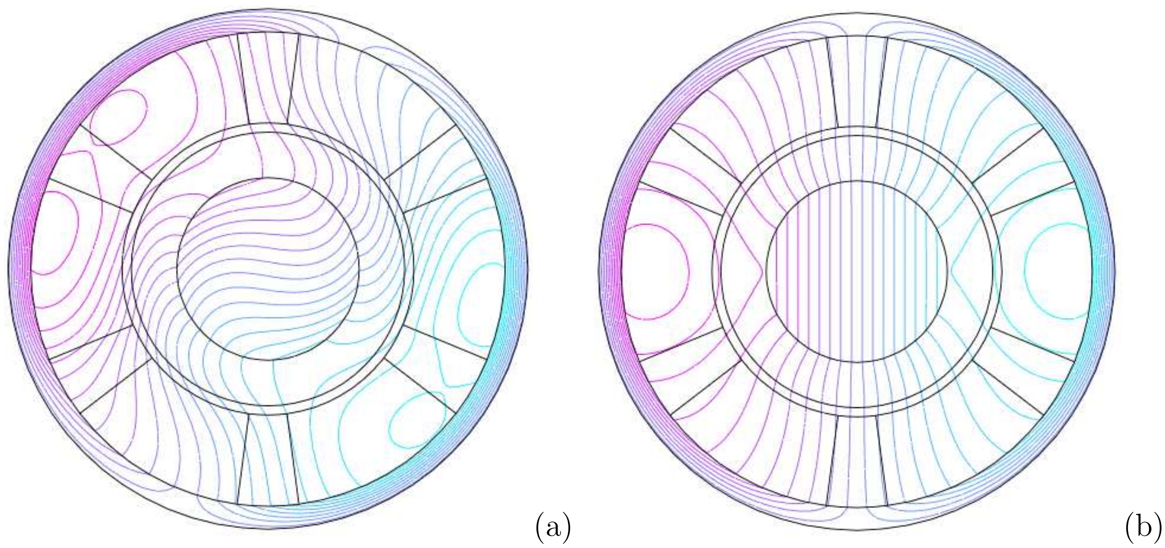
A három fázisban folyó áramsűrűség 120°-kal vannak eltolva egymáshoz képest,

$$\boldsymbol{J}_A = \boldsymbol{J}\cos(\omega t) \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{J}_B = \boldsymbol{J}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{J}_C = \boldsymbol{J}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{2.21}$$

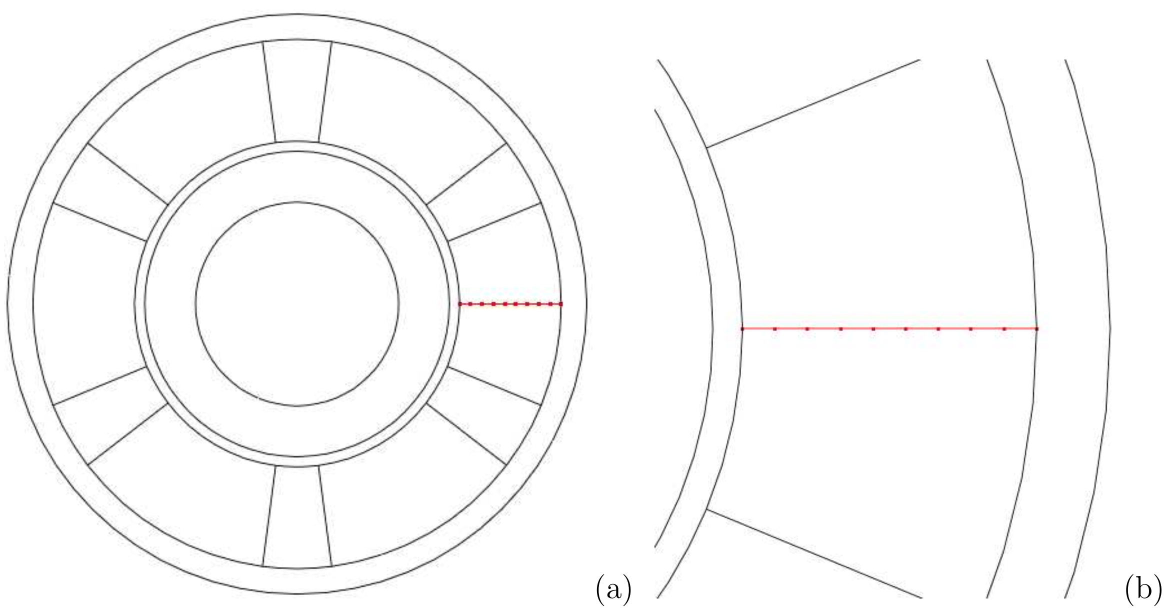
A 2.4.-es ábrán a háromfázisú motor mágneses fluxusvonalai látható. Az (a) ábrán a mágneses fluxusvonalakat $\Omega_r = 200\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$-os fordulatszámnál ábrázoltuk, ahol a gép a maximális nyomatékot adja le. A (b) ábrán a mágneses fluxusvonalakat $\Omega_r = 377\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$-os fordulatszámnál, vagyis a szinkron fordulatszámnál lehet látni.



2.4. ábra. A háromfázisú indukciós motor mágneses fluxusvonalai

2.3. Szimulációs eredmények

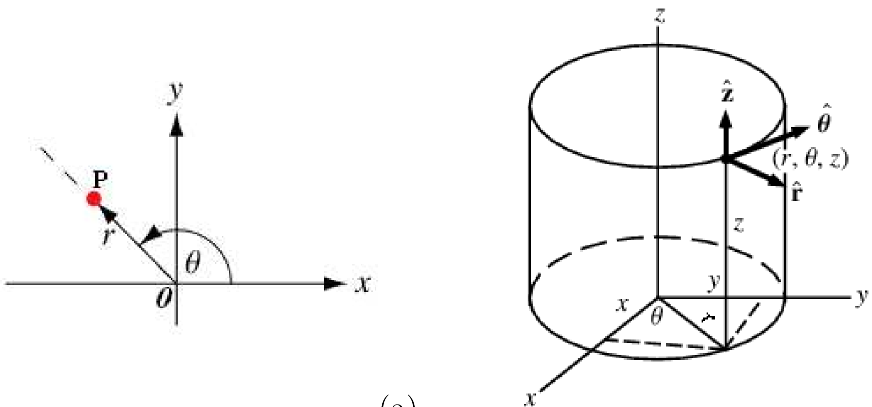
Mint már a bevezetőben említettem, a háromfázisú motornál számítani kell a $\boldsymbol{B}_r$ radiális mágneses fluxus valós, és képzetes részét, valamint a $\boldsymbol{H}_\theta$ azimutális mágneses tér valós, és képzetes részét, az x tengely adott pontjai mentén $\Omega_r = 200\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$-os fordulatszámnál, a mérések ugyanis ezen feltételek mellett történtek. Ez a tíz pont látható a 2.5-ös ábrán. A (b) ábrán pedig a vizsgált rész látható kinagyítva.



2.5. ábra. A mérés helyei

2.3.1. A polárkoordináta-rendszer

Az elöbb említett, r radiális, és Θ azimutális tengelyirányok talán nem olyan ismertek, így némi magyarázatra szorulnak.



(a) (b)

2.6. ábra. A polárkoordináta-rendszer

A görbevonalú koordináta-rendszerek egyik gyakran használt típusa a polárkoordináta-rendszer [11, 12].

A 2.6-os (a) ábrán azt lehet látni, hogy van egy *0* rögzített kezdőpontja (pólus), és az $0x$ rögzített félegyenes (sarktengely, polártengely). A *0* és $0x$ által meghatározott síkbeli polárkoordináta-rendszerben a sík minden P pontjához egy r távolság rendelhető ($0 \leq r$), ami az $0P$ távolságot adja meg. A Θ szög ($0 \leq \Theta < 2\pi$) a $0x$ és a $0P$ egyenesek által bezárt, az óramutató járásával ellentétes irányban, radiánban mért szög.

A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben, ha az egyik pontból el szeretnénk jutni egy másik pontba, akkor azt mondjuk meg, hogy mennyit kell menni az x-tengellyel, majd az y-tengellyel párhuzamosan. A polárkoordináta-rendszerben az iránnyal és a távolsággal adhatók meg a pontok helyzete. Ez látható a 2.6-os (a) ábrán, ahol a P ponthoz hogy eljussunk, meg kell adni az r távolságot, és az irányát a Θ szöget. A 2.6-os (b) ábrán pedig a hengerkoordináta-rendszer háromdimeniós általánosítása látható polárkoordináta-rendszerré, ahol a harmadik dimenzió a magasság (z) tengely.

Ha egy polárkoordináta-rendszer pólusa és polártengelye egybeesik egy derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjával és x tengelyének pozitív felével a következő összefüggéseket írhatjuk fel [11],

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2.22}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.23}$$

2.3.2. A radiális mágneses fluxus

A 2.1-es táblázatban a radiális mágneses fluxus mért és számított, valós és képzetes része látható.

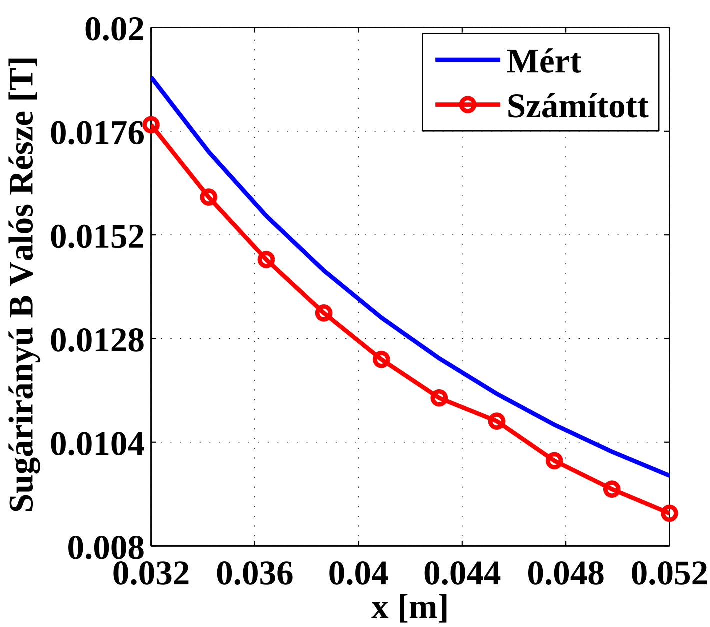
A $\boldsymbol{B}_r$ radiális mágneses fluxusnak a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben csak x és y komponense van. A polárkoordináta-rendszerben a (2.22)-es képlet segítségével meg lehet határozni az r radiális összetevőt.

Mivel a $\boldsymbol{B}_r$ radiális mágneses fluxusnak az y komponense elhanyagolhatóan kicsi, ezért csak a x komponenst vettem figyelembe.

2.1. táblázat. A mért és számított radiális mágneses fluxus összehasonlítása

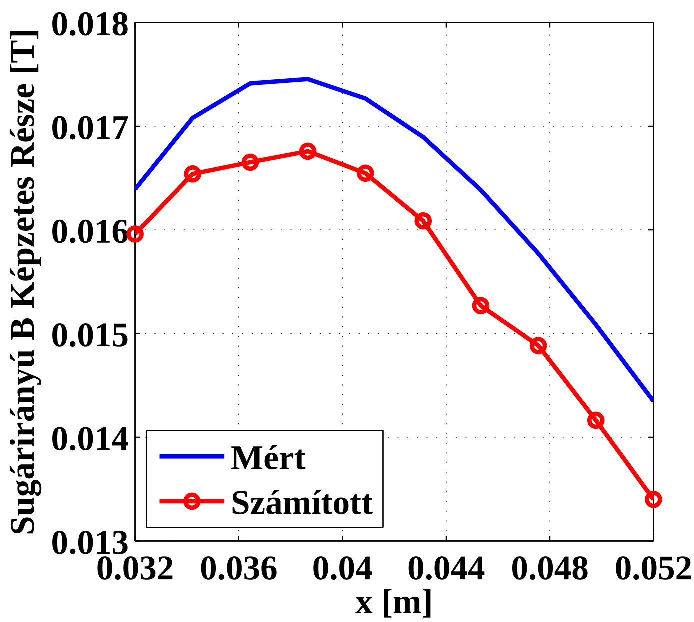
x (m)	Real($\boldsymbol{B}_r$) (T) mért	Real($\boldsymbol{B}_r$) (T) számított	Imag($\boldsymbol{B}_r$) (T) mért	Imag($\boldsymbol{B}_r$) (T) számított
0.032	0.018854	0.0177	0.016392	0.01596
0.034222	0.017122	0.0161	0.017079	0.01654
0.036444	0.015643	0.01463	0.017412	0.01665
0.038667	0.014375	0.0134	0.017455	0.01676
0.040889	0.013284	0.01232	0.017266	0.01655
0.043111	0.012341	0.01143	0.016895	0.0161
0.045333	0.011522	0.01089	0.016385	0.01527
0.047556	0.010807	0.00997	0.015772	0.01488
0.049778	0.010179	0.00931	0.015085	0.01416
0.052	0.009625	0.008757	0.014347	0.0134

A 2.7-es és a 2.8-as képen pedig a mért és számított értékek vannak árbrázolva a könnyebb összehasonlíthatóság érdekében.



2.7. ábra. A radiális mágneses fluxus valós része

A 2.7-es és a 2.8-as képen a mért eredmények mindkét esetben kicsit nagyobbak a számítottnál. Ez a használt $\boldsymbol{A}, V-\boldsymbol{A}$-formalizmusból [9, 13] következik, amely a helyes eredményt alulról közelíti meg [9,13,14]. A 2.7-es és a 2.8-as képet látva, rossznak tűnhet a számítás, mert a két görbe között nagy az eltérés. Azonban ez az eltérés a valós résznél tízezredes, a képzetes résznél ezredes nagyságrendbe tartozik, ami igen kicsi eltérés. Ez az eltérés pedig nem csupán a számítási hibából, hanem esetleg mérési hibából is adódhat. A radiális mágneses fluxus valós részénél (2.7. ábra) az adatok 9%-os, a képzetes részénél (2.8. ábra) 6%-os hibahatáron belül vannak.



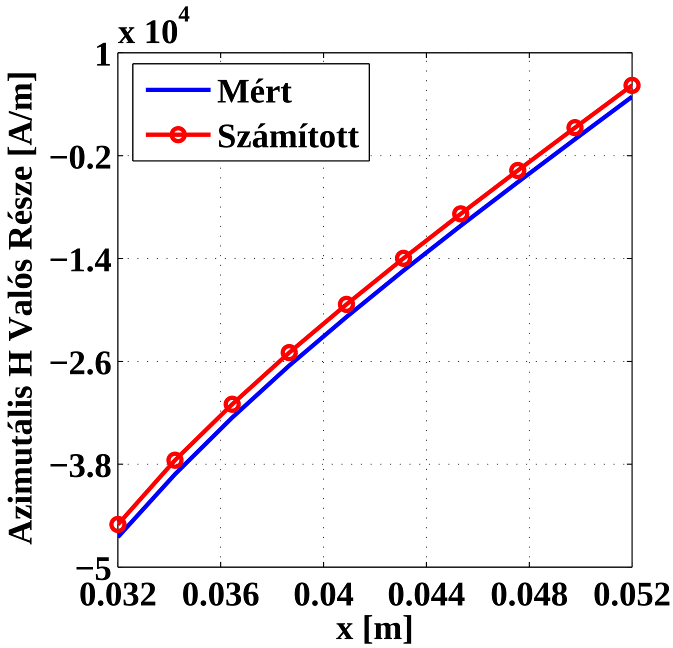
2.8. ábra. A radiális mágneses fluxus képzetes része

2.3.3. Az azimutális mágneses térerősség

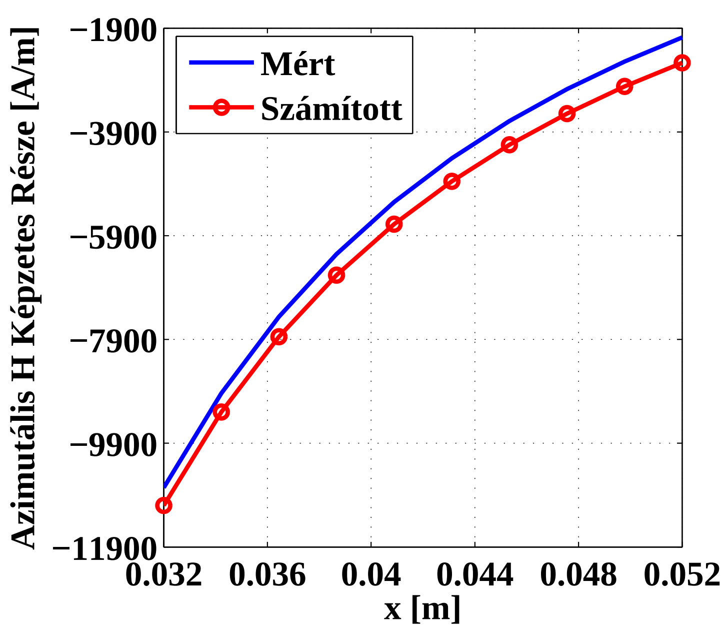
2.2. táblázat. A mért és számított azimutális mágneses térerősség összehasonlítása

x (m)	Real($\boldsymbol{H}_\theta$) (A/m) mért	Real($\boldsymbol{H}_\theta$) (A/m) számított	Imag($\boldsymbol{H}_\theta$) (A/m) mért	Imag($\boldsymbol{H}_\theta$) (A/m) számított
0.032	-46504.9	-45042.7	-10757.6	-11101.58
0.034222	-39165.7	-37526.16	-8939.18	-9296.83
0.036444	-32564.6	-30997.44	-7462.55	-7846.27
0.038667	-26449.5	-24985.62	-6253.55	-6660.4
0.040889	-20817.4	-19353.513	-5250.13	-5676.99
0.043111	-15405.7	-13979.5	-4406.77	-4850.7
0.045333	-10181.6	-8789.34	-3690.02	-4148.36
0.047556	-5084.64	-3718.38	-3074.86	-3545.74
0.049778	-71.2009	1271.77	-2542.22	-3024.09
0.052	4888.668	6212.99	-2077.37	-2568.85

A 2.2-es táblázatban az azimutális mágneses térerősség mért és számított, valós és képzetes része látható. A $\boldsymbol{H}_\theta$ azimutális mágneses térerősségnek a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben csak x és y komponense van. A polárkoordináta-rendszerben a (2.23)-as képlet összefüggéseiből meg lehet határozni az Θ azimutális összetevőt.



2.9. ábra. Az azimutális mágneses térerősség valós része



2.10. ábra. Az azimutális mágneses térerősség képzetes része

Mivel a $\boldsymbol{H}_\theta$ azimutális mágneses térerősség x komponense elhanyagolhatóan kicsi, ezért csak az y komponenst vettem figyelembe.

A 2.9-es és a 2.10-es ábrán pedig a mért és számított értékek vannak, árbrázolva a könnyebb összehasonlíthatóság miatt.

A 2.9-es képen a mért és számított adatok között, az azimutális mágneses térerősség valós részénél a hiba, az összes mérési helyen 5% közelében van. A 2.10-es képen, az azimutális mágneses térerősség képzetes részénél, a hiba folyamatosan nő, 3%-tól egészen 12%-ig.

2.3.4. Nyomaték

A forgatónyomaték az erőnek a tengelyre mért merőleges távolságával, az erőkarjával arányos. Mértékegysége: Nm, ami formailag a mechanikai munkáéval megegyezik. A két fogalom között azonban a lényeges különbség az, hogy a mechanikai munkában a hosszúság az erő irányába eső utat, a forgatónyomatékban az erőre merőleges karhosszúságot jelenti. E különbség kidomborítására a munka önálló nevű mértékegységett: joulet kapott [3].

A végeselem-módszernél a nyomatékszámításra számos eljárás található az irodalomban [18–24]. Mivel a TDK dolgozatban bemutatásra kerülő feladat megoldása még a kezdeti stádiumban van, így csak egy módszerrel számoltam a nyomatékot.

Az általam használt eljárás alapja a Maxwell-feszültségtenzor, ami a legáltalánosabban használt módszer a villamos gépek végeselem-módszerében az erő és a nyomaték számításában [6–8, 18, 20]. A nyomatékot megkapjuk egy felületi integrálással,

$$\boldsymbol{T} = \oint_S \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{r} \times \left(\frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{B} - \frac{1}{2\mu_0} |\boldsymbol{B}|^2 \boldsymbol{n} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{2.24}$$

ahol

μ_0 a vákum permeabilitása,
$\boldsymbol{\sigma}$ a Maxwell-feszültségtenzor,
$\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{S}$ integrálási felület normálvektora.

Kétdimenziós esetben a felületi integrálás helyett egy vonalintegrál lesz Γ mentén, ami a rotort körülfogó légrést jelenti,

$$\boldsymbol{T} = L \int_\Gamma \boldsymbol{r} \times \left(\frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{B} - \frac{1}{2\mu_0} |\boldsymbol{B}|^2 \boldsymbol{n} \right) \mathrm{d}\Gamma, \tag{2.25}$$

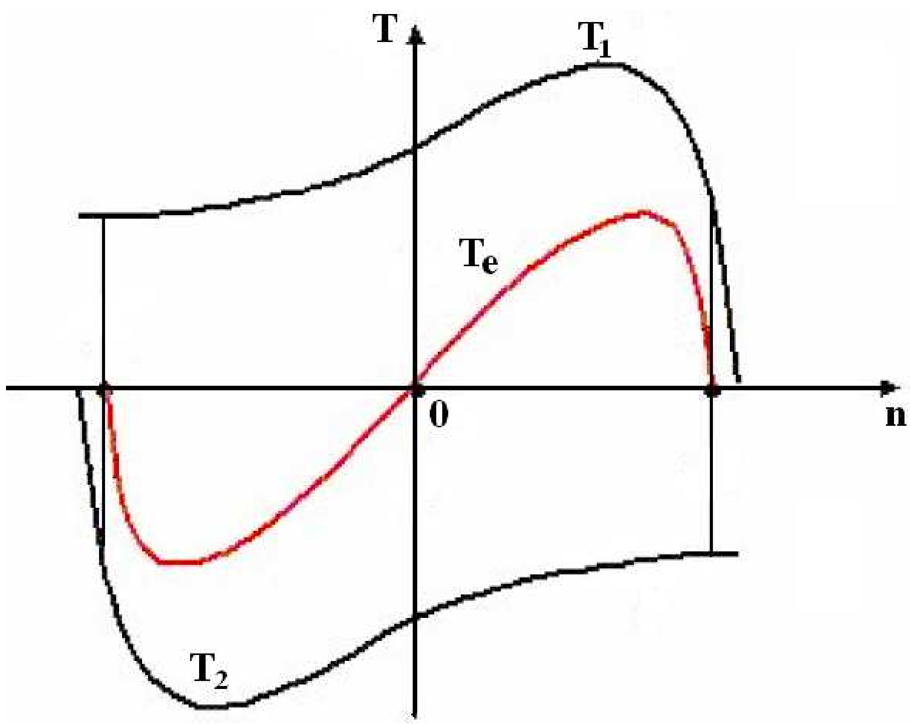
ahol

L a tengelyirányú hosszúság, ami itt 1 m,
$\boldsymbol{B}$ a mágneses fluxus,
$\boldsymbol{r}$ az erőkar.

Az egyfázisú indukciós gép nyomatéka

Az egyfázisú motor állórészében egyfázisú, a forgórészében háromfázisú vagy kalickás tekercselés található. Mint már a bevezetőben említettem, ha a motort a hálózatra kapcsoljuk, nem indul el. Ez amiatt van, mert az állórész tekercselésben folyó egyfázisú váltakozó áram a légrésben lüktető mágnesmezőt létesít, ami mindig felbontható két félamplitúdójú, ellentétes irányba forgó fluxusra.Ha a forgórész áll, mindkét forgó mező egyenlő nagyságú és a frekvenciának megfelelő periódusú, háromfázisú szekunder áramot létesít a forgórész tekercselésében. A szekunder áramok által előidézett szekunder forgó mezők és a megfelelő primer mezők eredőjeként két ellentétes irányban forgó főmező jön létre. Mivel a primer és szekunder mezők mindkét irányba egyenlőek, az eredő mezők is egyenlő nagyok, így összegük lüktető teret eredményez, ami a szekunder áramokkal forgató nyomatékot létesít. A két nyomaték ellentétes irányú, nagyságuk egyenlő, így eredőjük zérus amikor a fordulatszám nulla, azaz nincs indítónyomatéka.

Ezt ábrázolja a 2.11-es ábra, ahol $\boldsymbol{T}_1$ és $\boldsymbol{T}_2$ a két ellentétes irányú nyomaték, $\boldsymbol{T}_e$ pedig az eredő nyomaték. Ha azonban valamelyik irányba megindítjuk a forgórészt, a két irányba forgó mágnesmezők szimmetriája megszűnik, így létrejön a forgatónyomaték, és a motor önmagától tovább tud gyorsulni [1–3].



2.11. ábra. Egyfázisú indukciós motor nyomaték-fordulatszám jelleggörbéje

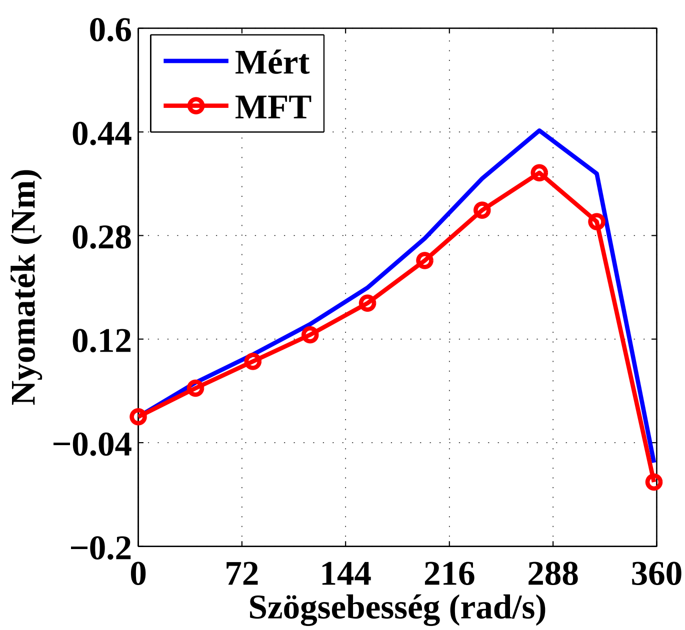
Az 2.3-as táblázatban különböző szögsebességeken, indítástól a szinkron szögsebességig, a mért nyomatékok láthatók, és mellettük pedig az általam az adott szögsebességen számított nyomatékok. A számítás az alfejezet elején említett módszerrel történt. A táblázat adataiból is kitűnik, hogy indítónyomatéka nincs az egyfázisú indukciós motornak. A 2.3-as táblázat utolsó sorában pedig egy negatív nyomaték látható, ami azt jelenti, hogy a motor már generátoros üzemben van. Ebből meg lehet határozni a szlipet

2.3. táblázat. A egyfézisú indukciós gép nyomatéka

Szögsebesség $\boldsymbol{\Omega}_r$ (rad/s)	Nyomaték (Nm) mért	Nyomaték (Nm) számított
0	0	5.468316e-9
39.79351	0.052766	0.04422
79.58701	0.096143	0.08571
119.3805	0.14305	0.126589
159.174	0.19957	0.175555
198.9675	0.2754	0.241256
238.761	0.367972	0.31915
278.5546	0.442137	0.376828
318.3481	0.375496	0.301464
358.1416	-0.0707	-0.100681

a következő képlettel, $s = \frac{\boldsymbol{\Omega}_s - \boldsymbol{\Omega}_r}{\boldsymbol{\Omega}_s}$, ahol $\boldsymbol{\Omega}_s$ a szikron fordulatszámnál a szögsebesség értéke, $\boldsymbol{\Omega}_r$ pedig a motor szögsebessége, amikor a motor nyomatéka zérus. A képletbe behelyettesítve az jön ki hogy ennek az indukciós motornak a szlipje 5%, [3, 15].

A 2.12-es ábrán a mért és számított nyomaték-jelleggörbe látható, ami a 2.11-es ábrán látható $\boldsymbol{T}_e$ eredő nyomaték pozitív része. Az MFT rövidítés a Maxwell-feszültség-tenzort jelenti [15–17].



2.12. ábra. Egyfázisú indukciós motor nyomatékfordulatszám jelleggörbéje

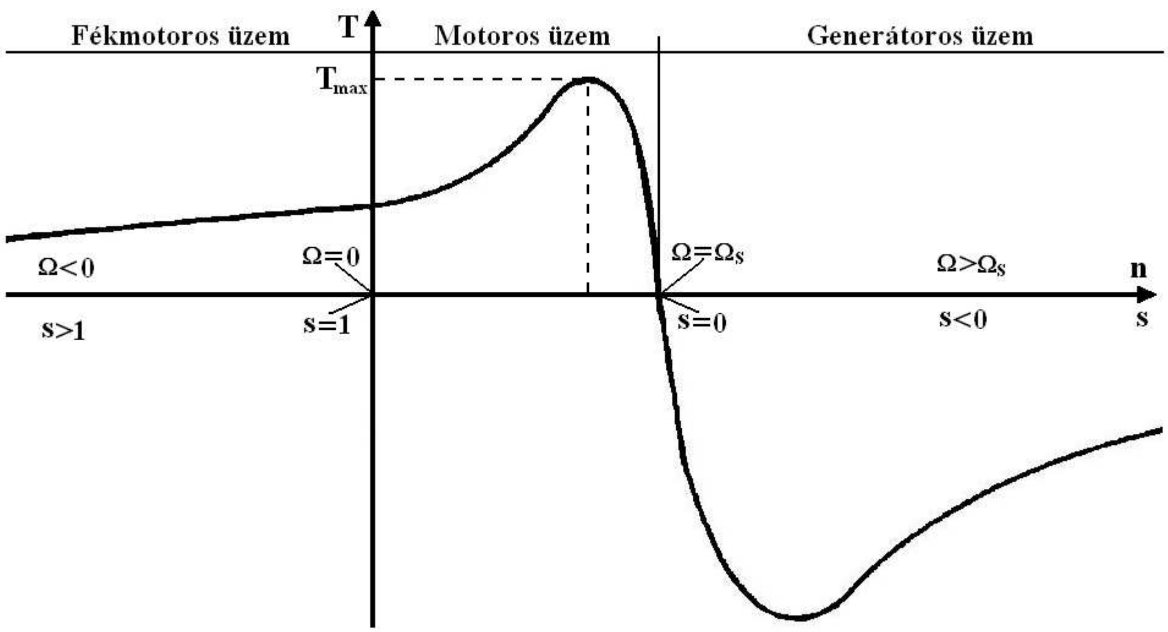
A 2.12-es képen jól látható, a hiba fokozatosan nő, 0%-tól, egészen majdnem 20%-ig, ami a maximális nyomatéknál van, utána megint csökken a hiba. Ez a hiba származhat a használt képletből, vagy a használt numerikus térszámítási eljárásból.

A háromfázisú indukciós gép nyomatéka

A motor indításakor a forgórész szögsebessége az állórész tekercsében folyó áram által keltett forgó mágneses mező szögsebességtől maximális mértékben tér el, a szlip $s = 1$. De az egyfázisú indukciós motorral ellentétben, itt van indító nyomaték és ha a terhelőnyomaték ennél kisebb, akkor a gép gyorsulni kezd. A gyorsulással együtt a nyomaték mindaddig növekszik, amíg el nem éri a billenő nyomatékot, ahol a nyomaték maximális. A fordulatszám további növekedésével a nyomaték csökken, a szinkron pontban pedig ($\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_s$) zérussá válik. A nyomaték-jelleggörbe üzemi szakasza igen meredek. Nagy nyomatékváltozás csak kis fordulatszámingadozást okoz, ezért a terhelés változása csak kis mértékben befolyásolja a fordulatszámot. Ez az oka annak hogy az aszinkron motor fordulatszámtartó.

Ha a motort valamilyen külső hatás a szinkron fordulatnál nagyobb fordulatra hozza, a nyomaték negatívvá válik, mert a mágnesmező a nála nagyobb szögsebességű forgórészt fékezni igyekszik. Ez az úgynevezett generátoros üzem.

Generátoros üzemben csak az áram wattos komponensének előjele változik, a meddő összetevőé változatlan marad. Ez azt jelenti, hogy a gép a meddő teljesítményt továbbra is a hálózatból kapja. A meddő teljesítmény felvételének az az oka, hogy az aszinkron gép mágnesező áramát generátoros üzemben is a hálózat szolgáltatja, tekintve, hogy a gép saját gerjesztéssel nem rendelkezik. De az aszinkron generátorral csak olyan hálózat táplálható, amely a szükséges meddő teljesítményt fedezni tudja és amelynek periódusszámát szinkron generátorok rögzítik [1–3].



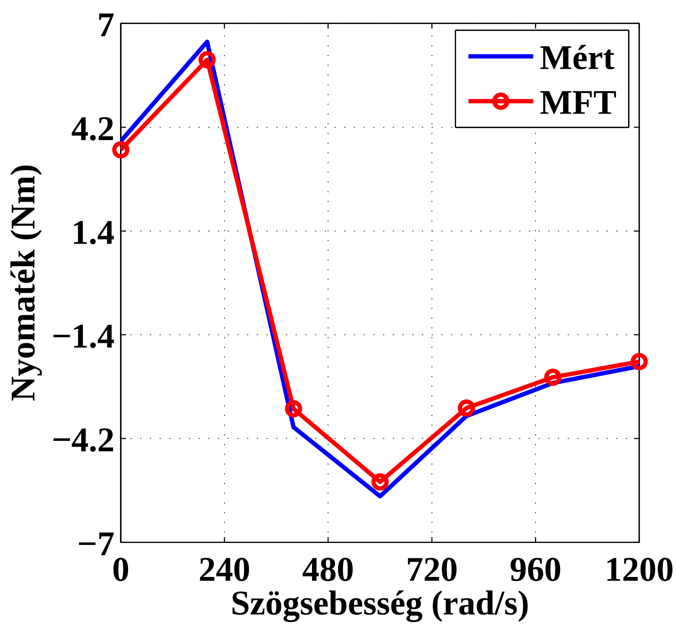
2.13. ábra. Háromfázisú indukciós motor nyomaték-fordulatszám jelleggörbéje

A 2.13-as árbán a $n = 0\frac{1}{\mathrm{s}}$ fordulatszámtól balra eső szakasz akkor áll elő ha a motort a mezővel ellentétes irányba forgatjuk. Ekkor a fordulatszám negatív, a nyomaték pozitív marad, tehát a negatív irányú forgást fékezi. Ez az állapot nem használható üzemszerű fékezésre, mert a fékezés szempontjából labilis a növekvő fordulatszám, és csökkenő nyomaték miatt, másrészt az áramok jóval nagyobbak , mint amekkorát a tekercsek üzemszerűen elbírnak.

2.4. táblázat. A háromfázisú indukciós gép nyomatéka

Szögsebesség $\mathbf{\Omega}_r$ (rad/s)	Nyomaték (Nm) mért	Nyomaték (Nm) számított
0	3.825857	3.591533
200	6.505013	6.0206997
400	-3.89264	-3.3980711
600	-5.75939	-5.6397533
800	-3.59076	-3.3783337
1000	-2.70051	-2.547363
1200	-2.24996	-2.125144

Az 2.4-es táblázatban különböző szögsebességeken indítástól körülbelül a szinkron szögsebesség háromszorosáig, a mért nyomatékok láthatók, és mellettük pedig az általam az adott szögsebességen számított nyomatékok. A számítás az alfejezet elején említett módszerrel történt.



2.14. ábra. Háromfázisú indukciós motor nyomatékfordulatszám jelleggörbéje

A 2.4-es táblázatból és a 2.14-es ábrán is jól látszik, hogy amit fentebb írtam a háromfázisú indukciós motor nyomatékáról, és annak üzemállapotairól, azok mind teljesülnek. A háromfázisú motornál induláskor $\mathbf{\Omega}_r = 0\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ is van indítónyomaték. Itt a vizsgált szögsebességértékek mind a motoros, mind a generáros üzemet átfogják. Így az értékekből az is kitűnik, amikor a motor szögsebessége meghaladja a szinkronszögsebességet és generátoros üzembe kerül, a nyomatéka negatív lesz. Ilyenkor a forgórész forgása ellen fog hatni, próbálja lassítani. A 2.14-es ábrán az is jól látszik, hogy az üzemi szakasz nagyon meredek, aminek a következménye, hogy ez a fajta motor fordulatszámtartó.

A 2.14-es képen úgy tűnhet hogy a háromfázisú gépnél a nyomaték szinte tökéletesen kijött. De itt is körülbelül akkora a hiba, mint a 2.12-es ábránál. A 2.14-es képen jól látszik, hogy ott a legnagyobb az eltérés, ahol a maximális nyomaték van, ez negatív irányba is igaz.

2.3.5. A tekercsben indukált feszültség

Ebben az alfejezetbe az A fázis tekercsében (2.3. ábra) indukált feszültséget vizsgálom [15,25]. Mértékegysége a V/m/menet, ami úgy jön ki, hogy az indukált feszültség per mélység per menetszám. 1 m-es mélységre, és egy menetre számoltam ezt a mennyiséget.

A tekercsben indukálódó feszültséget az $\boldsymbol{A}$ vektorpotenciál átlagából lehet számítani. A képlet,

$$V = \mathrm{j}\omega\frac{1}{\mathrm{S}}\int_S \boldsymbol{A}_z \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.26}$$

A fenti egyenletben azért integrálunk S felületre, mert a tekercsen belül nagyon sok vékony vezető van, és mindegyikre külön-külön kiszámolni, nagyon számításigényes lenne.

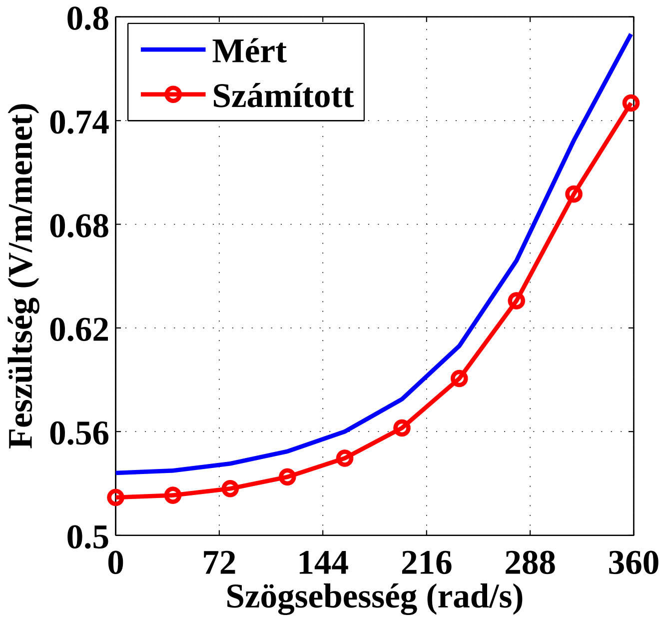
A 2.26-os egyenlettel kiszámoljuk a A és -A fázisra, mert úgy jön ki az egy teljes menet. Az így kapott értékeknek vesszük az abszolútértékét, mert a két fázisban indukálódó feszültség ellentétes előjelű, és akkor az összegzésnél mindig 0-t eredményezne.

A 2.5-ös táblázatban a mért, és az általam számított értékek láthatók, az egyfázisú indukciós motorra.

2.5. táblázat. Egyfázisú motornál a feszültség/menet

Sebesség $\boldsymbol{\Omega}_r$ (rad/s)	Feszültség/menet (V/m/menet) mért	Feszültség/menet (V/m/menet) számított
0	0.536071	0.521899
39.79351	0.537466	0.5231727
79.58701	0.541495	0.5270265
119.3805	0.548603	0.5337708
159.174	0.560074	0.5445938
198.9675	0.578808	0.56215272
238.761	0.609649	0.5907679
278.5546	0.658967	0.635713
318.3481	0.728552	0.6974717
358.1416	0.790068	0.750178

A 2.15-ös ábrán pedig a mért és számított indukált feszültség változása látható a szögsebesség függvényében, az egyfázisú motornál. Jól látható, hogy az indukált feszültségnek szinkronfordulaton van a maximuma.



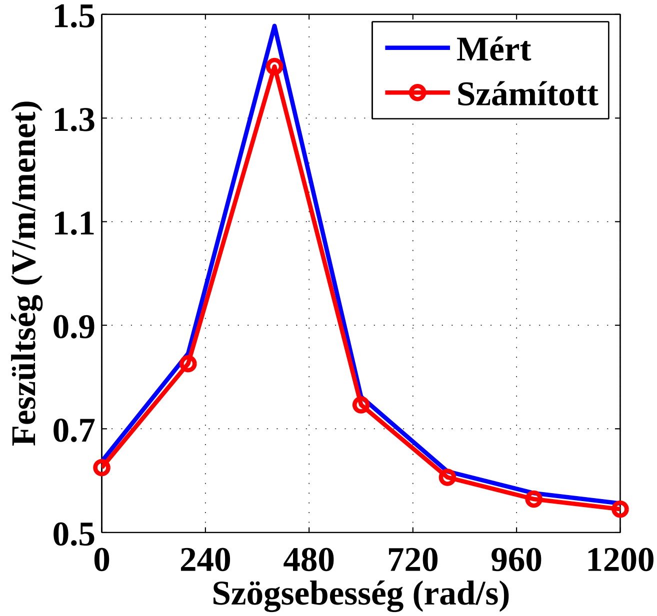
2.15. ábra. Egyfázisú indukciós motor indukált feszültsége

A 2.6-os táblázatban a mért, és az általam számított értékek láthatók, a háromfázisú indukciós motorra.

2.6. táblázat. Háromfázisú motornál a feszültség/menet

Sebesség $\mathbf{\Omega}_r$ (rad/s)	Feszültség/menet (V/m/menet) mért	Feszültség/menet (V/m/menet) számított
0	0.637157	0.6250343
200	0.845368	0.825837
400	1.477981	1.3995241
600	0.76176	0.74633
800	0.617891	0.6063667
1000	0.575699	0.564498
1200	0.556196	0.5450634

A 2.16-os ábrán szintén a mért és számított indukált feszültség változása látható a szögsebesség függvényében, a háromfázisú motor esetére. Itt jobban látható, amit az egyfázisú gépnél írtam, hogy az indukált feszültségnek szinkronfordulaton van a maximuma. Szinkronfordulat elérése előtt folyamatosan nő, utána pedig csökken.



2.16. ábra. Háromfázisú indukciós motor indukált feszültsége

Az indukált feszültség az 5%-os hibahatáron belül jött ki az egyfázisú és a háromfázisú gépre egyaránt. A 2.15-ös képen azért tűnik nagyobbnak az eltérés a mért és számított értékek között, mert a kijött végeredmények kisebbek mint a 2.16-os képen, ahol ez az eltérés kevésbé szembetűnő. A két képen még az is megfigyelhető, hogy hasonlóan mint a nyomaték görbéknél (2.12. és 2.14. ábra) itt is szinkron fordulaton van a hibának a maximuma.

3. fejezet

Összefoglalás

Az egyetem villamosmérnöki képzésében a villamos gépekről csak elméleti ismereteket kapunk, mérés szintjén pedig egyáltalán nem találkozunk velük. Az előbb említett okok miatt, és a gyakorlati ismeretek hiányában nehézségekbe ütközne a mérés lebonyolítása.

Azért választottam a TEAM Workshops 30a feladatot [4] mivel itt a mérési eredmények adottak. Az Elektromágneses Terek Laboratóriumban ennek lebonyolítására pedig eszköz és hely hiányában szintén nincs lehetőség.

Az itt bemutatásra került feladattal januárban kezdtem el foglalkozni. A kiszámolt eredmények még nem a teljes feladat, hiányzik a vasveszteség, és a forgórész veszteségének számítása. Ezzel a TMDK dolgozat leadási határidejéig nem végeztem, de folyamatban van. Mint már a bevezetőben is említettem, ennek a problémának a megoldása a diplomamunkám részét fogja képezni, amihez szükség van a veszteségek kiszámítására.

Továbbá a feladattal több nemzetközi konferenciára készülök, melyekre a teljes megoldást kell vinni. Emellett cikk is készül ebből a feladatból.

A jövőbeni terveim, hogy nemcsak az $\boldsymbol{A}, V - \boldsymbol{A}$-formalizmussal oldom meg a feladatot, hanem a $\boldsymbol{T}, \Phi - \Phi$-formalizmussal, $\boldsymbol{T}, \Phi - \boldsymbol{A} - \Phi$-formalizmussal, $\boldsymbol{T}, \Phi - \boldsymbol{A}$ -formalizmussal. Az így kapott eredményekkel összetudom hasonlítani a formalizmusokat, és a kapott végeredmények helyességét is tudom ellenőrizni.

Esetleg megtalálni azt a formalizmust, amely a legjobban alkalmazható a villamos gépek szimulációjára, ami a legpontosabb eredményeket adja. További tervek, ezt a feladadot, a nemlinearitások figyelembevételével is megoldani, annak ellenére, hogy a feladatkiírásban az szerepel, hogy lineáris a feladat.

Irodalomjegyzék

[1] Dr. Frigyes Andor, Schnell László, Szita Iván, Dr. Tuschák Róbert, Elektrotechnika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1961.

[2] Lomb Frigyes, Lomb Pál, Villamos hajtások, Nehézipari Könyvkiadó, Budapest, 1953.

[3] Pattantyús Ábrahám Géza, A gépek üzemtana, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.

[4] TEAM Benchmark Problems, Problem No. 30a - Induction Motor Analysis, http://www.compumag.co.uk/problems/problem30a.pdf.

[5] Iványi Amália, Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003

[6] Jorma Luomi, Finite element methods for electrical machines, Lecture notes for a postgraduate course in electrical machines, Chalmes University of Technology, Göteborg,1993.

[7] Sami Kanerva, Simulation of Electrical Machines, Circuits and Control Systems Using Finite Element Method and System Simulator, Doctoral Dissertation, Helsinki University Of Technology, Espoo,2005.

[8] Antero Arkkio, Analysis of Induction Motors Based on the Numerical Solution of the Magnetic Field and Circuit Equations, Electrical Engineering Series, No. 59, Acta Polytechnica Scandinavica, Helsinki University Of Technology, 1987.

[9] Kuczmann Miklós, Iványi Amália, Neural network based hysteresis model in electromagnetic field computation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2007. Lektorálás alatt.

[10] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, J. Wiley, New York, 1962.

[11] http://mathworld.wolfram.com/

[12] I. N. Bronstejn, K. A. Szemengyajev, Matematika zsebkönyv, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[13] Bíró Oszkár és K.R. Richter, CAD in Electromagnetism, in P.W. Hawkes, ed., Advances in Electronics and Electric Physics, Vol. 82 (Academic Press, 1991) 1-96.

[14] Marcsa Dániel, Kuczmann Miklós, Eddy current analysis with non-linearity, Pollack Periodica, 2008. Lektorálás alatt.

[15] K. R. Davey, Analytic analysis of singe- and three-phase induction motors, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. 34, No. 5, September 1998, pp. 3721-3727.

[16] De Gersem H. and Hameyer K., Motional finite element simulation of magnetic brakes and solid rotor induction machines, Journal of Technical Physics, ISSN 0324-8313, vol. 43, no. 4, pp. 389-397, 2002.

[17] De Gersem H. and Hameyer K., Comparison of motional and nonmotional time-harmonic finite element simulations of solid rotor single-phase induction machines, in 9th Biennial IEEE conference on electromagnetic field computation - CEFC 2000 (abstract), pp. 108 pages, June 2000.

[18] N. Sadowski, Y. Lefévre, M. Lajoie-Mazenc, J Cros, Finite element torque calculation in electrical machines while considering the mouvement, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1410-1413.

[19] Kent Davey, George Vachtsevanos, Richard Powers, The Analysis of fields and torque in spherical induction motors, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. MAG-23, No. 1, January 1987, pp. 273-282.

[20] A. A. Abdel-Razek, J. L. Coulomb, M. Felicahi, J. C. Sabonnadiere, The calculation of electromagnetic torque in saturated electrical machines within combined numerical and analytical solutions of the field equations, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. MAG-17, No. 6, November 1981, pp. 3250-3252.

[21] B. Davat, Z. Ren, M. Lajoie-Mazenc, The movement in field modeling, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. MAG-21, No. 6, November 1985, pp. 2296-2298.

[22] Takefumi Kabashima, Atsushi Kawahara, Tadahiko Goto, Force calculation using magnetizing currents, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. 35, No. 3, May 1999, pp. 1402-1405.

[23] G. Henneberger, Ph. K. Sattler, D. Shen, Force calculation with analytical accuracy in the finite element based computational magnetostatics, Vol. 27, No. 5, September 19991 pp. 4254-4257.

[24] O. J. Antunes, J. P. A. Baston, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, F. Rapetti, Torque calculation with conforming and nonconforming movement, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. 42, No. 4, April 2006, pp. 983-986.

[25] K. R. Davey, Rotating field analysis using boundary element methods, IEEE Transaction of Magnetics, Vol. 35, No. 3, May 1999, pp. 1402-1405.