

# STACIONÁRIUS MÁGNESES ÉS ÖRVÉNYÁRAMÚ TÉR SZIMULÁCIÓJA VÉGESELEM-MÓDSZERREL

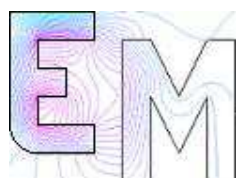
Írta:

MARCSA DÁNIEL  
III. éves Villamosmérnök B.Sc. hallgató  
(Automatizálási szakirány)

Konzulens:

DR. KUCZMANN MIKLÓS, PH.D.  
egyetemi adjunktus

Elektromágneses Terek Laboratórium  
Széchenyi István Egyetem  
2007. november  
Győr



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezető</b>	<b>2</b>
1.1. Geometriai elrendezés . . . . .	3
<b>2. Stacionárius mágneses tér</b>	<b>4</b>
2.1. Általánosságban a stacionárius mágneses térről . . . . .	4
2.1.1. Próbatest a stacionárius mágneses térben . . . . .	5
2.2. Stacionárius feladat . . . . .	7
2.3. Stacionárius mágneses tér potenciálformalizmusai . . . . .	8
2.3.1. A mértékkel ellátott $\mathbf{A}$ -formalizmus . . . . .	8
2.3.2. A mértékkel el nem látott $\mathbf{A}$ -formalizmus . . . . .	9
2.3.3. A $\Phi$ -formalizmus . . . . .	10
2.4. A különböző formalizmusok eredményei . . . . .	11
2.4.1. Összehasonlítás a számítási paraméterek alapján . . . . .	11
2.4.2. Összehasonlítás a kapott eredmények alapján . . . . .	12
<b>3. Örvényáramú tér</b>	<b>15</b>
3.1. Általánosságban az örvényáramú térről . . . . .	15
3.2. Az örvényáramú tér feladata . . . . .	15
3.3. Örvényáramú tér potenciálformalizmusai . . . . .	17
3.3.1. A mértékkel ellátott $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus . . . . .	17
3.3.2. A mértékkel ellátott $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus . . . . .	18
3.4. A különböző formalizmusok eredményei . . . . .	19
3.4.1. Összehasonlítás a számítási paraméterek alapján . . . . .	19
3.4.2. Összehasonlítás a kapott eredmények alapján . . . . .	19

# 1. fejezet

## Bevezető

Az utóbbi években hihetetlen gyors fejlődésen ment át a számítástechnika, mely a számítógépes tervezés eszközeinek hatalmas erőforrást biztosított, és biztosít mind a mai napig. Ugyanilyen haladás ment végbe a CAD (Computer Aided Design) szoftverek terén is, itt is kihasználva amennyire csak lehet a fejlődését. A CAD szoftverek számítástechnikai megjelenése forradalmasította a tervezési folyamatokat, melyek megváltoztatták a különféle szimulációkat, köztük az elektromágneses tér szimulációját, vizsgálatát is.

A két dimenziós szimuláció alapvető a beszerezhető CAD szoftvercsomagoknál. Ez amiatt van, mert a háromdimenziós modellek szimulációja kevésbé elterjedt. Ennek oka a meglehetősen nagy memóriaigény és a hosszú futási idő, bár napjainkban ez már nem lényeges, hiszen az olcsó memória és gyors számítógépek korában vagyunk. Ezen a téren a fő probléma egy szilárd és megbízható numerikus tér szimulációs eljárás hiánya. Napjainkban sokan foglalkoznak ezen hiányosság pótlásával.

Az elektromos és mágneses terek matematikai leírását a Maxwell-egyenletek adják, amelyek az  $\mathbf{E}$  elektromos térerősség,  $\mathbf{H}$  mágneses térerősség,  $\mathbf{D}$  eltolási áramsűrűség, és a  $\mathbf{B}$  mágneses indukció parciális differenciálegyenleteinek gyűjteménye. Az elektromágneses tér forrása lehet a  $\mathbf{J}$  forrásáram sűrűség,  $\rho$  töltéssűrűség, vagy  $\mathbf{D}$  eltolási áramsűrűség időbeni változása.

Számos eljárást kidolgoztak az elektromágneses tér parciális differenciálegyenleteinek megoldására, alapvetően a súlyozott maradék elve. Én a súlyozott maradék elv gyenge alakját használom [8] fel a különböző potenciálformalizmusoknál [1]. A parciális differenciálegyenleteket alkalmas súlyfüggvénnyel szorozzuk, majd az így kapott mennyiséget teljes tartományon integráljuk. Ez az úgynevezett súlyozott maradék. A súlyozott maradékot átalakítva kapjuk meg az úgynevezett gyenge alakot.

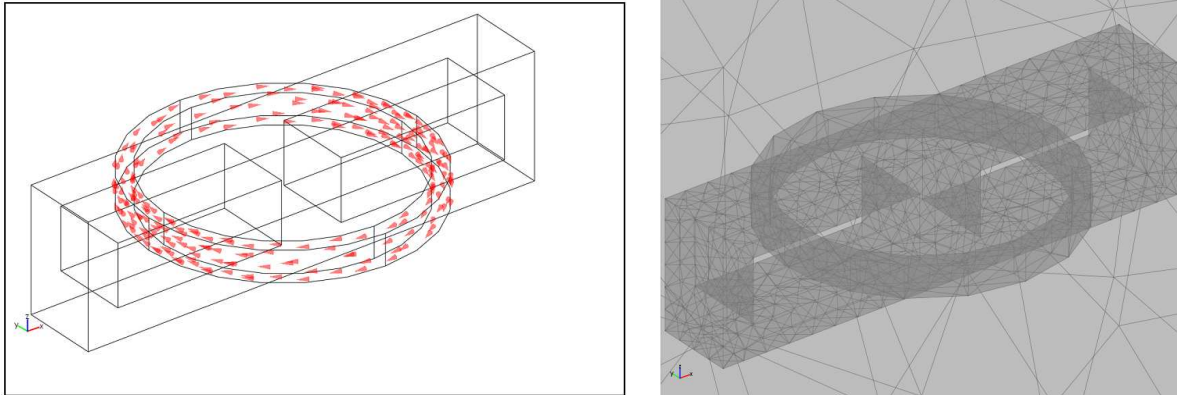
A dolgozat első részében a stacionárius mágneses tér kerül bemutatásra, ezen belül is az, hogy hogyan néz ki egy stacionárius mágneses feladat. Ezután bemutatásra kerül három, a stacionárius tereknél használatos potenciálformalizmus, egyenleteik, és a határfeltételek. A végén pedig a megoldott feladatokra kapott eredmények összehasonlítását mutatom be. Továbbá a kapott eredményeken keresztül összehasonlítom a különböző potenciálformalizmusokat.

A második részben az örvényáramú tér lesz bemutatva, hogy néz ki egy feladat, milyen egyenleteket használunk. Utána két potenciálformalizmust, melyet az örvényáramú fel-

datmegoldásoknál használunk. Itt is bemutatásra kerülnek a megoldott feladat végeredményei, és ezen eredmények összehasonlítása. A végén a végeredményeken keresztül összehasonlítom a potenciálformalizmusokat.

## 1.1. Geometriai elrendezés

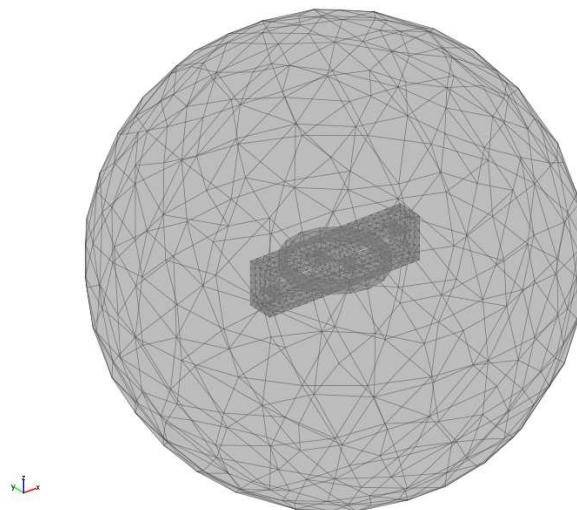
Az 1.1.-es képen az általam vizsgált példa geometriai elrendezése látható. A bal oldalon a példám a  $\mathbf{J}_0$  forrás áramsűrűséggel, a jobb oldalon pedig végelelem ráccsal. A vizsgált



1.1. ábra. A vizsgált példa közlelről

feladat a "elfektetett nyolcas", vagy általam csak "hídnak" nevezett rész vasból van. A példában lévő karika a tekercs, amibe a példák során vagy állandó amplitúdójú, vagy szinuszosan változó áramot táplállok.

A 1.2.-es ábrán pedig az egész példa látható végelelem ráccsal. A vasdarab körül lévő, a végelelem-módszernél lezárásnak nevezett gömb a levegőt jelképezi. A gömbön belül levegő van, ott ahol a másik két alakzat nem tölti ki a teret.



1.2. ábra. Az egész feladat

## 2. fejezet

# Stacionárius mágneses tér

### 2.1. Általánosságban a stacionárius mágneses térről

A stacionárius tér feltételezés akkor használható, amikor az időben semmi sem változik  $\partial/\partial t \equiv 0$ . Ebben az esetben a villamos és mágneses jelenségek között van kapcsolat. A magnetosztikus térben az időtől független áramsűrűség  $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0(\mathbf{r})$  időtől független mágneses térerősséget  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$  és mágneses indukciót  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$  hoz létre.

A stacionárius mágneses tér alapegyenletei [4]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mathbf{H}, & \text{levegőben,} \\ \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, & \text{lineáris mágneses anyagban,} \\ \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), & \text{nemlineáris mágneses anyagban.} \end{cases} \quad (2.3)$$

A nemlineáris mágneses anyagnál az  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r})$  az anyag mágnesezettségének vektora, fizikai értelemben az egységnyi térfogat mágneses momentumát jelenti, amely nemlineáris.

Az áramot a vezető anyagban a mozgó töltések hozzák létre. A vezető anyagban lévő áramot az időfüggetlen egyenletekkel írhatunk le:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b). \quad (2.6)$$

A (2.5)-ös egyenlet annyit jelent, hogy zárt az áramkör, vagyis az áramsűrűség vonalai sehol sem erednek, és nem végződnek, hanem zártak. Az  $\mathbf{E}_b = \mathbf{E}_b(\mathbf{r})$  a idegen erőkből származó úgynevezett beiktatott térerősség. A  $\sigma \mathbf{E}_b$  tag egyenlő a forrás áramsűrűséggel  $\mathbf{J}_0 = \sigma \mathbf{E}_b$ , és ezt az összefüggés behelyettesítve a (2.6)-os egyenletbe felírható a következő:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Ezt az egyenletet akkor használjuk amikor tekercs árameloszlása nem egyenletes.

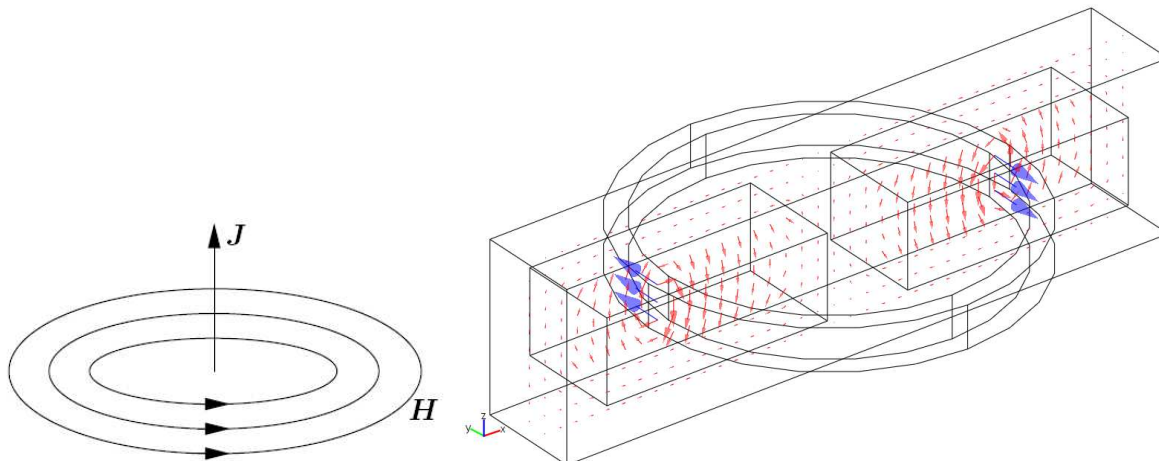
### 2.1.1. Próbatest a stacionárius mágneses térben

Az előző fejezetben bemutatásra kerültek a stacionárius mágneses térre vonatkozó egyenletek, az első (2.1), a harmadik (2.2) és az ötödik (2.3) Maxwell-egyenlet. Itt ezeket az egyenleteket mutatom be, egy példán keresztül. Az első Maxwell-egyenlet (2.1) ugyanaz, mint a gerjesztési törvény (2.8) differenciális alakban,

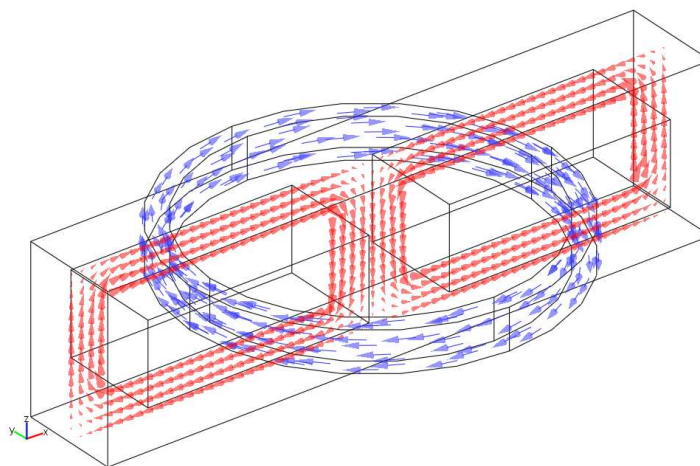
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.8)$$

A gerjesztési törvény fizikai tartalma : a vezetési áram mágneses teret hoz létre, ez látható a 2.1.-es ábrán, bal oldalon.

A 2.1.-es ábra bal oldalán az első Maxwell-egyenlet láthatjuk, vagy a középiskolában tanultak alapján a "jobb-kéz szabályt", ami annyit jelent, hogy ahol vezetési áram van ott örvénylő  $\mathbf{H}$  mágneses térerősség jön létre. A 2.1.-es ábra jobb oldalán szintén az első Maxwell-egyenlet látható, az általam szimulált példán keresztül. A kék nyilak a  $\mathbf{J}_0$  vezetési áramsűrűséget jelképezik, a piros nyilak pedig az örvénylő  $\mathbf{H}$  mágneses térerősséget jelképezik. A 2.1.-es ábrán jobb oldalon jól látható, hogy teljesül az első Maxwell-egyenlet.



2.1. ábra. Az I. Maxwell-egyenlet



2.2. ábra. A mágneses indukció

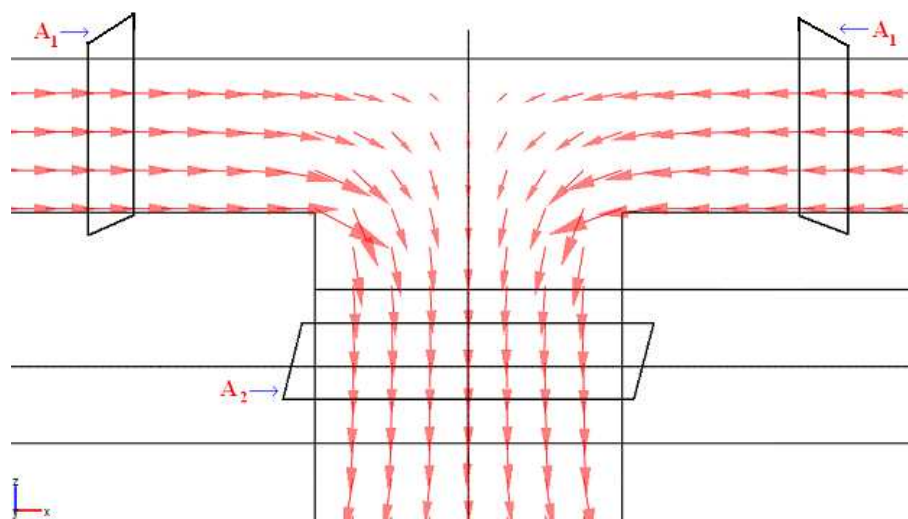
A 2.2.-es ábrán a piros nyilak a vasban létrejövő  $\mathbf{B}$  mágneses indukciót mutatják, a kék nyilak pedig a már előbb említett forrás áramsűrűségét. A 2.2.-es ábrából az is kitűnik, hogy mind a (2.2)-es egyenlet, mind pedig a (2.5)-ös egyenlet teljesül, azaz sem a  $\mathbf{B}$  mágneses indukció sem pedig a  $\mathbf{J}_0$  forrás áramsűrűség sehol nem ered, és sehol nem végződik, hanem zártak.

A 2.1.-es ábrán a felületen áthaladó indukcióvonalakat láthatjuk. A  $\mathbf{B}$  mágneses indukció jelenti az egységnyi felületen áthaladó mágneses indukcióvonalak számát, az  $A$  felületen tehát  $\mathbf{B}A$  indukcióvonal halad át. Innen a mágneses fluxus ( $\Psi$ ) képlete [6]:

$$\Psi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (2.9)$$

De a (2.9)-es képlet csak akkor igaz ha a felület merőleges az indukcióvonalakra, és az erőtér homogén. Az 2.2.-es ábrán teljesülnie kell annak is, ami jól látható, hogy a két irányból bejövő mágneses indukciónak egyenlőnek kell lennie a kimenő mágneses indukcióval. Ennek a bizonyítása is nagyon egyszerű. Az  $A_2$  felület kétszerakkora mint a  $A_1$  felület, és a mágneses indukció pedig mindenhol ugyanakkora. Ezek alapján és a (2.9)-es egyenletből jön az, hogy a kimenő mágneses fluxus ( $\Psi_2$ ) egyenlő a két irányból bejövő mágneses fluxussal ( $\Psi_1$ ). Az előbbieket képletek formájában:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= A_2 \mathbf{B}, \\ \Psi_1 &= A_1 \mathbf{B}, \\ A_2 &= 2A_1, \\ \Psi_2 &= 2\Psi_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$



2.3. ábra. A mágneses fluxus alakulása a 'T' szárban

## 2.2. Stacionárius feladat

Az előbbi példán keresztül egy általános stacionárius tér feladat elrendezése látható a 2.4-es ábrán. A példa áll egy mágneses anyagból (vas), amit levegő vesz körül. A geometriáról bővebben az 1.1.-es alfejezetben lehet olvasni.

A sztatikus mágneses térnél a gerjesztést a tekercsben folyó  $\mathbf{J}_0$  áramsűrűség adja, és ez hozza létre a vezető anyagban az elektromos térerősséget és mágneses térerősséget. Ebben az esetben a Maxwell-egyenletek a következők lesznek [4]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0, \quad \Omega_0 \cup \Omega_m \text{ tartományokban,} \quad (2.11)$$

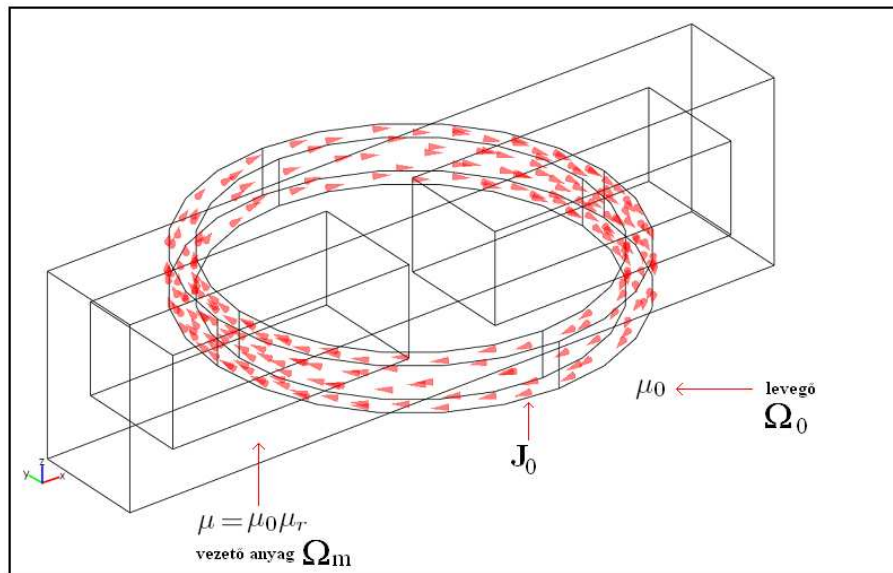
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \Omega_0 \cup \Omega_m \text{ tartományokban,} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mathbf{H}, & \text{levegőben, } \Omega_0, \\ \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, & \text{lineáris mágneses anyagban, } \Omega_m, \\ \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), & \text{nemlineáris mágneses anyagban, } \Omega_m. \end{cases} \quad (2.13)$$

A  $\mathbf{J}_0$  áramsűrűség csak a levegőben ( $\Omega_0$ ) van. Az áramsűrűség a következő képlettel számolható:

$$|\mathbf{J}_0| = \frac{N \cdot i}{A}, \quad (2.14)$$

ahol  $N$  a tekercs menetszáma,  $i$  a vezetékben folyó áramerősség, és  $A$  a vezető keresztmetszete. Ezt a képletet lehet használni például motorok tekercselésénél, mert a fázistekercsek-nél számos vezető van együtt, és teljesen kezelhetetlen modellt kapnánk a hornyokban lévő vékony vezetők magas száma miatt. Igaz ilyen esetben elhanyagoljuk az elotolási áram mágnesező hatását, de így is egy kielégítően pontos eredményt fogunk kapni.



2.4. ábra. Stacionárius mágneses tér feladat elrendezése



## 2.3. Stacionárius mágneses tér potenciálformalizmusai

Számos potenciálformalizmus létezik melyek alkalmasak a térmennyiségek számítására, de alapvetően skalárpotenciálokat és vektorpotenciálokat használunk [1] [3]. A stacionárius mágneses tér leírására is létezik számos potenciálformalizmus, vagy ezen formalizmusok kombinációja. Itt két potenciálformalizmust mutatok be, melyekkel megoldottam az adott feladatot. A  $\Phi$  redukált mágneses skalárpotenciált és az  $\mathbf{A}$  mágneses vektorpotenciált. A mágneses vektorpotenciált kétféleképpen is használtam, használtam a csomópotni elemes (kötött formalizmus), és használtam a vektorosan (élelemes, vagy szabad formalizmus).

### 2.3.1. A mértékkel ellátott $\mathbf{A}$ -formalizmus

A mágneses vektorpotenciál definíciója:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.15)$$

Ez az egyenlet kielégíti a (2.12)-es egyenletet a következő matematikai azonosságból kifolyólag  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} \equiv 0$ , ahol  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ .

Helyettesítsük a (2.15)-ös egyenletet a (2.11)-es egyenletbe a lineáris anyagra jellemző állandó inverz alakjának segítségével. Ezekután a következő egyenlethez jutunk:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0. \quad (2.16)$$

Mivel ez egy háromdimenziós feladat, így itt nem teljesül automatikusan a Coulomb-mérték, azaz a

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.17)$$

formula, mint a kétdimenziós feladatnál, ezért elő kell írni a Coulomb-mérték implicit alakját, és azt belevenni a (2.16)-os egyenletbe. A (2.16)-os egyenlet az egész  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_m$  tartományra vonatkozik.

Ehhez jönnek hozzá még a folytonossági egyenletekből eredő határfeltételek, és peremfeltételek.  $\partial\Omega$  perem két részből áll egy  $\Gamma_H$ -ből és egy  $\Gamma_B$ -ből, azaz  $\partial\Omega = \Gamma_H \cup \Gamma_B$ .

A  $\Gamma_H$  peremen pedig a mágneses térerősség tangenciális komponensére írjuk elő a peremfeltételt. A  $\Gamma_B$  peremen a mágneses indukció normális komponensére írjuk elő a peremfeltételt. Továbbá még ezen két peremfeltételhez jön két másik peremfeltétel [1] [3]. Végezetül levezetés nélkül a parciális differenciálegyenlet a Coulomb-mérték implicit alakjával és a peremfeltételekkel az alábbiak

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \times (\nu \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0, \quad \Omega \text{ tartományban}, \quad (2.18)$$

$$(\nu \nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{K}, \quad \Gamma_H \text{ peremen}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Gamma_H \text{ peremen}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \alpha, \quad \Gamma_B \text{ peremen}, \quad (2.21)$$

$$\nu \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \Gamma_B \text{ peremen}. \quad (2.22)$$

Az  $\mathbf{A}$ -formalizmus gyenge alakja a (2.18)-es egyenletből és a (2.19)-as és a (2.22)-es peremfeltételekből épül fel. A gyenge alak a következőképpen néz ki:

$$\int_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}) + \nu_0 \nabla \cdot \mathbf{W} \nabla \cdot \mathbf{A}] d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_H} \mathbf{W} \cdot \mathbf{K} d\Gamma. \quad (2.23)$$

### 2.3.2. A mértékkel el nem látott $\mathbf{A}$ -formalizmus

Már a potenciálformalizmus nevéből is lehet következtetni, hogy ennél a formalizmusnál nem kell előírni a Coulomb-mértéket, mert vektorelemekkel oldjuk meg. Ezt azért tehetjük meg, mert a  $\mathbf{J}_0$  forrás áramsűrűséget előírhatjuk a  $\mathbf{T}_0$  vektor rotációjaként, hiszen a  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \equiv 0$  matematikai azonosság által kielégíti továbbra is a (2.5)-ös egyenletet. A  $\mathbf{T}_0$  nem más, mint a  $\mathbf{J}_0$  forrás áramsűrűségnek megfelelő mágneses tér szabad térben, azaz levegőben, azt reprezentáló tér.

$$\mathbf{J}_0 = \nabla \times \mathbf{T}_0. \quad (2.24)$$

Egy feladat megoldásánál, ha lehetséges válasszuk a  $\mathbf{T}_0$ -t  $\mathbf{J}_0$  helyett, és megoldjuk a feladatot egy numerikus térszámítási eljárással, ami ilyenkor nem lesz érzékeny a Coulomb mértékre, és jó eredményt ad.

$\mathbf{T}_0$  megoldásához használt egyenlet és peremfeltételek:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{T}_0 = \nabla \times \mathbf{J}_0, \quad \Omega \text{ tartományban,} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{T}_0 \times \mathbf{n} = 0, \quad \Gamma_H \text{ peremen,} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Gamma_B \text{ peremen.} \quad (2.27)$$

Az egyenletek ugyanúgy jönnek ki, mint a mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál. A mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmus parciális differenciálegyenletei, és peremfeltételei:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{T}_0, \quad \Omega \text{ tartományban,} \quad (2.28)$$

$$(\nu \nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{K}, \quad \Gamma_H \text{ peremen,} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{n} \times A = \alpha, \quad \Gamma_B \text{ peremen.} \quad (2.30)$$

A következő egyenlet pedig a mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmus gyenge alakja, amely a (2.28)-es egyenletből és (2.29)-as peremfeltételből áll.

A mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmus gyenge alakja:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}) = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{T}_0 d\Omega \quad (2.31)$$

### 2.3.3. A $\Phi$ -formalizmus

A  $\Phi$ -formalizmusnál a stacionárius mágneses térerősség két részre oszlik,

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{H}_m, \quad (2.32)$$

ahol az első tag rotációja egyenlő  $\mathbf{J}_0$ -val, és  $\mathbf{H}_m$ -nek a rotációja pedig nulla, továbbá a  $\mathbf{T}_0$  divergenciája nulla a Coulomb mértéknek megfelelően,

$$\nabla \times \mathbf{T}_0 = \mathbf{J}_0, \text{ és } \nabla \times \mathbf{H}_m = \mathbf{0}, \text{ és } \nabla \cdot \mathbf{T}_0 = 0. \quad (2.33)$$

Ennél a formalizmusnál is  $\mathbf{T}_0$ -val írjuk le a  $\mathbf{J}_0$  forrás áramsűrűségeket, amely meghatározható a (2.25), (2.26), (2.27) egyenletek szerint. A mágneses térerősség örvénymentes részét  $\mathbf{H}_m$ -et felírhatjuk a  $\Phi$  mágneses skalárpotenciál negatív gradienseként, azaz

$$\mathbf{H}_m = -\nabla\Phi, \quad (2.34)$$

itt  $\Phi$  egy skalár mennyiség,  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ , és azért írható fel a fenti összefüggés, mert  $\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv \mathbf{0}$ , és ezen matematikai azonosság általa eleget tesz a  $\nabla \times \mathbf{H}_m = \mathbf{0}$  egyenletnek. A (2.34)-es egyenletet visszahelyettesítve a (2.32)-es egyenletbe a következőt kapjuk

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \nabla\Phi, \quad (2.35)$$

ami eleget tesz a (2.1)-es egyenletnek is. A  $\mathbf{J}_0$  forrás áramsűrűségeket ugyanúgy írjuk le  $\mathbf{T}_0$ -val, mint az előző, a mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál. Az egyenlete (2.25)-es egyenlet, és peremfeltételek a (2.26)-ös, (2.27)-os egyenlet.

Végül a parciális differenciál egyenlete és a peremfeltételek az alábbiak:

$$\nabla \cdot (\mu\nabla\Phi) = \nabla \cdot (\mu\mathbf{T}_0), \quad \Omega \text{ tartományban}, \quad (2.36)$$

$$\Phi = \Phi_0, \quad \Gamma_H \text{ peremen}, \quad (2.37)$$

$$(\mu\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} = b + (\mathbf{T}_0) \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma_B \text{ peremen}. \quad (2.38)$$

A (2.36)-os egyenletből és a (2.38)-es Neumann típusú peremfeltételből jön ki a  $\Phi$ -formalizmus gyenge alakja amely a következőképpen néz ki:

$$\int_{\Omega} \mu_0 \nabla N \cdot \nabla \Phi d\Omega = \int_{\Omega} \mu_0 \nabla N \cdot \mathbf{T}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_B} N b d\Gamma. \quad (2.39)$$

## 2.4. A különböző formalizmusok eredményei

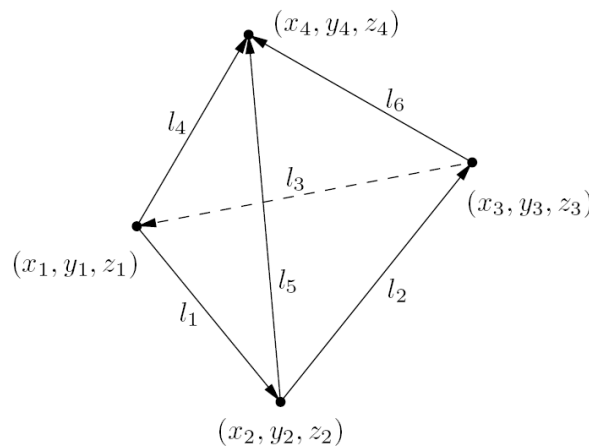
Ebben a fejezetben a kiszámított eredményeket, a számítási paramétereket fogom összehasonlítani. A számítási paraméterek terén az a várt eredmény, hogy a mágneses skalárpotenciál a leggazdaságosabb, ezalatt azt értem, memória igénye alacsony, és gyorsan megoldja az adott feladatot. A mágneses vektorpotenciálnál magasabbnak kell lennie az ismeretlenek számának, és lassabbnak kell lennie, mint a mágneses skalárpotenciál. Továbbá az alapján is csoportosíthatjuk ezen potenciálformalizmusokat, hogy élelemes, vagy csomóponti elemes a formalizmus. Ezen szempont szerint annak kell kijönnie, hogy a élelemes gyorsabban megoldja az adott problémát, de itt csak a kétféle **A**-formalizmust tudom összehasonlítani.

### 2.4.1. Összehasonlítás a számítási paraméterek alapján

	Rácselem száma	Ismeretlen száma	Iteráció száma	Megoldás ideje
Mértékkel ellátott <b>A</b> - formalizmus	33577	158592	537	807,23 sec
Mértékkel el nem látott <b>A</b> - formalizmus	33577	213558	583	791,7 sec
$\Phi$ - formalizmus	33577	45194	25	13,895 sec

2.5. ábra. Számítási paraméterek

A 2.5. első oszlopában az adott potenciálformalizmus neve található. A második oszlopból jól kitűnik hogy mindhárom formalizmusnál ugyanannyi lett a rácselemek száma, ami annyit jelent, az adott feladatot, a geometriát ennyi tetraéderre osztottam fel. A harmadik oszlopban az ismeretlenek száma látható. Azért van ilyen különbség a két **A**-formalizmus ismeretlenszáma között, mert a mértékkel ellátott **A**-formalizmus csomóponti elemes, és egy tetraédernek 4 csomópontja van,  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , míg a mértékkel el nem látott **A**-formalizmus élelemes, és egy tetraédernek 6 éle van,  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ , ez látható a 2.6.-os ábrán. A  $\Phi$ -formalizmusnál pedig azért ilyen alacsony



2.6. ábra. A tetraéder felépítése

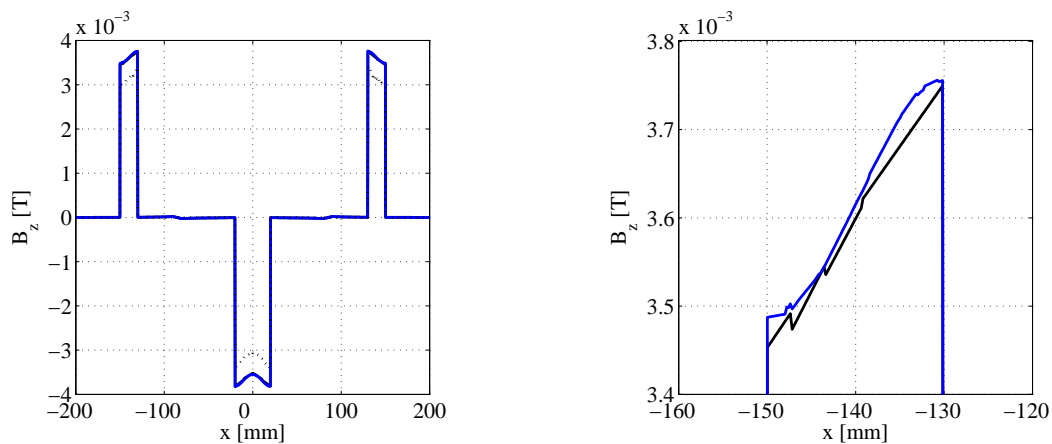
az ismeretlenek száma, mivel az skalár, és csak egy ismeretlen van egy csomópontban. Az iteráció száma azt jelenti hogy mennyiszor futtatta újra le az adott megoldót a feladaton, míg egy bizonyos hibahatárt el nem érte. Ennél az látszik hogy az élelemes  $\mathbf{A}$ -formalizmus megoldásánál többször kellett iterálni, de a következő oszlopból viszont az látszik hogy ennek ellenére is gyorsabb volt mint a csomóponti elemes  $\mathbf{A}$ -formalizmus. Tehát a táblázatból jól látszik, hogy a várt eredmények kijöttek, mert a  $\Phi$ -formalizmus eredményeiből látszik hogy mennyire gyors, és a másik két  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál is kijöttek a várt eredmények, az hogy az élelemes gyorsabb mint a csomóponti elemes.

### 2.4.2. Összehasonlítás a kapott eredmények alapján

A 2.7. ábrán a három különböző potenciálformalizmus segítségével kapott mágneses térerősség  $z$ -komponensét lehet látni.

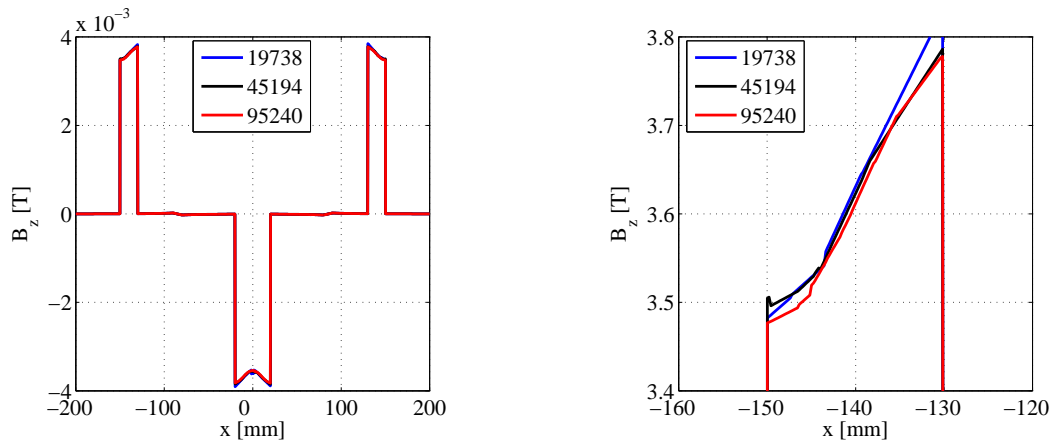
Az ábrákon a vonalak a következő formalizmushoz tartoznak:

- A fekete pontvonal a mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmus,
- A fekete vonal a mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmus,
- A kék vonal a mértékkel el nem látott  $\Phi$ -formalizmus.



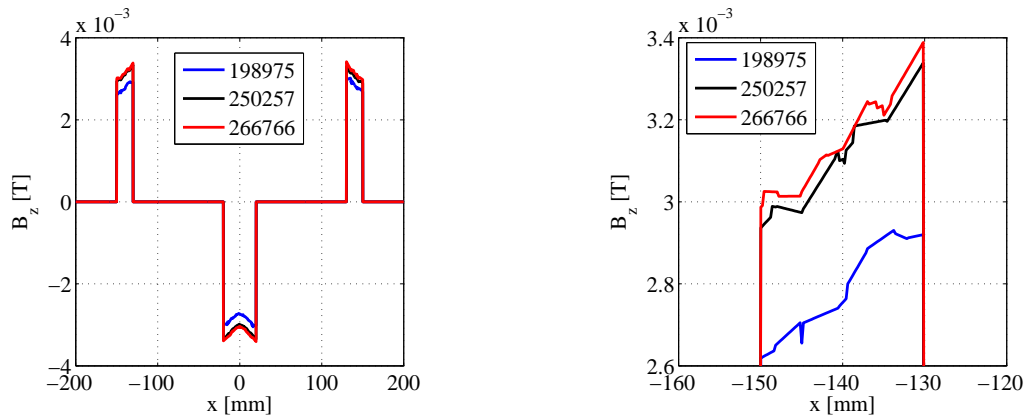
2.7. ábra. A mágneses indukciók alakulása a próbatestben

A 2.7.-es ábra jobb oldali képén a bal oldali kép egy része van kinagyítva, hogy lehessen a kicsi különbséget a két formalizmus eredménye között látni hogy van a két formalizmus között különbség. A jobb oldali ábránál helyesen jött ki a végeredmény, mert elméletben a  $\Phi$ -formalizmusnak kicsivel a mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmus felett kell lennie [2]. A bal oldali ábrán a mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmus végeredménye rossznak tűnhet, mivel kisebb mint a másik két eredmény. Az igazság az hogy egyik sem a tökéletes megoldás, hanem közelítő megoldások, és ehhez még hozzájön hogy nem a lehető legjobb rácsot használtam a szimulációk során. Elméletben mind a mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál, mind a  $\Phi$ -formalizmusnál minél jobb rácsot használok, (nagyobb az ismeretlenek száma) annál jobban megközelíti a helyes eredményt, és ezen két formalizmus esetében ez az eredmény csökkenését jelenti. Ez látható a 2.8.-as ábrán a  $\Phi$ -formalizmus esetére. Az ábrán feltüntetettem az ismeretlene számát. Míg a mértékkel



2.8. ábra. A  $\Phi$ -formalizmus megoldásai

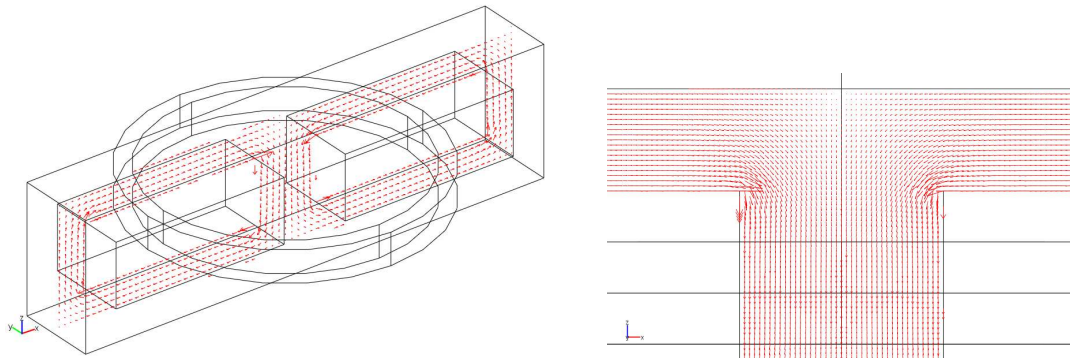
ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál minél jobb rácsot használok, minél több ismeretlennel, ez is annál jobban közelít a jó megoldáshoz, de itt a végeredmény nőni fog. Ez látható a 2.9.-es ábrán.



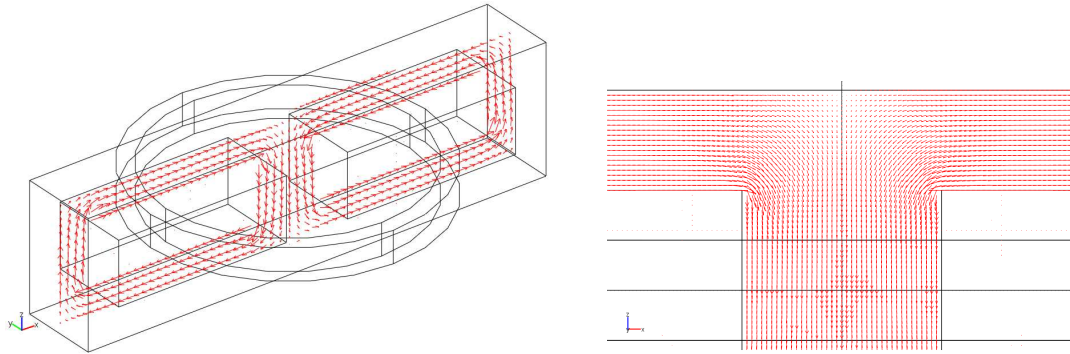
2.9. ábra. Mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmus megoldásai

Az ábrán az ismeretlenek száma is látható, és jól kitűnik hogy tényleg nő a  $\mathbf{B}_z$  értéke minél több az ismeretlen, vagyis minél jobban berácsozom a szimulált geometriát annál magasabb értéke lesz a  $\mathbf{B}$  térerősségnek. A jobb oldali ábrán, ez látható kinagyítva. Elvileg a mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmus megoldásai és a  $\Phi$ -formalizmus megoldásai egyszer találkoznak, de az elméletileg a végtelen jó rácshoz közeledve történne meg, ami nem lehetséges, már a bevezőben is említett hihetetlen gépigény miatt.

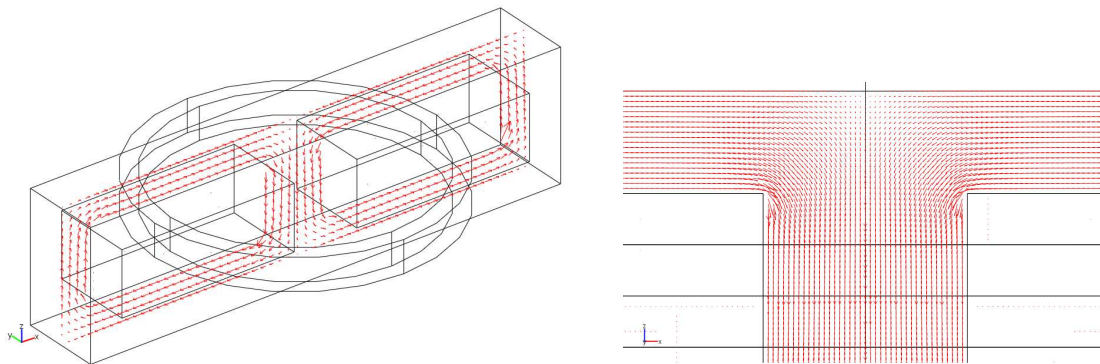
A következőkben pedig a szimulált eredmények láthatók, a vasban létrejött  $\mathbf{B}$  mágneses indukció. A jobb oldali kép, a vasdarab középső részének kinagyítása, hogy jobban lehessen látni az eltérést, mert nagy eltérések nincsenek a kijött eredmények között, csak egy-egy apróság, ami normális mert a feladat ugyanaz, csak a formalizmus más. Ilyen apróság a mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál a 2.10.-es ábrán, hogy ahol kanyarodnak a mágneses indukcióvonalak, ott nem egészen jó a megoldás. De ezen kívül szinte különbséget nem lehet észrevenni. Meg természetesen a mágneses indukció nagyságánál kijött eredménykülönbség, de az képen keresztül nem okoz jelentős, látható különbséget. Esetleg annyi különbséget, hogy a mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál a 2.10.-es ábrán,



2.10. ábra. A mértékkel ellátott  $\mathbf{A}$ -formalizmus megoldása



2.11. ábra. A mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmus megoldása



2.12. ábra. A  $\Phi$ -formalizmus megoldása

a kép tetejénél megritkulnak a mágneses indukcióvonalak, de ez a már ismertetett okok miatt van, amely egy jó számítógéppel korrigálható. A  $\Phi$ -formalizmusnál, a 2.11.-es ábrán, meg majdnem ugyanzt látjuk mint a mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál 2.12.-es ábra, bár a  $\Phi$ -formalizmusnál is lehet látni hogy ahol az erővonalak kanyarodnak van ott némi hiba, de ennél a formalizmusnál, nem jelent nagy problémát jobb rácsot használni. Szerintem a három formalizmus közül a mértékkel el nem látott  $\Phi$ -formalizmus adja a legjobb megoldást, vagy legalábbis a gyorsaságával, és alacsony gépigényével a legjobbnak mondható a másik kettővel szemben.

## 3. fejezet

# Örvényáramú tér

### 3.1. Általánosságban az örvényáramú térről

Az örvényáramú térnél a mágneses és elektromos jelenségek már kapcsolatban vannak, mert figyelembe vesszük az időbeni változást,  $\partial/\partial t \neq 0$ , és az időben változó mágneses térerősség elektromos teret hoz létre, de az eltolási áramsűrűséget még elhanyagoljuk a használt frekvenciatartomány miatt  $|\mathbf{J}| \gg |\partial\mathbf{D}/\partial t|$ .

Az kvázistacionárius tér egyenletei a következők:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mathbf{H}, & \text{levegőben,} \\ \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, & \text{lineáris mágneses anyagban,} \\ \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), & \text{nemlineáris mágneses anyagban,} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.5)$$

Az örvényáramú térnél már függ az időtől a forrás áramsűrűség  $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, t)$ , ami időtől függő mágneses térerősséget  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  és időtől függő mágneses indukciót  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  hoz létre, ami a (3.2)-es egyenlet alapján elektromos teret hoz létre.

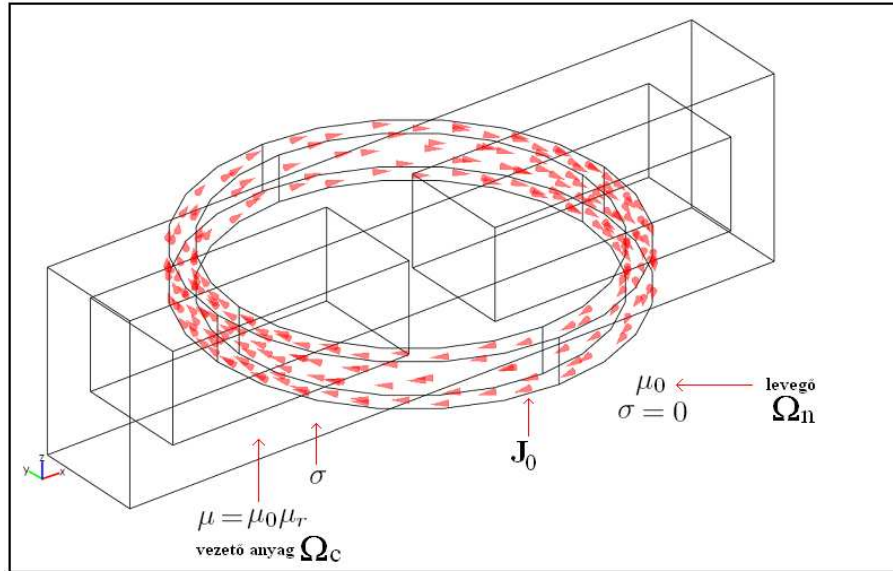
Az örvényáramú tér egyenleteit megközelítőleg az összes frekvenciatartományban lehet használni, amiben van fém vagy fémes szerkezet. Ezeket az egyenleteket használjuk akkor is, mikor villamos gépek veszteségeit számoljuk [7], vagy bizonyos roncsolásmentes anyagvizsgálatoknál alkalmazzák.

### 3.2. Az örvényáramú tér feladata

Amikor van időbeni változás az elektromos és mágneses terek csatoltak, mert az időben változó mágneses tér elektromos teret hoz létre, és ez okozza az örvényáram áramlását a vezető anyagban.

A 3.1.-es ábrán az örvényáramú feladat felépítése látható. A levegő része, amit  $\Omega_n$ -





3.1. ábra. Örvényáramú tér feladat elrendezése

nel jelöltem az örvényáramtól mentes rész, ebben a részben van a tekercs is, ahol a stacionárius mágneses tér egyenleteit használjuk:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0, \quad \Omega_n \text{ tartományban,} \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \Omega_n \text{ tartományban,} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \text{ vagy } \mathbf{H} = \nu_0 \mathbf{B}, \quad \Omega_n \text{ tartományban.} \quad (3.8)$$

Alacsony frekvencián, közönséges vezető anyagnál az eltolási áramsűrűség változásából származó áram  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  nagyságrendekkel kisebb lesz, mint a vezetési áramsűrűség  $\mathbf{J}$ , ezért elhanyagoljuk.

$$|\mathbf{J}| \gg |\partial \mathbf{D} / \partial t|. \quad (3.9)$$

A 3.1.-es ábrán az  $\Omega_c$ -vel jelöltem a vezető anyagot. A vezető anyagra alkalmazzuk a kvázistacionárius Maxwell-egyenleteket:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \Omega_c \text{ tartományban,} \quad (3.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \Omega_c \text{ tartományban,} \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \Omega_c \text{ tartományban,} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, & \text{lineáris mágneses anyagban, } \Omega_c, \\ \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), & \text{nemlineáris mágneses anyagban, } \Omega_c, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \Omega_c \text{ tartományban.} \quad (3.14)$$

Ha vesszük a 3.10.-es egyenlet divergenciáját, a létrejövő áramsűrűség azon tulajdonságát kapjuk meg, hogy önmagában záródik, vagyis az örvényáramnak nincs forrása,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.15)$$

### 3.3. Örvényáramú tér potenciálformalizmusai

Az örvényáramú rész leírására alapvetően két potenciálfüggvényt használunk, az egyik az  $\mathbf{T}$  áramvektorpotenciál, a másik a  $\mathbf{A}$  mágneses vektorpotenciál. A következőkben bemutatok két potenciálformalizmust, amely nemcsak az örvényáramú részre vonatkozik, hanem a komplett örvényáramú feladatra, tehát ezek olyan potenciálformalizmusok, ahol párosítjuk a stacionárius és örvényáramú tér potenciálformalizmusait. Az egyik ilyen potenciálformalizmus a mértékkel ellátott  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus, a másik a mértékkel ellátott  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus.

#### 3.3.1. A mértékkel ellátott $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus

A  $\mathbf{A}$  mágneses vektorpotenciált, mindkét részben, az örvényáramúban, és az örvényárammentes részben is használjuk. Ezért a mágneses vektorpotenciálnak folytonosnak kell lennie az érintkező  $\Gamma_{nc}$  felületen, a örvényáramú, és örvényárammentes rész között. A mágneses vektorpotenciál tangenciális komponense akkor lesz folytonos, amint a mágneses indukció normális komponense folytonos lesz. A mágneses térerősség tangenciális komponense, hogy folytonos legyen, elő kell írni egy határfeltételt  $\Gamma_{nc}$ -re. A (2.17) Coulomb mértékek itt is előkell írni implicit alakjában.

A mértékkel ellátott  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus egyenletei a következők:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla(\nu \nabla \cdot \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V = 0, \quad \Omega_c \text{ tartományban,} \quad (3.16)$$

$$-\nabla \cdot \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V \right) = 0, \quad \Omega_c \text{ tartományban,} \quad (3.17)$$

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla(\nu \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0, \quad \Omega_c \text{ tartományban.} \quad (3.18)$$

Az egyenleteken kívül szükség van még peremfeltételekre is. A  $\Gamma_B$  peremfeltétel a külső lezáráshoz kell, ami körül fogja a feladatot, úgymond ez a levegő széle. A  $\Gamma_{nc}$  pedig az örvényáramú és örvényárammentes rész közötti határfelületre vonatkozik.

A mértékkel ellátott  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus itt használt peremfeltételei a következők:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \alpha, \quad \Gamma_B \text{ peremen,} \quad (3.19)$$

$$\nu \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen,} \quad (3.20)$$

$$(\nu \nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}_c + (\nu \nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}_n = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen,} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{n}_c \times \mathbf{A} + \mathbf{n}_n \times \mathbf{A} = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen,} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_c + \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_n = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen,} \quad (3.23)$$

$$\nu \nabla \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}_c + \nu \nabla \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}_n = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen,} \quad (3.24)$$

$$-\left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen.} \quad (3.25)$$

Végezetül az  $\mathbf{A}$ ,  $V$ – $\mathbf{A}$ -formalizmus gyenge alakja, ami eleget tesz a Coulomb-mértéknek a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} [\nu(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu \nabla \cdot \mathbf{W} \nabla \cdot \mathbf{A}] \cdot d\Omega + \int_{\Omega_c} \mathbf{W} \cdot \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega_n} [\nu(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu \nabla \cdot \mathbf{W} \nabla \cdot \mathbf{A}] \cdot d\Omega \\ & = \int_{\Omega_n} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega + \int_{\Gamma_{Hn}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{K} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega_c} \nabla \mathbf{N} \cdot \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega = 0. \quad (3.27)$$

### 3.3.2. A mértékkel ellátott $\mathbf{T}$ , $\Phi$ – $\Phi$ -formalizmus

Ennél a potenciálformalizmusnál is  $\mathbf{T}_0$  rotációjaként reprezentáljuk a  $\mathbf{J}_0$  forrás áramsűrűséget. A  $\mathbf{T}_0$  Coulomb-mértéket itt sem kell előírni a mértékkel el nem látott  $\mathbf{A}$ -formalizmusnál leírt dolgok miatt. Az ide vonatkozó egyenletek a (2.25)-ös, a (2.26)-os és a (2.27)-es.

A  $\Phi$  redukált mágneses skalárpotenciált használjuk az örvényárammentes  $\Omega_n$  és az örvényáramú  $\Omega_c$  résznél is. A mágneses skalárpotenciál folytonos a  $\Gamma_{nc}$  peremen, a két tartomány között. A mágneses térerősséget  $\Omega_n$  az örvényárammentes részben és az  $\Omega_c$  örvényáramú résznél a következő egyenletekből kapjuk

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \nabla \Phi, \quad \Omega_c\text{-ben}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T} - \nabla \Phi, \quad \Omega_c\text{-ben}. \quad (3.29)$$

A mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos, azért mert skalárpotenciált használunk, ami folytonos a két tartomány között, és azért, mert az áramvektorpotenciál  $\mathbf{T}$  tangenciális komponense egyenlő nullával, ami azért lesz nulla mert előírunk rá egy Dirichlet típusú határfeltételt.

A mértékkel el nem látott  $\mathbf{T}$ ,  $\Phi$  –  $\Phi$ -formalizmus egyenletei a következők:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T} \right) - \nabla \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{T} \right) + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{T}_0}{\partial t}, \quad \Omega_c \text{ tartományban}, \quad (3.30)$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{T} - \mu \nabla \Phi) = -\nabla \cdot (\mu \mathbf{T}_0), \quad \Omega_c \text{ tartományban}, \quad (3.31)$$

$$-\nabla \cdot (\mu \nabla \Phi) = -\nabla \cdot (\mu \mathbf{T}_0), \quad \Omega_n \text{ tartományban}. \quad (3.32)$$

Mint már említettem kell néhány peremfeltétel a  $\Gamma_{nc}$  peremre, hogy a folytonossági egyenletek teljesüljenek, és még ehhez jönnek a külső peremre felírt  $\Gamma_B$  peremfeltételek,

$$\mu \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = b + \mu \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n}, \quad \Gamma_B \text{ peremen}, \quad (3.33)$$

$$\Phi \text{ folytonos a } \Gamma_{nc} \text{ peremen}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen}, \quad (3.35)$$

$$(\mu \mathbf{T}_0 - \mu \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n}_n + (\mu \mathbf{T}_0 + \mu \mathbf{T} - \mu \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n}_c = 0, \quad \Gamma_{nc} \text{ peremen}. \quad (3.36)$$

Végezetül a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus gyenge alakja, ami az egyenletekből és a Neumann típusú peremfeltételekből áll a következő:

$$\int_{\Omega_c} \left[ \frac{1}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{W} \cdot (\nabla \times \mathbf{T}) + \mu \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} - \mu \mathbf{W} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] d\Omega = - \int_{\Omega_c} \mu \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_c} (\nabla \mathbf{N}) \cdot \left( \mu \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega_c} (\nabla \mathbf{N}) \cdot \left( \mu \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega_n} (\nabla \mathbf{N}) \cdot \left( \mu \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) d\Omega \\ & = \int_{\Omega_c} (\nabla \mathbf{N}) \cdot \left( \mu \frac{\partial \mathbf{T}_0}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega_n} (\nabla \mathbf{N}) \cdot \left( \mu \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_B} \mathbf{N} \frac{\partial b}{\partial t} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.38)$$

### 3.4. A különböző formalizmusok eredményei

Ebben a fejezetben az előzőleg bemutatott két potenciálformalizmus, az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus, és a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus eredményeit mutatom be. Itt is annak kell kijönnie, hogy a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus a gyorsabb, és kisebb gépigényű. Sajnos itt is jelentkezik az a "probléma", hogy az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus alulról közelíti a jó eredményt, míg a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus felülről, és az örvényáramú feladatnál már igen nagy gépigény szükséges a feladatot úgy megoldani, hogy a két eredmény megközelítse egymást, mint a stacionárius példánál.

#### 3.4.1. Összehasonlítás a számítási paraméterek alapján

	Rácselem száma	Ismeretlen száma	Iteráció száma	Megoldás ideje
Mértékkel ellátott $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ - formalizmus	26703	123137	2357	8280,5 sec
Mértékkel ellátott $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ - formalizmus	26703	118825	143	1297,4 sec

3.2. ábra. Számítási paraméterek

A 3.2. első oszlopában látható a tetraéder rácselemek száma. Itt azért kevesebb a rácselemek száma, mint a stacionárius példánál, mert a feladatok sokkal robusztusabbak. Mindkét feladatnál ugyanazt a rácsot használtam. Az ismeretlenek számánál jól kitűnik, hogy az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál több ismeretlen van, annak ellenére is hogy a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmusnál több a rácselem. Az iterációk száma önmagért beszél, nagyságrendi különbség van közöttük. A megoldás időnél is jól látszik mennyivel gyorsabb  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus, még annak ellenére is hogy az ismeretlenek számában nincs hatalmas eltérés. Itt is a várt eredményeket kaptuk, vagyis a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus jobb a számítási paraméterek alapján.

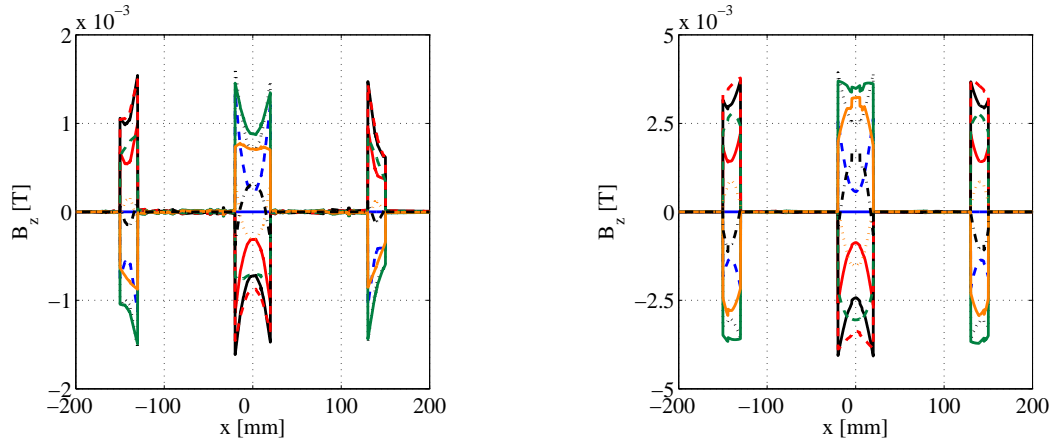
#### 3.4.2. Összehasonlítás a kapott eredmények alapján

A továbbiakban a két képen az időben változó  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  mágneses térerősség  $z$ -komponensét lehet látni. Itt látható a kijött eredményeknél, hogy a  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus alulról

közelíti a jó megoldást, minél jobb rácsot használunk, a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus pedig felülről közelíti, fokozatosan csökken minél jobb rácsot használunk.

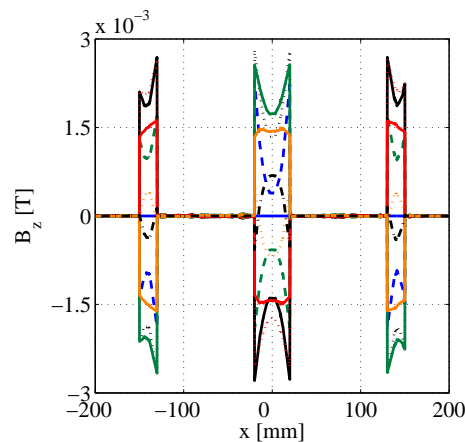
Az ábrák a következő formalizmushoz tartoznak:

- A bal oldali a  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál kijött mágneses indukció ábrája
- A jobb oldali a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmusnál kijött mágneses indukció ábrája



3.3. ábra. Az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál és a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmusnál a mágneses indukció

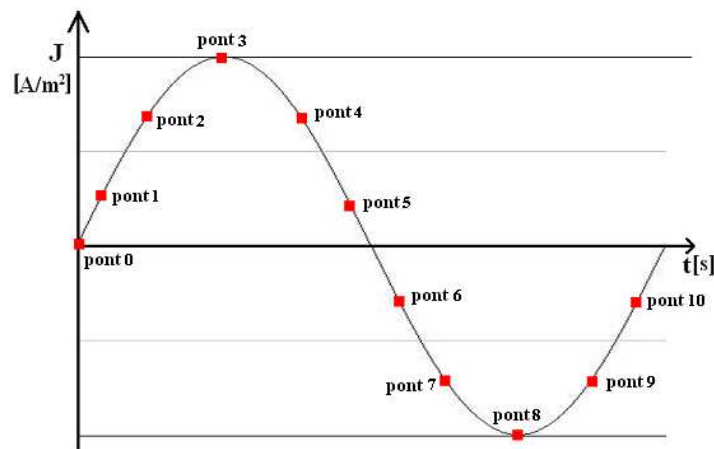
De a 3.3.-as ábra jól mutatja hogy ilyen rácsnál az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmus milyen messze van a jó megoldáshoz, közel fele akkora, mint amekkorának lennie kellene. Ez is jól reprezentálja azt hogy a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus gépigény szempontjából sokkal jobb, mivel az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál csak igen magas rácselem, és ismeretlen szám esetén kaphatunk jó megoldást. A 3.4.-es ábrán egy másik megoldás látható az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmussal, viszont ennél messze magasabb volt az ismeretlenek száma, hosszabb a szimuláció ideje.



3.4. ábra. Az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmussal a mágneses indukció, jobb rács alkalmazásával

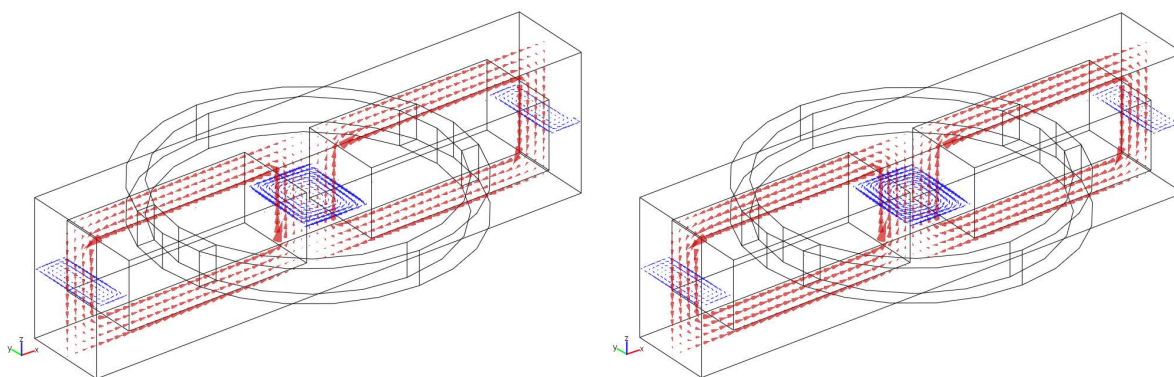
A 3.3.-as ábrán a szinuszosan változó mágneses indukciót láthatjuk. A 3.5.-ös ábrán a szinuszosan változó forrásáramsűrűség egy periódusa látható, és ezen perióduson belül, mely

pontokra oldottam a feladatot. A 3.3.-as ábránál ezen tizenegy pontnál lévő időpillanatokban van megoldva a feladat. A méretük, és alakjuk is azért ilyen különböző, mert mindegyik pontnak mások a paraméterei, vagy az időben más, vagy az amplitúdója kisebb-nagyobb. A következő nyolc ábrán a nyolc különböző időpillanat látható. A kék nyilak a



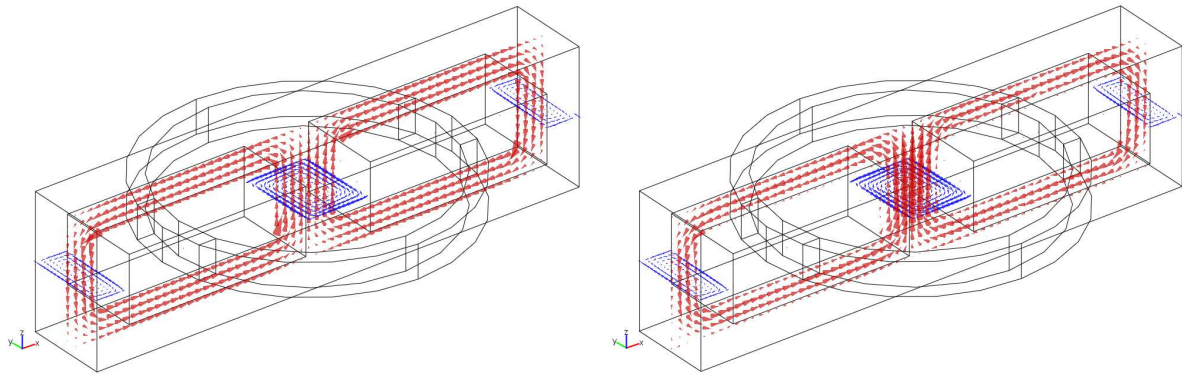
3.5. ábra. A szinuszosan változó forrásáramsűrűség egy periódusa

szinuszosan változó örvényáramot mutatják, a piros nyilak pedig a szinuszosan változó mágneses indukciót. Ezeken a képeken már jobban lehet látni a két térmennyiség ( $\mathbf{B}$  és  $\mathbf{J}$ ) változását, és hogy tényleg periódikusan változnak, mert az első négy pontnak 3.6.-os ábra és a 3.7.-es ábra, elméletileg a második négy pont 3.8.-as és a 3.9.-es ábra éppen az inverze lesz.

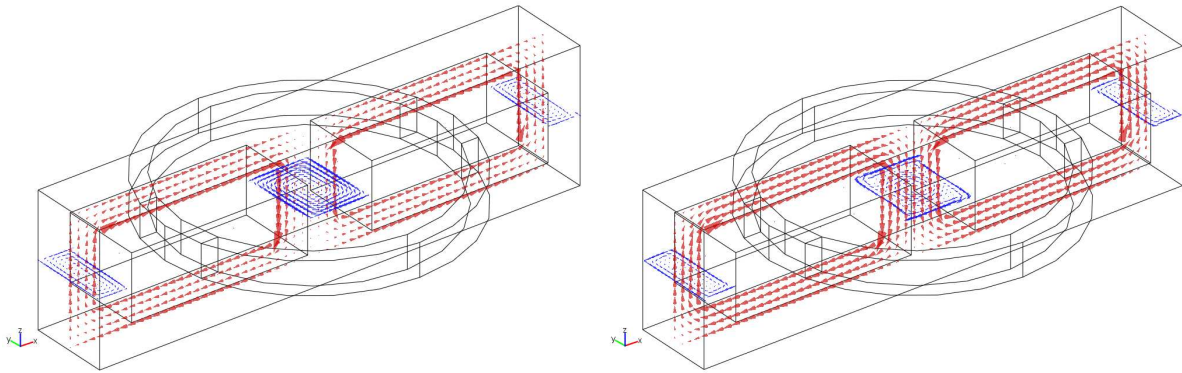


3.6. ábra. Az első (pont1), és a második (pont2) pont

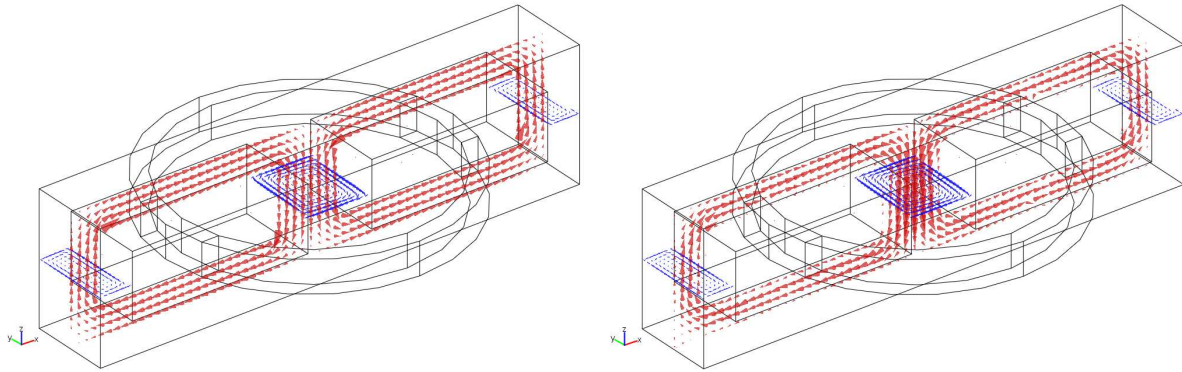
Ha jól megnézzük tényleg kijön jól az egy periódus, mert a pont1-nek inverze a pont6, a pont4-nek inverze a pont9, és a pont5-nek inverze a pont10. A másik két ábrának is megvan a párja, a pont2-nek a pont7, és a pont8-nak a pont3.



3.7. ábra. A negyedik (pont4), és az ötödik (pont5) pont



3.8. ábra. A hatodik (pont6), és a nyolcadik (pont8) pont



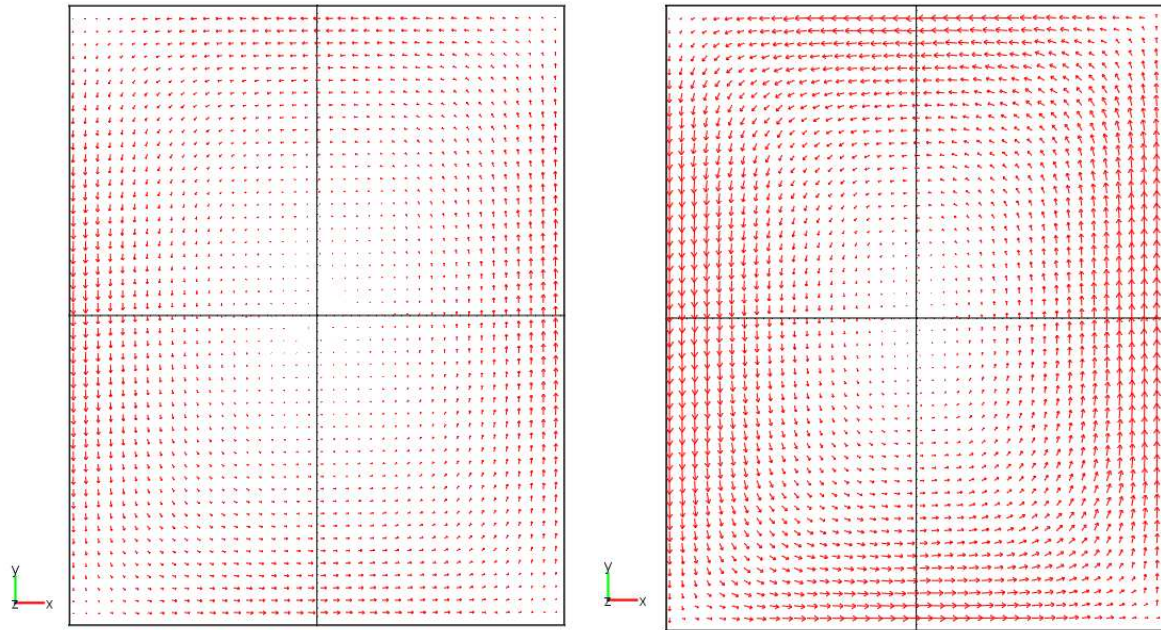
3.9. ábra. A kilencedik (pont9), és a tizedik (pont10) pont

A 3.10.-es ábrán a két kép a két különböző potenciálformalizmusnál kijött örvényáramok  $y$ -komponensét mutatja, a próbatest közepében.

Az ábrák a következő formalizmushoz tartoznak:

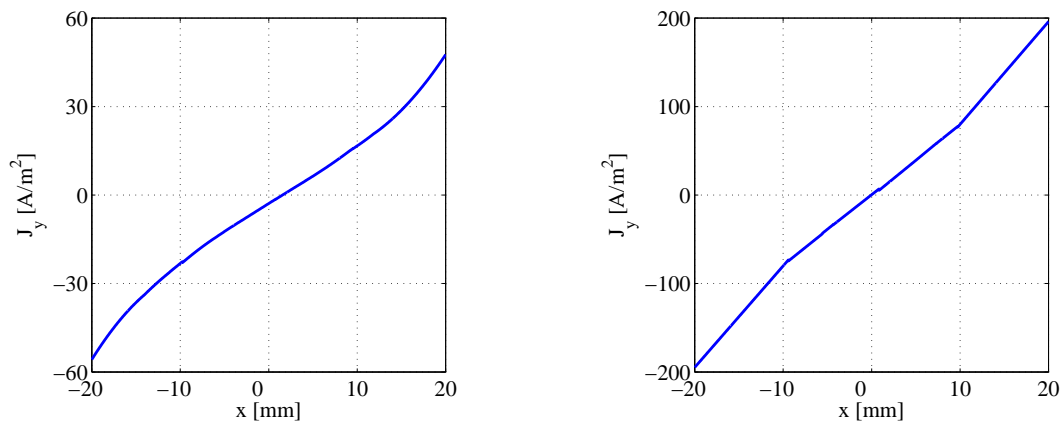
- A bal oldali a  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál kijött örvényáramot ábrája.
- A jobb oldali a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmusnál kijött örvényáramot ábrája.

A 3.10.-es ábrán, a két kép között a lényeges különbség hogy az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál sokkal kisebb lesz az örvényáram. Ennek oka ugyanaz, mint a mágneses indukciónál.



3.10. ábra.  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál és a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmusnál az örvényáramok

Ezen példán keresztül jól lehet látni, hogy mennyivel jobb megoldást ad gyenge rács esetén is a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmus.



3.11. ábra. Az  $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ -formalizmusnál és a  $\mathbf{T}, \Phi - \Phi$ -formalizmusnál a szkin-effektus

Mint már más fejezetben említettem én egy vasdarabon szimuláltam, amelynek relatív permeabilitásnak  $\mu_r = \mu_0 \cdot 1000$ -et vettem. A vezetőképességet  $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$ -nek vettem, a szimuláció frekvenciáját pedig  $f = 0.01 \text{Hz}$ -nek. Azért kellett ilyen alacsony frekvenciát választanom, hogy az áramsűrűség ne szoruljon ki nagyon a peremre. A skin-mélység, vagy behatolási-mélység pontos értékének meghatározásához a következő összefüggést használjuk [6]:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}}. \quad (3.39)$$



Ezen képlet alapján nálam a behatolási-mélység  $\delta = 0,0149\text{m}$ . Én csakis a frekvenciát változtattam, addig amíg olyan nagy nem lett a behatolási-mélység, aminél már nem zavaró körülmény a szkinhatás. Változtathattam volna a relatív permeabilitást is, de én ragaszkodtam hozzá hogy vasat szimuláljak. De általában az ilyen szimulációkat alumíniummal szokták végezni, mert annak a relatív permeabilitása egy, és így lehet a frekvenciát egy bizonyos határig növelni, anélkül, hogy figyelembe kellene venni a szkinhatást. A 3.11.-es ábrán pont ez látható, az áramsűrűség változása a vezető anyag belsejében egyenletes árameloszlás esetén. A képeken jól látható, hogy az áramsűrűség a vezető tengelyében zérus, ettől kifelé az átmérővel lineárisan nő, és a vezető anyag felületén éri el a maximális értékét. Ez a jelenség a frekvencia növekedésével egyre hangsúlyozottabb, míg a végén elérünk olyan frekvenciatartományba ahol az áramsűrűség már a felületen halad, és a vezető belsejében az áramsűrűség zérus lesz.

# Irodalomjegyzék

- [1] Bíró Oszkár és K.R. Richter, CAD in Electromagnetism, in P.W. Hawkes, ed., Advances in Electronics and Electric Physics, Vol. 82 (Academic Press, 1991) 1-96
- [2] Bíró Oszkár, Edge Element Formulations of Eddy Current Problems, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 169, 1999, pp. 391-405.
- [3] Kuczmann Miklós, Iványi Amália, Neural network based hysteresis model in electromagnetic field computation, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2007. Lektorálás alatt.
- [4] Simonyi Károly, Zombory László, Elméleti Villamosságtan, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000
- [5] Simonyi Károly, Villamosságtan, Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1964
- [6] Simonyi Károly, Műszaki fizika. Villamosságtan. II. kötet. A makro- és mikrofizika kapcsolata. Gyakorlati villamosságtan, Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1957
- [7] Július Saitz, Magnetic Field Analysis of Electric Machines Taking Ferromagnetic Hysteresis Into Account, Electrical Engineering Series, No. 107, Acta Polytechnica Scandinavica, Helsinki University Of Technology, 2001
- [8] Iványi Amália, Folytonos és diszkrét szimulációk az elektrodinamikában, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003
- [9] Dr. Ständeisky István, Elektrodinamika, Universitas-Győr Kht., Győr, 2006